

基于 TOPSIS 的最大贴近度的最优组合预测模型及其性质

王自成, 陈华友, 韩冰, 朱家明

(安徽大学数学科学学院, 安徽合肥 230601)

摘要: TOPSIS 方法是一种常见的决策方法. 将其作为一种新的预测精度的准则, 引入正理想点序列、负理想点序列等概念, 构建了基于 TOPSIS 的最大贴近度准则的最优组合预测模型. 针对该模型, 定义了新的非劣性组合预测、优性组合预测、冗余预测方法、预测方法优越等概念, 研究了模型的若干数学性质, 从理论上阐述了最优组合预测的优越性. 最后给出实例分析, 并和其他组合预测模型进行了对比分析, 结果表明提出的组合预测模型是可行有效的.

关键词: 逼近理想解排序法; 贴近度; 组合预测; 数学性质

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A doi: 10.3969/j.issn.0253-2778.2019.09.008

引用格式: 王自成, 陈华友, 韩冰, 等. 基于 TOPSIS 的最大贴近度的最优组合预测模型及其性质[J]. 中国科学技术大学学报, 2019, 49(9): 751-761.

WANG Zicheng, CHEN Huayou, HAN Bing, et al. An optimal combination forecasting model based on maximum closeness of TOPSIS and its properties[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2019, 49(9): 751-761.

An optimal combination forecasting model based on maximum closeness of TOPSIS and its properties

WANG Zicheng, CHEN Huayou, HAN Bing, ZHU Jiaming

(School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230601, China)

Abstract: Technique for order preference by similarity to ideal solution (TOPSIS) is a common decision-making method. Here it was used as a new criterion for forecasting accuracy. Based on the concepts of positive ideal point sequence and negative ideal point sequence, the optimal combination forecasting model was constructed based on the criterion of maximizing closeness degree in the TOPSIS model. Based on this model, some new concepts were defined, such as the non-inferior combination forecasting, superior combination forecasting, redundant forecasting method and dominant forecasting method. Mathematical properties of this model were studied, in which the advantages of optimal combination forecasting were expounded theoretically. Finally, an example was given and was compared with other combined forecasting models. The results show that the combined forecasting model is feasible and effective.

Key words: TOPSIS; closeness degree; combination forecasting; mathematical properties

收稿日期: 2018-12-25; **修回日期:** 2019-04-10

基金项目: 国家自然科学基金(71871001, 71771001, 71701001, 71501002)资助.

作者简介: 王自成, 男, 1995年生, 硕士生. 研究方向: 运筹与管理. E-mail: 877871622@qq.com

通讯作者: 陈华友, 博士/教授. E-mail: huayouc@126.com

0 引言

古人云：“凡事预则立，不预则废”。这正是对预测重要性的经验总结。在实际预测中，预测对象往往是由多种不确定性因素构成的复杂系统。单项预测模型只能从一个角度利用信息源或者设置固定的函数形式构建模型，这会导致信息的广泛性不够或者模型设定不合理造成偏差等，单项预测模型可能会产生较大的系统预测误差，从而带来预测风险，因而单项预测存在一定的缺陷。

实际上，不同的单项预测方法由于利用多种不同的信息源，它们能够从各个角度反映预测对象的发展趋势。这些信息源之间是相互联系和相互补充的。因此，Bates 和 Granger 首先提出了组合预测方法的概念^[1]，组合预测方法就是以特定的加权算术平均或者加权几何平均等形式将各个单项预测方法进行集结，获得组合预测的结果。预测的理论和实践表明，组合预测一般能提高预测的精确度和可靠性。如何求解每个单项预测方法的加权平均的权重系数是组合预测方法最核心的问题。

随着预测学者们的深入研究，组合预测方法的理论和应用取得了大量的成果^[2-4]。文献[5]综述了组合预测模型构建和权系数的计算，并对不确定环境下新的信息集成算子的组合预测模型的构建和有效性理论的研究思路进行了相关分析。在组合预测模型的研究中，刻画预测精度的指标有多种，每种精度指标均有其特点。文献[6]通过极小化组合预测误差平方和建立组合预测模型来确定最优加权系数，文献[7]构建了基于预测有效度的组合预测模型，文献[8]探讨了相应的优性组合预测模型和性质；文献[9]建立了基于相关系数的优性组合预测模型，文献[10]探讨了基于向量夹角余弦的组合预测模型的若干性质。上述在不同准则下的组合预测模型的构建和性质的探讨丰富了组合预测方法理论和应用的成果。但每种组合预测模型因为优化的精度指标函数不同而各有各的特点，甚至同一组合预测模型对不同的预测对象会表现出不同的预测性能，因此，构造新的组合预测模型并确定其中单项预测模型的权重方法还有待丰富和发展。

文献[11]首次引入以最大-最小贴近度为相关性指标的最优组合预测模型。文献[12-15]将诱导有序加权平均(induced ordered weighted averaging, IOWA)算子、诱导广义的 OWA 算子与最大-最小

贴近度结合起来建立新的最优组合预测模型，并论证了模型的有效性。文献[16]通过 TOPSIS (technique for order preference by similarity to ideal solution) 直接定义实际数据为正理想点序列建立非最优组合预测模型，但是该模型没有考虑负理想点序列。实际上，TOPSIS 方法是一种常见的决策方法，其基本思想是通过引入正理想点序列和负理想点序列来定义贴近度。然而，目前尚未见到有相关文献构建基于正、负理想点序列的贴近度的组合预测模型。为此，本文将贴近度作为一种新的预测精度的准则，构建了基于 TOPSIS 的最大贴近度准则下的最优组合预测模型。

本文首次引入正、负理想点序列的概念，并构建了新的组合预测模型。实际上，正、负理想点全都取自各单项预测方法，因此可以充分利用各单项预测方法提供的有效信息，减少了组合预测模型对原始观测值的依赖。文中还定义了新的非劣性组合预测、优性组合预测、冗余预测方法、预测方法优越等概念，探讨模型的若干数学性质，同时给出实例分析。本文试图从理论和应用两个层面来表明所提出的最优组合预测具有一定的优越性。

1 TOPSIS 原理

TOPSIS 方法是 1981 年由 Huang 和 Yoon 提出的一种排序方法^[17]，其在决策领域有着丰富的理论和实践研究成果。近年来，文献[18-21]分别探讨了区间 2 型模糊信息与 TOPSIS 方法相结合的多属性决策模型及其在海洋运输工程中的应用。TOPSIS 方法通过建立某种综合评价指标(一般称为贴近度)来度量比较数列靠近正理想数列与远离负理想数列的程度，主要原理如下：

设有 m 个方案或样本，其在 n 个指标或 n 个时刻形成了比较数列，记为 $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$, $i = 1, 2, \dots, m$ ，构造比较数列的正理想点数列和负理想点数列。设正理想点数列为 $X^+ = (x_1^+, x_2^+, \dots, x_n^+)$ ，其中 x_i^+ 是比较数列中第 i 个分量中的最好值；设负理想点数列为 $X^- = (x_1^-, x_2^-, \dots, x_n^-)$ ，其中 x_i^- 是比较数列中第 i 个分量中的最差值。则比较数列 $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ 分别与正、负理想点数列的距离为

$$S_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{ij} - x_j^+)^2},$$

$$S_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{ij} - x_j^-)^2}, i=1,2,\dots,m \quad (1)$$

为此,定义比较数列 $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ 到正、负理想点数列的贴近度为

$$C_i = \frac{S_i^-}{S_i^+ + S_i^-}, i=1,2,\dots,m \quad (2)$$

TOPSIS 方法认为,一个好的方案,其指标数列应该距正理想点数列最近且距离负理想点数列最远.利用贴近度指标就能对方案或比较数列进行排序,贴近度越大,则对应的方案就越优.

2 基于 TOPSIS 的最大贴近度准则的最优组合预测模型

对同一预测对象的某个指标序列 $\{x_t, t=1,2,\dots,n\}$,存在 m 种单项预测方法对其进行预测,设第 i 种单项预测方法在第 t 时刻的预测值为 x_{it} , $i=1,2,\dots,m, t=1,2,\dots,n$. 设 x_t 为预测对象在 t 时刻的实际值,令

$$\hat{x}_t = \sum_{i=1}^m l_i x_{it} \quad (3)$$

则称 \hat{x}_t 为实际值的组合预测值,其中, l_i 为第 i 种单项预测方法在组合预测中的加权系数.为了使组合预测保持无偏性,加权系数应满足

$$\sum_{i=1}^m l_i = 1, l_i \geq 0, i=1,2,\dots,m \quad (4)$$

预测方法的有效性应该能体现全局时间段上整体精确性.某种预测方法在某个时期有较高的预测精度,但它不一定就有高的预测有效度,只有在所有时期都有高的预测精度时,它才能有高的预测有效度.每种单项预测方法都具有一定的时效性,不同的预测方法在不同的预测时间段有不同的预测效果,总体表现出“时好时坏”的局部特征.由此可见,如果简单地把每种单项预测方法不区分时效地直接组合在一起,这样可能存在局限性.为了利用各种单项预测方法在最精确时刻的信息,根据 TOPSIS 的原理,可定义如下的组合预测的正、负理想点序列.

定义 2.1 令

$$\left. \begin{aligned} x_t^- &= \{x_t^* \mid |x_t^* - x_t| = \max_{1 \leq i \leq m} (|x_{it} - x_t|)\}, \\ x_t^+ &= \{x_t^{**} \mid |x_t^{**} - x_t| = \min_{1 \leq i \leq m} (|x_{it} - x_t|)\} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

则称 $x^- = (x_1^-, x_2^-, \dots, x_n^-)$ 为组合预测的负理想点序列, $x^+ = (x_1^+, x_2^+, \dots, x_n^+)$ 为组合预测的正理想

点序列.

由式(5)的定义可知: x_t^- 表示组合预测模型在第 t 时刻的负理想点,它是 m 种单项预测方法中第 t 时刻的预测值与实际值绝对误差最大的单项预测值;类似地, x_t^+ 表示组合预测在第 t 时刻的正理想点,它是 m 种单项预测方法中第 t 时刻的预测值与实际值绝对误差最小的单项预测值.因此负理想点序列就是在每个时刻预测误差最大的单项预测方法对应的点构成的新的最劣预测序列,正理想点序列就是在每个时刻预测误差最小的单项预测方法对应的点构成的新的最优预测序列.在某些观测期实际值未知的情况,为了减少误差,可以用所有单项预测方法的简单加权平均值代替实际值^[22],这也是对文献[16]直接定义实际值为正理想点序列方法的一种补充.

定义 2.2 称 $e_{it} = x_t - x_{it}$ 为第 i 种预测方法在第 t 时刻的预测误差, $e_t = x_t - \hat{x}_t$ 为第 t 时刻组合预测值的预测误差, $e_{it}^+ = x_t^+ - x_{it}$ 和 $e_{it}^- = x_t^- - x_{it}$ 为第 i 种预测方法在第 t 时刻与正、负理想点序列的预测误差, $e_t^+ = x_t^+ - \hat{x}_t$ 和 $e_t^- = x_t^- - \hat{x}_t$ 分别为第 t 时刻组合预测值与正、负理想点序列的预测误差.称由正理想点序列的预测误差 e_{it}^+ 为元素构成的矩阵 $E^+ = (e_{it}^+)_{m \times n}$ 为正误差信息矩阵,由负理想点序列的预测误差 e_{it}^- 为元素构成的矩阵 $E^- = (e_{it}^-)_{m \times n}$ 为负误差信息矩阵.

由定义 2.2,注意到式(3)和(4),则有

$$\begin{aligned} |e_t^+| &= \left| x_t^+ - \sum_{i=1}^m l_i x_{it} \right| = \\ & \left| \sum_{i=1}^m l_i (x_t^+ - x_{it}) \right| = \left| \sum_{i=1}^m l_i e_{it}^+ \right| \end{aligned} \quad (6)$$

同理可得, $|e_t^-| = \left| \sum_{i=1}^m l_i e_{it}^- \right|$.

定义 2.3 令 $D_i^+ = \sum_{t=1}^n |e_{it}^+|$, $D_i^- = \sum_{t=1}^n |e_{it}^-|$,

且令

$$\left. \begin{aligned} D^+ &= \sum_{t=1}^n |e_t^+| = \sum_{t=1}^n \left| \sum_{i=1}^m l_i e_{it}^+ \right|, \\ D^- &= \sum_{t=1}^n |e_t^-| = \sum_{t=1}^n \left| \sum_{i=1}^m l_i e_{it}^- \right| \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

则称 D_i^+ 和 D_i^- 分别为第 i 种单项预测方法到正、负理想点序列的距离,称 D^+ 和 D^- 分别为组合预测值到正、负理想点序列的距离.

在组合预测问题中,由于预测值到正理想点序

列的距离较近并不意味着预测值到负理想点序列距离较远,因此,下面给出一个综合性的评价指标.

定义 2.4 令

$$C = \frac{D^-}{D^+ + D^-} = \frac{\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^m l_j e_{ij}^- \right|}{\left(\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^m l_j e_{ij}^+ \right| + \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^m l_j e_{ij}^- \right| \right)} \quad (8)$$

$$C_i = \frac{D_i^-}{D_i^+ + D_i^-} = \frac{\sum_{j=1}^m |e_{ij}^-|}{\left(\sum_{j=1}^m |e_{ij}^+| + \sum_{j=1}^m |e_{ij}^-| \right)} \quad (9)$$

则称 C 为组合预测方法的贴近期度, C_i 为第 i 种单项预测方法的贴近期度.

显然,从组合预测方法的贴近期度指标度量预测精度, C 越大表示组合预测方法越有效. 因此从贴近期度角度来确定组合预测的权重系数,就是要极大化贴近期度指标. 于是,基于 TOPSIS 的最大贴近期度的组合预测模型可表示为

$$\max C = \frac{\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^m l_j e_{ij}^- \right|}{\left(\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^m l_j e_{ij}^+ \right| + \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^m l_j e_{ij}^- \right| \right)}$$

s. t. $\sum_{i=1}^m l_i = 1, l_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$ (10)

显然模型(10)是关于权重系数的非线性最优化问题,可用 MATLAB 中的最优化工具箱来求解. 最后求得的解就是基于 TOPSIS 的最大贴近期度的最优组合预测模型的最优权重系数.

3 组合预测模型的若干数学性质

记 $C_{\min} = \min\{C_i, i = 1, 2, \dots, m\}$, $C_{\max} = \max\{C_i, i = 1, 2, \dots, m\}$, 即 C_{\min} 和 C_{\max} 分别为单项预测方法与正、负理想点序列的对应的最小贴近期度和最大贴近期度.

定义 3.1 若 $C(l_1, l_2, \dots, l_m) < C_{\min}$, 则称权重系数 l_1, l_2, \dots, l_m 确定的组合预测模型为劣性组合预测, 若 $C_{\min} \leq C(l_1, l_2, \dots, l_m) \leq C_{\max}$, 则称之为非劣性组合预测, 若 $C(l_1, l_2, \dots, l_m) > C_{\max}$, 则称之为劣性组合预测.

定义 3.2 在基于 TOPSIS 的最大贴近期度的组合预测模型中,若某种单项预测方法最优权重系数为零,则称该单项预测为冗余预测方法.

定义 3.2 表明某种单项预测方法在组合预测模型中不能增加组合预测的贴近期度,表明该种单项预

测方法在组合预测中“没有任何贡献”,提供的只是冗余信息.

定义 3.3 设有 m 种单项预测方法参与组合预测,若最优解中出现冗余方法的个数为 r ,则称比例系数 $k = r/m$ 为组合预测模型的冗余度.

组合预测模型的冗余度越大,反映了参与组合的部分单项预测方法之间存在冗余的信息较多,可以重新考虑选取新的单项预测方法.

定义 3.4 若第 j 种、第 k 种单项预测方法的预测误差满足:

$$|e_{jt}^+| \leq |e_{kt}^+| \text{ 且 } |e_{jt}^-| \geq |e_{kt}^-|, t = 1, 2, \dots, n,$$

则称第 j 种单项预测方法优超第 k 种单项预测方法,当对任意 t 时刻都有严格的不等式成立时,则称第 j 种单项预测方法严格优超第 k 种单项预测方法.

定义 2.2 给出的负误差信息矩阵具有如下性质:

引理 3.1 负误差信息矩阵 $E^- = (e_{ij}^-)_{m \times n}$ 的任意一行元素均为非负数或者均为非正数,即:负误差信息矩阵的任意一行元素具有相同的符号.

证明 设 $e_{1t}^-, e_{2t}^-, \dots, e_{mt}^-$ 为负误差信息矩阵 E^- 的任意的第 t 列, $t = 1, 2, \dots, n$. 现分两种情形,分别用反证法来证.

情形 1 设 $x_{1t}^- - x_t \geq 0$, 则有第 t 列元素必成立 $e_{jt}^- \geq 0, \forall j = 1, 2, \dots, m$.

假设第 t 列存在某个元素 $e_{kt}^- < 0$. 由定义 2.2 知: $e_{kt}^- = x_{1t}^- - x_{kt}$, 则有 $x_{kt} > x_{1t}^-$, 从而有

$$x_{kt} - x_t > x_{1t}^- - x_t \geq 0 \quad (11)$$

注意到式(5),则有

$$x_{1t}^- - x_t = \max_{1 \leq i \leq m} (|x_{it}^- - x_t|) \quad (12)$$

由式(11)与(12)有

$$x_{kt} - x_t > \max_{1 \leq i \leq m} (|x_{it}^- - x_t|),$$

显然 $x_{kt} - x_t$ 为 $|x_{it}^- - x_t|$ ($1 \leq i \leq m$) 的第 k 项,它不可能大于其中的最大值,从而得出矛盾,所以假设不成立.

情形 2 设 $x_{1t}^- - x_t \leq 0$, 则有第 t 列元素必成立 $e_{jt}^- \leq 0, \forall j = 1, 2, \dots, m$.

情形 2 的证明类似于情形 1, 故略.

证毕.

推论 3.1 $\sum_{i=1}^m |l_i e_{it}^-| = \sum_{i=1}^m l_i |e_{it}^-|, \forall t = 1, 2, \dots, n$.

证明 由引理 3.1 知, 负误差信息矩阵 $E^- = (e_{ij}^-)_{m \times n}$ 的任意一行元素具有相同的符号, 不妨设 $e_{ji}^- \geq 0, \forall j = 1, 2, \dots, m$, 注意到权系数满足非负性 $l_i \geq 0$, 从而

$$\sum_{i=1}^m |l_i e_{ij}^-| = \sum_{i=1}^m l_i e_{ij}^- = \sum_{i=1}^m l_i |e_{ij}^-|.$$

对于 $e_{ji}^- \leq 0, \forall j = 1, 2, \dots, m$ 的情形, 同理可证. 即结论成立. 证毕.

定理 3.1 基于 TOPSIS 的最大贴近度的组合预测模型(10)的任一可行解对应的组合预测至少是非劣性组合预测.

证明 设 $L = (l_1, l_2, \dots, l_m)^T$ 为组合预测模型(10)的任一可行解, 则有 $\sum_{i=1}^m l_i = 1, l_i \geq 0$. 注意到 $\sum_{i=1}^n \left| \sum_{i=1}^m l_i e_{it}^+ \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^m l_i |e_{it}^+|$, 且由式(8)和推论 3.1 知, 其对应的组合预测模型的贴近度 C 满足

$$C \geq \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^m l_i |e_{it}^-|}{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^m l_i |e_{it}^+| + \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^m l_i |e_{it}^-| \right)} \quad (13)$$

由式(9)可得

$$\sum_{i=1}^n |e_{it}^-| = C_i \left(\sum_{i=1}^n |e_{it}^+| + \sum_{i=1}^n |e_{it}^-| \right),$$

所以

$$\sum_{i=1}^n |e_{it}^+| = \frac{1 - C_i}{C_i} \sum_{i=1}^n |e_{it}^-| \quad (14)$$

注意到双重求和符号满足可交换性, 结合式(13)和(14)可得

$$C \geq \frac{\sum_{i=1}^m l_i \sum_{t=1}^n |e_{it}^-|}{\left(\sum_{i=1}^m l_i \left(\frac{1 - C_i}{C_i} \sum_{t=1}^n |e_{it}^-| \right) + \sum_{i=1}^m l_i \sum_{t=1}^n |e_{it}^-| \right)} = \frac{\sum_{i=1}^m l_i \sum_{t=1}^n |e_{it}^-|}{\sum_{i=1}^m \frac{l_i}{C_i} \sum_{t=1}^n |e_{it}^-|} \quad (15)$$

因为 $C_{\min} = \min\{C_i, i = 1, 2, \dots, m\}$, 所以 $C_i \geq C_{\min}$, 从而由式(15)得

$$C \geq \sum_{i=1}^m l_i \sum_{t=1}^n |e_{it}^-| / \left(\frac{1}{C_{\min}} \sum_{i=1}^m l_i \sum_{t=1}^n |e_{it}^-| \right) = C_{\min}.$$

即 $C \geq C_{\min}$, 根据定义 3.1 得结论成立, 证毕.

推论 3.2 简单平均组合预测方法至少是非劣性组合预测.

证明 简单平均组合预测方法的权系数向量 $L = (1/m, 1/m, \dots, 1/m)^T$, 它为组合预测模型

(10)的一个可行解, 由定理 3.1 知结论成立. 证毕.

定理 3.2 若基于 TOPSIS 的最大贴近度的组合预测模型(10)的冗余度 $k < (m - 1) / m$, 则其最优解对应的组合预测一定为劣性组合预测方法.

证明 设 $L^* = (l_1^*, l_2^*, \dots, l_m^*)^T$ 为组合预测模型(10)的最优解, $L = (l_1, l_2, \dots, l_m)^T$ 为其某一可行解而不是最优解. 则有

$$\sum_{i=1}^m l_i = 1, l_i \geq 0, \sum_{i=1}^m l_i^* = 1, l_i^* \geq 0, i = 1, 2, \dots, m.$$

组合预测模型(10)目标函数是求最大值, 则有

$$C(l_1^*, l_2^*, \dots, l_m^*) > C(l_1, l_2, \dots, l_m) \quad (16)$$

因为组合预测模型(10)的冗余度 $k < (m - 1) / m$, 所以最优解中至少有两个非 0 分量, 从而 $(1, 0, \dots, 0)^T, (0, 1, \dots, 0)^T, \dots, (0, 0, \dots, 1)^T$ 这 m 个单位列向量分别是组合预测模型(10)的可行解, 而不是最优解, 则由式(16)知

$$\left. \begin{aligned} C(l_1^*, l_2^*, \dots, l_m^*) &> C(1, 0, \dots, 0) = C_1, \\ C(l_1^*, l_2^*, \dots, l_m^*) &> C(0, 1, \dots, 0) = C_2, \\ &\dots \\ C(l_1^*, l_2^*, \dots, l_m^*) &> C(0, 0, \dots, 1) = C_m \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

所以 $C(l_1^*, l_2^*, \dots, l_m^*) > \max\{C_i, i = 1, 2, \dots, m\} = C_{\max}$, 根据定义 3.1 知结论成立.

定理 3.3 设 $C_1 = \max\{C_i, i = 1, 2, \dots, m\}$, 即 C_1 表示 m 种单项预测方法中最大的贴近度, 若存在 $b_t^+ \in (-|e_{it}^+|, |e_{it}^+|)$ 和 $b_t^- \notin (-|e_{it}^-|, |e_{it}^-|), t = 1, 2, \dots, n$, 使得如下 $(2n + 1)$ 的线性方程组

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^m l_i e_{it}^+ &= b_t^+, t = 1, 2, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^m l_i e_{it}^- &= b_t^-, t = 1, 2, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^m l_i &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

存在非负解, 则基于 TOPSIS 的最大贴近度的组合预测模型(10)一定存在劣性组合预测.

证明 设式(18)存在的非负解为 $L^* = (l_1^*, l_2^*, \dots, l_m^*)^T$, 则有

$$\sum_{i=1}^m l_i^* e_{it}^+ = b_t^+, t = 1, 2, \dots, n, \sum_{i=1}^m l_i^* = 1, l_i^* \geq 0.$$

因为 $b_t^+ \in (-|e_{it}^+|, |e_{it}^+|), b_t^- \notin (-|e_{it}^-|, |e_{it}^-|)$, 所以

$$\left| \sum_{i=1}^m l_i^* e_{it}^+ \right| < |e_{it}^+|, \left| \sum_{i=1}^m l_i^* e_{it}^- \right| \geq |e_{it}^-|, t=1,2,\dots,n \quad (19)$$

由式(8),(18),(19)可得

$$C = \sum_{t=1}^n \left| \sum_{i=1}^m l_i^* e_{it}^- \right| / \left(\sum_{t=1}^n \left| \sum_{i=1}^m l_i^* e_{it}^+ \right| + \sum_{t=1}^n \left| \sum_{i=1}^m l_i^* e_{it}^- \right| \right) > \sum_{t=1}^n |e_{it}^-| / \left(\sum_{t=1}^n |e_{it}^+| + \sum_{t=1}^n |e_{it}^-| \right) = C_1 = C_{\max}$$

根据定义 3.1 知结论成立.

定理 3.4 基于 TOPSIS 的最大贴近度的组合预测模型(10)的最优目标函数值是 m 的单调不减函数,即

$$C(l_1, l_2, \dots, l_m, l_{m+1}) \geq C(l_1, l_2, \dots, l_m) \quad (20)$$

式中, $C(l_1, l_2, \dots, l_m)$ 表示 m 个单项预测方法参与组合预测模型(10)对应的最大贴近度, $C(l_1, l_2, \dots, l_m, l_{m+1})$ 表示再增加一个单项预测方法共 $m+1$ 个单项预测方法参与组合预测模型(10)对应的最大贴近度,且增加的方法不改变组合预测模型的正、负理想点.

证明 设 $L = (l_1^*, l_2^*, \dots, l_m^*)$ 为 m 个单项预测方法参与组合预测模型(10)的最优解,则

$$\sum_{i=1}^m l_i^* = 1, l_i^* \geq 0, i=1,2,\dots,m,$$

且有

$$C(l_1^*, l_2^*, \dots, l_m^*) = \sum_{t=1}^n \left| \sum_{i=1}^m l_i^* e_{it}^- \right| / \left(\sum_{t=1}^n \left| \sum_{i=1}^m l_i^* e_{it}^+ \right| + \sum_{t=1}^n \left| \sum_{i=1}^m l_i^* e_{it}^- \right| \right).$$

同理,设 $L = (\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_m, \bar{l}_{m+1})$ 为 $m+1$ 个单项预测方法参与组合预测模型(10)的最优解,则 $\sum_{i=1}^{m+1} \bar{l}_i = 1, \bar{l}_i \geq 0, i=1,2,\dots,m+1$,且有

$$C(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_m, \bar{l}_{m+1}) = \sum_{t=1}^n \left| \sum_{i=1}^{m+1} \bar{l}_i e_{it}^- \right| / \left(\sum_{t=1}^n \left| \sum_{i=1}^{m+1} \bar{l}_i e_{it}^+ \right| + \sum_{t=1}^n \left| \sum_{i=1}^{m+1} \bar{l}_i e_{it}^- \right| \right),$$

令 $L = (l_1^*, l_2^*, \dots, l_m^*, 0)^T$, 显然 L 为 $m+1$ 个预测方法的组合预测模型(10)的可行解,则

$$C(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_m, \bar{l}_{m+1}) \geq C(l_1^*, l_2^*, \dots, l_m^*, 0) = \sum_{t=1}^n \left| \sum_{i=1}^m l_i^* e_{it}^- \right| / \left(\sum_{t=1}^n \left| \sum_{i=1}^m l_i^* e_{it}^+ \right| + \sum_{t=1}^n \left| \sum_{i=1}^m l_i^* e_{it}^- \right| \right) =$$

$$C(l_1^*, l_2^*, \dots, l_m^*),$$

所以 $C(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_m, \bar{l}_{m+1}) \geq C(l_1^*, l_2^*, \dots, l_m^*)$ 结论成立.

由定理 3.4 可得,增加一种单项预测方法到组合预测模型(10)中,贴近度可能不变,由此可见,组合预测模型(10)可能存在冗余预测方法.

定理 3.5 若组合预测模型的正误差信息矩阵 $E^+ = (e_{it}^+)_{m \times n}$ 中,任一列 m 个元素 $e_{1t}^+, e_{2t}^+, \dots, e_{mt}^+$ 的符号分别相同,且某一种单项预测方法优越其余任一种单项预测方法,则组合预测模型(10)的冗余度为 $(m-1)/m$, 即有 $m-1$ 种单项预测方法是冗余预测方法.

证明 不失一般性,不妨设第一种单项预测方法优越其余任一种单项预测方法,则有

$$\left. \begin{aligned} |e_{1t}^+| &\leq |e_{it}^+|, |e_{1t}^-| \geq |e_{it}^-|, \\ t &= 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

由式(8)和(21)可知 $C_1 \geq C_i, i=1,2,\dots,m$, 即 $C_1 = C_{\max}$.

因为 $E^+ = (e_{it}^+)_{m \times n}$ 中任一列 m 个元素 $e_{1t}^+, e_{2t}^+, \dots, e_{mt}^+$ 的符号分别相同,所以

$$\left| \sum_{i=1}^m l_i e_{it}^+ \right| = \sum_{i=1}^m l_i |e_{it}^+|, t=1,2,\dots,n \quad (22)$$

设 $L = (l_1, l_2, \dots, l_m)^T$ 为组合预测模型(10)的任一可行解,则有 $\sum_{i=1}^m l_i = 1, l_i \geq 0, i=1,2,\dots,m$.

由式(8)、(22)和推论 3.1 可得

$$C(l_1, l_2, \dots, l_m) = \sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^m l_i |e_{it}^-| / \left(\sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^m l_i |e_{it}^+| + \sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^m l_i |e_{it}^-| \right) \quad (23)$$

由式(21)和(23)可得

$$C(l_1, l_2, \dots, l_m) \leq \sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^m l_i |e_{it}^-| / \left(\sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^m l_i |e_{it}^+| + \sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^m l_i |e_{it}^-| \right) = \sum_{t=1}^n |e_{1t}^-| / \left(\sum_{t=1}^n |e_{1t}^+| + \sum_{t=1}^n |e_{1t}^-| \right) = C_1 = C_{\max}$$

所以组合预测模型(10)的最优解为

$$L = (l_1, l_2, \dots, l_m)^T = (1, 0, \dots, 0)^T,$$

冗余度为 $(m-1)/m$.

定理 3.5 表明,若组合预测模型(10)在任意第 t 时刻正误差信息矩阵符号一致,即各单项预测方法提供的信息与第一种单项预测方法相似,从而最

优的组合预测贴近度为最大的预测贴近度对应的单项预测方法,后面 $m - 1$ 种单项预测方法均为冗余的.

定理 3.6 若组合预测模型的正误差信息矩阵 $E^+ = (e_{it}^+)_{m \times n}$ 中,任一行 m 个元素 $e_{1t}^+, e_{2t}^+, \dots, e_{mt}^+$ 的符号分别相同,且第 j 种单项预测方法严格优超第 k 种单项预测方法,则基于 TOPSIS 的最大贴近度的组合预测模型(10)的冗余度至少为 $1/m$.

证明 用反证法. 假设第 k 种单项预测方法不是冗余预测方法,则在组合预测模型(10)的最优解 $L^* = (l_1^*, \dots, l_j^*, \dots, l_k^*, \dots, l_m^*)^T$ 中,一定有 $l_k^* > 0$. 由条件易知:

$$\left| \sum_{i=1}^m l_i^* e_{it}^+ \right| = \sum_{i=1}^m l_i^* |e_{it}^+|, t = 1, 2, \dots, n \quad (24)$$

由式(10)、(24)和推论 3.1 可得最优解 L^* 对应的目标函数值为

$$C(L^*) = \sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^m l_i^* |e_{it}^-| / \sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^m l_i^* |e_{it}^+| + \sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^m l_i^* |e_{it}^-|.$$

构造 $\tilde{L} = (l_1^*, \dots, l_j^* + l_k^*, \dots, 0, \dots, l_m^*)^T$, 则 \tilde{L} 也是组合预测模型(10)的可行解,其对应得目标函数值为

$$C(\tilde{L}) = \frac{(\sum_{t=1}^n \sum_{i \neq j, k} l_i^* |e_{it}^-|) + (l_j^* + l_k^*) |e_{jt}^-|}{[(\sum_{t=1}^n \sum_{i \neq j, k} l_i^* |e_{it}^+|) + (l_j^* + l_k^*) |e_{jt}^+|] + [(\sum_{t=1}^n \sum_{i \neq j, k} l_i^* |e_{it}^-|) + (l_j^* + l_k^*) |e_{jt}^-|]} \quad (25)$$

因为第 j 种单项预测方法严格优超第 k 种单项预测方法,由定义 3.4 知:

$$|e_{jt}^+| < |e_{kt}^+|, |e_{jt}^-| > |e_{kt}^-| \quad (26)$$

由式(25)和(26)可得

$$C(\tilde{L}) > \sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^m l_i^* |e_{it}^-| / (\sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^m l_i^* |e_{it}^+| + \sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^m l_i^* |e_{it}^-|) = \sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^m |l_i^* e_{it}^-| / (\sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^m |l_i^* e_{it}^+| + \sum_{t=1}^n \sum_{i=1}^m |l_i^* e_{it}^-|) = C(L^*).$$

这与 $L^* = (l_1^*, \dots, l_j^*, \dots, l_k^*, \dots, l_m^*)^T$ 是组合预测模型(10)的最优解矛盾,所以假设不成立. 从而至少存在第 k 种单项预测方法为冗余预测方法.

定理 3.6 表明,若 j 种单项预测方法严格优超第 k 种单项预测方法,则可以直接将第 k 种单项预测方法从预选单项预测方法集中剔除,这为如何筛选单项预测方法进行组合预测提供了理论依据.

4 实例分析

人口问题是一个关系全局的重要问题,准确地把握人口数量、了解其发展态势,对于制定国民经济计划和社会发展战略具有深远意义. 相对于其他经济大省,安徽省的经济欠发达,而人口众

多,且人口的发展具有显著的地方特点^[23]. 在构建全面小康社会的道路上,要实现人口与经济、环境、能源的协调发展,有效地分析和精准地预测安徽省人口的发展趋势至关重要. 本文数据来源于 2017 年安徽统计年鉴.

为了丰富预测结果,本文选取两种智能预测模型和两种经典的统计预测模型对安徽省人口进行预测. SVM 模型和 BP 神经网络模型引用文献[24]的方法,以 1980~1995 年的人口数据作为训练样本集,以 1996~1999 年的人口数据作为检验样本集,预测 2000~2015 年安徽省人口数量;由 Logistic 模型得到的人口预测方程为

$$y(t) = 10654 / (1 + 0.697e^{-0.0183t});$$

通过对安徽省人口数量的时间序列做二阶差分,则获得平稳的时间序列,然后对比几种 ARIMA 模型的拟合效果,这里最终选择 ARIMA(3, 2, 0)模型对安徽省人口数量进行预测. 结果如表 1 所示.

利用 MATLAB 分别对文献[14]提出的组合预测模型和本文的组合预测模型(10)进行求解,权重计算结果和各种预测方法预测效果如表 2 和表 3 所示. 其中 F1 为 SVM 模型, F2 为 BP 神经网络模型, F3 为 Logistic 模型, F4 为 ARIMA 模型, A12 表示 F1 和 F2 按照简单算术平均的方法组合, B12 表示 F1 和 F2 按照文献[14]的方法组合, C12 表示 F1 和

F2 按本文提出的方法组合, D 为各个预测方法的贴
近度, 其余符号以此类推.

表 1 安徽省历年人口规模及 4 种单项预测方法预测结果

Tab. 1 The population size of Anhui Province in the past years
and the prediction results of four single forecasting methods

年份	人口 实际值 /万人	人口预测值/万人			
		SVM 模型	BP 神经 网络模型	Logistic 模型	ARIMA 模型
2000	6 278	6 335	6 280	6 325	6 256
2001	6 325	6 379	6 321	6 372	6 311
2002	6 369	6 370	6 454	6 419	6 362
2003	6 410	6 415	6 522	6 466	6 415
2004	6 461	6 660	6 459	6 512	6 467
2005	6 516	6 663	6 514	6 559	6 519
2006	6 593	6 736	6 590	6 605	6 571
2007	6 676	6 683	6 792	6 651	6 624
2008	6 741	6 858	6 725	6 696	6 676
2009	6 795	6 822	6 904	6 742	6 728
2010	6 827	6 963	6 835	6 787	6 780
2011	6 876	6 996	6 844	6 832	6 833
2012	6 902	6 914	7 051	6 877	6 885
2013	6 929	7 067	6 926	6 922	6 937
2014	6 936	6 931	7 122	6 966	6 989
2015	6 949	7 117	6 948	7 010	7 041

表 2 各种组合预测模型权重

Tab. 2 Weights of various combination forecast models

组合方法	权重
A12	(0.500 0, 0.500 0)
B12	(1.000 0, 0.000 0)
C12	(0.000 0, 1.000 0)
A123	(0.333 3, 0.333 3, 0.333 3)
B123	(1.000 0, 0.000 0, 0.000 0)
C123	(0.038 0, 0.221 0, 0.740 9)
A124	(0.333 3, 0.333 3, 0.333 3)
B124	(0.872 4, 0.124 5, 0.003 1)
C124	(0.056 4, 0.164 9, 0.778 8)
A1234	(0.250 0, 0.250 0, 0.250 0, 0.250 0)
B1234	(0.829 0, 0.147 6, 0.021 3, 0.002 0)
C1234	(0.056 6, 0.168 4, 0.073 3, 0.701 7)

表 3 各种预测方法预测效果

Tab. 3 Performance of various combination forecast models

方法	D	SSE	MSE	MAE	MAPE	MSPE
F1	—	182 650	26.711 0	83.500 0	0.012 5	$3.996 2 \times 10^{-3}$
F2	—	103 294	20.087 1	51.875 0	0.007 7	$2.969 6 \times 10^{-3}$
F3	—	28 385	10.529 9	32.687 5	0.004 8	$1.154 3 \times 10^{-3}$
F4	—	28 938	10.632 0	37.750 0	0.006 0	$1.609 3 \times 10^{-3}$
A12	0.500 0	70 901	16.642 0	63.437 5	0.009 5	$2.479 9 \times 10^{-3}$
B12	0.347 7	182 650	26.711 0	83.500 0	0.012 5	$3.996 2 \times 10^{-3}$
C12	0.652 3	10 329	20.087 1	51.875 0	0.007 7	$2.969 6 \times 10^{-3}$
A123	0.639 9	39 199	12.374 2	45.583 3	0.006 9	$1.861 1 \times 10^{-3}$
B123	0.347 7	182 650	26.711 0	83.500 0	0.012 5	$3.996 2 \times 10^{-3}$
C123	0.769 9	22 708	9.623 5	33.317 7	0.005 0	$1.459 4 \times 10^{-3}$
A124	0.693 8	31 820	11.148 9	38.354 2	0.005 7	$1.651 6 \times 10^{-3}$
B124	0.387 9	140 310	23.411 1	77.741 5	0.011 6	$3.502 2 \times 10^{-3}$
C124	0.829 0	18 771	8.563 0	26.678 7	0.003 9	$1.242 5 \times 10^{-3}$
A1234	0.735 8	14 414	9.765 6	31.515 6	0.004 7	$1.457 6 \times 10^{-3}$
B1234	0.441 6	126 430	22.222 8	74.718 3	0.011 2	$3.325 2 \times 10^{-3}$
C1234	0.830 1	18 025	8.391 1	26.116 7	0.003 9	$1.225 1 \times 10^{-3}$

由表 3 可以看出, 本文提出的组合预测模型的
贴近度不小于参与组合的单项预测方法中贴近度最
小的单项预测方法, 根据定义 3. 1, 体现了模型的非
劣性. 当单项预测方法 F1 和 F2 组合时, F1 的权重
为 0, 此时 F1 是冗余预测方法, 组合预测模型 C12
的冗余度为 1/2. 随着单项预测方法的增加, 有
 $D_{C12} \leq D_{C123} \leq D_{C124} \leq D_{C1234}$, 体现了模型的单调
不减性. 通过计算 4 种单项预测方法到正、负理想点
的误差绝对值, 根据定义 3. 4, 本文的 4 种单项预测
方法中没有预测方法严格优越或优越.

从表 3 可以看出, 本文提出的基于 TOPSIS 的
最大贴近度的最优组合预测模型各误差指标值均低
于参与组合预测的各单项预测模型的误差指标值,
也优于简单算术平均组合预测模型和文献[14]中组
合预测模型的各项误差指标, 表明该组合预测方法
能够提高预测精度.

为了直观地展现对比各个方法的预测效果, 将
真实值与各种组合预测方法的模拟值进行图示, 如
图 1 所示.

为了进一步说明预测的效果,为此定义相对误差:

$$E = (y_t - \hat{y}_t) / y_t \quad (27)$$

式中, y_t 为各时刻的实际值, \hat{y}_t 为各时刻的预测值. 根据上述相对误差,可以计算每种组合预测方法在每个时刻的相对误差.

对各种预测方法估计的相对误差进行图示,如

图 2 所示. 由图 2 可知,无论几种单项预测方法参与组合预测,文献[14]提出的组合预测模型效果最差,不能够有效地集结单项预测方法;基于简单算术平均的组合预测方法可以分散单项预测方法的预测风险,模型稳定性较好,但精度不足;本文提出的组合预测模型(10)能够有效地利用各种单项预测方法的信息,实现了较为准确的预测.

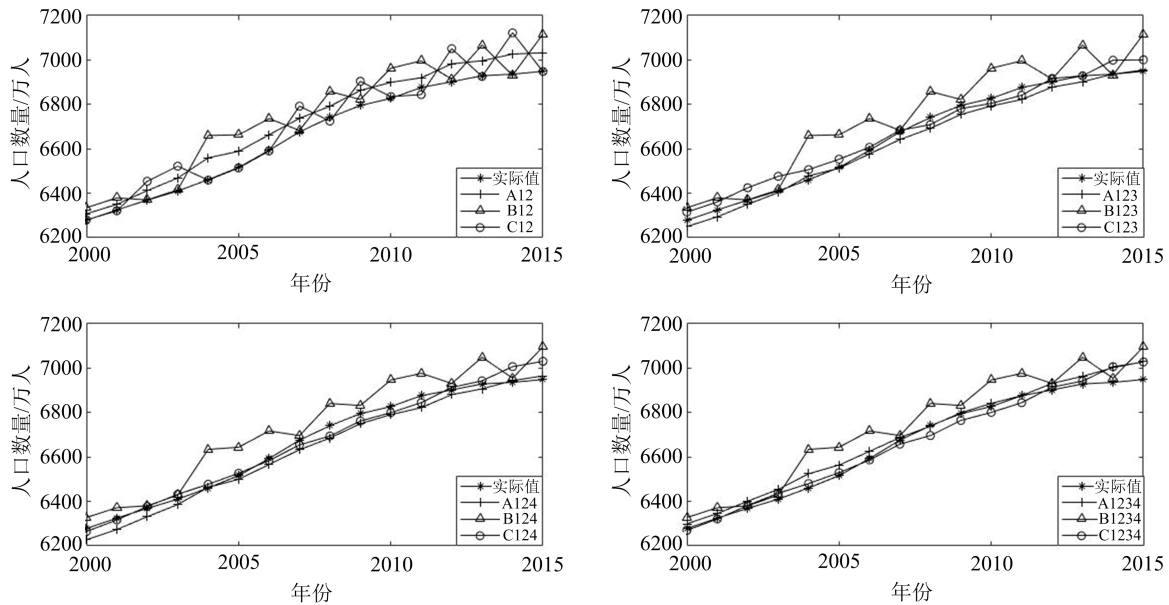


图 1 实际值与各种组合预测方法拟合值

Fig. 1 The actual value and the fitting value of various combination forecast models

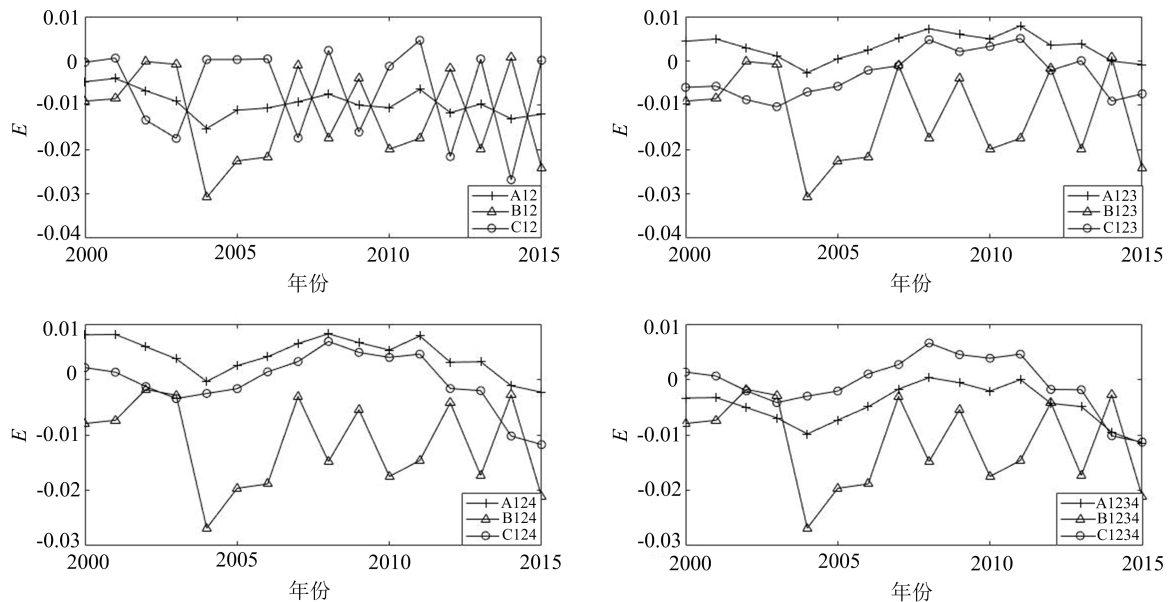


图 2 各种组合预测方法的相对误差

Fig. 2 Relative errors of various combination forecast models

5 结论

本文从相关性指标角度出发,提出了一种基于 TOPSIS 的最大贴近度的组合预测模型,针对该模型,定义了新的非劣性组合预测、优性组合预测、冗余预测方法、预测方法优超等概念,探讨了模型的若干数学性质,并获得了确定最优组合预测的权重系数,从而从理论上阐述了最优组合预测的优越性.通过实例说明了基于 TOPSIS 的最大贴近度的最优组合预测模型的可行性和有效性.该方法充实了预测理论体系,也扩展了 TOPSIS 法的应用范围.但当单项预测方法较少时,本文的组合预测模型容易出现冗余预测方法,不能够很好地利用各单项预测方法的信息.另外,本文构建的组合预测模型式(10)的目标函数是非线性不光滑函数,因此模型的求解的复杂性较高,对预测部门的实践者来说要求有一定专业的优化编程能力.

本文建立的组合预测模型是把 TOPSIS 的相关性准则作为精度度量的指标.实际上,组合预测模型的精度与单项预测模型的选取密切相关,因此未来有必要进一步研究该准则下如何选择合适的单项预测子模型,同时,考虑到预测系统的复杂性,一些原始时间序列以区间数形式来表达,因此需要进一步探讨 TOPSIS 准则下的区间型数据驱动的组合预测模型的构建及其性质.

参考文献(References)

- [1] BATES J M, GRANGER C W J. The combination of forecasts[J]. *Operations Research Quarterly*, 1969, 20: 451-468.
- [2] 唐小我, 马永开, 曾勇, 等. 现代组合预测和组合投资决策方法及应用研究[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [3] 汪同三, 张涛. 组合预测: 理论、方法及应用[M]. 北京: 社会科学文献出版社, 2008.
- [4] 陈华友. 组合预测方法有效性理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [5] 陈华友, 朱家明, 丁珍妮. 组合预测模型与方法研究综述[J]. *大学数学*, 2017, 33(4): 1-10.
CHEN Huayou, ZHU Jiaming, DING Zhenni. A survey of researches on combination forecasting models and methodologies[J]. *College Mathematics*, 2017, 33(4): 1-10.
- [6] 唐小我. 组合预测计算方法研究[J]. *预测*, 1991, 10(4): 35-39.
- [7] 陈华友. 基于预测有效度的组合预测模型研究[J]. *预测*, 2001, 20(3): 72-73.
CHEN Huayou. Research on combination forecasting model based on effective measure of forecasting methods[J]. *Forecasting*, 2001, 20(3): 72-73.
- [8] 陈华友, 侯定丕. 基于预测有效度的优性组合预测模型研究[J]. *中国科学技术大学学报*, 2002, 32(2): 49-57.
CHEN Huayou, HOU Dingpi. Research on superior combination forecasting model based on forecasting effective measure[J]. *Journal of University of Science and Technology of China*, 2002, 32(2): 49-57.
- [9] 陈华友. 基于相关系数的优性组合预测模型研究[J]. *系统工程学报*, 2006, 21(4): 353-360.
CHEN Huayou. Research on properties of superior combined forecasting models based on correlation coefficients[J]. *Journal of Systems Engineering*, 2006, 21(4): 353-360.
- [10] 陈华友, 盛昭瀚, 刘春林. 基于向量夹角余弦的组合预测模型的性质研究[J]. *管理科学学报*, 2006, 9(2): 1-8.
CHEN Huayou, SHENG Zhaohan, LIU Chunlin. Research on properties of combination forecasting model based on vectorial angle cosine[J]. *Journal of Management Sciences in China*, 2006, 9(2): 1-8.
- [11] 袁宏俊, 杨桂元. 基于最大-最小贴近度的最优组合预测模型[J]. *运筹与管理*, 2010, 19(2): 117-128.
YUAN Hongjun, YANG Guiyuan. The combination forecast model based on the biggest-smallest approach degree [J]. *Operations Research and Management Science*, 2010, 19(2): 117-128.
- [12] 袁宏俊, 杨桂元. 基于一种贴近度的 IOWA 算子的优性组合预测模型[J]. *统计与信息论坛*, 2010, 25(2): 32-37.
YUAN Hongjun, YANG Guiyuan. The superior combination forecasting model based on an closeness degree and induced ordered weighted averaging (IOWA) operator [J]. *Statistics & Information Forum*, 2010, 25(2): 32-37.
- [13] 杨蕾, 陈华友, 王宇. 基于贴近度的诱导广义 OWA 算子最优组合预测模型[J]. *统计与决策*, 2013, 28(5): 24-26.
- [14] 金飞飞, 陈华友, 周礼刚. 基于最大-最小贴近度的 IOWA 算子最优组合预测模型[J]. *数学的实践与认识*, 2013, 43(7): 110-116.
JIN Feifei, CHEN Huayou, ZHOU Ligang. The optimal combination forecasting model based on the maximum-minimum approach degree and induced ordered weighted averaging (IOWA) operator [J].

- Mathematics in Practice and Theory, 2013, 43(7): 110-116.
- [15] 乔梁,张露,许懿,等. 基于最大-最小贴近度和诱导有序加权算子的风电功率短期预测模型[J]. 电力系统保护与控制,2014,42(19):114-121.
- QIAO Liang, ZHANG Lu, XU Yi, et al. Wind power short-term forecast model based on maximum-minimum approach degree and induced ordered weighted operator[J]. Power System Protection and Control, 2014,42(19):114-121.
- [16] 李敬. 基于 TOPSIS 的成本组合预测方法及其应用[J]. 统计与决策,2013,29(4):71-73.
- [17] HWANG C L, YOON K. Multiple Attributes Decision Making Methods and Applications [M]. Berlin: Springer, 1981.
- [18] CHEN S M, LEE L W. Fuzzy multiple attributes group decision-making based on the interval type-2 TOPSIS method [J]. Expert Systems With Applications, 2010, 37(4):2790-2798.
- [19] SANG X, LIU X. An analytical solution to the TOPSIS model with interval type-2 fuzzy sets[J]. Soft Computing, 2016, 20(3):1213-1230.
- [20] WU T, LIU X, LIU F. An interval type-2 fuzzy TOPSIS model for large scale group decision making problems with social network information [J]. Information Sciences, 2018, 432(3):392-410.
- [21] CELIK E, AKYUZ E. An interval type-2 fuzzy AHP and TOPSIS methods for decision-making problems in maritime transportation engineering: The case of ship loader [J]. Ocean Engineering, 2018, 155(3): 371-381.
- [22] KANG H. Unstable weights in the combination of forecasts[J]. Management Science, 1986, 32(6): 683-695.
- [23] 黄立山. 安徽省人口中长期发展战略[C]// 第十三次全国统计科学讨论会论文集. 北京:中国统计学会, 2005:484-491.
- [24] 袁勇,王攀. 支持向量机在人口预测中的应用[J]. 计算机与数字工程,2006,34(5):9-11.
- YUAN Yong, WANG Pan. Application of support vector machines in population forecast[J]. Computer & Digital Engineering, 2006,34(5):9-11.