第48卷第2期 中国科学技术大学学报 Vol.48,No.2
2018年2月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Feb. 2018

文章编号:0253-2778(2018)02-0133-07

群决策环境下一种三类偏好关系的集结方法

涂振坤,段传庆

(合肥工业大学数学学院,安徽合肥 230009)

摘要:在群决策环境下,专家们往往给出异类的偏好信息,如,模糊偏好关系、区间互补偏好关系、语言偏好关系.提出了一种新的集结这三类不同的偏好关系的方法,其基本思想是:先将不同类型信息转化为中间域(效用空间),然后进行集结.该方法的意义在于避免了不同类型偏好信息之间的直接相互转换,而且计算过程更加简便.首先,针对模糊偏好关系、区间互补偏好关系、语言偏好关系,利用效用的思想将这些偏好信息均转化为模糊偏好关系,并且讨论了转化过程的合理性.然后给出群决策过程中集结信息与选择最优方案的方法,最后通过实例验证了所提方法的实用性.

关键词:群决策;不同类型偏好信息;转化方法;集结过程

中图分类号:O934　　**文献标识码**:A　　doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2018.02.007

引用格式:涂振坤,段传庆.群决策环境下一种三类偏好关系的集结方法[J].中国科学技术大学学报,2018,48(2):133-139.

TU Zhenkun,DUAN Chuanqing. A method for aggregating three types of preference relations in group decision making environment[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2018,48(2):133-139.

A method for aggregating three types of preference relations in group decision making environment

TU Zhenkun,DUAN Chuanqing

(*School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China*)

Abstract: Experts often give heterogeneous types of preference information, such as fuzzy preference relations, interval reciprocal preference relations and linguistic preference relations, in a group decision making environment. A new method was developed for aggregating these three types of preference relations, whose basic idea is that different kinds of information are transformed into an intermediate field (an utility space) before they are aggregated. The advantage of this method is that the direct inter-conversion among those different kinds of preference information is avoided and the computation process is more simple. Firstly, considering fuzzy preference relations, interval reciprocal preference relations and linguistic preference relations, these preference relations were transformed into fuzzy preference relations based on the idea of utility, and the reasonability in the transforming process was discussed. Then an approach was provided to aggregate those kinds of information and select the best alternatives in the group decision making process. Finally, the practicability of this method was illustrated with an example.

Key words: group decision making; heterogeneous types of preference information; transforming method; aggregating process

收稿日期:2017-04-24;**修回日期**:2017-10-22

基金项目:中央高校基本科研业务费专项资金(JZ2016HGBZ0809)资助.

作者简介:涂振坤(通讯作者),男,1978年生,博士/讲师.研究方向:不确定性决策. E-mail: zhenkuntu@126.com

0 引言

近年,研究者利用各种方法研究了涉及语言偏好关系的多种偏好信息类型的群决策问题[1-7].这些文献中具有多种偏好信息类型的(涉及语言偏好关系的)群决策问题在处理不同类型偏好信息之间关系的方法主要分为三类:①将语言值表示为模糊数(三角模糊数、梯形模糊数),然后利用模糊决策的理论与方法处理其他类型的偏好信息与它之间的转换问题.这种方法被称为Semantic(语义)法[5].②基于语言拓展标度集上直接对语言变量值进行运算的方法,这种方法被称为symbolic(符号)法[4,6].这种方法往往根据语言拓展标度集上运算的封闭性,利用语言值与其下标值之间的1-1映射关系,结合一些合理的变换(如正线性变换)处理其他类型的偏好信息与它之间的转换问题.③对不同类型的偏好信息不进行直接转化,往往直接利用权重与偏好信息之间的关系求解属性权重,其特点是不需要使多种偏好结构信息统一化,从而简化计算且避免信息的扭曲[2,3,4,7].

本文将研究模糊互补判断矩阵、区间互补判断矩阵、语言判断矩阵的统一化与集结问题。Herrera等[1]已经对该问题进行了讨论,其运用的方法是:先将直觉模糊信息转化为相应的区间数信息,然后将三类信息均转化为基本术语集上的模糊集。关于该研究,我们从以下几个方面进行了思考:第一,该方法先确定基本术语集,并将上述三种类型的偏好信息均看成是模糊集,然后将它们均转化为基本术语集上的模糊集,也就是将这三类偏好信息在中间域(基本术语集上的模糊集)上一致化。然而,能否将这三类偏好信息转化为其中的一种类型,比如将区间互补判断矩阵、语言判断矩阵均转化为模糊互补判断矩阵,这是可以考虑的问题。第二,该方法没有讨论转化过程中一些性质是否保持,那么,判断矩阵的一些性质(如弱传递性)以及方案之间的优先关系均可以进行研究。第三,该方法计算过程较为复杂且不易进行实际应用,那么是否可以给出一种简洁易于计算的方法。另外,众所周知,没有统一的一般化方法处理涉及不同类型偏好信息的群决策问题。因此,除Herrera方法外的其他方法仍然值得研究。我们主要考虑从新的角度研究模糊互补判断矩阵、区间互补判断矩阵、语言判断矩阵的统一化与集结问题;给出了模糊偏好关系、区间互补偏好关系、语言偏好关系转化为模糊偏好关系的新方法;讨论了转化的合理性,给出群决策方法,通过实例验证了决策方法的实用性.

1 基本概念

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为群体决策中涉及的方案集.下面介绍一些基本概念.

定义1.1[1] 设 $R:X\times X\to[0,1]$ 为 X 上的关系,其中 $R(x_i,x_j)=p_{ij}=a_{ij}$,满足 $0\leqslant a_{ij}\leqslant 1$,$a_{ij}+a_{ji}=1,i,j=1,2,\cdots,n$,则称 R 为 X 上的模糊偏好关系,p_{ij} 表示决策者对方案 x_i 和 x_j 进行比较时偏爱 x_i 的程度.

定义1.2[1] 设 $R:X\times X\to h([0,1])$ 为 X 上的关系,其中 $R(x_i,x_j)=p_{ij}=[u_{ij}^-,u_{ij}^+]$,满足 $0\leqslant u_{ij}^-\leqslant u_{ij}^+\leqslant 1$,$u_{ij}^-+u_{ji}^+=1$,$u_{ij}^++u_{ji}^-=1$,$i,j=1,2,\cdots,n$.则称 R 为 X 上的区间互补偏好关系,p_{ij} 表示决策者对方案 x_i 和 x_j 进行比较时偏爱 x_i 程度的区间值.

定义1.3[1] 设 $S=\{s_\alpha\mid\alpha=0,1,\cdots,T_k\}$ 满足如下条件:①若 $\alpha\geqslant\beta$,则 $s_\alpha\geqslant s_\beta$;②存在一个负算子 $\mathrm{neg}(s_\alpha)=s_\beta$,使得 $\alpha+\beta=T_k$;③极大化和极小化运算:若 $s_\alpha\geqslant s_\beta$,有 $\max(s_\alpha,s_\beta)=s_\alpha$,若 $s_\alpha\leqslant s_\beta$,有 $\min(s_\alpha,s_\beta)=s_\alpha$,则称 S 为语言评价集.其中 s_α 是决策者使用的语言短语,T_k 为正偶数,T_k+1 为语言评价集 S 的粒度,例如一个粒度为7的语言评价集 $S=\{s_0=$极差,$s_1=$很差,$s_2=$差,$s_3=$一般,$s_4=$好,$s_5=$很好,$s_6=$极好$\}$.为方便起见,用 $I(s_\alpha)$ 表示 s_α 的下标值,即 $I(s_\alpha)=\alpha$.

定义1.4[1] 设 $R:X\times X\to S$ 为 X 上的关系,其中 $R(x_i,x_j)=p_{ij}=s_{ij}$,满足 $s_{ij}\in S$,$s_{ii}=s_{T_k/2}$,$s_{ij}=\mathrm{neg}(s_{ji})$,$i,j=1,2,\cdots,n$.则称 R 为 X 上的语言偏好关系,p_{ij} 表示决策者对方案 x_i 和 x_j 进行比较时偏爱 x_i 程度的语言值.显然 R 满足条件:

$$I(s_\alpha)\in\{0,1,2,\cdots,T_k\},\ I(s_{ii})=T_k/2,$$
$$I(s_{ij})+I(s_{ji})=T_k,i,j=1,2,\cdots,n.$$

2 三类偏好信息集结前的转化

我们考虑将区间互补判断矩阵、语言判断矩阵转化为模糊互补判断矩阵。采用这种转化方法的原因可以从以下几个方面来看:第一,在群决策中,不同类型的偏好信息往往不利于信息的最终集结,因此,需要将考虑的三类判断矩阵转化为同一类信息。第二,由于模糊互补判断矩阵是确定型信息,区间互

补判断矩阵、语言判断矩阵是不确定型的信息，因此，这种方法考虑将后面两类不确定型信息转化为确定型信息，从而可以取得去模糊化的效果，从而减少逻辑推理和决策过程中的不确定性。第三，在区间互补判断矩阵、语言互补判断矩阵转化为模糊互补判断矩阵转化方法过程中，我们发现许多优良的性质得以保持，例如，方案间优劣关系的不变性和判断矩阵弱传递性的不变性。

当决策者给出的偏好信息为模糊偏好关系、区间互补偏好关系、语言偏好关系时，虽然它们的形式是不同的，但是它们都蕴含了有关方案的效用的信息.因此下面介绍一种利用效用的思想将模糊偏好关系、区间互补偏好关系、语言偏好关系均转化为模糊偏好关系的方法.

2.1　模糊偏好关系的转化方法

设 R 为 X 上的模糊偏好关系，其中 $R(x_i,x_j)=a_{ij}$. 由于 a_{ij} 表示决策者对方案 x_i 和 x_j 进行比较时偏爱 x_i 的程度，$(1-a_{ij})$ 表示决策者对方案 x_i 和 x_j 进行比较时反对 x_i 的程度，因此可以将 $a_{ij}=|a_{ij}-0|$ 理解为对方案 x_i 和 x_j 进行比较时 x_i 与负理想方案的距离，将 $1-a_{ij}=|1-a_{ij}|$ 理解为对方案 x_i 和 x_j 进行比较时 x_i 与正理想方案的距离.一般地，可以用

$$r_{ij}=f(\rho(a_{ij},0),\rho(a_{ij},1)) \tag{1}$$

计算方案 x_i 和 x_j 进行比较时 x_i 的效用，其中 $f(x,y)$ 是关于 x 的单调递增函数，关于 y 的单调递减函数.即 r_{ij} 与 $\rho(a_{ij},0)$ 成正相关性而与 $\rho(a_{ij},1)$ 成负相关性.为使得效用矩阵 $(r_{ij})_{n\times n}$ 满足互补性，取 $f(x,y)=\frac{x}{x+y}$. 并且不失一般性地取 ρ 为

$$r_{ij}=\frac{|a_{ij}-0|}{|a_{ij}-0|+|1-a_{ij}|} \tag{2}$$

显然，$r_{ij}=a_{ij},i,j=1,2,\cdots,n$. 即对模糊偏好关系 R 利用上述方法转化的结果就是其本身.这种转换方法的基本思想是：利用偏好值与正、负理想方案的“效用值”之间距离的折中值来表示方案两两比较时的效用.

下面利用这一转化方法处理更为复杂的偏好信息类型.

2.2　区间互补偏好关系的转化方法

设 R 为 X 上的区间互补偏好关系，其中 $R(x_i,x_j)=[u_{ij}^-,u_{ij}^+]$. 由于偏好值为区间值，故正理想方案对应的“效用值”为 $[1,1]$，负理想方案对应的“效用值”为 $[0,0]$. 根据节 2.1 所述的方法，可以运用以下公式：

$$r_{ij}=\frac{\rho([u_{ij}^-,u_{ij}^+],[0,0])}{\rho([u_{ij}^-,u_{ij}^+],[0,0])+\rho([u_{ij}^-,u_{ij}^+],[1,1])} \tag{3}$$

来计算方案 x_i 和 x_j 进行比较时 x_i 的效用.

不失一般性，取 ρ 为欧几里得距离[8,9]，故

$$r_{ij}=\frac{\sqrt{(u_{ij}^- -0)^2+(u_{ij}^+ -0)^2}}{\sqrt{(u_{ij}^- -0)^2+(u_{ij}^+ -0)^2}+\sqrt{(u_{ij}^- -1)^2+(u_{ij}^+ -1)^2}}=\frac{\sqrt{(u_{ij}^-)^2+(u_{ij}^+)^2}}{\sqrt{(u_{ij}^-)^2+(u_{ij}^+)^2}+\sqrt{(1-u_{ij}^-)^2+(1-u_{ij}^+)^2}} \tag{4}$$

下面讨论区间互补偏好关系通过式(4)转换所得模糊偏好关系具有的一些性质.这些性质主要涉及转换过程的合理性问题.

定理 2.1　设区间互补偏好关系 $R=([u_{ij}^-,u_{ij}^+])_{n\times n}$ 转化后的矩阵为 $(r_{ij})_{n\times n}$，则其满足：$r_{ij}+r_{ji}=1,0\leqslant r_{ij}\leqslant 1,i,j=1,2,\cdots,n$，即 $(r_{ij})_{n\times n}$ 为模糊偏好关系.

证明　由于 $u_{ij}^-+u_{ji}^+=1,u_{ij}^++u_{ji}^-=1$，知

$$r_{ji}=\frac{\sqrt{(u_{ji}^-)^2+(u_{ji}^+)^2}}{\sqrt{(u_{ji}^-)^2+(u_{ji}^+)^2}+\sqrt{(1-u_{ji}^-)^2+(1-u_{ji}^+)^2}}=\frac{\sqrt{(1-u_{ji}^+)^2+(1-u_{ji}^-)^2}}{\sqrt{(1-u_{ji}^+)^2+(1-u_{ji}^-)^2}+\sqrt{(u_{ji}^+)^2+(u_{ji}^-)^2}} \tag{5}$$

故 $r_{ij}+r_{ji}=1,i,j=1,2,\cdots,n$.而 $0\leqslant r_{ij}\leqslant 1,i,j=1,2,\cdots,n$，显然成立.

定理 2.1 说明若区间偏好关系具有互补性，则其转换后的实数型偏好关系具有互补性.

下面讨论方案之间优劣关系经过式(4)转换之后是否依然不变.设区间互补偏好关系为 $R=([u_{ij}^-,u_{ij}^+])_{n\times n}$，而方案 x_i 与方案 x_j 之间的优劣关系是通过区间数 $[u_{ij}^-,u_{ij}^+]$ 及 $[u_{ji}^-,u_{ji}^+]$ 来反映的，因此需要比较区间数的大小才能得到方案 x_i 与方案 x_j 之间的优劣关系.为了便于区间数信息的大小比较，下面介绍区间数比较大小的可能度公式.

设 $\widetilde{w}_i=[w_i^-,w_i^+]$，$\widetilde{w}_j=[w_j^-,w_j^+]$ 为区间数，满足 $0\leqslant w_i^-\leqslant w_i^+\leqslant 1,0\leqslant w_j^-\leqslant w_j^+\leqslant 1$，其中至少一个为区间数，则称

$$p(\widetilde{w}_i \geqslant \widetilde{w}_j)=\min\{\max\{\frac{w_i^+ - w_j^-}{w_i^+ - w_i^- + w_j^+ - w_j^-},0\},1\}$$

为 $\widetilde{w}_i \geqslant \widetilde{w}_j$ 的可能度.注意，设 $\widetilde{w}_i$ 和 $\widetilde{w}_j$ 为实数，则称

$$p(\widetilde{w}_i \geqslant \widetilde{w}_j)=\begin{cases}1,\ \widetilde{w}_i > \widetilde{w}_j;\\ 0.5,\ \widetilde{w}_i = \widetilde{w}_j;\\ 0,\ \widetilde{w}_i < \widetilde{w}_j\end{cases}$$

为 $\widetilde{w}_i \geqslant \widetilde{w}_j$ 的可能度.

可能度 $p(\widetilde{w}_i \geqslant \widetilde{w}_j)$ 满足以下性质[10,11]：

$p(\widetilde{w}_i \geqslant \widetilde{w}_j) \geqslant 0.5 \Leftrightarrow w_i^+ + w_i^- \geqslant w_j^+ + w_j^-$.

特别地，

$p(\widetilde{w}_i \geqslant \widetilde{w}_j) = 0.5 \Leftrightarrow w_i^+ + w_i^- = w_j^+ + w_j^-$.

由可能度的表达式及性质可知：

$p(\widetilde{w}_i \geqslant \widetilde{w}_j) > 0.5 \Leftrightarrow w_i^+ + w_i^- > w_j^+ + w_j^-$,

$p(\widetilde{w}_i \geqslant \widetilde{w}_j) = 0.5 \Leftrightarrow w_i^+ + w_i^- = w_j^+ + w_j^-$,

$p(\widetilde{w}_i \geqslant \widetilde{w}_j) < 0.5 \Leftrightarrow w_i^+ + w_i^- < w_j^+$.

由于 $p(\widetilde{w}_i \geqslant \widetilde{w}_j)+p(\widetilde{w}_j \geqslant \widetilde{w}_i)=1$，所以可以认为 $p(\widetilde{w}_i \geqslant \widetilde{w}_j)>0.5$ 表示区间 $\widetilde{w}_i$ 严格优于 $\widetilde{w}_j$，$p(\widetilde{w}_i \geqslant \widetilde{w}_j)<0.5$ 表示区间 $\widetilde{w}_i$ 严格劣于 $\widetilde{w}_j$，$p(\widetilde{w}_i \geqslant \widetilde{w}_j)=0.5$ 表示区间 $\widetilde{w}_i$ 与 $\widetilde{w}_j$ 之间无差别.通过上述区间数之间的大小(优劣)关系的表示方法,可以描述以下结论.

定理 2.2　设区间互补偏好关系 $R=([u_{ij}^-,u_{ij}^+])_{n\times n}$ 转化后的矩阵为 $(r_{ij})_{n\times n}$，若 $[u_{ij}^-,u_{ij}^+]$ 和 $[u_{ji}^-,u_{ji}^+]$ 满足

$p([u_{ij}^-,u_{ij}^+],[u_{ji}^-,u_{ji}^+])>0.5$，则 $r_{ij}>0.5$；

满足

$p([u_{ij}^-,u_{ij}^+],[u_{ji}^-,u_{ji}^+])<0.5$，则 $r_{ij}<0.5$；

满足

$p([u_{ij}^-,u_{ij}^+],[u_{ji}^-,u_{ji}^+])=0.5$，则 $r_{ij}=0.5$.

证明　设 $[u_{ij}^-,u_{ij}^+]$ 与 $[u_{ji}^-,u_{ji}^+]$ 满足

$$p([u_{ij}^-,u_{ij}^+],[u_{ji}^-,u_{ji}^+])>0.5,$$

则 $u_{ij}^-+u_{ij}^+>u_{ji}^-+u_{ji}^+$，由 $u_{ij}^-+u_{ji}^+=1$，$u_{ij}^++u_{ji}^-=1$，可知上式化为 $u_{ij}^-+u_{ij}^+>1$. 即若 $p([u_{ij}^-,u_{ij}^+],[u_{ji}^-,u_{ji}^+])>0.5$，必有 $\frac{1}{2}[u_{ij}^-+u_{ij}^+]>0.5$.

下面比较 r_{ij} 与 r_{ji} 的大小.由式(4)及(5)可知只需比较 $\sqrt{(u_{ij}^-)^2+(u_{ij}^+)^2}$ 与 $\sqrt{(1-u_{ij}^+)^2+(1-u_{ij}^-)^2}$ 的大小,即比较 $\frac{1}{2}[u_{ij}^-+u_{ij}^+]$ 与 0.5 的大小.由前述可知 $\frac{1}{2}[u_{ij}^-+u_{ij}^+]>0.5$，故，$r_{ij}>r_{ji}$，因此，$r_{ij}>0.5$；同理可知：若 $[u_{ij}^-,u_{ij}^+]$ 和 $[u_{ji}^-,u_{ji}^+]$ 满足 $p([u_{ij}^-,u_{ij}^+],[u_{ji}^-,u_{ji}^+])<0.5$，则 $r_{ij}<0.5$；若满足 $p([u_{ij}^-,u_{ij}^+],[u_{ji}^-,u_{ji}^+])=0.5$，则 $r_{ij}=0.5$.

定理 2.2 说明当决策者对方案 x_i 和 x_j 进行比较时偏爱 x_i 程度的区间值 $[u_{ij}^-,u_{ij}^+]$“严格优于”偏爱 x_j 程度的区间值 $[u_{ji}^-,u_{ji}^+]$，则 R 转化后的矩阵 $(r_{ij})_{n\times n}$ 中元素 r_{ij} 必满足 $r_{ij}>0.5$；当$[u_{ij}^-,u_{ij}^+]$“严格劣于”$[u_{ji}^-,u_{ji}^+]$，r_{ij} 必满足 $r_{ij}<0.5$；当$[u_{ij}^-,u_{ij}^+]$与 $[u_{ji}^-,u_{ji}^+]$ 之间“无差异”,则 r_{ij} 必满足 $r_{ij}=0.5$.

定理 2.2 说明了利用这种转换方法将区间互补偏好关系转化为相应的模糊偏好关系的过程中不改变方案之间的优劣关系,因此这种转换方法是合理的.

由定理 2.2 易知以下结论成立.

推论 2.1　设区间互补偏好关系 R 转化后的矩阵为 $(r_{ij})_{n\times n}$，若 $r_{ij}>0.5$，则 $[u_{ij}^-,u_{ij}^+]$ 和 $[u_{ji}^-,u_{ji}^+]$ 满足 $p([u_{ij}^-,u_{ij}^+],[u_{ji}^-,u_{ji}^+])>0.5$；若 $r_{ij}<0.5$，则满足 $p([u_{ij}^-,u_{ij}^+],[u_{ji}^-,u_{ji}^+])<0.5$；若 $r_{ij}=0.5$，则满足 $p([u_{ij}^-,u_{ij}^+],[u_{ji}^-,u_{ji}^+])=0.5$.

定理 2.3　若区间互补偏好关系 $R=([u_{ij}^-,u_{ij}^+])_{n\times n}$ 转化后的矩阵为 $(r_{ij})_{n\times n}$，则以下两个性质等价：

①若

$$p([u_{ij}^-,u_{ij}^+],[u_{ji}^-,u_{ji}^+])\geqslant 0.5,$$
$$p([u_{jk}^-,u_{jk}^+],[u_{kj}^-,u_{kj}^+])\geqslant 0.5,$$

必有 $p([u_{ik}^-,u_{ik}^+],[u_{ik}^-,u_{ik}^+])\geqslant 0.5$；

②若 $r_{ij}\geqslant 0.5$，$r_{jk}\geqslant 0.5$，必有 $r_{ik}\geqslant 0.5$.

定理 2.3 由定理 2.2 及推论 2.1 易得.

定理 2.3 中的性质①表明区间互补偏好关系 R 满足弱传递性,而性质②表示模糊偏好关系 $(r_{ij})_{n\times n}$ 满足弱传递性,故定理 2.3 说明了本文的转换方法保持了偏好关系的弱传递性.

2.3　语言偏好关系的转化方法

设 R 为 X 上的语言偏好关系，其中 $R(x_i,x_j)=s_{ij}$，$s_{ij}\in S$，S 为粒度为 T_k 的语言评价集.下面将语言值偏好值转化为语义(模糊数)来进行决策.本文采用梯形模糊数表示语言短语的语义[5].

$$\left.\begin{aligned}&d_i=(d_i^1,d_i^2,d_i^3,d_i^4)=\Big(\max\{\frac{2i-1}{2T_k+1},0\},\\&\frac{2i}{2T_k+1},\frac{2i+1}{2T_k+1},\max\{\frac{2i+2}{2T_k+1},1\}\Big),\\&i=0,1,2,\cdots,T_k\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

例如粒度为 7 的语言评价集 S 中语言短语对应的梯形模糊数如表 1 所列.

表 1　语言短语与对应的梯形模糊数

Tab.1　Linguistic terms and corresponding trapezoidal fuzzy numbers

语言短语	梯形模糊数
s_0:极差(N)	(0,0,0.077,0.154)
s_1:很差(VL)	(0.077,0.154,0.231,0.308)
s_2: 差 (L)	(0.231,0.308,0.385,0.462)
s_3:一般(M)	(0.385,0.462,0.538,0.615)
s_4: 好 (H)	(0.538,0.615,0.692,0.769)
s_5:很好(VH)	(0.692,0.769,0.846,0.923)
s_6:极好 (P)	(0.846,0.923,1,1)

为方便起见,用 $(s_{ij}^1, s_{ij}^2, s_{ij}^3, s_{ij}^4)$ 表示 s_{ij} 对应的梯形模糊数.由定义 1.4 及式(6)易得如下结果.

性质 2.1　设 $R=(s_{ij})_{n\times n}$ 为 X 上的语言偏好关系，其中 $R(x_i,x_j)=s_{ij}=(s_{ij}^1,s_{ij}^2,s_{ij}^3,s_{ij}^4)$，则

$$s_{ij}^1+s_{ji}^4=1, s_{ij}^2+s_{ji}^3=1,$$
$$s_{ij}^3+s_{ji}^2=1, s_{ij}^4+s_{ji}^1=1.$$

由于将语言短语表示为梯形模糊数,故正理想方案对应的“效用值”为 (1,1,1,1)，负理想方案对应的“效用值”为 (0,0,0,0). 类似节 2.1 及 2.2 所述的方法,可以运用以下公式：

$$r_{ij}=\rho((s_{ij}^1,s_{ij}^2,s_{ij}^3,s_{ij}^4),(0,0,0,0))/ [\rho((s_{ij}^1,s_{ij}^2,s_{ij}^3,s_{ij}^4),(0,0,0,0))+ \rho((s_{ij}^1,s_{ij}^2,s_{ij}^3,s_{ij}^4),(1,1,1,1))] \tag{7}$$

来计算方案 x_i 和 x_j 进行比较时 x_i 的效用.

不失一般性，取 ρ 为闵可夫斯基距离[5],故

$$r_{ij}=\sqrt{\frac{1}{6}[(s_{ij}^1-0)^2+2(s_{ij}^2-0)^2+2(s_{ij}^3-0)^2+(s_{ij}^4-0)^2]}\Big/ \Big[\sqrt{\frac{1}{6}[(s_{ij}^1-0)^2+2(s_{ij}^2-0)^2+2(s_{ij}^3-0)^2+(s_{ij}^4-0)^2]}+ \sqrt{\frac{1}{6}[(s_{ij}^1-1)^2+2(s_{ij}^2-1)^2+2(s_{ij}^3-1)^2+(s_{ij}^4-1)^2]}\Big] \tag{8}$$

性质 2.2　设语言评价值 s_{ij}, s'_{ij} 满足 $s_{ij}\leqslant s'_{ij}$，则 $r_{ij}\leqslant r'_{ij}$.

性质 2.2 由式(8)易得.性质 2.2 说明语言评价值越高,其转化后的效用值越高.

定理 2.4　设语言偏好关系 $R=(s_{ij})_{n\times n}$ 转化后的矩阵为 $(r_{ij})_{n\times n}$，则其满足：$r_{ij}+r_{ji}=1, 0\leqslant r_{ij}\leqslant 1$, $i,j=1,2,\cdots,n$，即 $(r_{ij})_{n\times n}$ 为模糊偏好关系.

证明　由性质 2.1 知,

$$r_{ji}=\sqrt{\frac{1}{6}[(s_{ji}^1)^2+2(s_{ji}^2)^2+2(s_{ji}^3)^2+(s_{ji}^4)^2]}\Big/ \Big[\sqrt{\frac{1}{6}[(s_{ji}^1)^2+2(s_{ji}^2)^2+2(s_{ji}^3)^2+(s_{ji}^4)^2]}+\sqrt{\frac{1}{6}[(s_{ji}^1-1)^2+2(s_{ji}^2-1)^2+2(s_{ji}^3-1)^2+(s_{ji}^4-1)^2]}\Big]=$$
$$\sqrt{\frac{1}{6}[(1-s_{ij}^4)^2+2(1-s_{ij}^3)^2+2(1-s_{ij}^2)^2+(1-s_{ij}^1)^2]}\Big/ \Big[\sqrt{\frac{1}{6}[(1-s_{ij}^4)^2+2(1-s_{ij}^3)^2+2(1-s_{ij}^2)^2+(1-s_{ij}^1)^2]}+\sqrt{\frac{1}{6}[(s_{ij}^4)^2+2(s_{ij}^3)^2+2(s_{ij}^2)^2+(s_{ij}^1)^2]}\Big].$$

故 $r_{ij}+r_{ji}=1, i,j=1,2,\cdots,n$. 而 $0\leqslant r_{ij}\leqslant 1, i,j=1,2,\cdots,n$，显然成立.

定理 2.5　设语言偏好关系 $R=(s_{ij})_{n\times n}$ 转化后的矩阵为 $(r_{ij})_{n\times n}$，若 $s_{ij}>s_{T_k/2}$，则 $r_{ij}>0.5$；若 $s_{ij}<s_{T_k/2}$，则 $r_{ij}<0.5$；若 $s_{ij}=s_{T_k/2}$，则 $r_{ij}=0.5$.

证明　若 $s_{ij}>s_{T_k/2}$，则 $I(s_{ij})>\frac{T_k}{2}$. 由式(6)可知:

$$s_{ij}^1+s_{ij}^4-1=\begin{cases}\dfrac{4[I(s_{ij})-\frac{T_k}{2}]}{2T_k+1}>0, I(s_{ij})<T_k; \\ \dfrac{2[I(s_{ij})-1]}{2T_k+1}>0, I(s_{ij})=T_k.\end{cases}$$

即当 $s_{ij} > s_{T_k/2}$，必有 $s_{ij}^1 > 1 - s_{ij}^4$.

同理：当 $s_{ij} > s_{T_k/2}$，必有 $s_{ij}^2 > 1 - s_{ij}^3$，$s_{ij}^3 > 1 - s_{ij}^2$，$s_{ij}^1 > 1 - s_{ij}^4$. 故由式(8)可知 $r_{ij} > 0.5$. 类似地，当 $s_{ij} < s_{T_k/2}$，必有 $s_{ij}^1 < 1 - s_{ij}^4$，$s_{ij}^2 < 1 - s_{ij}^3$，$s_{ij}^3 < 1 - s_{ij}^2$. 故由式(8)可知 $r_{ij} < 0.5$.

当 $s_{ij} = s_{T_k/2}$，必有 $s_{ij}^1 = 1 - s_{ij}^4$，$s_{ij}^2 = 1 - s_{ij}^3$，$s_{ij}^3 = 1 - s_{ij}^2$. 故由式(8)可知 $r_{ij} = 0.5$.

定理 2.5 说明了利用这种转换方法将语言偏好关系转化为相应的模糊偏好关系的过程中不改变方案之间的优劣关系，因此是合理的.

推论 2.2 设语言偏好关系 R 转化后的矩阵为 $(r_{ij})_{n\times n}$，若 $r_{ij} > 0.5$，则 $s_{ij} > s_{T_k/2}$；若 $r_{ij} < 0.5$，则 $s_{ij} < s_{T_k/2}$；若 $r_{ij} = 0.5$，则 $s_{ij} = s_{T_k/2}$.

推论 2.2 由定理 2.5 易知.

定理 2.6 若语言偏好关系 $R = (s_{ij})_{n\times n}$ 转化后的矩阵为 $(r_{ij})_{n\times n}$，则以下两个性质等价：

①若 $s_{ij} \geqslant s_{T_k/2}$，$s_{jk} \geqslant s_{T_k/2}$，必有 $s_{ik} \geqslant s_{T_k/2}$；

②若 $r_{ij} \geqslant 0.5$，$r_{jk} \geqslant 0.5$，必有 $r_{ik} \geqslant 0.5$.

定理 2.6 由定理 2.5 及推论 2.2 易得.

若将定理 2.6 中的性质①理解为语言偏好关系 R 满足弱传递性，而性质②表示模糊偏好关系 $(r_{ij})_{n\times n}$ 满足弱传递性，故定理 2.6 说明了本文的转换方法保持了偏好关系的弱传递性.

本节讨论的方法是利用各类偏好值与正、负理想方案的"效用值"之间距离的折中值表示方案两两比较时的效用.本质上它是一种将不同类型偏好值("模糊"类型信息)转化为实数型效用值的方法，因此，可以看成是一种去"模糊"化方法.

3 三类偏好信息的群决策过程

由于种种主观和客观的原因，决策者们对方案集给出的偏好信息类型往往不同.这种含不同类型偏好信息的群决策问题的处理过程一般需要以下几个阶段.

3.1 不同类型信息的转化

设决策者们对方案集 X 给出的偏好信息为模糊偏好关系 $R^1, R^2, \cdots, R^{t_1}$、区间互补偏好关系 $R^{t_1+1}, R^{t_1+2}, \cdots, R^{t_2}$、语言偏好关系 $R^{t_2+1}, R^{t_2+2}, \cdots, R^{t_3}$.根据节 2 的叙述，将模糊偏好关系、区间互补偏好关系、语言偏好关系均转化为相应的模糊偏好关系，并将这些模糊偏好关系分别记之为 $r^1, r^2, \cdots, r^{t_1}, \cdots, r^{t_2}, \cdots, r^{t_3}$.

3.2 个体偏好信息的集结

利用算术平均算子对不同类型信息转化后的模糊偏好关系进行集结，得到群体模糊偏好关系，并记之为 $P = (p_{ij})_{n\times n}$. 即

$$p_{ij} = \frac{1}{3}\Big[\frac{1}{t_1}\sum_{k=1}^{t_1} r_{ij}^k + \frac{1}{t_2 - t_1}\sum_{k=t_1+1}^{t_2} r_{ij}^k + \frac{1}{t_3 - t_2}\sum_{k=t_2+1}^{t_3} r_{ij}^k\Big].$$

3.3 方案的选择阶段

对每个方案 x_i，利用如下公式计算其优于其他所有方案的程度：

$$d_i = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} p_{ij}.$$

最后利用 d_i，$i = 1, 2, \cdots, n$，对所有方案进行排序并选择最优方案.

4 算例分析

为了验证方法的可行性，本文选取文献[1]中的例子的数据 P_1^n, P_2^S, P_3^I 进行分析决策.

$$R^1 = P_1^n = \begin{pmatrix} - & 0.5 & 0.8 & 0.4 \\ 0.3 & - & 0.9 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & - & 0.4 \\ 0.9 & 0.8 & 0.5 & - \end{pmatrix},$$

$$R^2 = P_2^S = \begin{pmatrix} - & H & VH & M \\ L & - & H & VH \\ VL & N & - & VH \\ L & VL & N & - \end{pmatrix},$$

$R^3 = P_3^I =$

$$\begin{pmatrix} - & [0.7, 0.8] & [0.65, 0.7] & [0.8, 0.9] \\ [0.3, 0.35] & - & [0.6, 0.7] & [0.8, 0.85] \\ [0.3, 0.35] & [0.3, 0.4] & - & [0.7, 0.9] \\ [0.1, 0.2] & [0.2, 0.4] & [0.1, 0.3] & - \end{pmatrix}.$$

转换后的结果如下：

$$r_1 = \begin{pmatrix} - & 0.5000 & 0.8000 & 0.4000 \\ 0.3000 & - & 0.9000 & 0.3000 \\ 0.3000 & 0.2000 & - & 0.4000 \\ 0.9000 & 0.8000 & 0.5000 & - \end{pmatrix},$$

$$r_2 = \begin{pmatrix} - & 0.6499 & 0.7973 & 0.5000 \\ 0.3501 & - & 0.6499 & 0.7973 \\ 0.2027 & 0.0749 & - & 0.7973 \\ 0.3501 & 0.2027 & 0.0749 & - \end{pmatrix},$$

$$r_3 = \begin{pmatrix} - & 0.7467 & 0.6745 & 0.8434 \\ 0.3255 & - & 0.6484 & 0.8236 \\ 0.3255 & 0.3516 & - & 0.7829 \\ 0.1566 & 0.3090 & 0.2171 & - \end{pmatrix},$$

$$p=\begin{pmatrix} - & 0.6322 & 0.7573 & 0.5811 \\ 0.3252 & - & 0.7328 & 0.6403 \\ 0.2761 & 0.2089 & - & 0.6601 \\ 0.4689 & 0.4372 & 0.2640 & - \end{pmatrix}.$$

利用节 3 的提出的群决策步骤，计算得到每个方案优于其他所有方案的程度分别为

$$d_1=0.6569,\ d_2=0.5661,$$
$$d_3=0.3817,\ d_4=0.3901.$$

因此最优方案为方案 1，这与文献[1]结果相同.因此前述转化方法是有效的、合理的.注意，P_1^n, P_2^S, P_3^I 均不满足互补性，但仍然可以使用本文所提供的方法进行转化，此时转化后的偏好关系不满足互补性.

5　结论

本文给出了模糊偏好关系、区间互补偏好关系、语言偏好关系转化为模糊偏好关系的方法.提出的转换方法的基本思想是：利用各类偏好值与正、负理想方案的“效用值”之间距离的折中值表示方案两两比较时的效用.它是一种将不同类型信息转化为中间域(效用空间)的方法，其特点是：在同一论域(相同的偏好信息类型)内讨论偏好值与正、负理想方案的“效用值”之间的关系，从而得到其效用.因此，这种方法避免了不同偏好信息之间的直接转换，而且可以借鉴这一方法处理其他偏好信息类型.我们可以认为它是一种处理含不同类型偏好信息问题的系统化方法.另外，本文方法的优点是其在处理语言偏好信息的过程中不需考虑评价集粒度的转换问题，使得计算简便，并且具有优良的性质.当然，本文还未考虑区间直觉模糊判断矩阵、区间语言判断矩阵与上述三类偏好关系的集结方法. 因此，上述三类偏好关系与其他类型偏好关系的集结方法仍然值得继续研究.

参考文献(References)

[1] HERRERA F, MARTÍNEZ L, SÁNCHEZ P J. Managing non-homogeneous information in group decision making[J]. European Journal of Operation Research, 2005, 166: 115-132.

[2] JIANG Y P, FAN Z P, MA J. A method for group decision making with multi-granularity linguistic assessment information[J]. Information Sciences, 2008, 178: 1098-1109.

[3] 刘洋，樊治平.一种具有多粒度区间语言信息的群决策方法[J]. 东北大学学报(自然科学版)，2009，30(4)：601-604.
LIU Yang, FAN Zhiping. A group decision-making method with multi-granularity uncertain linguistic information[J]. Journal of Northeastern University (Natural Science), 2009, 30(4): 601-604.

[4] XU Z S. An integrated model-based interactive approach to FMAGDM with incomplete preference information[J]. Fuzzy Optim Decis Making, 2010, 9(3): 333-357.

[5] FAN Z P, LIU Y. A method for group decision-making based on multi-granularity uncertain linguistic information[J]. Expert Systems with Applications, 2010, 37: 4000-4008.

[6] XU Y J, DA Q L, LIU X W. Some properties of linguistic preference relation and its ranking in group decision making[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2010, 21(2): 244-249.

[7] 乐琦，樊治平.具有多粒度区间语言评价信息的多属性群决策方法[J].控制与决策，2010，25(7)：1059-1068.
YUE Qi, FAN Zhiping. Method for solving multiple attribute group decision-making problems with multi-granularity uncertain linguistic assessment information[J]. Control and Decision, 2010, 25(7): 1059-1068.

[8] JAHANSHAHLOO G R, LOTFI F H, IZADIKHAH M. An algorithmic method to extend TOPSIS for decision-making problems with interval data[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 175: 1375-1384.

[9] DYMOVA L, SEVASTJANOV P, TIKHONENKO A. A direct interval extension of TOPSIS method[J]. Expert Systems with Applications, 2013, 40: 4841-4847.

[10] XU Z S, CHEN J. Some models for deriving the priority weights from interval fuzzy preference relations[J]. European Journal of Operational Research, 2008, 184: 266-280.

[11] 徐泽水.不确定多属性决策方法及应用[M].北京：清华大学出版社，2004.