

## 基于状态相依风险厌恶的最优动态协整配对交易策略

邓辛凝, 毕秀春, 张曙光

(中国科学技术大学管理学院统计与金融系, 安徽合肥 230026)

**摘要:** 协整配对交易试图在协整资产偏离平衡时获取收益. 在常风险厌恶的均值-方差模型中, 最优动态协整配对交易策略显示, 配置在风险资产上的额度仅与时间有关而与财富总额无关, 这不符合常理. 研究了在状态相依风险厌恶的均值-方差模型下协整资产的最优分配问题, 并通过求解广义 HJB 方程得到最优配置策略的一个代数形式. 策略显示, 最优配置额度不仅与时间有关, 还依赖于现有财富总额, 并且策略能保证财富总额始终为正. 因而从经济学的意义来看, 相比于常风险厌恶下的最优策略, 本文策略更加合理. 数值例子表明, 本文策略在资产配置方面表现得更加稳定, 并且配置额度随着时间增加有增加的趋势, 与常风险厌恶下的最优策略正好相反. 此外, 还分析了协整系数矩阵和均值回复速度对策略的影响, 并对其加以解释.

**关键词:** 协整; 动态协整配对交易; 均值方差投资选择; 时间不一致性

**中图分类号:** O29; F224.7      **文献标识码:** A      doi: 10.3969/j.issn.0253-2778.2019.08.009

**引用格式:** 邓辛凝, 毕秀春, 张曙光. 基于状态相依风险厌恶的最优动态协整配对交易策略[J]. 中国科学技术大学学报, 2019, 49(8): 655-667.

DENG Xinning, BI Xiuchun, ZHANG Shuguang. Optimal dynamic cointegrated pairs trading strategies with state-dependent risk aversion[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2019, 49(8): 655-667.

## Optimal dynamic cointegrated pairs trading strategies with state-dependent risk aversion

DENG Xinning, BI Xiuchun, ZHANG Shuguang

(Department of Statistics and Finance, School of Management, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

**Abstract:** Cointegrated pairs trading attempts to make profits when cointegrated assets depart from their equilibrium. For the mean-variance model with constant risk aversion, the optimal dynamic cointegrated pairs trading strategy shows that the allocation amounts on risky assets depend only on time but not on wealth, which goes against common sense. The optimal allocation of cointegration assets under the mean-variance model with state-dependent risk aversion was studied, and an algebraic form of the optimal strategy was obtained by solving an extended HJB equation. The strategy shows that the optimal allocation amounts depend not only on time but also on current wealth, and the strategy makes sure that the total assets remain positive all the time. Thus our strategy is more economically reasonable compared to those under constant risk aversion. The numerical example implies that our strategy behaves more steadily in terms of asset allocation, and there is an increasing trend in the allocation amounts as time goes

收稿日期: 2018-03-21; 修回日期: 2018-05-24

基金项目: 国家自然科学基金(11401556, 11471304)资助.

作者简介: 邓辛凝, 男, 1993年生, 硕士生. 研究方向: 金融工程, 应用概率. E-mail: dxn11235@mail.ustc.edu.cn

通讯作者: 毕秀春, 博士/副教授. E-mail: xcbi@ustc.edu.cn

by, a in contrast to the strategy under constant risk aversion. In addition, the influence of cointegration coefficients matrix and mean-reverting speed on the strategy was studied and explained.

**Key words:** cointegration; dynamic cointegrated pairs trading; mean-variance portfolio theory; time inconsistency

## 0 引言

近年来,协整资产的动态交易成为了研究热门.通常来说,一个由非平稳资产组成的平稳资产组合就称作协整资产.股票是协整资产的一个重要应用领域<sup>[1-2]</sup>,具有稳定价差的两只股票就构成了一个简单的协整资产组合.从长期来看,即使价差发生偏离,最终也会回归到一个稳定水平附近.因此,当价差扩大时,投资者通常会做空价格偏高的股票,买进价格偏低的股票.然而,这种静态交易策略通常不是最优的.对于具有协整关系的两只股票,当它们的价格均被低估时,即使价差扩大,比较明智的做法也是同时买进这两只股票.事实上,动态交易在这方面有更大的优势.在文献<sup>[3-5]</sup>检验过股票之间的协同性后,动态协整配对交易策略便开始被重视起来<sup>[6]</sup>. Lin 等<sup>[7]</sup>利用协整关系给出一种能确保获利的配对交易方法. Law 等<sup>[8]</sup>运用统计功效减少交易中错误信号的出现次数,从而提高了收益.在高频交易方面, Miao<sup>[9]</sup>基于协整方法提出了配对交易策略.针对协整配对交易策略的有效性, Huang 和 Martin<sup>[10]</sup>, Rad 等<sup>[11]</sup>利用市场数据比较协整配对交易策略和其他配对交易策略的实际表现情况. Olof 和 Isak<sup>[12]</sup>通过使用误差修正模型选择股票,进一步提高了策略的有效性.

而在理论研究方面, Wachter<sup>[13]</sup>首先尝试对由一只具有均值回复性的股票和一种无风险资产组成的协整资产组合进行动态交易.之后 Jurek 和 Yang<sup>[14]</sup>在常风险厌恶系数的假定下,对上述资产组合求出了最优策略.然而,文献<sup>[14]</sup>的方法只能应用在各项资产价格不相关的协整资产组合上.更进一步, Chiu 和 Wong<sup>[15]</sup>在 CRRA 效用函数下成功解决了协整资产动态交易的问题.

另一方面,自 Markowitz<sup>[16]</sup>提出均值-方差模型后,学者们也开始研究此类模型下的最优资产配置问题. Cui 等<sup>[17]</sup>讨论了离散时间下的均值-方差最优分配问题.而在连续时间方面,自 Basak 和 Chabakauri<sup>[18]</sup>提出了动态均值-方差分析的一般方法后,该方法被应用到了很多问题上, Zeng 和 Li<sup>[19]</sup>

在均值-方差模型下研究了投资再保险问题, Wang 和 Forsyth<sup>[20]</sup>则给出了对附加任意约束条件的均值-方差模型都适用的最优策略数值求解方法.在动态协整配对交易方面, Chiu 和 Wong<sup>[21]</sup>在常风险厌恶系数的均值-方差模型下,对资产组合求解出时间一致性的最优配对交易策略,并研究了策略的盈利能力.

Chiu 和 Wong<sup>[21]</sup>给出的最优策略显示,配置在股票上的额度与投资者的财富总额无关.这样的结果并不符合常理,事实上,对于同一个投资者而言,当财富总额分别是 100 元和 10000 元时,配置在同一只股票上的额度应当有所不同.在文献<sup>[21]</sup>的模型中,风险厌恶系数被设置成一个常数.而实证研究表明,个人的风险厌恶水平会随着财富值的增加而降低<sup>[22-24]</sup>.为了使模型更符合实际,我们将对文献<sup>[21]</sup>的模型进行修改,把常风险厌恶系数变为状态相依的风险厌恶系数(即风险厌恶系数依赖于财富额度),并在这样的均值-方差模型下讨论协整资产组合的动态配对交易策略.引入状态相依的风险厌恶系数会带来时间不一致性,而对于时间不一致的优化问题, Basak 和 Chabakauri<sup>[18]</sup>提出的动态均值-方差分析的一般方法不再适用,我们将采用 Björk 和 Murgoci<sup>[25]</sup>提出的广义 HJB 方程来解决.

本文结构安排如下:节 1,我们对问题进行阐述,建立状态相依风险厌恶的均值-方差优化模型,并给出了风险厌恶系数的一个合理形式;节 2,我们求解优化问题从而得到最优动态协整配对交易策略,我们指出,配置在股票上的金额不仅与时间有关,也与投资者的财富水平有关;节 3,我们用数值例子进一步比较给出的最优策略与常风险厌恶系数下最优策略的差别,并分析两种策略在投资行为方面的不同之处,显示出本文策略的优势.另外本文也分析了协整系数矩阵和均值回复速度对策略的影响;节 4 总结全文.

## 1 问题描述

为了与文献<sup>[21]</sup>给出的最优策略进行比较,本文选取与之相同的资产组合和投资期限,各资产价

格的动态过程也保持一致. 具体的, 资产组合包括一种无风险资产(标号为 0,  $t$  时刻价格为  $S_0(t)$ ) 和  $n$  只股票(标号为  $1 \sim n$ ,  $t$  时刻价格分别为  $S_1(t), S_2(t), \dots, S_n(t)$ ), 投资区间为  $[0, T]$ , 无风险利率为  $r(t)$ , 无风险资产价格的动态过程为

$$dS_0(t) = r(t)S_0(t)dt, \\ S_0(0) = S_0 > 0.$$

对于  $n$  只股票, 依照文献[21], 令  $X_i(t) = \ln S_i(t)$ , 其动态过程为

$$dX(t) = [\theta(t) - AX(t)]dt + \sigma(t)dW_t \quad (1)$$

式中,  $W_t = (W_t^1, W_t^2, \dots, W_t^n)'$  是  $\mathcal{F}_t = \sigma(W_t^1, W_t^2, \dots, W_t^n, t \geq 0)$  上的  $n$  维标准维纳过程,  $\theta(t)$  是一个关于时间  $t$  连续的  $n$  维向量,  $\sigma(t)$  是关于时间  $t$  连续的  $n \times n$  维矩阵, 常数矩阵  $A$  表示协整系数矩阵 ( $A$  中元素不一定是正数). 这里, 我们假设  $\Sigma(t) = \sigma(t)\sigma'(t)$  是一个正定矩阵.

令  $u_i(t)$  表示配置在第  $i$  种资产上的金额, 则  $t$  时刻投资者的总财富水平可以表示为

$$Y(t) = \sum_{i=0}^n u_i(t).$$

运用伊藤引理, 有

$$dY(t) = [r(t)Y(t) + u'(t)\alpha(t)]dt + u'(t)\sigma(t)dW_t, \\ Y(0) = Y_0 \quad (2)$$

式中,  $u'(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$ ,

$$\alpha(t) = \theta(t) - AX(t) + \frac{1}{2}D(\Sigma(t))\mathbf{1} - r(t)\mathbf{1} \quad (3)$$

$D(\Sigma(t))$  是一个对角矩阵, 其对角元与  $\sigma(t)$  对应角元相等,  $\mathbf{1}$  是一个所有元素均为 1 的  $n$  维向量.

文献[21]给出的均值-方差优化模型为

$$\min_u \text{Var}_{t,y}[Y_T^u] - 2\lambda E_{t,y}[Y_T^u],$$

该优化模型等价于

$$\max_u E_{t,y}[Y_T^u] - \frac{1}{2\lambda} \text{Var}_{t,y}[Y_T^u].$$

这里  $\lambda > 0$ . 显然, 正常数  $\frac{1}{\lambda}$  表示投资者的风险厌恶系数. 依照文献[21]给出的策略, 无论投资者的总财富是多少, 配置在股票上的最优额度都一样, 之所以得出这样的结论是因为该模型中风险厌恶系数是一个常数. 但这不符合常理. 实证研究表明, 个人的风险厌恶系数会随着财富值的增加而降低<sup>[22-24]</sup>. 因而投资者的风险厌恶系数不应当是正常数  $\frac{1}{\lambda}$ , 而是关

于财富总额  $Y(t) = y$  的减函数  $\frac{1}{\lambda(y)}$  (相应的,  $\lambda(y)$  是  $y$  的增函数). 我们将原优化模型的风险厌恶系数  $\frac{1}{\lambda}$  替换为  $\frac{1}{\lambda(y)}$ , 则相应的优化模型变为

$$\min_u \text{Var}_{t,y}[Y_T^u] - 2\lambda(y)E_{t,y}[Y_T^u] \quad (4)$$

为了方便地研究问题, 有必要明确  $\lambda(y)$  的具体形式. 参考文献[26]的想法, 一个自然而又合理的假设是

$$\lambda(y) = \lambda y,$$

即风险厌恶系数为  $\frac{1}{\lambda y}$ , 这里的  $\lambda$  是一个正数. 选择这样一个形式有两个原因:

①均值-方差优化函数为

$$J(t, y, u) = \text{Var}_{t,y}[Y_T^u] - 2\lambda(y)E_{t,y}[Y_T^u],$$

其中, 第一项的单位是元的平方, 而第二项中  $E_{t,y}[Y_T^u]$  的单位是元, 单位不一致. 为了使相加的两项单位一致, 需要使  $\lambda(y)$  的单位为元. 一个直接的想法就是

$$\lambda(y) = \lambda y.$$

②在 Markowitz 提出的均值-方差框架中, 效用函数实际上是投资回报率而非财富总额  $y$  的函数. 故而在该框架中优化函数的形式为

$$J^*(t, y, u) = \text{Var}_{t,y}\left[\frac{Y_T^u}{y}\right] - 2\lambda E_{t,y}\left[\frac{Y_T^u}{y}\right] = \\ \frac{1}{y^2} \{ \text{Var}_{t,y}[Y_T^u] - 2\lambda y E_{t,y}[Y_T^u] \}.$$

而上式与

$$J(t, y, u) = \text{Var}_{t,y}[Y_T^u] - 2\lambda y E_{t,y}[Y_T^u] \quad (5)$$

有相同结构的解.

**注 1.1** 根据实证研究, 风险厌恶系数  $\frac{1}{\lambda(y)}$  是关于  $y$  的减函数, 即  $\lambda(y)$  是  $y$  的增函数. 而到目前为止, 实证研究还没有讨论过  $\frac{1}{\lambda(y)}$  的具体形式. 在理论方面, 文献[26] 是第一篇研究此类问题的文献, 在该文中, 风险厌恶系数的形式即为  $\frac{1}{\lambda y}$ , 其他文献皆沿用了这一设定. 故而, 本文也采用这种设定. 相应的,  $\lambda(y) = \lambda y$ . 另外, 从计算的角度考量, 这种选取也带来了简便性. 事实上, 如果选取更为复杂的形式, 很有可能求解不出结果. 研究问题应当由易到难, 因而本文从最简单的假设入手.

下面我们最小化式(5), 求解最优投资策略, 即

求解下列动态优化问题,

$$\begin{aligned} & \min_u \text{Var}_{t,y}[Y_T^u] - 2\lambda y E_{t,y}[Y_T^u] \\ \text{s. t. } & dY(t) = [r(t)Y(t) + u'(t)\alpha(t)]dt + \\ & u'(t)\sigma(t)dW_t. \end{aligned}$$

## 2 求解最优策略

### 2.1 “最优”的定义

令

$$\begin{aligned} F(y, z) &= z^2 - 2\lambda y z, \\ G(y, z) &= -z^2. \end{aligned}$$

则对于马尔科夫过程  $Y$ , 效用函数

$$J(t, y, u) = E_{t,y}[F(y, Y_T^u)] + G(y, E_{t,y}[Y_T^u]) \quad (6)$$

即为我们要优化的函数(5). 如果使用文献[18]提出的动态均值-方差分析框架去求解效用函数(6)的最小值, 很快就会遇到麻烦. 我们的优化目标函数与状态  $y$  有关, 故而最优策略的选择与决策时的状态有关, 根据文献[25], 此优化问题是时间不一致的. 而时间不一致性会导致按照经典方法在某一时刻作出的最优决策在下一时刻将不再是最优的.

我们需要重新考虑“最优”的定义. 按照文献[25]提出的方法, 我们在博弈论的框架下考虑问题. 假设在每个时间节点  $t$ , 都有一个玩家选择策略  $u_t$  使得均值-方差效用函数达到最小值. 所以在整个游戏当中, 有无数个玩家在做决策, 他们的效用函数为  $J(t, y, u)$ . 如果我们把每一时间节点上的策略看作整个投资期的一个子博弈, 则原来的优化问题可以转化为寻求子博弈精炼纳什均衡的问题. 要想得到全局的最优投资策略, 应当运用逆向递归法逐步求出每个子博弈上的“均衡策略”.

下面, 我们通过给出均衡策略的定义来扩展“最优”的概念.

**定义 2.1**<sup>[25]</sup> 给定策略  $\hat{u}$ , 定义策略  $u_h$ ,

$$u_h(s, z) = \begin{cases} u, & t \leq s < t+h, z \in \mathbb{R}; \\ \hat{u}(s, z), & t+h \leq s \leq T, z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

式中,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $h > 0$ . 对于任意选取的  $(t, y) \in [0, t] \times \mathbb{R}$ , 如果

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{J(t, y, \hat{u}) - J(t, y, u_h)}{h} \leq 0,$$

对所有  $u \in \mathbb{R}$  以及  $(t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}$  成立, 那么就称  $\hat{u}$  是一个均衡策略. 此时效用函数的值被定义为均衡效用函数  $V$ ,

$$V(t, y) = J(t, y, \hat{u}) \quad (7)$$

### 2.2 广义 HJB 方程

为了求解均衡策略  $\hat{u}$ , 我们采用文献[25]提出的广义 HJB 方程方法(见附录 A1).

**命题 2.1**  $V(t, y)$  的广义 HJB 方程有如下形式:

$$V_t + \inf_{u \in U} \{ (ry + u'\alpha)(V_y - f_z) + \frac{1}{2} u'\Sigma u (V_{yy} - f_{zz} - 2f_{yz} + 2g_y^2) \} = 0 \quad (8)$$

$$f_t(t, y, z) + (ry + \hat{u}'\alpha)f_y(t, y, z) + \frac{1}{2} \hat{u}'\Sigma \hat{u} f_{yy}(t, y, z) = 0 \quad (9)$$

$$g_t(t, y) + (ry + \hat{u}'\alpha)g_y(t, y) + \frac{1}{2} \hat{u}'\Sigma \hat{u} g_{yy}(t, y) = 0 \quad (10)$$

式中,  $\hat{u}$  表示使方程(8)等号左侧式子取得最小值的策略,  $U = \mathbb{R}^n$ ,

$$f(t, y, z) = E_{t,y}[F(z, Y_T^{\hat{u}})] \quad (11)$$

$$g(t, y) = E_{t,y}[Y_T^{\hat{u}}] \quad (12)$$

命题 2.1 的证明见附录 A2.

下面的定理说明只要我们解出上述广义 HJB 方程, 原来的均值-方差优化问题就可以得到解决.

**定理 2.1**<sup>[25]</sup> 如果  $(V, f, g)$  是命题 2.1 中广义 HJB 方程的一个解, 并且策略  $\hat{u}$  取得方程(8)等号左侧式子的最小值, 那么  $\hat{u}$  便是一个均衡策略,  $V$  就是相应的均衡效用函数.

为了求出均衡策略  $\hat{u}$ , 我们来解命题 2.1 中的广义 HJB 方程. 我们有

$$\begin{aligned} V(t, y) &= J(t, y, \hat{u}) = \\ & E_{t,y}[(Y_T^{\hat{u}})^2 - 2\lambda y Y_T^{\hat{u}}] - E_{t,y}[Y_T^{\hat{u}}] = \\ & f(t, y, y) - g^2(t, y), \end{aligned}$$

故不难得到

$$V_t = f_t - 2gg_t,$$

$$V_y = f_y + f_z - 2gg_y,$$

$$V_{yy} = f_{yy} + f_{zz} + 2f_{yz} - 2(g_y^2 + gg_{yy}).$$

将上述结果代入式(8), 可求得

$$\hat{u} = \frac{2g(t, y)g_y(t, y) - f_y(t, y, y)}{f_{yy}(t, y, y) - 2g(t, y)g_{yy}(t, y)} \Sigma^{-1}(t)\alpha(t) \quad (13)$$

接下来需要求解  $f$  和  $g$ , 注意到  $f$  和  $g$  分别满足下列方程:

$$f_t(t, y, z) + (ry + \hat{u}'\alpha)f_y(t, y, z) +$$

$$\frac{1}{2} \hat{u}'\Sigma \hat{u} f_{yy}(t, y, z) = 0,$$

$$g_t(t, y) + (ry + \hat{u}'\alpha)g_y(t, y) +$$



$$\frac{1}{2} \hat{u} \hat{\Sigma} \hat{g}_{yy}(t, y) = 0,$$

并且边界条件为

$$f(T, y, z) = y^2 - 2\lambda yz, \\ g(T, y) = y.$$

由方程, 我们假设  $f$  和  $g$  有如下的形式

$$f(t, y, z) = a(t)y^2 - 2\lambda b(t)yz, \\ g(t, y) = b(t)y,$$

$a(t), b(t)$  的边界条件为

$$a(T) = 1, \\ b(T) = 1.$$

则有

$$\begin{cases} f_t = \dot{a}y^2 - 2\lambda \dot{b}yz, & \begin{cases} f_{yy} = 2a, \\ f_{yz} = -2\lambda b, \\ f_{zz} = 0, \end{cases} & \begin{cases} g_t = \dot{b}y, \\ g_y = b, \\ g_{yy} = 0. \end{cases} \end{cases}$$

将上述结果代入式(13)中, 则平衡策略(即所求的最优策略)有如下的表达:

$$\hat{u} = \frac{b^2(t) + \lambda b(t) - a(t)}{a(t)} y \Sigma^{-1}(t) \alpha(t) \quad (14)$$

将上述结果代入式(9)和(10)中, 则有

$$\dot{a} + 2a\left(r + \frac{b^2 + \lambda b - a}{a} \alpha' \Sigma^{-1} \alpha\right) + \frac{(b^2 + \lambda b - a)^2}{a} \alpha' \Sigma^{-1} \alpha = 0 \quad (15)$$

$$\dot{b} + b\left(r + \frac{b^2 + \lambda b - a}{a} \alpha' \Sigma^{-1} \alpha\right) = 0 \quad (16)$$

式中,  $\dot{a}, \dot{b}$  分别为  $a(t), b(t)$  对时间  $t$  的导数.

要得到  $\hat{u}$ , 需要从式(15)和(16)组成的微分方程组中解出  $a(t)$  和  $b(t)$ . 然而, 该方程组是非线性的, 不满足 Lipschitz 条件和线性增长条件, 因此解的存在性不能得到保证. 我们换一个思路, 不去求解原方程组而是令

$$c(t) = \frac{b^2(t) + \lambda b(t) - a(t)}{a(t)} \quad (17)$$

则

$$\hat{u}(t, y) = c(t) y \Sigma^{-1}(t) \alpha(t) \quad (18)$$

下面我们来证明  $c(t)$  的存在性.

联系之前给出的  $f$  和  $g$  的表达式, 我们有

$$f(t, y, y) = E_{t,y}[(Y_T^{\hat{u}})^2 - 2\lambda y Y_T^{\hat{u}}], \\ g(t, y) = E_{t,y}[Y_T^{\hat{u}}].$$

不难得到

$$E_{t,y}[Y_T^{\hat{u}}] = b(t)y, \\ E_{t,y}[(Y_T^{\hat{u}})^2] = a(t)y^2.$$

在给定  $\hat{u}(t, y) = c(t) y \Sigma^{-1}(t) \alpha(t)$  这一形式

后, 财富过程  $Y$  满足如下动态过程:

$$dY_T^{\hat{u}} = [r(t) + c(t)\alpha'(t)\Sigma^{-1}(t)\alpha(t)]Y_T^{\hat{u}} dt + c(t)\alpha'(t)\Sigma^{-1}(t)\sigma(t)Y_T^{\hat{u}} dW_t,$$

这就意味着

$$Y(t) = Y_0 \exp\left(\int_0^t (r(s) + c(s)\alpha'(s)\Sigma^{-1}(s)\alpha(s) - \frac{1}{2}c^2(s)\alpha'(s)\Sigma^{-1}(s)\alpha(s)) ds + \int_0^t c(s)\alpha'(s)\Sigma^{-1}(s)\sigma(s) dW_s\right) \quad (19)$$

故而有

$$a(t) = E \exp\left(2\int_t^T (r(s) + c(s)\alpha'(s)\Sigma^{-1}(s)\alpha(s) - \frac{1}{2}c^2(s)\alpha'(s)\Sigma^{-1}(s)\alpha(s)) ds + \int_t^T c(s)\alpha'(s)\Sigma^{-1}(s)\sigma(s) dW_s\right), \\ b(t) = E \exp\left(\int_t^T (r(s) + c(s)\alpha'(s)\Sigma^{-1}(s)\alpha(s) - \frac{1}{2}c^2(s)\alpha'(s)\Sigma^{-1}(s)\alpha(s)) ds + \int_t^T c(s)\alpha'(s)\Sigma^{-1}(s)\sigma(s) dW_s\right).$$

如果把上述  $a(t), b(t)$  的表达式代入式(17)中, 就会得到一个关于  $c(t)$  的方程, 我们将利用 Arzela-Ascoli 定理证明该方程存在解.

**定理 2.2** (Arzela-Ascoli 定理)  $\{f_n\}$  是一个定义在闭区间  $[a, b]$  上的实值连续函数构成的序列, 如果  $\{f_n\}$  是一致有界且等度连续的, 则存在  $\{f_n\}$  的一个子序列  $\{f_{n_k}\}$  一致收敛.

**定理 2.3** 将上述  $a(t), b(t)$  的表达式代入式(17)后得到的方程存在解  $c(t) \in C[0, T], C[0, T]$  为  $[0, T]$  上连续函数构成的空间.

**证明** 首先构造序列  $\{c_n(t)\} \in C[0, T]$ ,

$$c_0(t) = 1 \quad (20)$$

$$c_n(t) = \frac{b_n^2(t) + \lambda b_n(t) - a_n(t)}{a_n(t)}, n \geq 1 \quad (21)$$

式中,

$$a_n(t) = E \exp\left(2\int_t^T (r(s) + c_{n-1}(s)\alpha'(s)\Sigma^{-1}(s)\alpha(s) - \frac{1}{2}c_{n-1}^2(s)\alpha'(s)\Sigma^{-1}(s)\alpha(s)) ds + \int_t^T c_{n-1}(s)\alpha'(s)\Sigma^{-1}(s)\sigma(s) dW_s\right), \\ b_n(t) = E \exp\left(\int_t^T (r(s) + c_{n-1}(s)\alpha'(s)\Sigma^{-1}(s)\alpha(s) - \frac{1}{2}c_{n-1}^2(s)\alpha'(s)\Sigma^{-1}(s)\alpha(s)) ds + \int_t^T c_{n-1}(s)\alpha'(s)\Sigma^{-1}(s)\sigma(s) dW_s\right).$$

接下来我们要利用 Arzela-Ascoli 定理证明存

在  $\{c_n(t)\}$  的子列一致收敛于  $C[0, T]$  中.

为此, 我们需要证明序列  $\{c_n(t)\}$  是一致有界和等度连续的.

① 证明序列  $\{c_n(t)\}$  在  $C[0, T]$  中一致有界.

当  $n \geq 1$  时, 因为  $\lambda, a_n(t), b_n(t)$  均为正数, 故

$$c_n(t) = \frac{b_n^2(t) + \lambda b_n(t) - a_n(t)}{a_n(t)} = \frac{b_n(t)}{a_n(t)}(b_n(t) + \lambda) - 1.$$

不妨记

$$Z_n(t) = \int_t^T (r(s) + c_{n-1}(s)\alpha'(s)\Sigma^{-1}(s)\alpha(s) - \frac{1}{2}c_{n-1}^2(s)\alpha'(s)\Sigma^{-1}(s)\alpha(s))ds + c_{n-1}(s)\alpha'(s)\Sigma^{-1}(s)\sigma(s)dW_s,$$

则

$$a_n(t) = Ee^{2Z_n(t)},$$

$$b_n(t) = Ee^{Z_n(t)}.$$

将  $c_n(t)$  的形式改写为

$$c_n(t) = \frac{b_n^2(t)}{a_n(t)} + \lambda \frac{b_n(t)}{a_n(t)} - 1.$$

对于上式的第一项, 我们有

$$b_n^2(t) = (Ee^{Z_n(t)})^2 \leq Ee^{2Z_n(t)} = a_n(t),$$

所以,

$$\frac{b_n^2(t)}{a_n(t)} \leq 1.$$

对于第二项,

$$\lambda \frac{b_n(t)}{a_n(t)} = \lambda \frac{Ee^{Z_n(t)}}{Ee^{2Z_n(t)}} = \lambda \frac{Ee^{Z_n(t)} I_{(Z_n(t) \geq 0)} + Ee^{Z_n(t)} I_{(Z_n(t) < 0)}}{Ee^{2Z_n(t)} I_{(Z_n(t) \geq 0)} + Ee^{2Z_n(t)} I_{(Z_n(t) < 0)}} \leq \lambda \frac{Ee^{Z_n(t)} I_{(Z_n(t) \geq 0)} + 1}{Ee^{2Z_n(t)} I_{(Z_n(t) \geq 0)}} \leq 2\lambda$$

对于所有的  $t \in [0, T]$  成立. 综上,

$-1 \leq c_n(t) \leq 2\lambda, \forall t \in [0, T], n = 1, 2, \dots,$  一致有界性得证.

② 证明序列  $\{c_n(t)\}$  是等度连续的.

由  $\{c_n(t)\}$  的一致有界性容易推出  $\{a_n(t)\}, \{b_n(t)\}$  和  $\{\dot{a}_n(t)\}, \{\dot{b}_n(t)\}$  的一致有界性. 而对于所有的  $t \in [0, T]$ , 序列  $\{c_n(t)\}$  显然是连续可微的. 又

$$\dot{c}_n(t) = \frac{a_n(t)\dot{b}_n(t)(\lambda + 2b_n(t)) - \dot{a}_n(t)b_n(t)(\lambda + b_n(t))}{a_n^2(t)},$$

由  $\{a_n(t)\}, \{b_n(t)\}$  和  $\{\dot{a}_n(t)\}, \{\dot{b}_n(t)\}$  的一致有界性以及  $\{a_n(t)\}$  严格大于 0 可以推出  $\{\dot{c}_n(t)\}$  在  $C[0, T]$  中也是一致有界的. 所以对于任意的  $s, t \in [0, T]$ , 有

$$|c_n(t) - c_n(s)| = \left| \int_0^1 \frac{d}{du} c_n(s + u(t-s)) du \right| = \left| (t-s) \int_0^1 \dot{c}_n(s + u(t-s)) du \right| \leq K(t-s),$$

对某个与  $n$  无关的常数  $K$  成立. 故序列  $\{c_n(t)\}$  是等度连续的. 运用定理 2.3, 存在  $c(t) \in C[0, T]$  使得  $\{c_n(t)\}$  的一个子序列  $c_{n_i}(t) \rightarrow c(t)$ . 在式(21)中取极限即可证明  $c(t)$  是方程的解, 存在性得证.

遗憾的是,  $c(t)$  的解析解无法求得, 只能退而求其次得到  $c(t)$  的数值解. 具体做法是, 重复式(21)的迭代过程. 而在给定平衡策略(即最优配置金额)后, 相应的最优配置比例也可得到

$$\hat{p}(t, y) = c(t)\Sigma^{-1}(t)\alpha(t) \quad (22)$$

**注 2.1** 根据式(19), 财富过程  $Y(t)$  永远保持正值, 而在基于常风险厌恶求得的最优策略下, 这一点并不能得到保证. 这是本文策略的一个优势.

### 3 最优策略的性质

#### 3.1 与常风险厌恶下最优策略的对比

在这一部分, 通过一个数值例子来比较我们求得的最优策略与基于常风险厌恶求得的最优策略的区别. 假定有一个由两只股票和一项无风险资产组成的资产组合, 股票的对数价格为  $X(t) = (x_1(t), x_2(t))' = (\ln 1, \ln 2)'$ , 其他相关参数为

$$\theta = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}, A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

投资者最初的财富总额被设定为  $Y_0 = 10$ , 无风险利率为 3%.

这里, 我们通过对式(21)进行迭代, 得到  $c(t)$  一个较为精确的估计值, 然后画出  $c(t)$  的图像(图 1 和图 2). 从图 1 和图 2 中可以看出, 无论  $\lambda$  和  $T$  的取值是多少,  $c(t)$  的值都随着时间的增加而增加.

接下来我们在投资期  $T = 3$  和参数  $\lambda = 1$  时, 比较两种策略下最优配置额度和比例随时间变化的情况, 结果如图 3 所示. 从投资行为的角度来看, 两种策略有两个不同点. 首先, 基于状态相依风险厌恶求得的最优策略显示, 配置额度和比例随着时间有一个增加的趋势(由于做多记为正, 做空记为负, 故这里的增加是指图中额度和比例的绝对值越来越大, 下同), 而对基于常风险厌恶求得的最优策略, 这个

趋势是降低的. 需要指出的是, 在前一种策略下, 配置额度和比例之所以有增加的趋势是因为  $c(t)$  关于时间递增. 这种不同的投资特性也体现在投资者总财富值的波动性上. 图 4 展示了投资者总财富值随时间变化的情况. 显然, 在前一种策略下, 投资者

财富值的波动性在逐渐增加, 而在后一种策略下, 波动性是逐渐降低的. 其次, 在基于状态相依风险厌恶求得的最优策略下, 配置在各风险资产上的额度与财富总额有关, 比例与财富总额无关. 而在基于常风险厌恶求得的最优策略下, 结论恰好是相反的.

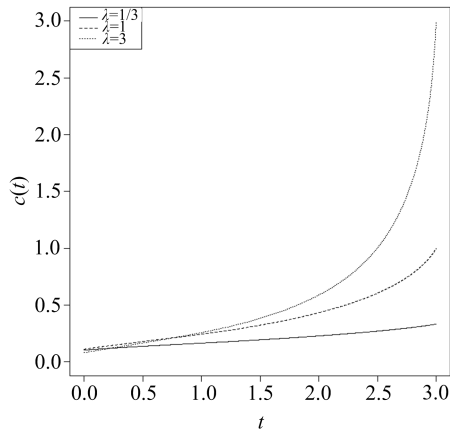


图 1  $T=3$  时, 不同的  $\lambda$  对应的  $c(t)$   
Fig. 1  $c(t)$  for different  $\lambda$  when  $T=3$

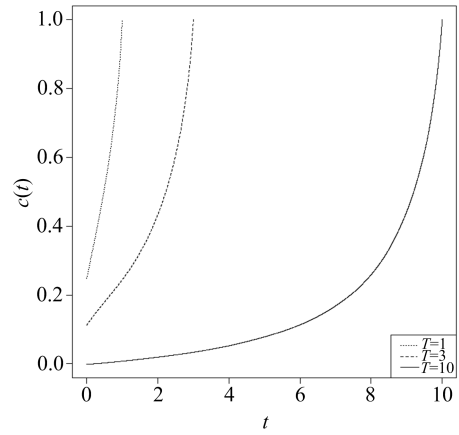
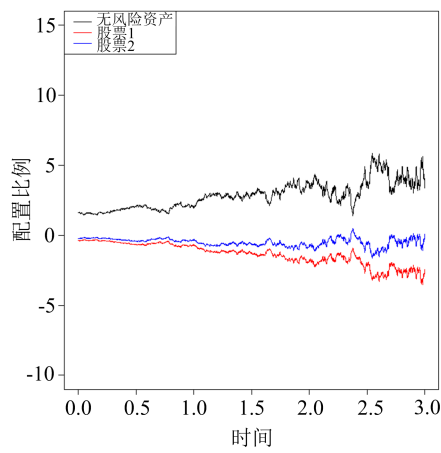
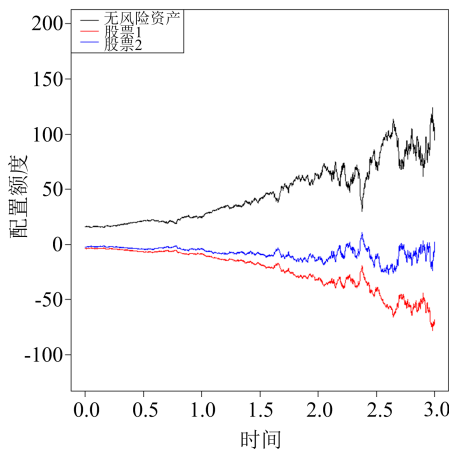
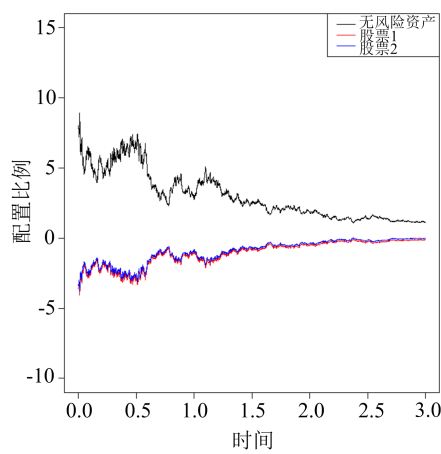
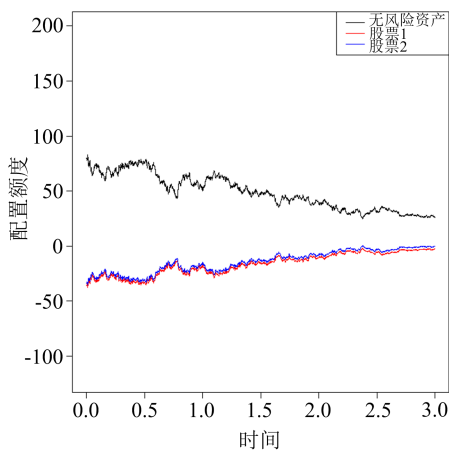


图 2  $\lambda=1$  时, 不同的  $T$  对应的  $c(t)$   
Fig. 2  $c(t)$  for different  $T$  when  $\lambda=1$



(a) 基于状态相依风险厌恶求得的最优策略



(b) 基于常风险厌恶求得的最优策略

图 3 两种策略下配置在不同资产上的额度和比例

Fig. 3 Allocation amount and proportion of assets under two strategies

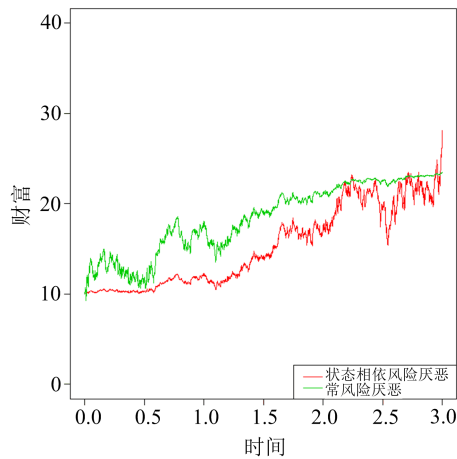


图 4 两种策略下的财富值

Fig. 4 Wealth under two strategies

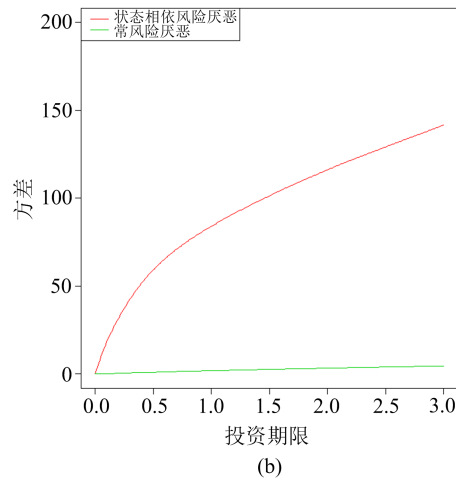
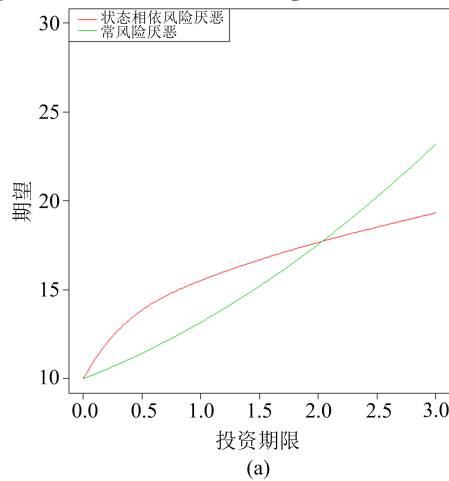


图 5 两种策略下最终财富的期望与方差

Fig. 5 Expectation and variance of terminal wealth under two strategies

尽管更大的方差使状态相依风险厌恶下的最优策略看起来缺乏吸引力,但我们要指出,如果从投资的稳健性来考虑问题,该策略表现得更好.对于投资者而言,稳健的投资策略意味着在整个投资期间内,各项资产的配置比例不会出现巨大的波动.如果我们选取整个投资期内各时间节点的资产配置比例作为一个时间序列,那么该时间序列的方差就可以衡量投资期内资产配置比例的波动性,即投资的稳健性.我们将这一方差值称作“配置比例方差”.图 6 展示了两策略下的“配置比例方差”(这里的方差值也是用 1 000 次模拟计算出来的估计值).图 6(a)显示,在基于状态相依风险厌恶求得的最优策略下,方差值有一个上界,这意味着在整个投

投资行为上的差异使得两种策略下的投资结果也不同.这种结果具体表现在投资人的最终财富上面.这里我们列举了最终财富的期望和方差这两个观测指标与投资期限的关系,结果如图 5 所示(期望和方差均为使用 1 000 次模拟计算出来的估计值).

在基于状态相依风险厌恶求得的最优策略下,最终财富有着更大的方差.这是因为在该策略下,配置在各风险资产上的额度与投资者拥有的财富水平有关.由于财富水平在整个投资期内都在不断变动,因而会给投资行为带来更大的不确定性,进而增大了结果的不确定性.

资期内资产分配不会出现过大的波动,投资策略表现得更加稳定.对于常风险厌恶下的最优策略(图 6(b)),很明显,随着投资期限的增加,策略表现得越来越不稳健.

一个有趣的现象是,在基于状态相依风险厌恶求得的最优策略下,最终财富的期望和方差都是投资期限的凹函数(如图 5 所示).这里,我们也将对其进行解释.注意到不同的投资期限意味着不同的投资策略,从而对应着不同的投资行为.所以我们将投资行为的角度进行分析.我们选取各项资产的配置比例作为观测投资行为的指标,比较不同投资期限( $T=0.2, 0.8$  和  $1.4$ )下这一指标的差异,结果如图 7 所示.



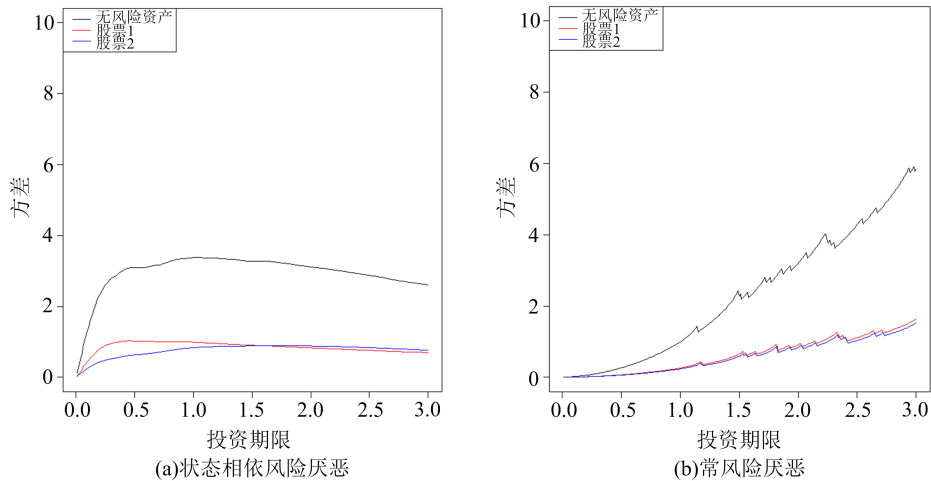


图 6 两种策略下各资产配置比例的方差值

Fig. 6 Variance of allocation proportion under two strategies

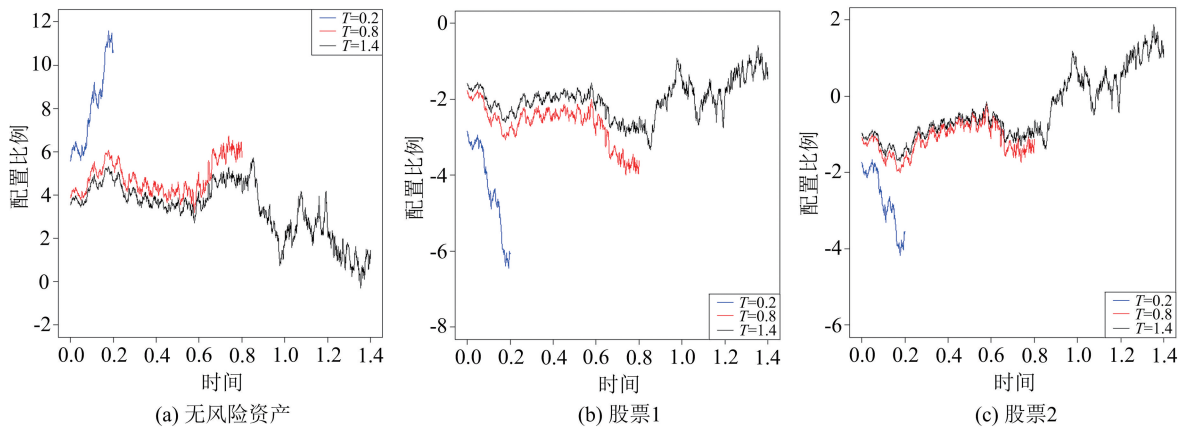


图 7 不同投资期限下各资产的配置比例

Fig. 7 Allocation proportion of assets for different investment period

表 1 平均配置比例

Tab. 1 Average value of allocation proportion

	$T=0.2$	$T=0.8$	$T=1.4$
无风险资产	8.033 06	4.788 51	3.361 15
股票 1	-4.321 61	-2.648 58	-1.998 95
股票 2	-2.711 45	-1.139 93	-0.362 20

显然,  $T=0.2$  与  $0.8$  间的差异比  $0.8$  与  $1.4$  间的差异更大. 各资产配置比例在整个投资期内的平均水平(表 1)也反映了这一点. 可以看到, 投资行为在期限较短时受期限的影响更大. 而投资行为决定

了投资结果, 即最终财富的期望与方差. 因而当投资期限较短时, 最终财富的期望和方差对投资期限的变动会更加敏感, 从而解释了函数的凹性.

### 3.2 协整系数矩阵 A 的影响

协整系数矩阵中的非对角元体现了各股票价格间的相关关系, 因而我们可以通过改变矩阵 A 来研究具有不同相关性的股票在最优策略下的表现差异. 我们选取表 2 中四个矩阵来表示股票 1 和股票 2 价格之间的相关性. 令投资期  $T=3, \lambda=1$ , 并沿用 3.1 节例子中的各个参数, 图 8 展示了四种状态下各资产配置比例随时间的变化状况.

表 2 相关性与协整系数矩阵

Tab. 2 Correlation and cointegration coefficients matrix

相关性	强负相关	强正相关	弱负相关	弱正相关
A	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.3 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -0.3 \\ -0.3 & 1 \end{pmatrix}$

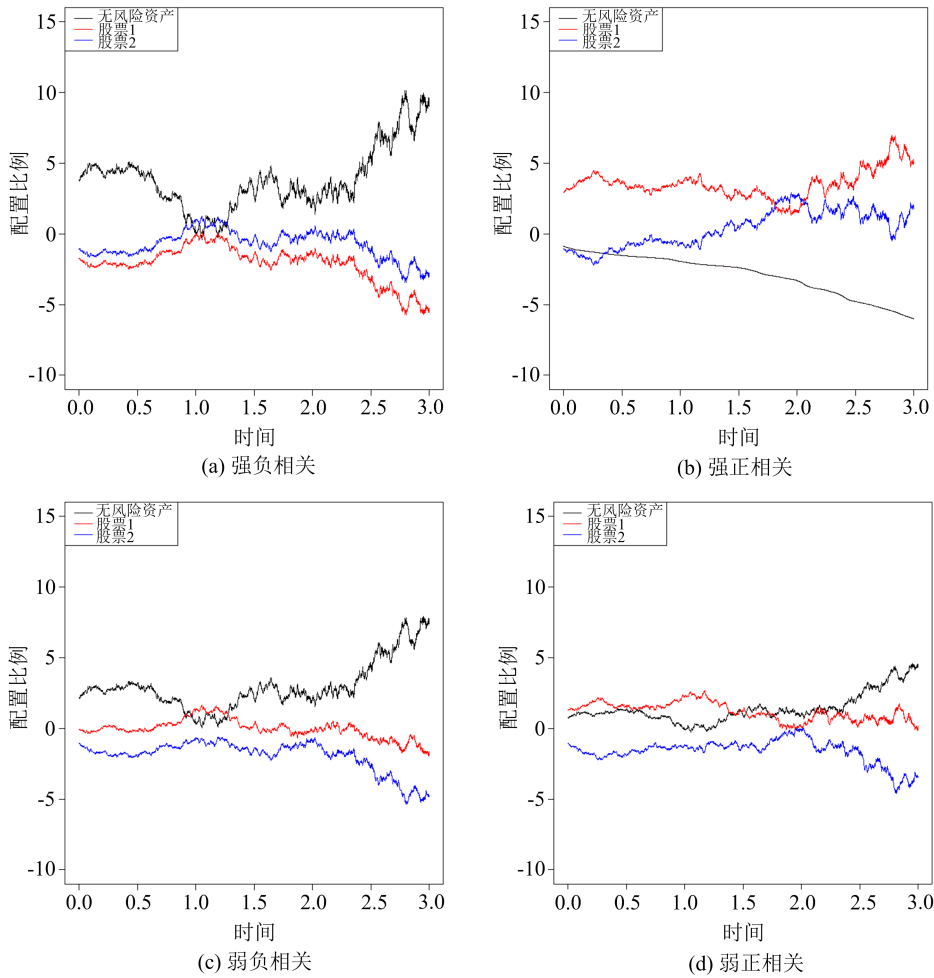


图 8 四种相关关系下各资产的配置比例

Fig. 8 Allocation proportion of assets for four correlations

我们可以得到以下结论. 首先, 当股票价格间的相关性较强时, 各资产配置比例的变化幅度也比较大. 这意味着当股票价格呈现越来越强的相关性时, 投资者被建议实施更加激进的投资行为. 其次, 当两只股票价格呈现负相关关系时, 两只股票的配置比例呈现相同的变化趋势. 而当股票价格呈现正相关关系时, 配置比例的变化趋势截然相反. 因而, 一旦具有协整关系的股票组合偏离平衡时, 对于价格负相关的股票, 应当同时执行相同的操作方向. 而对于价格正相关的股票, 操作方向应当是相反的.

### 3.3 均值回复速度 $\epsilon$ 的影响

均值回复速度衡量了具有协整关系的资产组合在价格偏离平衡时再次回到平衡的速度. 我们通过对协整系数矩阵  $A$  做一个扰动  $\epsilon A$  来引入这个概念, 其中  $\epsilon \in (0, 1]$ . 图 9 显示的是不同回复速度对最终财富期望的影响, 同样, 这里也是用 1 000 次模拟进行估计.

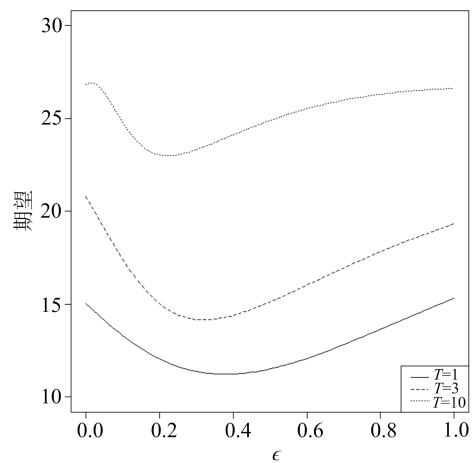


图 9 不同投资期限下, 最终财富期望与均值回复速度的关系

Fig. 9 Expectation of terminal wealth and mean-reverting speed for different investment period

从图 9 中可以观测到, 随着均值回复速度的增加, 期望值先递减后递增. 为了解释这种投资现象, 我们依旧选择从投资行为的角度出发来考虑问题.

以  $T=1$  为例,我们使用各资产的配置比例来观测投资行为,将这一数值在整个投资期内的平均值作为衡量投资行为水平的指标.图 10 表示的是这一指标与均值回复速度的关系,可以看出配置比例均值

有着和最终财富期望值一样的趋势.更高的配置比例均值意味着在整个投资期内投资行为更加活跃,因而可以依照最优策略获得更高的收益,从而提高了最终财富的期望水平.

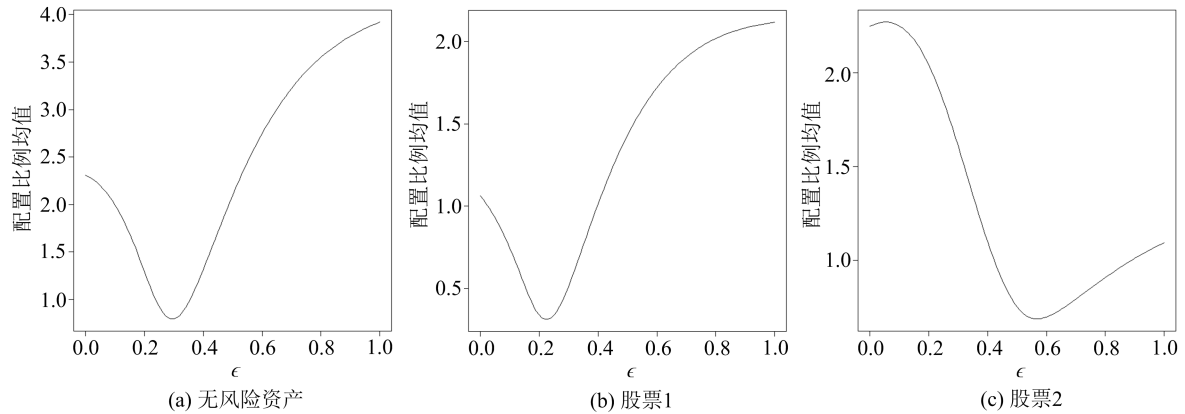


图 10 配置比例平均值与均值回复速度的关系

Fig. 10 Average value of allocation proportion and mean-reverting speed

## 5 结论

本文在状态相依风险厌恶的均值-方差模型下研究了协整资产的最优分配问题,并得到了最优动态交易策略,其形式为  $\hat{u}(t, y) = c(t)y\Sigma^{-1}(t)\alpha(t)$ . 我们指出,这个策略不仅依赖于时间也依赖于投资者的财富水平,且可以保证投资人的财富总额始终为正.相较于基于常风险厌恶均值-方差模型求得的策略,本文的策略更加符合常理.

将得到的策略与基于常风险厌恶求得的最优策略加以比较,数值结果显示,从资产分配的角度来看,本文策略表现得更加稳健.此外,在本文策略下,资产配置额度和比例(做多或者做空)会随着时间有一个增加的趋势,而在基于常风险厌恶求得的最优策略下,这个趋势是下降的.本文还研究了协整系数矩阵和均值回复速度对投资的影响,并从投资行为的角度解释这些影响.

在构建模型的时候,我们假设风险厌恶水平为  $1/(\lambda y)$ . 我们指出,选择这样的假定是因为没有实证研究讨论风险厌恶水平的具体形式,而相关的理论研究均采取此种形式.但从长远来看,有必要在得到相关的实证研究后再对模型进行讨论.另外,由于样本数据很难找到,本文并没有对策略进行实证检验.理论研究的实证检验一直都是困难的事情,我们希望以后能有机会对得到的策略进行实证检验.

## 参考文献(References)

- [1] KOLLIAS C, PAPADAMOU S, SIRIOPOULOS C. Stock markets and effective exchange rates in European countries: Threshold cointegration findings [J]. Eurasian Economic Review, 2016, 6: 215-274.
- [2] CHIEN M S, LEE C C, HU T C, et al. Dynamic Asian stock market convergence: Evidence from dynamic cointegration analysis among China and ASEAN-5[J]. Economic Modelling, 2015, 51: 84-98.
- [3] CERCHI M, HAVENNER A. Cointegration and stock prices: The random walk on Wall Street revisited[J]. Journal of Economic Dynamic & Control, 1988, 12: 33-346.
- [4] TAYLOR M, TONKS I. The internationalisation of stock markets and the abolition of U. K. exchange control[J]. Review of Economics and Statistics, 1989, 71: 332-336.
- [5] MYLONIDIS N, KOLLIAS C. Dynamic European stock market convergence: Evidence from rolling cointegration analysis in the first euro-decade [J]. Journal of Banking & Finance, 2010, 34: 2056-2064.
- [6] VIDYAMURTHY G. Pairs Trading-Quantitative Methods and Analysis[M]. Wiley: New York, 2004.
- [7] LIN Y X, MCCRAE M, GULATI C. Loss protection in pairs trading through minimum profit boundings: A cointegration approach [J]. Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences, 2006, 2006: 73803.
- [8] LAW K F, LI W K, YU P L H. A single-stage

- approach for cointegration-based pairs trading [J]. *Finance Research Letters*, 2018, 26: 177-184.
- [9] MIAO G J. High frequency and dynamic pairs trading based on statistical arbitrage using a two-stage correlation and cointegration approach [J]. *International Journal of Economics and Finance*, 2014, 6: 96-110.
- [10] HUANG Z, MARTIN F. Optimal pairs trading strategies in a cointegration framework [EB/OL]. [2018-01-01] <https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01566803/document>.
- [11] RAD H, LOW R K Y, FAFF R. The profitability of pairs trading strategies; Distance, cointegration and copula methods[J]. *Quantitative Finance*, 2016, 16: 1541-1558.
- [12] OLOF H, ISAK A. Pairs trading: An extension to the cointegration approach; Can a cointegration approach based on low frequency data trading still beat the market in contemporary years[EB/OL]. [2018-01-01] <http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:uu:diva-324593>
- [13] WACHTER J A. Portfolio and consumption decisions under mean-reverting returns: An explicit solution for complete market [J]. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 2002, 37: 63-91.
- [14] JUREK J W, YANG H. Dynamic portfolio selection in arbitrage [R]. Boston, MA: Harvard Business School, 2007.
- [15] CHIU M C, WONG H Y. Mean-variance portfolio selection of cointegrated assets [J]. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 2011, 35: 1369-1385.
- [16] MARKOWITZ H. Portfolio selection[J]. *Journal of Finance*, 1952, 7: 77-91.
- [17] CUI X Y, LI D, WANG S Y, et al. Better than dynamic mean-variance: Time inconsistency and free cash flow stream[J]. *Mathematical Finance*, 2010, 22: 346-378.
- [18] BASAK S, CHABAKAURI G. Dynamic mean-variance asset allocation[J]. *The Review of Financial Studies*, 2010, 23: 2970-3016.
- [19] ZENG Y, LI Z F. Optimal time-consistent investment and reinsurance policies for mean-variance insurers[J]. *Insurance; Mathematics and Economics*, 2011, 49: 145-154.
- [20] WANG J, FORSYTH P A. Continuous time mean variance asset allocation: A time-consistent strategy [J]. *European Journal of Operational Research*, 2011, 209: 184-201.
- [21] CHIU M C, WONG H Y. Dynamic cointegrated pairs trading: Mean-variance time-consistent strategies[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015, 290: 516-534.
- [22] COHN R A, LEWELLEN W G, LEASE R C, et al. individual investor risk aversion and investment portfolio composition [J]. *The Journal of Finance*, 1975, 30: 605-620.
- [23] GUISSO L, PAIELLA M. Risk aversion, wealth and background risk[J]. *Journal of the European Economic Association*, 2008, 6: 1109-1150.
- [24] SHAW K L. An empirical analysis of risk aversion and income growth [J]. *Journal of Labor Economics*, 1996, 14: 626-653.
- [25] BJÖRK T, MURGOCCI A. A general theory of Markovian time inconsistent stochastic control problems[R/OL]. [2018-01-01] <https://ssrn.com/abstract=1694759>.
- [26] BJÖRK T, MURGOCCI A, ZHOU X Y. Mean-variance portfolio optimization with state-dependent risk aversion[J]. *Mathematical Finance*, 2014, 24(1): 408-413.

## 附录

### A1 广义 HJB 方程的定义<sup>[5]</sup>

广义 HJB 方程的一般形式如下:

$$\inf_{u \in U} \{ (A^u V)(t, y) - (A^u f)(t, y, y) + (A^u f^y)(t, y) - A^u (G \diamond g)(t, y) + (H^u g)(t, y) \} = 0$$

$$(A^u f^z)(t, y) = 0, (A^u g)(t, y) = 0, 0 \leq t \leq T,$$

$$V(T, y) = F(y, y) + G(y, y), f^z(T, y) = F(z, y), g(T, y) = y,$$

其中,算子  $A^u$  的定义如下:

$$A^u = \frac{\partial}{\partial t} + (r(t)Y(t) + u'(t)\alpha(t)) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}u'(t)\Sigma(t)u(t) \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$\hat{u}$  表示使第一个方程等号左侧式子取得最小值的策略. 其他符号定义如下:

$$f^z(t, y) = f(t, y, z), (G \diamond g)(t, y) = G(y, g(t, y)),$$

$$H^u g(t, y) = G_z(y, g(t, y)) \cdot A^u g(t, y), G_z(y, z) = \frac{\partial G}{\partial z}(y, z).$$

关于  $f^z$  和  $g$  的方程说明  $f^z(t, Y_t^{\hat{u}})$  和  $g(t, Y_t^{\hat{u}})$  是鞅, 通过边界条件我们可以推出

$$f(t, y, z) = E_{t,y}[F(z, Y_T^{\hat{u}})], g(t, y) = E_{t,y}[Y_T^{\hat{u}}].$$

## A2 命题 2.1 的证明

令

$$A^u = \frac{\partial}{\partial t} + (r(t)Y(t) + u'(t)\alpha(t)) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}u'(t)\Sigma(t)u(t) \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

我们有

$$A^u V = V_t + (r(t)Y(t) + u'(t)\alpha(t))V_y + \frac{1}{2}u'(t)\Sigma(t)u(t)V_{yy},$$

$$A^u f^y(t, y) = f_t(t, y, y) + (r(t)Y(t) + u'(t)\alpha(t))f_y(t, y, y) + \frac{1}{2}u'(t)\Sigma(t)u(t)f_{yy}(t, y, y),$$

$$A^u f(t, y, y) = f_t(t, y, y) + (r(t)Y(t) + u'(t)\alpha(t))\{f_y(t, y, y) + f_z(t, y, y)\} + \frac{1}{2}u'(t)\Sigma(t)u(t)\{f_{yy}(t, y, y) + f_{zz}(t, y, y) + 2f_{yz}(t, y, y)\}.$$

另一方面, 因为  $(G \diamond g)(t, y) = G(y, g(t, y))$ , 所以我们有

$$\begin{aligned} A^u(G \diamond g)(t, y) &= G_z g_t + (r(t)Y(t) + u'(t)\alpha(t))G_y + (r(t)Y(t) + u'(t)\alpha(t))G_z g_y + \\ &\quad \frac{1}{2}u'(t)\Sigma(t)u(t)\{G_{yy} + G_z g_{yy} + 2G_{yz} g_y + G_{zz} g_y^2\} = \\ &\quad G_z A^u g + \frac{1}{2}u'(t)\Sigma(t)u(t)G_{zz} g_y^2, \end{aligned}$$

其中,  $G = G(y, g(t, y))$ . 注意到

$$H^u g(t, y) = G_z(y, g(t, y)) \cdot A^u g(t, y),$$

很容易得到

$$V_t + \inf_{u \in U} \{(ry + u'\alpha)(V_y - f_z) + \frac{1}{2}u'\Sigma u(V_{yy} - f_{zz} - 2f_{yz} + 2g_y^2)\} = 0,$$

$$f_t(t, y, z) + (ry + \tilde{u}'\alpha)f_y(t, y, z) + \frac{1}{2}\tilde{u}'\Sigma\tilde{u}f_{yy}(t, y, z) = 0,$$

$$g_t(t, y) + (ry + \tilde{u}'\alpha)g_y(t, y) + \frac{1}{2}\tilde{u}'\Sigma\tilde{u}g_{yy}(t, y) = 0.$$