第49卷第5期 中国科学技术大学学报 Vol. 49, No. 5
2019年5月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA May 2019
文章编号:0253-2778(2019)05-0382-08

实数域上三维李双代数的 Atiyah class

申丹丹,乔 雨

(陕西师范大学数学与信息科学学院,陕西西安 710119)

摘要：设 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*,\gamma)$ 是一个李双代数,这里 $\gamma:\mathfrak{g}\rightarrow\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ 是1闭上链,即 $[\gamma]\in H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})$. 首先通过 γ 给出了李双代数 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*,\gamma)$ 的 Atiyah class 的定义,然后结合实数域上所有三维李双代数的分类情况,计算并讨论了这些李双代数的 Atiyah class.

关键词：李双代数；Atiyah class；r 矩阵

中图分类号：O152.5 **文献标识码**：A doi：10.3969/j.issn.0253-2778.2019.05.005

2010 Mathmatics Subject Classification：Primary 17B62；Secondary 17B55

引用格式：申丹丹,乔雨. 实数域上三维李双代数的 Atiyah class[J]. 中国科学技术大学学报,2019,49(5):382-389.
SHEN Dandan, QIAO Yu. Atiyah classes of three-dimensional real Lie bialgebras[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2019,49(5):382-389.

Atiyah classes of three-dimensional real Lie bialgebras

SHEN Dandan, QIAO Yu

(*School of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an* 710119, *China*)

Abstract: Let $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*,\gamma)$ be a Lie bialgebra, where the map $\gamma:\mathfrak{g}\rightarrow\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ is a 1-cocycle, that is, $[\gamma]\in H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})$. First, the definition of Atiyah class of a Lie bialgebra based on the map γ was given. Combining the classification results of three-dimensional real Lie bialgebras, Atiyah classes of these Lie bialgebras were computed and analyzed.

Key words: Lie bialgebras; Atiyah class; r-matrix

0 引言

近年来,对 Atiyah class 的研究方兴未艾. 文献[1]最早在探究全纯向量丛上全纯联络存在的阻碍时提出了 Atiyah class. 此后,许多学者开始关注并探究 Atiyah class. 文献[2]定义了一种 Atiyah class 来对黎曼叶状结构进行研究. 文献[3-4]基于上同调与 Operad 理论对 Atiyah class 进行更深入的研究,并揭示出 Atiyah class 与 Rozansky-Witten 不变量之间的关系. 文献[5]以微分分次代数为依据,阐述了 Atiyah class. 文献[6]对 dg-vector bundle 定义了 Atiyah class. 文献[7]对李代数胚上的向量丛定义了 Atiyah class. 文献[8]基于 Atiyah class 的相关理论,对李代数胚定义了 Rozansky-Witten 不变量. 文献[9]定义了李双代数的 Atiyah class,并探究了一些基本性质.

李双代数是代数理论中重要的研究内容,与李代数理论有着紧密的联系. 文献[10]详细介绍了李

收稿日期：2017-12-20；**修回日期**：2019-04-11
基金项目：国家自然科学基金(11571211),中央高校基金科研业务费专项基金(GK201803003)资助.
作者简介：申丹丹,女,1994年生,硕士. 研究方向:李代数与物理几何. E-mail：shendandan@snnu.edu.cn
通讯作者：乔雨,博士/副教授. E-mail：yqiao@snnu.edu.cn

双代数的相关理论. 文献[11]对实数域上所有三维李双代数进行了分类. 本文利用上同调类 $[\gamma]\in H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})$ 和文献[9]中的结果给出李双代数 Atiyah class 的简化定义,并根据李双代数的一些相关理论及分类结果,详细计算了实数域上三维李双代数的 Atiyah class.

1　预备知识

首先对文中出现的一些符号进行简要说明. 在本文中,我们假设李代数是实数域 $\mathbb{R}$ 上的有限维向量空间.

设 $\mathfrak{g}$ 是李代数,向量空间 M 是一个 $\mathfrak{g}$ 模,ρ 为 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathrm{End}(M)$ 的同态映射,那么 $\mathfrak{g}$ 作用在 M 上即可表示为

$$\mathfrak{g}\times M\to M:(x,m)\to\rho(x)\cdot(m),$$
$$\forall x\in\mathfrak{g},\ \forall m\in M.$$

设 $\mathfrak{g}$ 是李代数,向量空间 $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}\otimes\mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$ 的 $\mathfrak{g}$ 模结构分别定义如下:

$$\rho(x)\cdot(y\otimes z)=ad_x(y)\otimes z+y\otimes ad_x(z),$$
$$\forall x,y,z\in\mathfrak{g}.$$
$$\rho(x)\cdot(y\otimes T)=ad_x(y)\otimes T+y\otimes[-ad_x^*,T],$$
$$\forall x,y\in\mathfrak{g},\ \forall T\in\mathrm{End}(\mathfrak{g}^*).$$

设 $\mathfrak{g}$ 是李代数,向量空间 M 是一个 $\mathfrak{g}$ 模,我们称:

$$C^k(\mathfrak{g},M)=\{f:\wedge^k g\to M\mid f\ \text{是线性映射}\}$$
$$(k\ \text{为非负整数})$$

是 $\mathfrak{g}$ 的(M 值)k 上链空间.

设 $\delta_0:C^0(\mathfrak{g},M)=M\to C^1(\mathfrak{g},M)$, 即对 $\forall m\in M$, $x\in\mathfrak{g}$, 有 $(\delta_0 m)(x)=\rho(x)\cdot m$.

设 $\delta_1:C^1(\mathfrak{g},M)\to C^2(\mathfrak{g},M)$, 即对 $\forall x,y\in\mathfrak{g}$, $\forall u\in C^1(\mathfrak{g},M)$, 有 $(\delta_1 u)(x\wedge y)=\rho(x)\cdot u(y)-\rho(y)\cdot u(x)-u([x,y])$.

我们易证 $\delta_1\delta_0=0$.

设 $u\in C^1(\mathfrak{g},M)$, 如果 $\delta_1 u=0$, 则我们把 1 上链 u 称为 1 闭上链;如果存在 $m\in C^0(\mathfrak{g},M)=M$, 有 $\delta_0 m=u$ 成立,则我们把 1 上链 u 称为 1 上边缘.

由此,我们称

$$H^1(\mathfrak{g},M)=\ker(\delta_1)/\mathrm{Im}(\delta_0)$$

为 $\mathfrak{g}$ 的一阶上同调.

以下回顾李双代数的一些理论.

定义 1.1[10]　设 $\mathfrak{g}$ 是李代数,若对于线性映射 $\gamma:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$, 满足以下两个条件:

(i) γ 的对偶映射 ${}^t\gamma:\mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{g}^*$ 是反对称双线性映射,并且定义了 $\mathfrak{g}^*$ 上的李括号形式,满足 Jacobi 恒等式;

(ii) $\gamma\in C^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})$ 是 1 闭上链,且 $\mathfrak{g}$ 通过伴随表示 $ad^{(2)}$ 作用于 $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$;

则称 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*,\gamma)$ 为李双代数.

条件(i)中 1 闭上链 γ 可以通过以下式子定义 $\mathfrak{g}^*$ 上的一个李括号:

$$\langle[\xi,\eta],x\rangle=\langle\gamma(x),\xi\otimes\eta\rangle,$$
$$\forall\xi,\eta\in\mathfrak{g}^*,\forall x\in\mathfrak{g},$$

因此 γ 也可看成是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ 的映射.

条件(ii)中的 $ad^{(2)}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ 的伴随表示,即

$$ad^{(2)}:\mathfrak{g}\to\mathrm{End}(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}),$$
$$x\to ad_x\otimes id+id\otimes ad_x,\ \forall x\in\mathfrak{g}.$$

因为 $\gamma\in C^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})$ 是 1 闭上链,那也就意味着 2 上链 $\delta_1\gamma=0$, 即

$$ad_x^{(2)}(\gamma(y))-ad_y^{(2)}(\gamma(x))-\gamma([x,y])=0,$$
$$\forall x,y\in\mathfrak{g}.$$

定义 1.2　设 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*,\gamma)$ 是李双代数,映射 $\gamma:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ 是 1 闭上链,如果 1 闭上链也是 1 上边缘,即存在 $R\in\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$, 有 $\gamma=\delta_0 R$ 成立,则相应地称此李双代数为上边缘李双代数,$R\in\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ 为 r 矩阵.

从文献[9]中我们可知:设 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*,\gamma)$ 是李双代数,映射 $\gamma:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ 是 1 闭上链,F 是 $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}\otimes\mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$ 的同态映射,即

$$F:\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\otimes\mathrm{End}(\mathfrak{g}^*),$$
$$x\otimes y\to x\otimes(-ad_y^*),\forall x,y\in\mathfrak{g},$$

则由 F 可诱导出一个映射 $F_*:H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})\to H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}\otimes\mathrm{End}(\mathfrak{g}^*))$, 满足

$$F_*(\alpha)(x)=F(\alpha(x)),$$
$$\forall\alpha\in H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}),\forall x\in\mathfrak{g}.$$

又设 $\lambda\in\mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$, 并且对任意的 $x\in\mathfrak{g}$, $\mu\in\mathfrak{g}^*$, 有 $\lambda(x,\mu)=ad^*_{ad^*_\mu(x)}\in\mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$, 则 λ 可看成是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}\otimes\mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$ 的一个映射,即 $\lambda:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\otimes\mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$.

现在,我们有以下交换图表:

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d, "F"] & C^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "F"] & C^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}) \arrow[r] \arrow[d, "F"] & \cdots \\
\mathfrak{g}\otimes \mathrm{End}(\mathfrak{g}^*) \arrow[r, "\delta_0"] & C^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}\otimes \mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)) \arrow[r, "\delta_1"] & C^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}\otimes \mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)) \arrow[r] & \cdots.
\end{tikzcd}
$$

由于 λ 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}\otimes \mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$ 的映射，因此 $\lambda\in C^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}\otimes\mathrm{End}(\mathfrak{g}^*))$，又因为 γ 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ 的映射，则 $\gamma\in C^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})$，由图表的交换性，可得 $\lambda=-F\circ\gamma$（这一结论的证明详见文献[9]），同时，由 $[\gamma]\in H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})$，可得到 $[\lambda]=-F_*[\gamma]\in H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}\otimes\mathrm{End}(\mathfrak{g}^*))$.

因此我们给出如下定义：

定义 1.3[9] 上同调类 $[\lambda]\in H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}\otimes\mathrm{End}(\mathfrak{g}^*))$ 称为李双代数 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*,\gamma)$ 的 Atiyah class.

2 主要定理

在计算实数域上三维李双代数的 Atiyah class 时，我们需要了解以下引理与定理. 以下引理与定理中出现的 i_x 表示一种缩并映射，即对任意 $x\in\mathfrak{g}$，$W\in\wedge^k\mathfrak{g}^*$，映射：

$$
i_x:\wedge^k\mathfrak{g}^*\to\wedge^{k-1}\mathfrak{g}^*,\quad W\to i_xW.
$$

设 $W=\eta_1\wedge\eta_2\wedge\cdots s\wedge\eta_k$，$\eta_j\in\mathfrak{g}^*$，$j=1,2,\cdots,k$，则

$$
i_xW=i_x(\eta_1\wedge\eta_2\wedge\cdots\wedge\eta_k)=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\langle\eta_j,x\rangle\eta_1\wedge\eta_2\wedge\cdots\wedge\widehat{\eta_j}\wedge\cdots\wedge\eta_k.
$$

引理 2.1 设 $\mathfrak{g}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上一个三维李代数，$\kappa\in\mathfrak{g}^*$，$A=A^*:\mathfrak{g}^*\to\mathfrak{g}$，且满足 $A\kappa=\mathbf{0}$，则李代数 $\mathfrak{g}$ 的李括号形式由

$$
\left.\begin{aligned}
&[x,y]\overset{\triangle}{=\!=}i_\kappa(x\wedge y)+A(i_{x\wedge y}V^*),\\
&\forall x,y\in\mathfrak{g},V^*\in\wedge^3\mathfrak{g}^*
\end{aligned}\right\}\tag{1}
$$

来确定；同样的，若 $\mathfrak{g}^*$ 是 $\mathbb{R}$ 上三维李代数，$\mathfrak{g}^*$ 上的李括号形式由以下公式确定：

$$
\left.\begin{aligned}
&[\alpha,\beta]\overset{\triangle}{=\!=}i_\xi(\alpha\wedge\beta)+B(i_{\alpha\wedge\beta}V),\\
&\forall\alpha,\beta\in\mathfrak{g}^*,V\in\wedge^3\mathfrak{g}
\end{aligned}\right\}\tag{2}
$$

式中，$\xi\in\mathfrak{g}$，$B=B^*:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}^*$，并且满足 $B\xi=\mathbf{0}$.

证明 此引理详细证明见文献[11].

由引理 2.1 中李括号形式的确定方式，我们可知：实数域上的三维李代数 $\mathfrak{g}$ 与兼容对 (κ,A) 之间存在一一对应关系，即每一对 (κ,A) 决定一种李代数结构，每一兼容对 (κ,A,ξ,B) 决定一种李双代数结构.

为了确定李双代数 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*,\gamma)$ 中映射 γ 的具体形式，我们给出以下定理：

定理 2.1 设 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*,\gamma)$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上三维李双代数，则对于线性映射 $\gamma:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ 有以下公式成立：

$$
\left.\begin{aligned}
&\gamma(x)=\xi\wedge x+i_{Bx}(V),\\
&\forall x\in\mathfrak{g},\ \xi\in\mathfrak{g},\ V\in\wedge^3\mathfrak{g}
\end{aligned}\right\}\tag{3}
$$

证明 对任意的 $\alpha,\beta\in\mathfrak{g}^*$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\langle\alpha\wedge\beta,\gamma(x)\rangle=\langle[\alpha,\beta],x\rangle=\\
&\langle i_\xi(\alpha\wedge\beta)+B(i_{\alpha\wedge\beta}V),x\rangle=\\
&\langle\langle\xi,\alpha\rangle\beta-\langle\xi,\beta\rangle\alpha,x\rangle+\langle Bi_{\alpha\wedge\beta}V,x\rangle=\\
&\langle\xi,\alpha\rangle\langle\beta,x\rangle-\langle\xi,\beta\rangle\langle\alpha,x\rangle+\langle i_{Bx}V,\alpha\wedge\beta\rangle=\\
&\langle\alpha\wedge\beta,\xi\wedge x\rangle+\langle i_{Bx}V,\alpha\wedge\beta\rangle=\\
&\langle\alpha\wedge\beta,\xi\wedge x+i_{Bx}V\rangle,\ \forall x,y\in\mathfrak{g}.
\end{aligned}
$$

因此，我们得到式(3)成立.

定理 2.2 设 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*,\gamma)$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上三维李双代数，且存在 r 矩阵 $R\in\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$，则此李双代数 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*,\gamma)$ 的 Atiyah class $[\lambda]=0$.

证明 因为李双代数 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*,\gamma)$ 存在 r 矩阵 R，所以有 $\gamma=\delta_0R$ 成立，则此李双代数是上边缘李双代数，又 $\delta_1\delta_0=0$，即 $\delta_1\gamma=\delta_1\delta_0R=0$，所以 $[\gamma]=0$，又由定义 1.3 知：$[\lambda]=-F_*[\gamma]$，则李双代数 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*,\gamma)$ 的 Atiyah class $[\lambda]=0$.

在文献[9]中，我们已知：若 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*,\gamma)$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上三维李双代数，$\lambda\in\mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}\otimes\mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$，满足对任意的 $x\in\mathfrak{g}$，$\mu\in\mathfrak{g}^*$，有 $\lambda(x,\mu)=ad^*_{ad^*_\mu(x)}\in\mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$，则 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*,\gamma)$ 的 Atiyah class $[\lambda]=0$ 当且仅当存在一个线性映射 $S:\mathfrak{g}^*\to\mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$，使得下列公式成立：

$$
\left.\begin{aligned}
&\lambda(x,\mu)=ad^*_x\cdot S(\mu)-S(\mu)\cdot ad^*_x-S(ad^*_x(\mu)),\\
&\forall x\in\mathfrak{g},\mu\in\mathfrak{g}^*
\end{aligned}\right\}\tag{4}
$$

由此可知：在判断李双代数的 Atiyah class 是否为 0 时，关键在于是否存在线性映射 $S:\mathfrak{g}^*\to\mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$，使得式(4)成立；如果直接计算去寻找使式(4)成立的映射 S，计算过程繁琐且困难，因此为了方便计算，我们给出以下定理：

定理 2.3　设 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*,\gamma)$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上三维李双代数,此李双代数 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*,\gamma)$ 的 Atiyah class $[\lambda]=0$ 当且仅当存在一个线性映射 $S:\mathfrak{g}^*\to \mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$,使得下列式子成立:

$$F\circ\gamma(x)=\rho(x)\cdot S,\ \forall x\in\mathfrak{g} \tag{5}$$

证明　因为映射 $S:\mathfrak{g}^*\to \mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$,令 $S\in\mathfrak{g}\otimes \mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$,那么式(4)等价于

$$\lambda(x)=-\rho(x)\cdot S,\forall x\in\mathfrak{g}.$$

又由文献[9,定理 1.1]我们有

$$\lambda=-F\circ\gamma.$$

结合以上两个式子,我们即得到式(5).因此,要证李双代数 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*,\gamma)$ 的 Atiyah class $[\lambda]=0$,等价于证明存在线性映射 $S:\mathfrak{g}^*\to \mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$,使得下式成立:

$$F\circ\gamma(x)=\rho(x)\cdot S,\ \forall x\in\mathfrak{g}.$$

3　主要结果及计算

文献[11]已经对实数域上所有三维李双代数进行了分类,并且每一类型李双代数结构都以 (κ,A,ξ,B) 的形式给出.现在,我们采用文献[11]中的记号,计算并讨论由每一对 (κ,A,ξ,B) 决定的李双代数的 Atiyah class 是否为 0.为了更加清晰地展示出结果,我们将实数域上所有三维李双代数结构按照是否存在 r 矩阵进行列表分类.

在文献[11]附表 1 中,关于 $\kappa^t=(0,0,1)$,$A=\mathrm{diag}(1,0,0)$,$B=\mathrm{diag}(0,0,\pm1)$,$\xi^t=\mathbf{0}$ 这一类型的李双代数中是否存在 r 矩阵出现遗漏,现将其补充完整,详见表 1.

为了方便计算,我们设:$\{e_1,e_2,e_3\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一组基,$\{e_1^*,e_2^*,e_3^*\}$ 为 $\mathfrak{g}^*$ 的一组基,$V\in\wedge^3\mathfrak{g}$,$V^*\in\wedge^3\mathfrak{g}^*$,特别地:我们取 $V=e_1\wedge e_2\wedge e_3$,$V^*=e_1^*\wedge e_2^*\wedge e_3^*$.

3.1　存在 r 矩阵的情形

我们将存在 r 矩阵的三维李双代数 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*,\gamma)$ 归类,如表 1 所示.

表 1　实数域上存在 r 矩阵的三维李双代数

Tab.1　Three dimensional real Lie bialgebras with existence of r-matrix

例	κ^t	A	B	ξ^t	r 矩阵
1	$(0,0,1)$	$\mathbf{0}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\mathbf{0}$	$e_3\wedge e_1$
2	$(0,0,1)$	$\mathbf{0}$	$\mathrm{diag}(0,0,1)$	$\mathbf{0}$	$\frac{1}{2}e_1\wedge e_2$
3	$(0,0,1)$	$\mathrm{diag}(a,a,0)$	$\mathrm{diag}(0,0,\pm1)$	$\mathbf{0}$	$\pm\frac{1}{2}e_1\wedge e_2$
4	$(0,0,1)$	$\mathrm{diag}(a,-a,0)$	$\mathrm{diag}(0,0,1)$	$\mathbf{0}$	$\frac{1}{2}e_1\wedge e_2$
5	$(0,0,1)$	$\mathrm{diag}(a,-a,0)$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&\pm1\\1&\pm1&0\end{pmatrix}$	$(-a,\pm a,0)$	$e_2\wedge e_3\pm e_3\wedge e_1$
6	$(0,0,1)$	$\mathrm{diag}(1,0,0)$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\mathbf{0}$	$e_3\wedge e_1$
7	$(0,0,1)$	$\mathrm{diag}(1,0,0)$	$\mathrm{diag}(0,0,\pm1)$	$\mathbf{0}$	$\pm\frac{1}{2}e_1\wedge e_2$
8	$\mathbf{0}$	$\mathrm{diag}(1,1,1)$	$\mathbf{0}$	$(a,0,0)$	$-ae_2\wedge e_3$
9	$\mathbf{0}$	$\mathrm{diag}(1,1,-1)$	$\mathbf{0}$	$(a,0,0)$	$-ae_2\wedge e_3$
10	$\mathbf{0}$	$\mathrm{diag}(1,1,-1)$	$\mathbf{0}$	$(0,0,a)$	$ae_1\wedge e_2$
11	$\mathbf{0}$	$\mathrm{diag}(1,1,-1)$	$\mathbf{0}$	$(0,1,1)$	$-e_3\wedge e_1+e_1\wedge e_2$
12	$\mathbf{0}$	$\mathrm{diag}(1,1,0)$	$\mathbf{0}$	$(1,0,0)$	$-e_2\wedge e_3$
13	$\mathbf{0}$	$\mathrm{diag}(1,-1,0)$	$\mathbf{0}$	$(1,0,0)$	$-e_2\wedge e_3$
14	$\mathbf{0}$	$\mathrm{diag}(1,-1,0)$	$\mathbf{0}$	$(1,1,0)$	$-e_2\wedge e_3+e_3\wedge e_1$

[注] $a\in\mathbb{R},a>0$.

由定理 2.2 知,以上类型的李双代数的 Atiyah class $[\lambda]=0$.

3.2 不存在 r 矩阵的情形

当李双代数 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*,\gamma)$ 不存在 r 矩阵时,不能直接判断其 Atiyah class 是否为 0,所以以下例子会根据定理 2.3,通过计算来分析是否存在线性映射 $S:\mathfrak{g}^*\to\mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$,使得式(5)成立.

首先,我们将不存在 r 矩阵的三维李双代数 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*,\gamma)$ 归类,如表 2 所示.

表 2 实数域上不存在 r 矩阵的三维李双代数

Tab. 2 Three dimensional real Lie bialgebras without r-matrix

例	κ^t	A	B	ξ^t	Atiyah class
1	(0,0,1)	$\mathbf{0}$	diag(a,a,a)	$\mathbf{0}$	$[\lambda]\neq0$
2	(0,0,1)	$\mathbf{0}$	diag(a,a,$-a$)	$\mathbf{0}$	$[\lambda]\neq0$
3	(0,0,1)	$\mathbf{0}$	diag(a,$-a$,a)	$\mathbf{0}$	$[\lambda]\neq0$
4	(0,0,1)	$\mathbf{0}$	$\begin{pmatrix}a&0&0\\0&0&a\\0&a&0\end{pmatrix}$	$\mathbf{0}$	$[\lambda]\neq0$
5	(0,0,1)	$\mathbf{0}$	diag(0,1,1)	$\mathbf{0}$	$[\lambda]\neq0$
6	(0,0,1)	$\mathbf{0}$	diag(a,a,0)	$\mathbf{0}$	$[\lambda]\neq0$
7	(0,0,1)	$\mathbf{0}$	diag(a,$-a$,0)	$\mathbf{0}$	$[\lambda]\neq0$
8	(0,0,1)	$\mathbf{0}$	diag(0,1,-1)	$\mathbf{0}$	$[\lambda]\neq0$
9	(0,0,1)	$\mathbf{0}$	diag(1,0,0)	$\mathbf{0}$	$[\lambda]\neq0$
10	(0,0,1)	diag(a,a,0)	$\frac{1}{a}$diag(ω,ω,0)	(0,0,ω)	$[\lambda]\neq0$
11	(0,0,1)	diag(a,$-a$,0)	$\frac{1}{a}$diag(ω,$-\omega$,0)	(0,0,ω)	$[\lambda]\neq0$
12	(0,0,1)	diag(1,0,0)	diag(0,ω,ω)	$\mathbf{0}$	$[\lambda]\neq0$
13	(0,0,1)	diag(1,0,0)	diag(0,ω,$-\omega$)	$\mathbf{0}$	$[\lambda]\neq0$
14	(0,0,1)	diag(1,0,0)	diag(0,ω,0)	$\mathbf{0}$	$[\lambda]\neq0$
15	$\mathbf{0}$	diag(1,1,0)	diag(0,0,±1)	$\mathbf{0}$	$[\lambda]\neq0$
16	$\mathbf{0}$	diag(1,1,0)	$\mathbf{0}$	(0,0,a)	$[\lambda]\neq0$
17	$\mathbf{0}$	diag(1,1,0)	diag(0,0,±1)	(a,0,0)	$[\lambda]\neq0$
18	$\mathbf{0}$	diag(1,-1,0)	diag(0,0,1)	$\mathbf{0}$	$[\lambda]\neq0$
19	$\mathbf{0}$	diag(1,-1,0)	$\mathbf{0}$	(0,0,a)	$[\lambda]\neq0$
20	$\mathbf{0}$	diag(1,-1,0)	$\pm$diag(0,0,1)	(a,0,0)	$[\lambda]\neq0$
21	$\mathbf{0}$	diag(1,-1,0)	diag(0,0,1)	(1,1,0)	$[\lambda]\neq0$
22	$\mathbf{0}$	diag(1,0,0)	$\pm$diag(0,1,1)	$\mathbf{0}$	$[\lambda]=0$
23	$\mathbf{0}$	diag(1,0,0)	diag(0,1,-1)	$\mathbf{0}$	$[\lambda]=0$
24	$\mathbf{0}$	diag(1,0,0)	diag(0,0,±1)	$\mathbf{0}$	$[\lambda]=0$
25	$\mathbf{0}$	diag(1,0,0)	$\mathbf{0}$	(0,0,1)	$[\lambda]\neq0$
26	$\mathbf{0}$	diag(1,0,0)	$\mathbf{0}$	(1,0,0)	$[\lambda]=0$
27	$\mathbf{0}$	diag(1,0,0)	diag(0,ω,ω)	(1,0,0)	$[\lambda]=0$
28	$\mathbf{0}$	diag(1,0,0)	diag(0,a,$-a$)	(1,0,0)	$[\lambda]=0$
29	$\mathbf{0}$	diag(1,0,0)	diag(0,0,±1)	(0,a,0)	$[\lambda]\neq0$
30	$\mathbf{0}$	diag(1,0,0)	diag(0,0,±1)	(1,0,0)	$[\lambda]=0$

[注] $a,\omega\in\mathbb{R}$, $a>0$, $\omega\neq0$.

接下来我们计算这些不存在 r 矩阵的李双代数的 Atiyah class 是否为 0,下面给出表 2 中例 1 与例 22 这两种类型的计算.

3.3 算例

例 1　$A=\mathbf{0}$, $\kappa^t=(0,0,1)$, $B=\mathrm{diag}(a,a,a)$, $\xi^t=\mathbf{0}$; $a\in\mathbb{R}$, $a>0$.

首先,由式(1)我们可得到

$$[e_1,e_2]=\mathbf{0},\ [e_2,e_3]=-e_2,\ [e_3,e_1]=e_1;$$

又由

$$ad_{e_1}e_1=\mathbf{0},\ ad_{e_1}e_2=\mathbf{0},\ ad_{e_1}e_3=-e_1;$$
$$ad_{e_2}e_1=\mathbf{0},\ ad_{e_2}e_2=\mathbf{0},\ ad_{e_2}e_3=-e_2;$$
$$ad_{e_3}e_1=e_1,\ ad_{e_3}e_2=e_2,\ ad_{e_3}e_3=\mathbf{0};$$

可得

$$ad^*_{e_1}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix};$$
$$ad^*_{e_2}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix};$$
$$ad^*_{e_3}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

再由式(2)得到

$$[e_1^*,e_2^*]=ae_3^*,\ [e_2^*,e_3^*]=ae_1^*,\ [e_3^*,e_1^*]=ae_2^*;$$

由式(3)确定映射 $\gamma:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$,

$$\gamma(e_1)=ae_2\wedge e_3,\ \gamma(e_2)=ae_3\wedge e_1,$$
$$\gamma(e_3)=ae_1\wedge e_2;$$

即有

$$F\circ\gamma(e_1)=ae_2\otimes(-ad^*_{e_3})-ae_3\otimes(-ad^*_{e_2}),$$
$$F\circ\gamma(e_2)=ae_3\otimes(-ad^*_{e_1})-ae_1\otimes(-ad^*_{e_3}),$$
$$F\circ\gamma(e_3)=ae_1\otimes(-ad^*_{e_2})-ae_2\otimes(-ad^*_{e_1}).$$

因为 $S\in\mathfrak{g}\otimes\mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$,为了方便计算,我们设

$$S=e_1\otimes T_1+e_2\otimes T_2+e_3\otimes T_3,$$
$$T_1,T_2,T_3\in\mathrm{End}(\mathfrak{g}^*).$$

因此有

$$\rho(e_1)\cdot S=$$
$$ad_{e_1}\cdot(e_1\otimes T_1+e_2\otimes T_2+e_3\otimes T_3)=$$
$$e_1\otimes([-ad^*_{e_1},T_1]-T_3)+$$
$$e_2\otimes[-ad^*_{e_1},T_2]+e_3\otimes[-ad^*_{e_1},T_3],$$

$$\rho(e_2)\cdot S=$$
$$ad_{e_2}\cdot(e_1\otimes T_1+e_2\otimes T_2+e_3\otimes T_3)=$$
$$e_1\otimes[-ad^*_{e_2},T_1]+$$
$$e_2\otimes([-ad^*_{e_2},T_2]-T_3)+e_3\otimes[-ad^*_{e_2},T_3],$$

$$\rho(e_3)\cdot S=$$
$$ad_{e_3}\cdot(e_1\otimes T_1+e_2\otimes T_2+e_3\otimes T_3)=$$
$$e_1\otimes([-ad^*_{e_3},T_1]+T_1)+$$
$$e_2\otimes([-ad^*_{e_3},T_2]+T_2)+e_3\otimes[-ad^*_{e_3},T_3].$$

要使式(5)成立,即下列三个公式要同时成立:

$$F\circ\gamma(e_1)=\rho(e_1)\cdot S;$$
$$F\circ\gamma(e_2)=\rho(e_2)\cdot S;$$
$$F\circ\gamma(e_3)=\rho(e_3)\cdot S.$$

也就是要满足下列九个公式:

① $[-ad^*_{e_1},T_1]-T_3=\mathbf{0}$,

② $[-ad^*_{e_1},T_2]=-a\cdot ad^*_{e_3}$,

③ $[-ad^*_{e_1},T_3]=a\cdot ad^*_{e_2}$,

④ $[-ad^*_{e_2},T_1]=a\cdot ad^*_{e_3}$,

⑤ $[-ad^*_{e_2},T_2]-T_3=\mathbf{0}$,

⑥ $[-ad^*_{e_2},T_3]=-a\cdot ad^*_{e_1}$,

⑦ $[-ad^*_{e_3},T_1]+T_1=-a\cdot ad^*_{e_2}$,

⑧ $[-ad^*_{e_3},T_2]+T_2=a\cdot ad^*_{e_1}$,

⑨ $[-ad^*_{e_3},T_3]=\mathbf{0}$.

由于 $T\in\mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$,因此我们可以设

$$T_1=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix};$$
$$T_2=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix};$$
$$T_3=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{pmatrix}.$$

其中,$a_{ij},b_{ij},c_{ij}\in\mathbb{R}$; $i,j=1,2,3$.

经计算,发现式⑤,⑦中存在矛盾,因此不存在 T_1,T_2,T_3 使得上面九个公式同时成立,即不存在符合条件的 $S:\mathfrak{g}^*\to\mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$,使得式(5)成立,则由这一对 (κ,A,ξ,B) 决定的李双代数的 Atiyah class $[\lambda]\neq 0$.

例 22　$A=\mathrm{diag}(1,0,0)$, $\kappa^t=\mathbf{0}$, $B=\pm\mathrm{diag}(0,1,1)$, $\xi^t=\mathbf{0}$.

以下计算以 $B=\mathrm{diag}(0,1,1)$ 为例, $B=-\mathrm{diag}(0,1,1)$ 可用相同方法计算得出结果.

我们按照例 1 的计算过程,首先,得到

$$[e_1,e_2]=\mathbf{0},\ [e_2,e_3]=e_1,\ [e_3,e_1]=\mathbf{0}.$$

又由

$$ad_{e_1}e_1=\mathbf{0},\ ad_{e_1}e_2=\mathbf{0},\ ad_{e_1}e_3=\mathbf{0};$$

$$ad_{e_2}e_1=\mathbf{0},\ ad_{e_2}e_2=\mathbf{0},\ ad_{e_2}e_3=e_1;$$
$$ad_{e_3}e_1=\mathbf{0},\ ad_{e_3}e_2=-e_1,\ ad_{e_3}e_3=\mathbf{0};$$

可得

$$ad_{e_1^*}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};$$

$$ad_{e_2^*}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix};$$

$$ad_{e_3^*}=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

再由式(2)得到

$$[e_1^*,e_2^*]=e_3^*,\ [e_2^*,e_3^*]=\mathbf{0},\ [e_3^*,e_1^*]=e_2^*.$$

由式(3)确定映射 $\gamma:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$,

$$\gamma(e_1)=\mathbf{0},\ \gamma(e_2)=e_3\wedge e_1,\ \gamma(e_3)=e_1\wedge e_2;$$

即有

$$F\circ\gamma(e_1)=\mathbf{0},$$
$$F\circ\gamma(e_2)=e_3\otimes(-ad_{e_1^*})-e_1\otimes(-ad_{e_3^*}),$$
$$F\circ\gamma(e_3)=e_1\otimes(-ad_{e_2^*})-e_2\otimes(-ad_{e_1^*}).$$

又 $S\in\mathfrak{g}\otimes\mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$,为了方便计算,我们设

$$S=e_1\otimes T_1+e_2\otimes T_2+e_3\otimes T_3,$$
$$T_1,T_2,T_3\in\mathrm{End}(\mathfrak{g}^*).$$

因此有

$$\rho(e_1)\cdot S=$$
$$ad_{e_1}\cdot(e_1\otimes T_1+e_2\otimes T_2+e_3\otimes T_3)=\mathbf{0},$$
$$\rho(e_2)\cdot S=$$
$$ad_{e_2}\cdot(e_1\otimes T_1+e_2\otimes T_2+e_3\otimes T_3)=$$
$$e_1\otimes([-ad_{e_2^*},T_1]+T_3)+$$
$$e_2\otimes[-ad_{e_2^*},T_2]+e_3\otimes[-ad_{e_2^*},T_3],$$
$$\rho(e_3)\cdot S=$$
$$ad_{e_3}\cdot(e_1\otimes T_1+e_2\otimes T_2+e_3\otimes T_3)=$$
$$e_1\otimes([-ad_{e_3^*},T_1]-T_2)+$$
$$e_2\otimes[-ad_{e_3^*},T_2]+e_3\otimes[-ad_{e_3^*},T_3].$$

要使式(5)成立,即下列三个式子要同时成立:

$$F\circ\gamma(e_1)=\rho(e_1)\cdot S;$$
$$F\circ\gamma(e_2)=\rho(e_2)\cdot S;$$
$$F\circ\gamma(e_3)=\rho(e_3)\cdot S;$$

也就是要满足下列六个公式:

① $[-ad_{e_2^*},T_1]+T_3=ad_{e_3^*}$,

② $[-ad_{e_2^*},T_2]=\mathbf{0}$,

③ $[-ad_{e_2^*},T_3]=-ad_{e_1^*}$,

④ $[-ad_{e_3^*},T_1]-T_2=-ad_{e_2^*}$,

⑤ $[-ad_{e_3^*},T_2]=ad_{e_1^*}$,

⑥ $[-ad_{e_3^*},T_3]=\mathbf{0}$.

经计算,当

$$T_1=\begin{pmatrix}a_{11}&0&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix};$$

$$T_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\b_{21}&0&0\\b_{31}&0&0\end{pmatrix};$$

$$T_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\c_{21}&0&0\\c_{31}&0&0\end{pmatrix};$$

并且满足下列四个公式时:

$$\begin{cases}a_{33}-a_{11}+c_{31}=0,\\a_{11}-a_{22}-b_{21}=0,\\a_{23}+c_{21}+1=0,\\b_{31}+a_{32}-1=0,\end{cases}$$

即存在映射 $S:\mathfrak{g}^*\to\mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$,当

$$S=e_1\otimes T_1+e_2\otimes T_2+e_3\otimes T_3$$

时,有式(5)成立,即由这一对 (κ,A,ξ,B) 决定的李双代数的 Atiyah class $[\lambda]=0$.

我们可以采取例 1 中的计算方法,对其余类型的李双代数进行计算,详细的计算过程不再赘述.

4 结论

在本文中,我们首先利用上同调类 $[\gamma]\in H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})$ 给出了李双代数 Atiyah class 更直观的定义,之后讨论了实数域上三维李双代数的一些相关结论,又根据对实数域上所有三维李双代数的分类结果,分析并计算了每一类型李双代数的 Atiyah class 是否为 0. 基于本文,今后我们将进一步研究李双代数的 Atiyah class 及其性质与应用.

致谢 武汉大学洪伟老师提供本文研究课题与计算方法,并对本文提出很多宝贵意见,我们在此表示感谢!

参考文献(References)

[1] ATIYAH M F. Complex analytic connections in fibre bundles[J]. Trans Amer Math Soc, 1957, 85: 181-207.

[2] MOLINO P. Classe d'Atiyah d'un feuilletage et connexions transverses projectables[J]. C R Acad Sci

Paris Ser A-B，1971，272：A779-A781.

[3] KAPRANOV M M. Rozansky-Witten invariants via Atiyah classes[J]. Compositio Math，1999，115(1)：71-113.

[4] KONTSEVICH M. Rozansky-Witten invariants via formal geometry[J]. Compositio Math，1999，115(1)：155-127.

[5] CALAQUE D，VAN DEN BERGH M. Hochschild cohomology and Atiyah classes[J]. Adv Math，2010，224(5)：1839-1889.

[6] METHA R A，STIÉNON M，XU P. The Atiyah class of a dg-vector bundle[J]. C R Acad Sci Paris，Ser Ⅰ，2015，353(4)：357-362.

[7] CHEN Z，STIÉNON M，XU P. From Atiyah classes to homotopy Leibniz algebras[J]. Comm Math Phys，2016，341(1)：309-349.

[8] VOGLAIRE Y，XU P. Rozansky-Witten-type invariants from symplectic Lie pairs[J]. Comm Math Phys，2015，336(1)：217-241.

[9] HONG W. Atiyah classes of Lie bialgbras[J]. J Lie Theory，2019,29(1):263-275.

[10] KOSMANN-SCHWARZBACH Y. Lie bialgebras，Poisson Lie groups and dressing transformations[C]//Integrability of Nonlinear Systems. Berlin：Springer，1997：104-170.

[11] HONG W，LIU Z J. Lie bialgebras on k^3 and Lagrange varieties[J]. J Lie Theory，2009，19(4)：639-659.

[12] LU J H，WEINSTEIN A. Poisson Lie groups，dressing transformations，and Bruhat decompositions[J]. J Differential Geom，1990，31(2)：501-526.

（上接第 376 页）

[14] DENG H. On the sum-Balaban index[J]. MATCH Commun Math Comput Chem，2011，66:273-284.

[15] DOŠLIĆ T，LITZ M S. Matchings and independent sets in polyphenylene chains[J]. MATCH Commun Math Comput Chem，2012，67：313-330.

[16] DOŠLIĆ T，MÅLØY F. Chain hexagonal cacti：Matchings and independent sets[J]. Discrete Mathematics，2010，310(12)：1676-1690.

[17] HUANG Z，DENG H，CHEN S. A sharp lower bound of index of the cacti with perfect matchings[J]. Ars Combin，2012，107：17-32.

[18] LU M，ZHANG L，TIAN F. On the Randić index of cacti[J]. MATCH Commun Math Comput Chem，2006，56：551-556.

[19] MA F，DENG H. On the sum-connectivity index of cacti[J]. Math Comput Modelling，2011，54：497-507.

[20] LIN A，LUO R A. A sharp lower of the Randić index of cacti with r pendants[J]. Discrete Appl Math，2008，156：1725-1735.