第47卷第6期 中国科学技术大学学报 Vol.47,No.6
2017年6月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Jun. 2017

文章编号:0253-2778(2017)6-0455-04

常曲率1共形度量在锥奇点附近的显示表达

冯 宇,史毅茜,许 斌

(中国科学技术大学数学科学学院,安徽合肥 230026)

摘要:利用展开映射,证明了在常曲率1共形度量的一个角度为 $2\pi\alpha>0$ 的锥奇点附近,存在适当的复坐标系 z,在其下该度量可表为 $\frac{4\alpha^2|z|^{2\alpha-2}}{(1+|z|^{2\alpha})^2}|dz|^2$.

关键词:常曲率1共形度量;锥奇点;展开映射;可约度量

中图分类号:O186.1 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2017.06.001

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 32Q30; Secondary 34M35

引用格式:冯宇,史毅茜,许斌.常曲率1共形度量在锥奇点附近的显示表达[J]. 中国科学技术大学学报,2017,47(6):455-458.

FENG Yu, SHI Yiqian, XU Bin. On the explicit expression of a conformal metric of constant curvature one near a conical singularity[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2017,47(6):455-458.

On the explicit expression of a conformal metric of constant curvature one near a conical singularity

FENG Yu, SHI Yiqian, XU Bin

(*School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026, *China*)

Abstract: Near a conical singularity with angle $2\pi\alpha>0$ of a conformal metric of constant curvature one, it was proved by using the developing map that there exists a suitable complex coordinate z under which the metric has the expression of $\frac{4\alpha^2|z|^{2\alpha-2}}{(1+|z|^{2\alpha})^2}|dz|^2$.

Key words: conformal metric of constant curvature one; conical singularity; developing map; reducible metric

0 引言

设 Σ 是紧黎曼面,p 是 Σ 上的一点. 称 Σ 上的共形度量 $d\sigma^2$ 在 p 点有一个角度为 $2\pi\alpha>0$ 的锥奇点,如果在 p 点的一个邻域内,$d\sigma^2=e^{2\varphi}|dz|^2$,其中 z 是定义在 p 的邻域内的局部复坐标,$z(p)=0$,且 $\varphi-(\alpha-1)\ln|z|$ 在这个邻域内连续. 令 $p_1,\cdots,p_n$ 是 Σ 上的点,如果对 $j=1,\cdots,n$,$d\sigma^2$ 是 Σ 上在 p_j 处为锥奇点,且角度为 $2\pi\alpha_j>0$ 的共形度量,那么我们称 $d\sigma^2$ 表示除子

$$D:=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j-1)p_j.$$

收稿日期:2016-11-26;**修回日期**:2017-02-20

基金项目:国家自然科学基金(11571330),中央高校基本科研专项资金(WK3470000003)资助.

作者简介:冯宇,男,1990年生,硕士生. 研究方向:微分几何. E-mail:yuf@mail.ustc.edu.cn

通讯作者:许斌,博士/副教授. E-mail: bxu@ustc.edu.cn

由 Gauss-Bonnet 公式：

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{\Sigma} K\,\mathrm{d}A = \chi(\Sigma) + \deg(D),$$

其中 K 是高斯曲率，$\chi(\Sigma)$ 是 Σ 的欧拉数，$\deg(D) = \sum_{j=1}^{n}(\alpha_j - 1)$. 一个经典的问题是在 Σ 上是否存在常曲率为 K，表示除子 D 的共形度量. 根据文献[1-2]，若 $K \leqslant 0$，那么度量存在且唯一的充要条件是 $\chi(\Sigma) + \deg(D) \leqslant 0$. 若 $\chi(\Sigma) + \deg(D) > 0$，在原始度量乘以某个常数下这个条件等价于 $K \equiv 1$，此时问题是开放的，只有部分结果，其中一些如下. Troyanov[3] 考虑了球面上有两个锥奇点的情况，证明了这时度量存在的充要条件是 $\alpha_1 = \alpha_2$. 他的一个更一般的结论[2，定理4] 是当 $0 < \chi(\Sigma) + \deg(D) < \min\{2, 2\min\alpha_j\}$ 时，存在常正曲率的度量. Luo 和 Tian[4] 证明了当 Σ 是二维球面且所有的角度属于 $(0, 2\pi)$ 时，上述条件也是必要条件，且度量存在唯一.当 Σ 是球面，Σ 上有 3 个锥奇点时，Umehara 和 Yamada[5]；Eremenko[6]；Furuta 和 Hattori [7]；Fujimori 等[8] 给出了度量存在的一个充分必要条件，而且当且仅当 3 个角度都不属于 $2\pi\mathbb{Z}_{>0}$ 时，度量是唯一的.

设 $\mathrm{d}\sigma^2$ 是 Σ 上常曲率 1，表示除子 D 的共形度量. 我们称 $\Sigma^* := \Sigma \backslash \{p_1, \cdots, p_n\}$ 上的一个多值局部单叶全纯映射 $f: \Sigma^* \to \overline{\mathbb{C}}$ 为度量 $\mathrm{d}\sigma^2$ 的一个展开映射，如果 $\mathrm{d}\sigma^2 = f^*\mathrm{d}\sigma_0^2$，其中 $\mathrm{d}\sigma_0^2 = \dfrac{4\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\bar{\zeta}}{(1+\zeta\bar{\zeta})^2}$ 是黎曼球 $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ 上的标准度量，ζ 为 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的标准复坐标.

我们称 Σ 上常曲率 1，有有限多个锥奇点的共形度量 $\mathrm{d}\sigma^2$ 为可约度量，如果存在 $\mathrm{d}\sigma^2$ 的一个展开映射的单值化群包含于

$$U(1) = \{z \mapsto \mathrm{e}^{it}z : t \in [0, 2\pi)\} \subset \mathrm{PSU}(2) =$$
$$\{z \mapsto \frac{az+b}{-\bar{b}z+\bar{a}} : |a|^2 + |b|^2 = 1\}.$$

否则，称 $\mathrm{d}\sigma^2$ 为不可约度量. 我们称一个可约度量是(非) 平凡的，如果这个度量的一个展开映射的单值化群是(非) 平凡的. 称非平凡可约度量 $\mathrm{d}\sigma^2$ 的一个展开映射 f 是可乘的，如果 f 的单值化群包含在 $U(1)$ 中，在不计取倒数的情况下，这样的 f 是唯一的. 关于可约度量的详细论述可见文献[9].

Bryant[10，性质4] 证明了有限面积常曲率共形度量的孤立奇点一定是锥奇点，并且给出了度量在孤立奇点附近的显示表达. 特别地，设角度为 $2\pi\alpha > 0$，在适当的复坐标系 z 下，这个表达式为 $\dfrac{4\alpha^2|z|^{2\alpha-2}}{(1+|z|^{2\alpha})^2}|\mathrm{d}z|^2$. 证明中 Bryant 使用了 Nevanlinna 理论和 Montel 正规族定理. 现在我们考虑常曲率 1 共形度量的一个角度为 $2\pi\alpha > 0$ 的锥奇点，利用展开映射，也得到度量在锥奇点附近的显示表达，从而给出如下定理的一个新的初等证明.

定理 0.1 设 $\mathrm{d}\sigma^2$ 是在去心圆盘 $\triangle^* = \{w \in \mathbb{C} \mid 0 < |w| < 1\}$ 上高斯曲率为 $+1$ 的共形度量. 如果 $\mathrm{d}\sigma^2$ 在 $w=0$ 处有角度为 $2\pi\alpha > 0$ 的锥奇点，那么存在 $\varepsilon > 0$，在 $\Delta_\varepsilon = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < \varepsilon\}$ 上存在一个全纯坐标 z，使得 $z(0) = 0$，在 Δ_ε 上有表达式

$$\mathrm{d}\sigma^2|_{\Delta_\varepsilon} = \frac{4\alpha^2|z|^{2\alpha-2}}{(1+|z|^{2\alpha})^2}|\mathrm{d}z|^2.$$

而且，在相差一个变换 $z \to \lambda z$，$|\lambda| = 1$ 下 z 是唯一的.

1 预备知识

称 Σ^* 上一个多值局部单叶亚纯函数 f 为射影函数，如果 f 的单值化群包含于群 $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$. 即，它的单值化表示是一个群同态

$$M_f: \pi_1(\Sigma^*, B) \to \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}).$$

详细说来，对 f 的每个在基点 $B \in \Sigma^*$ 附近的单值分支 $\mathscr{f}$，对于过 B 的任意 Σ^* 中的闭曲线 γ，存在只与 γ 的同伦类 $[\gamma] \in \pi_1(\Sigma^*, B)$ 有关的常数 $a_\gamma, b_\gamma, c_\gamma, d_\gamma$ 使得 $a_\gamma d_\gamma - b_\gamma c_\gamma = 1$，且 f 沿 γ 的解析延拓

$$M_\gamma(\mathscr{f}) = \frac{a_\gamma \mathscr{f} + b_\gamma}{c_\gamma \mathscr{f} + d_\gamma}.$$

定理的证明将用到如下引理.

引理 1.1[9] 设 $\mathrm{d}\sigma^2$ 是紧黎曼面 Σ 上常曲率 1，表示除子 $D = \sum_{j=1}^{n}(\alpha_j - 1)p_j$，$\alpha_j > 0$ 的共形度量. 那么存在一个从 $\Sigma^* = \Sigma \backslash \{p_1, \cdots, p_n\}$ 到黎曼球面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的多值局部单叶全纯映射 f，使得 f 的单值化群包含于 $\mathrm{PSU}(2)$，而且 $\mathrm{d}\sigma^2 = f^*\mathrm{d}\sigma_0^2$，其中 $\mathrm{d}\sigma_0^2 = \dfrac{4\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\bar{\zeta}}{(1+\zeta\bar{\zeta})^2}$ 是 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的标准度量.

引理 1.2[9] 度量 $\mathrm{d}\sigma^2$ 的任意两个展开映射 f_1, f_2 通过一个分式线性变换 $\mathscr{L} \in \mathrm{PSU}(2)$ 联系起来，即 $f_2 = \mathscr{L} \circ f_1$. 特别地，$\mathrm{d}\sigma^2$ 的任意两个展开映射在 $\mathrm{PSU}(2)$ 中有相互共轭的单值化群. 那么我们

称这个共轭类为度量 $d\sigma^2$ 的单值化表示.度量 $d\sigma^2$ 的展开映射空间和群 PSU(2) 关于 $d\sigma^2$ 的一个展开映射的单值化群的商群有一个一一对应关系.

引理 1.3[9]　设 $d\sigma^2$ 是紧黎曼面 Σ 上常曲率 1 的共形度量，且 $d\sigma^2$ 表示除子 $D=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j-1)p_j$，其中 $\alpha_j>0$. 若 $f:\Sigma^*=\Sigma\backslash\{p_1,\cdots,p_n\}\to\overline{\mathbb{C}}$ 是 $d\sigma^2$ 的一个展开映射. 那么在 p_j 的一个邻域 U_j 中，存在复坐标 z，使得 $z(p_j)=0$，f 的施瓦兹导数 $\{f,z\}=\frac{f'''(z)}{f'(z)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$ 等于

$$\{f,z\}=\frac{1-\alpha_j^2}{2z^2}+\frac{d_j}{z}+\psi_j(z),$$

式中，d_j 是复常数，ψ_j 是 U_j 中的全纯函数，它们依赖于复坐标 z.称 f 与除子 $D=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j-1)p_j$ 相容，如果在 p_j 的一个邻域 U_j 中，f 的施瓦兹导数有以上形式.

引理 1.4[9]　设 $f:\Sigma^*\to\overline{\mathbb{C}}$ 是一个射影的多值局部单叶亚纯函数，而且假设 f 的单值化群包含于 $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$ 的一个极大紧子群. 如果 f 与除子 $D=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j-1)p_j$ 相容，那么存在 p_j 的一个邻域 U_j，相应的复坐标系 z 和 $L_j\in\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$，使得 $z(p_j)=0$ 且 $g_j=\mathscr{L}_j\circ f$ 有表达式 $g_j(z)=z^{\alpha_j}$，其中 $0<\alpha_j\neq1$，$c_j=\frac{1-\alpha_j^2}{2}$.而且存在 $\mathscr{L}\in\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$ 使得标准度量 $d\sigma_0^2$ 通过 $\mathscr{L}\circ f$ 的拉回 $(\mathscr{L}\circ f)^*d\sigma_0^2$ 是常曲率 1，表示除子 $D=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j-1)p_j$ 的共形度量. 特别地，如果 f 的单值化群包含于 PSU(2)，那么分式线性变换 $\mathscr{L}$ 成为恒等映射.

2　定理的证明

定理 0.1 的证明　$d\sigma^2$ 是在去心圆盘 $\triangle^*=\{w\in\mathbb{C}\mid 0<|w|<1\}$ 上 $K\equiv+1$ 的共形度量，$d\sigma^2$ 在 $w=0$ 处有一个角度为 $2\pi\alpha>0$ 的锥奇点，不妨设这一点为 p. 由引理 1.1，在 $\triangle^*$ 上存在一个多值全纯映射 $f:\triangle^*\to\overline{\mathbb{C}}$ 满足 $d\sigma^2=f^*(d\sigma_0^2)$，其中 $d\sigma_0^2=\frac{4d\zeta d\overline{\zeta}}{(1+\zeta\overline{\zeta})^2}$ 是球面上的标准度量，而且 f 的单值化群包含于群 PSU(2). 我们得到一个表示 $\rho_f:\pi_1(\triangle^*)\to\mathrm{PSU}(2)$，因为 $\pi_1(\triangle^*)=\mathbb{Z}$，表示 ρ_f 的像必含于某个与 $U(1)$ 共轭的 PSU(2) 的子群中，因此度量 $d\sigma^2$ 是可约度量.

因为 $d\sigma^2$ 在 p 点有一个角度为 $2\pi\alpha>0$ 的锥奇点，$f:\triangle^*\to\overline{\mathbb{C}}$ 是 $d\sigma^2$ 的一个展开映射，由引理 1.3，f 的施瓦兹导数

$$\{f,x\}=\frac{1-\alpha^2}{2x^2}+\frac{d}{x}+\psi(x),$$

式中，x 是点 p 的一个邻域 W 内的复坐标，$x(p)=0$.这里 d 是复常数，ψ 是 W 中的全纯函数，它们依赖于复坐标 x. 因此由引理 1.4，存在 p 的一个邻域 U，相应的复坐标系 ξ 和 $\mathscr{L}\in\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$，使得 $\xi(p)=0$ 且 $j=\mathscr{L}\circ f$ 有表达式 $j(\xi)=\xi^{\alpha}$，其中 $\alpha>0$.则

$$f=\frac{a\xi^{\alpha}+b}{c\xi^{\alpha}+d},\ ad-bc=1.$$

情况一　若 α 是一个整数，则 f 在点 p 处的局部单值化群是平凡的. 全纯映射 $f:\triangle^*\to\overline{\mathbb{C}}$ 有一个在 Δ 上的全纯扩张. 不妨设 $\alpha=n\in\mathbb{Z}>0$，则 $f(\xi)=\frac{a\xi^n+b}{c\xi^n+d}$.

① 假设 $bd\neq0$，则 $\lim\limits_{q\to p}f(p)=\frac{b}{d}\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$.设

$$u=\frac{d}{\sqrt{|d|^2+|b|^2}},\ v=\frac{-b}{\sqrt{|d|^2+|b|^2}},$$

$$\mathscr{L}=\begin{pmatrix}u & v\\ -\overline{v} & \overline{u}\end{pmatrix}\in\mathrm{PSU}(2).$$

则由引理 1.2，$g=\mathscr{L}\circ f=\frac{uf+v}{-\overline{v}f+\overline{u}}$ 也是 $d\sigma^2$ 的一个展开映射. 即 $d\sigma^2=g^*(d\sigma_0^2)$. 通过计算得

$$g(\xi)=\xi^n\frac{1}{(a\overline{b}+c\overline{d})\xi^n+(|b|^2+|d|^2)}=\xi^n h(\xi),$$

$h(\xi)$ 在点 p 的某个邻域 V 内全纯，且 $h(0)=\frac{1}{|b|^2+|d|^2}\neq0$，因此我们可以选择 V 上的另一个复坐标 $z=z(\xi)$，使得 $g=g(z)=z^n$. 因为 p 的 z 坐标与 ξ 坐标都为 0，由连续性，存在 $\varepsilon>0$，使得 $\Delta_\varepsilon=\{z\in\mathbb{C}\mid|z|<\varepsilon\}\subset V$. 在 Δ_ε 上，由 $d\sigma^2=g^*(d\sigma_0^2)$，得

$$d\sigma^2|_{\Delta_\varepsilon}=\frac{4n^2|z|^{2n-2}}{(1+|z|^{2n})^2}|dz|^2.$$

② (i) 若 $b=0$，则 $d\neq0$，

$$f(\xi)=\frac{a\xi^n}{c\xi^n+d}=\xi^n\frac{a}{c\xi^n+d}.$$

由与 ① 中相同的原因得到结论.

(ii) 若 $d=0$，由 $ad-bc=1$，得 $b\neq 0$，$c\neq 0$. $\lim_{q\to p}|f(q)|=+\infty$. $f(\xi)=\dfrac{a\xi^n+b}{c\xi^n}$. 令 $\mathscr{K}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\in \mathrm{PSU}(2)$，则

$$h=\mathscr{K}\circ f=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\circ f=-\frac{1}{f}=-\xi^n\frac{c}{a\xi^n+b}.$$

由引理1.2，h 也是 $d\sigma^2$ 的一个展开映射，$d\sigma^2=h^*(d\sigma_0^2)$. 由与①中相同的原因得到结论.

情况二 若 α 不是整数，我们选取 $d\sigma^2$ 的一个可乘的展开映射，即它的单值化群包含于 $U(1)$，仍将其记为 f.不妨设 $f=\dfrac{a\xi^\alpha+b}{c\xi^\alpha+d}$，$ad-bc=1$ 为 f 在 p 点附近一个不含 p 的开圆盘内的一个单值分支，则存在 $\theta\in\mathbb{R}$，使得

$$e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}f=e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}\frac{a\xi^\alpha+b}{c\xi^\alpha+d}=\frac{a\,e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}\xi^\alpha+b}{c\,e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}\xi^\alpha+d}.$$

这等价于下面的等式成立：

$$\begin{cases}ac\,e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}(1-e^{2\pi\sqrt{-1}\theta})=0,\\(ad\,e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}+bc)-e^{2\pi\sqrt{-1}\theta}(bc\,e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha}+ad)=0,\\bd(1-e^{2\pi\sqrt{-1}\theta})=0.\end{cases}$$

解这个方程，得出 $c=b=0$ 或 $a=d=0$，也就是 $f(\xi)$ 等于 $\mu\xi^\alpha(\mu\neq 0)$ 或 $\lambda\xi^{-\alpha}(\lambda\neq 0)$. $f(0)$ 等于0或 ∞.当 $f(\xi)=\mu\xi^\alpha$ 时，我们可以选择 p 点附近的另一个复坐标 z，使得 $f(z)=z^\alpha$. 当 $f(\xi)=\lambda\xi^{-\alpha}$ 时，令 $\tilde{f}=\mathscr{K}\circ f=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\circ f$，则 $\tilde{f}$ 也是 $d\sigma^2$ 的可乘的展开映射. $\tilde{f}=\mathscr{K}\circ f=-\dfrac{1}{f(\xi)}=-\dfrac{1}{\lambda}\xi^\alpha$.我们可以选择 p 点附近的另一个复坐标 z，使得 $f(z)=z^\alpha$.因为 p 的 z 坐标与 ξ 坐标都为0，由连续性，存在 $\varepsilon>0$，使得在 $\Delta_\varepsilon=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<\varepsilon\}$ 上，

$$d\sigma^2|_{\Delta_\varepsilon}=\frac{4\alpha^2|z|^{2\alpha-2}}{(1+|z|^{2\alpha})^2}|dz|^2.$$

下证坐标 z 的唯一性.不妨设 $z,\tilde{z}$ 都是满足定理条件的复坐标，则 $f(z)=z^\alpha$，$\tilde{f}(\tilde{z})=\tilde{z}^\alpha$ 都是度量 $d\sigma^2$ 的展开映射. 由引理1.2，存在 $\mathscr{L}\in\mathrm{PSU}(2)$，使得 $\tilde{f}=\mathscr{L}\circ f$，则 $\tilde{f}=\dfrac{af+b}{-\bar{b}f+\bar{a}}$，$|a|^2+|b|^2=1$.因为在 $z,\tilde{z}$ 坐标下，$p=0$，$f(p)=\tilde{f}(p)=0$，计算得 $b=0$. 故 $\tilde{f}=\dfrac{a}{\bar{a}}f=\mu f$，$|\mu|=1$.则 $\tilde{z}^\alpha=\mu z^\alpha$ 在 p 点附近一个不含 p 的开圆盘 V 内成立. 那么 $\tilde{z}=\lambda z$，$|\lambda|=1$ 在 V 内成立. 因为 $z,\tilde{z},w$ 是 p 点附近的复坐标，$z,\tilde{z}$ 是 w 的全纯函数，则 $\tilde{z}=\lambda z$，$|\lambda|=1$ 在 p 点的一个邻域内成立.

参考文献(References)

[1] MCOWEN R C. Point singularities and conformal metrics on Riemann surfaces[J]. Proc Amer Math Soc, 1988, 103(1): 222-224.

[2] TROYANOV M. Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities[J]. Trans Amer Math Soc, 1991, 324(2): 793-821.

[3] TROYANOV M. Metrics of constant curvature on a sphere with two conical singularities[C]// Differential Geometry. Berlin: Springer-Verlag, 1989: 296-306.

[4] LUO F, TIAN G. Liouville equation and spherical convex polytopes[J]. Proc Amer Math Soc, 1992, 116(4): 1119-1129.

[5] UMEHARA M, YAMADA K. Metrics of constant curvature 1 with three conical singularities on the 2-sphere[J]. Illinois J Math, 2000, 44(1): 72-94.

[6] EREMENKO A. Metrics of positive curvature with conical singularities on the sphere[J]. Proc Amer Math Soc, 2004, 132(11): 3349-3355.

[7] FURUTA M, HATTORI Y. 2-dimensional singular spherical space forms[Z]. manuscript, 1998.

[8] FUJIMORI S, KAWAKAMI Y, KOKUBU M, et al. CMC-1 trinoids in hyperbolic 3-space and metrics of constant curvature one with conical singularities on the 2-sphere[J]. Proc Japan Acad Ser A Math Sci, 2011, 87(8): 144-149.

[9] CHEN Q, WANG W, WU Y, et al. Conformal metrics with constant curvature one and finitely many conical singularities on compact Riemann surface[J]. Pacific Journal of Mathematics, 2015, 273: 75-100.

[10] BRYANT R L. Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space[J]. Theorie des Varietes Minimales et Applications, 1988, 154-155: 321-347.