

反对称简易十二极场磁铁的设计

罗焕丽^{1,2}, 王相綦², 李 想², 唐靖宇³, 杨 征³, 谢 凯²

(1.重庆市肿瘤研究所/医院/癌症中心,重庆 400030;2.中国科学技术大学国家同步辐射实验室,安徽合肥 230029;
3.中国科学院高能物理研究所,北京 100049)

摘要:在散裂靶或废束站上形成均匀的、形状规则化的束斑分布,是散裂中子源、加速器驱动次临界系统(ADS)等高功率强流质子束应用研究课题中共性的关键技术.目前国际上一般认为采用反对称非线性高阶场磁铁进行打靶束斑均匀化变换是较为合适的.提出了一种新颖的非线性场磁铁——反对称垂直双向聚焦简易十二极场磁铁,该磁铁可以在交叉垂直的两个方向同时聚焦束晕粒子至束核内层或束团中心区域,可以较好地控制束晕;并配合其他反对称高阶场磁铁或阶梯场磁铁,可以在靶上较容易地得到基本均匀分布的近似圆斑束.同时给出了该种磁铁的结构装置及其制造方法.

关键词:加速器驱动次临界系统;非线性场磁铁;束斑分布变换;反对称简易十二极场磁铁

中图分类号:TL503.8 **文献标识码:**A **doi:**10.3969/j.issn.0253-2778.2017.06.003

引用格式:罗焕丽,王相綦,李想,等.反对称简易十二极场磁铁的设计[J].中国科学技术大学学报,2017,47(6):465-473.

LUO Huanli, WANG Xiangqi, LI Xiang, et al. Design of a novel simplified dodecapole field magnet [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2017,47(6):465-473.

Design of a novel simplified dodecapole field magnet

LUO Huanli^{1,2}, WANG Xiangqi², LI Xiang², TANG Jingyu³, YANG Zheng³, XIE Kai²

(1. Chongqing Cancer Institute/Hospital/Centre, Chongqing 400030, China;
2. National Synchrotron Radiation Laboratory, University of Science and Technology of China, Hefei 230029, China;
3. Institute of High Energy Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: Beam distribution with the regular and homogeneous form on spallation target or beam dump is an imperious demand for spallation neutron source (SNS), accelerator driven sub-critical system (ADS), and so on. Nowadays, adopting nonlinear antisymmetric high order field is very infusive for distribution transformation of beam. Here, a simplified dodecapole field magnet (SDFM), well focusing particles in beam halo to inner layer of beam halo or beam core, was introduced. Combining SDFM with antisymmetric sextupole, octupole or decapole magnet can theoretically get approximate uniformly distributed round beam with slightly larger size. The conceptual design, physics structural and its manufacturing method of SDFM was presented.

Key words: accelerator driven sub-critical system; nonlinear magnets; distribution transformation of beam; simplified dodecapole field magnet

收稿日期:2016-01-05;修回日期:2016-06-12

基金项目:国家自然科学基金(11045003, 10975150),重庆市卫生计生委医学科研项目(2015MSXM229)资助.

作者简介:罗焕丽,女,1986年生,博士.研究方向:加速器物理学和放射物理学. E-mail: huanli@mail.ustc.edu.cn

通讯作者:王相綦,研究员. E-mail: wangxaqi@ustc.edu.cn

0 引言

国际上能源需求的日益增长需要高速发展核电站;核能可持续发展必须解决的关键问题之一是核废物处理,加速器驱动次临界系统(accelerator driven sub-critical system, ADS)既是一种高效的乏燃料又是核废物嬗变器^[1-3].高功率质子束团横向截面均匀化变换是 ADS 面临的关键技术之一.反对称非线性高阶场磁铁是目前比较公认的有可能用于 ADS 束流输运束斑变换的方法,其核心思想是利用非线性场磁铁提供的反对称非线性高阶场束团中束晕粒子聚集至束核靠外的偏离束轴区域,以达到分布均匀化的目的.

目前束斑变换常用的非线性场磁铁有:常规高阶场磁铁^[4,5,6],阶梯场磁铁^[7,8,9],特殊的简化反对称高阶场磁铁^[7,10].常规高阶场磁铁技术比较成熟,但其不足之处是此类磁铁对束晕粒子同时存在很强的散焦扇区,可调节量较少,适应性欠缺,并且在束流包络较大时对应磁铁孔径也非常大,造价昂贵,相比其他束斑变换方法,常规高阶场的均匀化效果也差一些.阶梯场磁铁是一种具有陡峭阶梯形磁场的新型结构磁铁,比较适用于束流发射度较大、能量较高且分布不规则的扁平束流,磁铁灵活性大,结构简单,工程设计难度较小,并且造价低廉.据文献报道,这样的束流变换技术必须在其上游先行将圆斑束调整为扁平束斑,下游束流准直器之后配合使用若干大孔径四极磁铁调整扁平束斑.这样的束斑变换调整技术,可以获得直角边圆化的矩形或方形束斑^[11],但大孔径四极磁铁将可能处于背散射中子辐射场的环境.反对称简易高阶场磁铁一般由靠近水平径向对称轴的四个磁极和两块垂直轴向对称轴上对应的屏蔽磁体块构成.此类磁铁磁场性能较好,制作工艺较简单,制造成本较低,并且低阶数反对称场组合在束团分布变换效果上比常规八、十二极磁铁的组合更优越,较适用于非规则的强子束团分布变换操控过程.然而,与阶梯场磁铁相比,已有文献报道的反对称简易高阶场磁铁由于横向平面内两个方向上的强耦合作用,可能致使输运过程有相对较大的束流损失.

目前来看,阶梯场磁铁或简易高阶场磁铁由于其磁铁的结构特点,在输运线上的布局位置选择可能灵活性稍低,并且对束团分布变换也仅只能在横向的某

一个方向上操控,得到的束斑形状一般为矩形束或扁平束或四角被圆化的近似方形束.针对一般的 ADS,由于散裂靶的类圆柱状结构决定了在靶上需要得到一个均匀分布的圆斑束^[12,13].若想通过这两种磁铁和常规高阶场磁铁在靶上得到均匀分布圆斑束,目前公开发表的文献中尚未有报道.

受唐靖宇等^[7]提出的特殊非线性简易高阶场磁铁的启发,从靶上得到较小束晕或无束晕粒子的圆斑束入手研究,我们提出一种应用于束团分布变换的特殊非线性磁铁——圆孔径反对称交叉垂直聚焦简易十二极场磁铁(简称反对称简易十二极场磁铁, simplified dodecapole field magnet, SDFM).SDFM 可以很好地将束晕外层粒子调整至束晕内层或束核外层区域.文中给出了 SDFM 用于调整束晕粒子往束核区域聚集的理论上的可行性,给出了 SDFM 三维设计过程与粒子跟踪模拟验证结果,并且也给出了 SDFM 配合其他反对称高阶场磁铁或阶梯场磁铁在靶上得到近似均匀分布圆斑束的模拟结果.该磁铁已经获国家发明专利授权.

1 SDFM 应用于束斑变换中的初步设想

在文献^[7]中,简易高阶场磁铁形成的磁场可用区域是一个扁长的二维矩形区域,通过降低横向的 x 、 y 两个方向的耦合作用得到近似均匀分布且分布密度较小的矩形束.不同于此, SDFM 在束晕粒子操控过程中,可以在交叉垂直的横向两个方向上进行向束核区域聚焦束晕粒子至束晕内层或束核区域的操作.

通过磁场矢量特性分析可知,标准十二极场磁铁的有效孔径区域内聚焦扇区和散焦扇区交错排列,近轴中心区域为无场区或低场区.为了在相对交叉垂直的两个对称轴方向上同时实现双向聚焦,可以取消常规十二极磁铁中的四个处于相对交叉垂直方向上的磁极头,并且调变其中位置上相隔 180° 的两对磁极的极性,在孔径真空管道外表面增添磁体块以弱化散焦扇区的磁场.散焦扇区内散焦磁场被弱化后的磁铁,在有效孔径目标区内可以获得反对称交叉垂直双向聚焦十二极磁场,这也是我们将该磁铁称之为反对称简易十二极场磁铁的原因,该磁铁理论上可用于 ADS 中向散裂靶输运驱动质子束的高能输运线上高功率质子束束晕的操控,也可用于其他需要对束斑进行均束变换的束流输运操控.

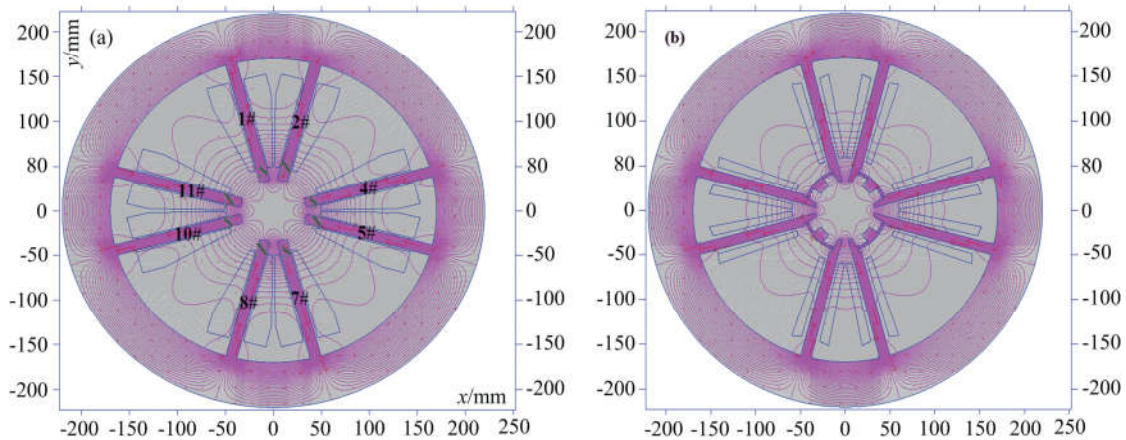
2 SDFM 的优化设计

2.1 标准十二极场磁铁去掉四个磁极头后的磁场分析

标准十二极场磁铁去掉交叉垂直的两个对称轴上的四个磁极头,并且将其中相隔 180° 的两对磁极头之一的极性调变(见图 1(a)),结合典型 ADS 用直线加速器输出束流的尺寸大小和多极场磁铁的磁场分布特性,初步设计目标场区以磁铁对称轴为中心的 D68 mm 圆柱区域,目标场区内的反对称简易高

阶场用于高功率质子束流束晕的操控.这样的磁场空间分布,要求束轴邻域的中心区域的磁场幅值宜足够的弱,以至于对束核中心区域的质子几乎没有影响或影响很小.而在距离束轴中心较远的区域(一般为 D20 mm~D30 mm)处应该具有很强的聚焦磁场,以便可以将束晕粒子向束轴聚集到束核区域内.

图 2(a)给出了磁铁孔径聚焦扇区上两条对称轴上 φ 方向的磁场分量 B_φ 的分布.分析可知,在 $r < 15$ mm 范围内属于无磁场区或低磁场区,用于束流变换时束核内粒子运动状态基本维持不变;在



(a) 标准十二极磁铁取消四个磁极头并将相隔 180° 的两对磁极极性调变后的磁铁,磁铁外轮廓 D440 mm,以磁铁对称轴中心点为坐标原点;
(b) 屏蔽磁体块和磁极头极面优化后的 SDFM 示意图.

图 1 SDFM 的二维 Poisson 设计
Fig.1 2D Poisson design of SDFM

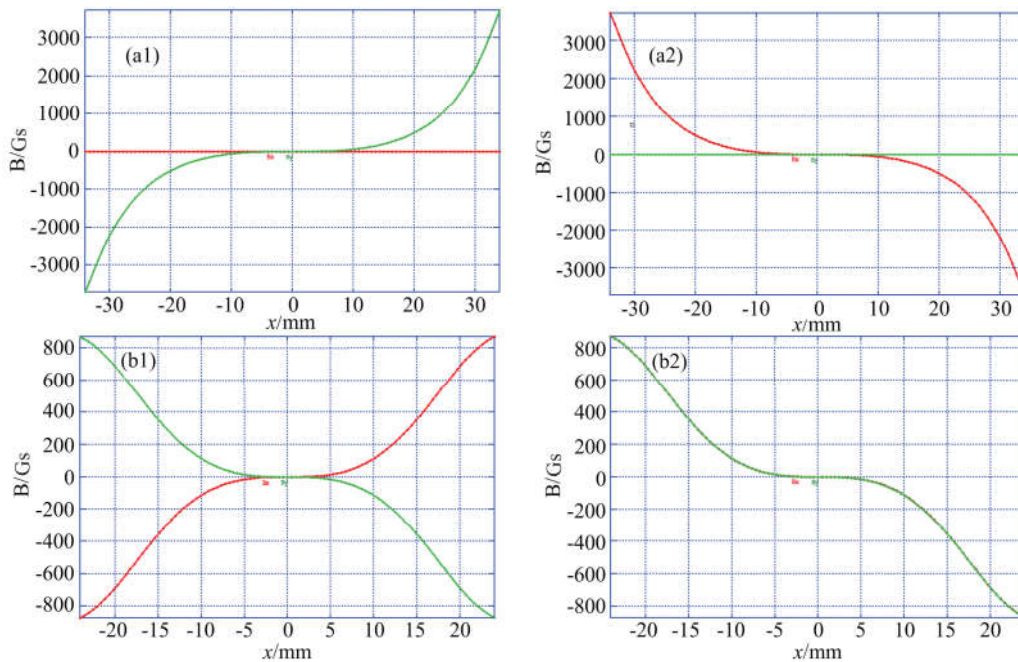


图 2 磁铁孔径内垂直对称轴上的 B_φ 磁场位型分布:(a) 聚焦扇;(b) 散焦扇
Fig.2 B_φ magnetic field distribution in vertical symmetry axis of its aperture

$r \geq 15$ mm 时, 磁场绝对值随偏离对称中心的距离呈指数形式急剧增大, 束晕区域越偏外的粒子受到的磁场向轴心偏转的力越大, 使其越往束核区域聚集. 可见, 聚焦扇内的磁场位型基本上满足了利用反对称非线性高阶磁场对束晕粒子进行聚焦变换的目的. 图 2(b) 给出的是磁铁孔径散焦扇内两条对称轴上的磁场位型分布. 从此图可见, 四个约 60° 的散焦扇束核区域中的磁场平坦区域 (约 D10 mm) 要小于聚焦扇束核区域中的磁场平坦区域 (约 D20 mm), 散焦扇磁场平坦区域较小意味可能有较多粒子从束核区域离散至束核区域偏外的地方或束晕区域偏内的地方. 但是, 由于多数散焦扇磁场分量 B_ϕ 不是很强, 所以对束斑均匀化可能不会带来过多的负面影响. 但是, 散焦扇区径向坐标, 即半径 34 mm 处磁场仍较大, B_ϕ 幅值约 1200 Gs, 约为聚焦扇区 B_r 磁场分量的 $1/3$, 这有可能会使束晕内的粒子离散至束晕区域偏外或以外的区域, 对束斑均匀化仍可能产生较强的负面影响.

2.2 SDFM 中散焦扇区磁场分量 B_ϕ 弱化研究

为了弱化散焦扇内的磁场对束晕粒子的散焦作

用, 我们考虑了在对应约为 60° 的四个散焦扇紧靠圆形真空管壁外的区域里增添屏蔽磁体块, 以便于调整局部区域磁场磁力线分布. 图 1(b) 显示了一种有效的增添有屏蔽磁体块的 SDFM 结构, 即: 将靠近散焦扇一侧的磁极削去一部分, 并且调变屏蔽磁体块的形状, 使其靠近真空管道外表面一侧窄一些, 远离真空管道外表面一侧宽一些. 减小靠近聚焦扇部分的屏蔽磁体块的厚度, 增加散焦扇对称轴附近的屏蔽磁体块的厚度. 我们分析了未加屏蔽磁体块、单纯加入屏蔽磁体块、屏蔽磁铁块及磁极面都优化的三种情况, 图 3 显示了三种情况的聚焦扇和散焦扇对称轴上的磁场位形分布. 由图 3 比较可知, 屏蔽磁体块及磁极面的优化拓宽了 SDFM 物理孔径内束轴上的磁场平坦区域, 减低了散焦扇区沿对称轴的磁场分量 B_ϕ . 图 4 显示了 SDFM 物理孔径内 D60 mm 圆周线上的磁场角向分量分布, 散焦扇对称轴邻域内的归一化磁场角向分量比未优化之前的数值基本维持不变 (约 0.1), 而对于散焦扇对称轴两侧 (靠近聚焦扇区的区域), 归一化的磁场角向分量由未优化之前的大约 0.6 降到了大约 0.33, 实际磁场角向分量值由未优化之前的大约 1300 Gs 降至 700 Gs.

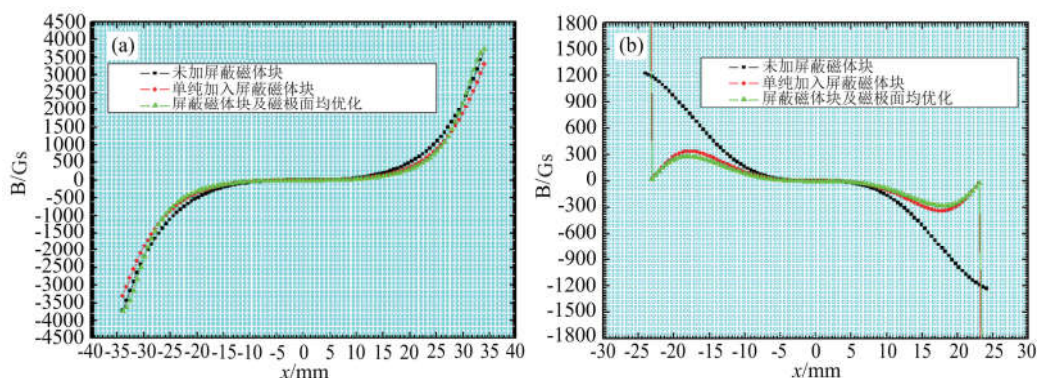
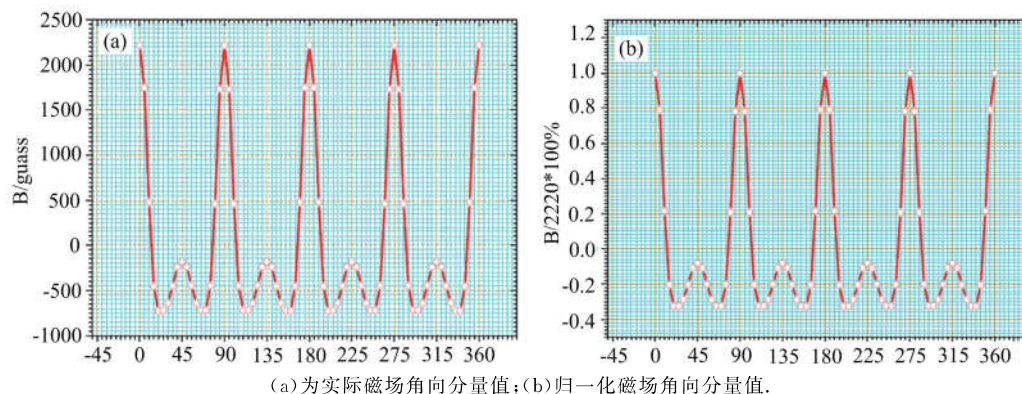


图 3 对称轴上的磁场位型分布: (a) 聚焦扇; (b) 散焦扇

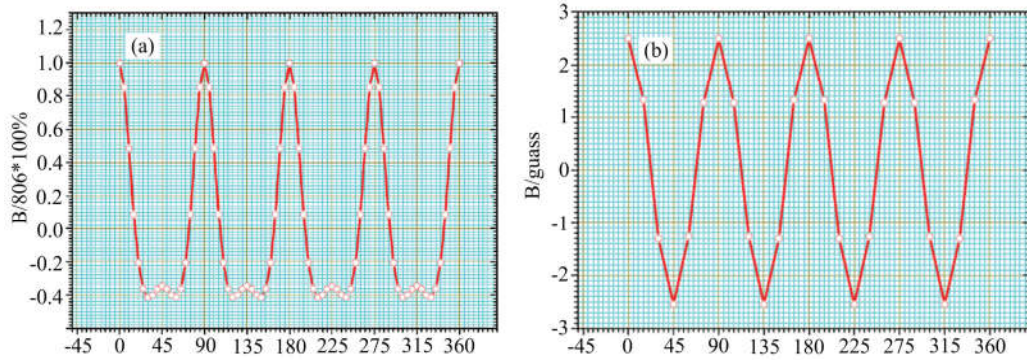
Fig.3 The magnetic field distribution in vertical symmetry axis



(a) 为实际磁场角向分量值; (b) 归一化磁场角向分量值.

图 4 SDFM 孔径内 D60mm 的圆周线上的磁场角向分量分布

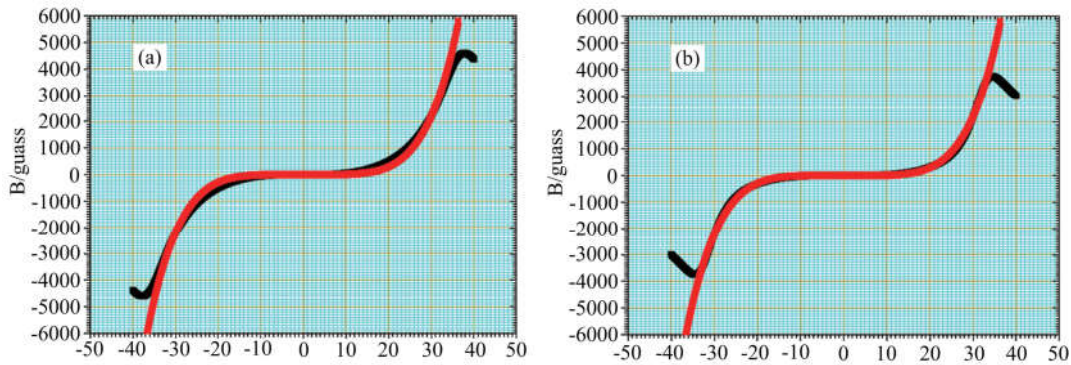
Fig.4 Distribution of angular component of magnetic field in circumference of D60 mm for SDFM



(a) SDFM 物理孔径内 D50 mm 圆周线上的归一化磁场角向分量分布;
 (b) SDFM 物理孔径内 D8.6 mm 圆周线上的实际磁场角向分量分布.

图 5 SDFM 物理孔径圆周线上的磁场角向分量

Fig.5 Angular component of the magnetic field in circumference of SDFM



红色线条代表理想十二极磁场,黑色线条代表聚焦扇对称轴上的磁场.(a) 未加屏蔽磁体块之前;(b) 屏蔽磁体块和磁极面均优化之后.

图 6 聚焦扇对称轴上的磁场与理想十二极磁场的比较

Fig.6 Comparison of the magnetic field distribution in vertical axis of focusing area with that in ideal dodecapole magnetic

图 5 给出了 SDFM 物理孔径内小直径 D50 mm 和 D8.6 mm 两条圆周线上的磁场角向分量.在 D50 mm 处,散焦扇磁场强度最大值与聚焦扇磁场强度最大值之比约 0.44,明显的,这个比值要比 D60 mm 圆周线上相应的比值要高;在 D8.6 mm 处,聚焦扇和散焦扇内的磁场位型分布和数值基本一致,即屏蔽磁体块在该区域对散焦扇内的散焦磁场基本无弱化作用.可见,越靠近束轴中心区域,散焦扇内最大磁场角向分量与聚焦扇内最大磁场角向分量的比值越增大,并且以指数形式增大,这说明屏蔽磁体块对磁铁孔径对称轴邻域内的磁场越靠近束轴,弱化作用越小.图 6(a)显示的磁场角向分量最大值为 2.5 Gs,较小的磁场使得束轴附近粒子穿过该区域时基本不会受到磁场力的作用很小,这很好的印证了用于束团分布变换的反对称非线性高阶场磁铁对束核内粒子基本无影响的设想.

图 6 比较了聚焦扇对称轴上的聚焦磁场与理想十二极磁场.优化后的 SDFM 聚焦扇对称轴上的聚

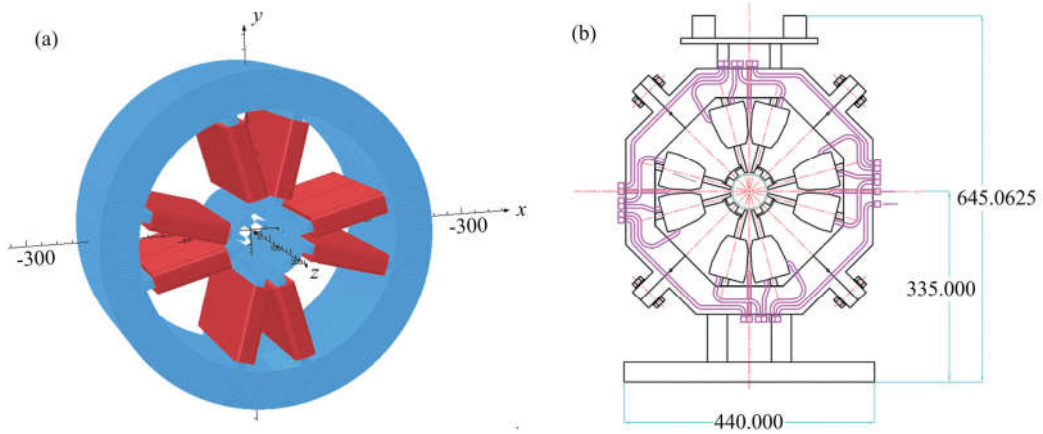
焦磁场随位移的变化速率,略高于标准十二极磁场随位移的变化速率,这应该对束晕层粒子的聚焦有更有利的作用.

2.3 SDFM 三维设计及其制作方法

图 7(a)给出了图 1(b)对应的 SDFM Opera-3D 图,磁铁材料采用常规的 J23-50 牌号硅钢片,3D 图中磁轭内的最大磁场为 2.11 T,认为磁场未达到饱和状态.SDFM 装置涉及准直靶座、上磁轭、左磁轭、右磁轭、下磁轭、八个励磁线包、四个屏蔽磁体、真空管道、连接导线等部件,详见图 7(b).

3 SDFM 粒子跟踪模拟

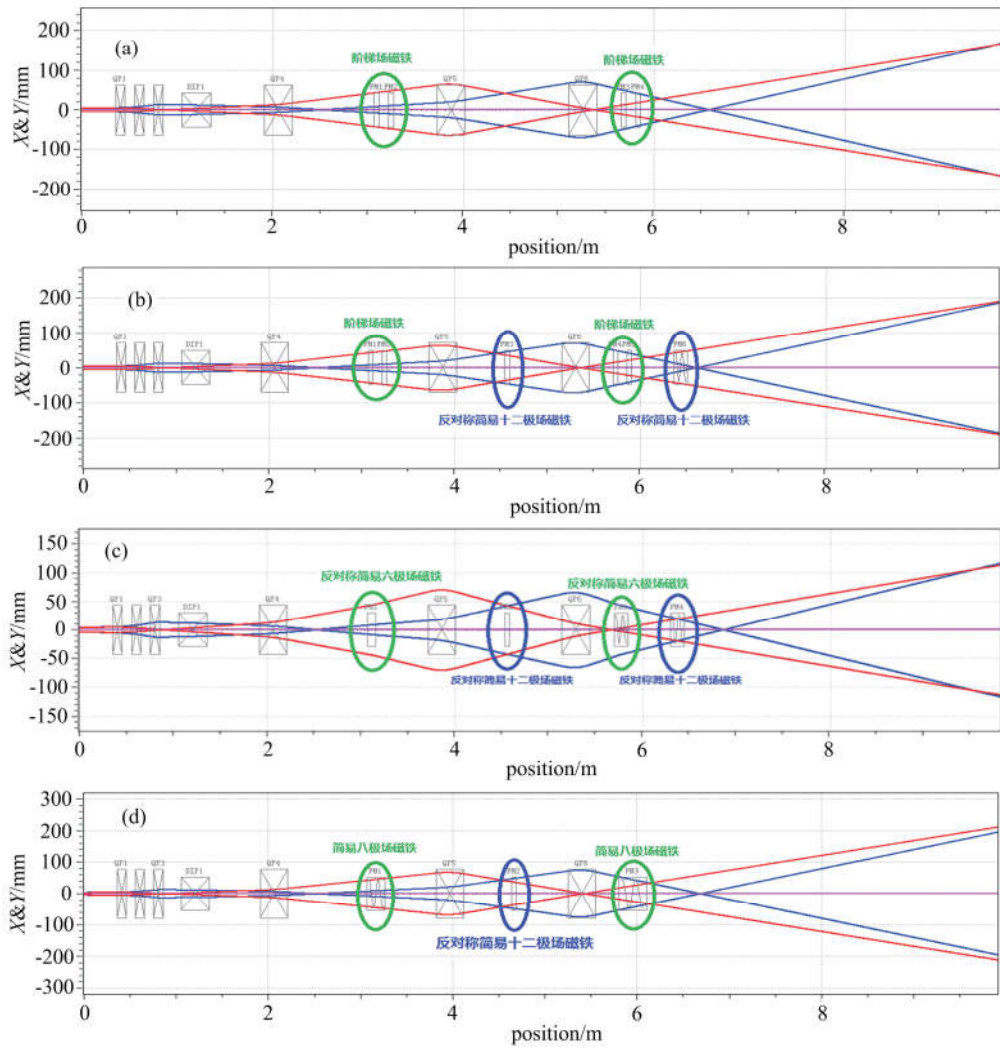
为了验证 SDFM 理论可行性,我们将 SDFM 的 Opera-3D 模型中的磁场数据导入至跟踪软件中,直接应用到 ADS 相关联的一段输运线内(见图 8(a)),或配合其他非线性磁铁,观察目标靶上束团分布情况.将 SDFM 加入到图 10 输运线适当位置,见图 8(b);反对称简易六极场磁铁取代图 8(a)输运



(a)SDFM OPERA-3D 模型图;(b)SDFM 结构示意图

图 7 SDFM 三维模型图及其结构示意图

Fig.7 Sketches of 3D model and structure of SDFM



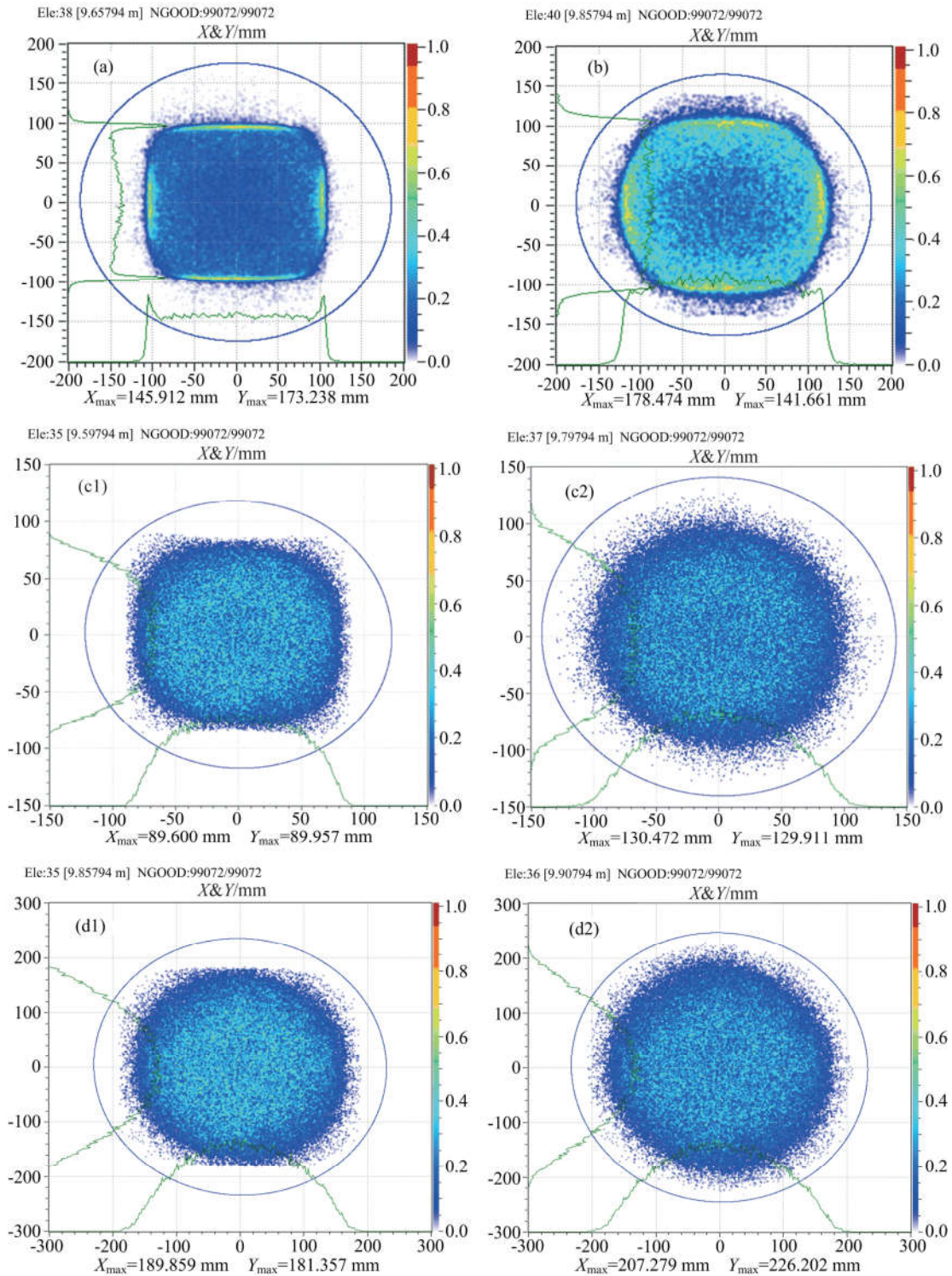
入口处:质子束流能量 10.0422 MeV,流强 10.0275 mA,粒子数 99072,归一化的 rms 发射度为 $0.2058 \pi \cdot \text{mm} \cdot \text{mrad}$.
 (a)阶梯场磁铁;(b)阶梯场磁铁和 SDFM;(c)反对称简易六极场磁铁和 SDFM;(d)反对称简易八极场磁铁和 SDFM.

图 8 一段 ADS 输运线

Fig.8 A transport line for ADS

线内的阶梯磁场,再结合 SDFM,见图 8(c);反对称简易八极场磁铁取代图 8(a)运输线内的阶梯磁场,

再结合 SDFM,见图 8(d). 运输线的靶上粒子相空间分布模拟结果见图 9.



(a) 阶梯场磁铁;(b)阶梯场磁铁和 SDFM;(c1)反对称简易六极场磁铁;(c2)反对称简易六极场磁铁和 SDFM;
(d1)反对称简易八极场磁铁;(d2)反对称简易八极场磁铁和 SDFM

图 9 靶上粒子相空间分布.图中圆圈为 100%粒子所在区域

Fig.9 Phase spatial distribution of particles on target

由靶上粒子相空间分布可见,仅采用阶梯场磁铁时,输运线出口处(靶上)得到了一个四角被圆化的近似正方形束斑(图 9(a)),除了沿边缘处密度高一些外,束团内分布近似均匀分布.通过 SDFM 作用后,束晕外层粒子聚焦到了束晕内层或束核区域,且由之前的四角圆角化的(图 9(a))近似正方形束斑变为(图 9(b))近似圆斑束;之前矩形束斑的分布密集的几个边缘处密度有一定改善;束团内部粒子分布密度比之前略有减低,这可以通过调整阶梯场磁铁和相关联的四极铁参数及 SDFM 参数获得进一步改善.图 9(c1)和图 9(c2)两图比较,SDFM 作用后的束团分布均匀度基本没有变化,束团分布的圆形度比作用之前有明显提高.束团分布的均匀度与反对称简易六极场磁铁有很大关系,束团分布的圆形度与 SDFM 有很大关系,并且采用 SDFM 很容易得到圆形度极好的圆斑束.图 9(d1)和图 9(d2)两图比较,SDFM 作用后的靶上束团分布均匀性提高,束晕内粒子聚焦至束晕内层或束核区域,并且,束斑由之前的近似方形束变为 ADS 靶上所需的圆斑束;束团分布均匀性和圆形度经过后续进一步工作,仍存在较大优化空间.

通过以上的跟踪模拟可见,SDFM 可以有效地操控束晕粒子,较容易得到大尺寸圆斑束.并且,配合其他类型的均束磁铁的使用,设计出实现靶上均匀分布圆斑束的高功率束流输运线是很有可能,从而满足 ADS 未来高功率束流运输的需求.

为了得到较为理想的磁场位形分布,阶梯场磁铁一般情况下需要增大其内磁轭线圈励磁电流,采用常规磁铁材料设置较容易到达饱和,且由于空间局限性,冷却系统需要合理地优化设计,加之此类磁铁的孔径较大,故在所关心的粒子运动区域内,阶梯场磁铁产生的磁场大小一般存在上限值.然而,对于反对称简易六极场磁铁或八极场磁铁和 SDFM 均不存在这些问题,可得到磁场值更高一些的磁场,这样可以以纵向长度较短的磁铁提供较高的磁场积分值,达到效果一样的磁场偏转.

4 结论

本文从理论分析到跟踪模拟,给出了一个新颖的、可以产生反对称简易十二极磁场的非线性磁铁 SDFM.SDFM 是由标准的十二极磁铁去掉四个极头,调变两对极头极性,并且加入屏蔽磁体块和极面优化后得到的.SDMF 可以配合其他类型均束磁铁

的使用,比已报道文献介绍的方法更有效地控制束晕粒子,可以在靶上得到近似圆斑束,可以满足靶上束斑形状要求.此外,SDFM 极面孔径具有与全粒子尺寸基本相吻合的孔径,所以在束流输运线的安装位置选择上具有较大灵活性.从安全性考虑,SDFM 极面孔径束轴中心区域内是极低磁场的无场区,极面孔径束轴邻域外的高磁场是以聚焦束晕粒子为目的的,可以有效地降低采用其他剔除束晕粒子均匀化带来的对环境辐射剂量率的影响.

参考文献(References)

- [1] GUDOWSKI W. Accelerator-driven transmutation projects: The importance of nuclear physics research for waste transmutation [J]. Nuclear Physics A, 1999, 654(1-2): 436-457.
- [2] RUBBIA C, ALEIXANDRE J, ANDRIAMONJE S. A European roadmap for developing accelerator driven systems (ADS) for nuclear waste incineration [R]. ROMA: ENEA, 2001.
- [3] LI Zexia, LIU Xiaoping, ZHU Xiangli, et al. International development trend analysis of accelerator-driven sub-critical system [J]. Science Focus, 2011, 6(3): 32-44.
- [4] MEOT F, ANIEL T. Principles of the non-linear tuning of beam expanders [J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A, 1996, 379(2): 196-205.
- [5] YURI Y, MIYAWAKI N, KAMIYA T, et al. Uniformization of the transverse beam profile by means of nonlinear focusing method [J]. Physical Review Special Topics: Accelerators and Beams, 2007, 10(10): 104001.
- [6] TSOUPAS N, AHRENS L, BELLAVIA S, et al. Uniform beam distributions at the target of the NASA Space Radiation Laboratory's beam line [J]. Physical Review Special Topics: Accelerators and Beams, 2007, 10(2): 024701.
- [7] TANG J Y, LI H H, AN S Z, et al. Distribution transformation by using step-like nonlinear magnets [J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A, 2004, 532(3): 538-547.
- [8] TANG J Y, WEI G H, ZHANG C. Step-like field magnets to transform beam distribution at the CSNS target [J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A, 2007, 582(2): 326-335.
- [9] TANG J Y, FENG G Y, LIU G W. Design and prototyping of a step-like field magnet [J]. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 2010, 20

- (3): 1041-1044.
- [10] GUO Z, TANG J Y, YANG Z, et al. A novel structure of multipole field magnets and their applications in uniformizing beam spot at target [J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A, 2012, 691(16):97-108.
- [11] TANG Jingyu, YANG Zheng, WEI Guohui, et al. Accelerator to target interface problems with high power beams [C]// Workshop on Nonlinear Beam Expander Systems in High-Power Accelerator Facilities. Aarhus, Denmark: Aarhus University, 2012.
- [12] CHENG X, PETTAN C, KNEBEL J U, et al. Experimental and numerical studies on thermal-hydraulics of spallation targets [C]// Emerging Nuclear and Transmutation Systems: Core Physics and Engineering Aspects. Vienna: International Atomic Energy Agency, 2003: 308-325.
- [13] BIANCHI F, FERRI R, MOREAU V. Thermo-hydraulic analysis of the windowless target system[J]. Journal of Nuclear Engineering and Design, 2008, 238(8): 2135-2145.
- [14] 王相綦, 罗焕丽, 李想. 简化十二极场磁铁装置及其制造方法: ZL201210334199.2 [P]. 2015-01-21.
- [15] 王相綦, 罗焕丽, 黄维. 一种圆孔径反对称简化六极场磁铁装置及其制造方法: ZL201310259701.2 [P]. 2015-10-21.

(上接第 464 页)

- [7] HUANG L, MO X. Projectively at Finsler metrics with orthogonal invariance [J]. Annales Plonici Mathematical, 2013, 107: 259-270.
- [8] HUANG L, MO X. On some explicit constructions of dually at Finsler metrics[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2013, 437: 675-683.
- [9] YU C, ZHU H. On a new class of Finsler metrics[J]. Differential Geometry and Its Applications, 2011, 29: 244-254.
- [10] HAMEL G. Über die Geometrieen in denen die Geraden die Kürzesten sind[J]. Math Ann, 1903, 57: 231-264.
- [11] SHEN Z. Riemann-Finsler geometry with applications to information geometry [J]. Chinese Annals of Mathematics, Series B, 2006, 27: 73-94.
- [12] HUANG L, MO X. On some dually at Finsler metrics with orthogonal invariance [J]. Nonlinear Analysis, 2014, 108: 214-222.
- [13] LI B. On dually at Finsler metrics [J]. Differential Geometry and Its Applications, 2013, 31: 718-721.