第47卷第2期　　中国科学技术大学学报　　Vol.47,No.2
2017年2月　　JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA　　Feb. 2017

文章编号:0253-2778(2017)2-0087-12

希格斯层上的厄米特-杨-米尔斯热流

李嘉禹[1,2],张川静[1],张　希[1]

(1.中国科学技术大学数学科学学院,安徽合肥 230026;
2.中国科学院数学与系统科学研究院,北京 100080)

摘要:希格斯层最先由 Hitchin 于 20 世纪 80 年代引入,经过 30 余年的发展,取得了非常丰富的研究结果,并且与其他数学研究领域有着密切联系,如规范理论、群表示论、凯勒与超凯勒几何、非阿贝尔霍奇理论等.本文首先回顾希格斯层的相关基本概念,在此基础上介绍厄米特-杨-米尔斯热流的相关经典结果及其发展历程,然后也介绍我们最近得到的关于厄米特-杨-米尔斯热流的收敛性结果.

关键词:希格斯层;厄米特-杨-米尔斯热流;Harder-Narasimhan-Seshadri 滤过

中图分类号:O168.1　　**文献标识码**:A　　doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2017.02.001

2010 Mathematics Subject Classification: 53C07; 58E15

引用格式:李嘉禹,张川静,张希. 希格斯层上的厄米特-杨-米尔斯热流[J]. 中国科学技术大学学报,2017,47(2):87-98.

LI Jiayu, ZHANG Chuanjing, ZHANG Xi. The Hermitian-Yang-Mills flow on Higgs sheaves[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2017,47(2):87-98.

特约评述

The Hermitian-Yang-Mills flow on Higgs sheaves

LI Jiayu[1,2], ZHANG Chuanjing[1], ZHANG Xi[1]

(1. *School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026, *China*;
2. *Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080, *China*)

Abstract: Higgs sheaves were introduced by Hitchin at 1980's. They they have a rich structure and play a role in many different areas including gauge theory, Kähler and hyperkähler geometry, group representations and nonabelian Hodge theory. Here the basic concept of Higgs sheaves were reviewed first, and then the classical results of the Hermitian-Yang-Mills flow were surveyed. Finally, an introduction was given to introduce our recent work on the limiting behavior of the Hermitian-Yang-Mills flow.

Key words: Higgs sheaf; Hermitian-Yang-Mills flow; Harder-Narasimhan-Seshadri filtration

收稿日期:2016-09-23;**修回日期**:2016-10-22

基金项目:国家自然科学基金(11571332, 11131007, 11526212)资助.

作者简介:李嘉禹,中国科学技术大学数学科学学院执行院长,教育部长江学者特聘教授,国家杰出青年科学基金获得者,中国科学院“百人计划”入选者.2001～2004 年担任中德几何分析伙伴小组组长;2004～2009 年担任国际理论物理中心(ICTP)研究员,负责几何与分析国际合作方面的工作.现任中国数学会常务理事,国家自然科学基金委员会“数学天元基金领导小组”成员.担任《中国科学》、《数学学报》、《偏微分方程》等学术期刊编委.在几何分析研究领域取得了重要研究成果.曾获中国数学会“陈省身数学奖”及香港求是基金会“杰出青年学者奖”.E-mail: jiayuli@ustc.edu.cn.

0 引言

令(M,ω)是一紧致凯勒(Kähler)流形，其上一希格斯层$(\mathscr{E},\phi)$即一个凝聚层$\mathscr{E}$配上一个全纯场$\phi\in\Omega^{1,0}(End(\mathscr{E}))$，并满足$\phi\wedge\phi=0$.如果凝聚层$\mathscr{E}$是无挠的(torsion-free)(resp.自反的，局部自由的)，则我们称希格斯层$(\mathscr{E},\phi)$是无挠的(resp.自反的，局部自由的).上世纪 80 年代 Hitchin[1]在研究黎曼面上自对偶方程时首次引入了希格斯层的概念.随后 Simpson[2]研究了高维凯勒流形上的希格斯丛及其在非阿贝尔霍奇(nonabelian Hodge)理论中的应用.

从几何不变量理论出发，我们可在希格斯层上引入稳定性概念.一个无挠的希格斯层$(\mathscr{E},\phi)$称为是稳定的(半稳定的)，即其任意正则ϕ-不变凝聚子层$\mathscr{F}\hookrightarrow\mathscr{E}$均成立：

$$\mu_\omega(\mathscr{F})=\frac{deg(\mathscr{F})}{rank\mathscr{F}}<(\leqslant)\mu_\omega(\mathscr{E})=\frac{deg(\mathscr{E})}{rank\mathscr{E}} \quad (1)$$

这里$\mathscr{F}$的度(degree)定义如下：

$$deg(\mathscr{F})=\int_M c_1(\mathscr{F})\wedge\omega^{n-1},$$

式中，$c_1(\mathscr{F})$是$\mathscr{F}$的第一陈类，$\mu_\omega(\mathscr{F})$通常也称为$\mathscr{F}$的斜率(slope).

希格斯层$(\mathscr{E},\phi)$上给定一厄米特度量H，在其局部自由部分我们可考虑下面 Hitchin-Simpson 联络：

$$\bar\partial_\phi:=\bar\partial_{\mathscr{E}}+\phi,\ D_{H,\phi}^{1,0}:=D_H^{1,0}+\phi^{*H},$$
$$D_{H,\phi}=\bar\partial_\phi+D_{H,\phi}^{1,0} \quad (2)$$

式中，D_H是度量H所对应的陈联络，ϕ^{*H}是场ϕ关于度量H的共轭场.上述 Hitchin-Simpson 联络的曲率可表示为

$$F_{H,\phi}=F_H+[\phi,\phi^{*H}]+D_H^{1,0}\phi+\bar\partial_{\mathscr{E}}\phi^{*H} \quad (3)$$

令H为希格斯层$(\mathscr{E},\phi)$中的一厄米特度量，如果其 Hitchin-Simpson 联络$D_{H,\phi}$所对应的曲率$F_{H,\phi}$满足下列爱因斯坦条件：

$$\sqrt{-1}\ \Lambda_\omega F_{H,\phi}=\lambda Id_{\mathscr{E}} \quad (4)$$

则称之为厄米特-爱因斯坦(Hermitian-Einstein)度量.这里Λ_ω记为关于凯勒形式ω作缩并，实数$\lambda=\frac{2\pi}{Vol(M)rank(\mathscr{E})}deg(\mathscr{E})$.

当希格斯层$(\mathscr{E},\phi)$是处处局部自由的(locally free)，即为希格斯丛(Higgs bundle)，Hitchin 和 Simpson 分别在黎曼面和一般凯勒流形上得到下述关于厄米特-爱因斯坦度量的存在性结果.

定理 0.1[1-2] 如果紧致凯勒流形上希格斯丛$(\mathscr{E},\phi)$中存在一厄米特-爱因斯坦度量当且仅当其为多重稳定的.

上述定理在希格斯丛上给出从微分几何角度出发的厄米特-爱因斯坦度量存在性和从代数几何不变量理论出发的稳定性之间的对应关系.这一对应通常也称之为希格斯丛版本的 Hitchin-Kobayashi 对应(或 Donaldson-Uhlenbeck-Yau 定理).有关 Hitchin-Kobayashi 对应方面的研究历史以及发展进程可参考文献[1-12].

凝聚层(coherent sheaf)是代数几何的重要研究对象.给定一全纯丛，由其局部截面所生成的凝聚层必是处处局部自由的，反之局部自由的凝聚层必由一全纯丛的局部截面所生成.但通常凝聚层并非处处局部自由的，我们把非局部自由的那些点称为奇点，从某种意义上凝聚层可看作带奇点的全纯丛. Bando 等[8]在凝聚层$\mathscr{E}$上引入相容(admissible)厄米特度量的概念，并证明稳定的自反层上必存在相容厄米特-爱因斯坦度量.文中我们记凝聚层$\mathscr{E}$的奇点集为Σ，$\mathscr{E}$上的所谓相容厄米特度量H，即是全纯丛$\mathscr{E}|_{M\setminus\Sigma}$上的厄米特度量满足：①$|F_H|_{H,\omega}$是平方可积的；②$|\Lambda_\omega F_H|_H$为有界.

Simpson[2]在 Higgs 丛$(\mathscr{E},\phi)$中引入如下厄米特-杨-米尔斯热流：

$$\begin{cases}H(t)^{-1}\dfrac{\partial H(t)}{\partial t}=\\ -2(\sqrt{-1}\ \Lambda_\omega(F_{H(t)}+[\phi,\phi^{*H(t)}])-\lambda Id_{\mathscr{E}}),\\ H(0)=\hat H\end{cases} \quad (5)$$

事实上，上述热流最先是由 Atiyah 等[13]在全纯丛(即$\phi\equiv0$)情形引入的，Donaldson[5]利用该热流证明稳定的全纯丛上必存在厄米特-爱因斯坦度量.在一般的希格斯层$(\mathscr{E},\phi)$上我们仍可考虑上述热流，此时$H(t)$是定义于其局部自由部分的厄米特度量.根据 Bando 等[8]的结果，对于自反希格斯层，其上必存在厄米特-杨-米尔斯热流式(5)的长时间解，并且如果自反希格斯层是稳定的，该热流解必收敛于相容(admissible)厄米特-爱因斯坦度量[15].如果自反希格斯层是半稳定的，在文献[16]中我们证明：当$t\to\infty$必有

$$\sup_{x\in M\setminus\Sigma}|\sqrt{-1}\ \Lambda_\omega(F_{H(t)}+[\phi,\phi^{*H(t)}])-\lambda Id_{\mathscr{E}}|_{H(t)}(x)\to0 \quad (6)$$

也即我们证明了半稳定自反希格斯丛上必存在

渐近相容的厄米特-爱因斯坦度量.相关全纯丛和希格斯丛的情形,可参见文献[24-26].在文献[16]中我们建立了自反希格斯层上半稳定性和渐近相容厄米特-爱因斯坦度量存在性之间的等价关系,作为应用我们证明在紧致凯勒流形的半稳定自反希格斯层上必成立 Bogomolov-型陈数不等式.

定理 0.2[16]　令$(\mathscr{E},\phi)$是紧致凯勒流形(M,ω)上的自反希格斯层,则其为半稳定的当且仅当其上存在渐近相容厄米特-爱因斯坦度量.

当自反希格斯丛是非稳定时,厄米特-杨-米尔斯热流的无穷远处渐近行为又如何?我们首先回顾无挠希格斯层$(\mathscr{E},\phi)$的 Harder-Narasimhan-Seshadri 滤过(filtration),即存在一列 ϕ-不变的凝聚子层

$$0=\mathscr{E}_0\subset\mathscr{E}_1\subset\cdots\subset\mathscr{E}_l=\mathscr{E} \tag{7}$$

使得每个商层 $Q_i=\mathscr{E}_i/\mathscr{E}_{i-1}$ 都是无挠,并且在诱导希格斯场 ϕ_i 下,(Q_i,ϕ_i)是稳定的希格斯层,商层的斜率满足 $\mu(Q_i)\geqslant\mu(Q_{i+1})$,进一步,相关直和层(associated graded object)

$$Gr^{hns}(\mathscr{E})=\oplus_{i=1}^{l}Q_i \tag{8}$$

在同构意义下是唯一决定的.

在文献[8]中,Bando 和 Siu 证明:在自反层上,沿着厄米特-杨-米尔斯热流式(5)的长时间解,必存在一子列 $H(t_i)$,通过取相应的规范变换,其对应的陈联络 $A(t_i)$在一紧集$\Sigma_{an}\subset M$ 外弱 $W^{1,2}$-拓扑意义下收敛于一极限联络 A_∞,其中紧集 Σ_{an} 具 Hausdorff 余维数至少为 4.由 Hong 等[17]的小能量正则性估计可知上述的收敛实际上是局部光滑的.进一步,Bando 和 Siu 证明:极限联络的平均曲率张量$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{A_\infty}$是平行的,对应于$\sqrt{-1}\Lambda_\omega F_{A_\infty}$的特征子丛,在 $M\backslash(\Sigma_{\mathscr{E}}\cup\Sigma_{an})$上极限丛$(E_\infty,\bar{\partial}_{A_\infty})$具有下面的全纯分解:

$$(E_\infty,\bar{\partial}_{A_\infty})=\bigoplus_{i=1}^{l}(E_\infty^i,\bar{\partial}_{A_\infty,i}) \tag{9}$$

式中,每个全纯丛$(E_\infty^i,\bar{\partial}_{A_\infty})$都具有厄米特-爱因斯坦度量并可被延拓为 M 上的自反层.最后 Bando 和 Siu 猜想:延拓后的极限自反层和 Harder-Narasimhan-Seshadri 滤过的二次对偶是同构的,即

$$\bigoplus_{i=1}^{l}E_\infty^i\cong Gr^{hns}(\mathscr{E})^{**}? \tag{10}$$

该猜想最先由 Atiyah 等[13]在黎曼面上提出,其意义在于通过厄米特-杨-米尔斯热流将代数几何方面的 Harder-Narasimhan-Seshadri 滤过和几何分析方面的极限全纯结构建立联系.黎曼面情形的 Atiyah-Bott 猜想是由 Daskalopoulos[18]解决的.高维情形研究的进展如下:对于全纯丛,Daskalopoulos 等[19]解决凯勒曲面情形,Sibley[20]解决了凯勒流形情形;对于希格斯丛,Wilkin[21]证明了黎曼面情形,高维情形则由本文第一作者和第三作者[22-23]解决.由于此前所有结果都是考虑局部自由的凝聚层,所以目前 Bando-Siu 的猜想并未完全解决.我们的研究目标是完全解决 Bando-Siu 的上述猜想,并且我们考虑更为一般的自反希格斯层情形,近期我们在自反希格斯层上研究厄米特-杨-米尔斯热流的收敛性问题上已取得了一定进展.

本文的内容安排如下:在节 1 中我们主要回顾有关厄米特-杨-米尔斯热流的基本估计和基本结果;在节 2 中我们介绍关于厄米特-杨-米尔斯热流的单调不等式和小能量正则性估计;在节 3 中我们考虑厄米特-杨-米尔斯热流极限的刻画,介绍我们关于厄米特-杨-米尔斯热流一个新的曲率估计,同时也介绍我们最近关于 Bando-Siu 猜想的部分进展.

1　厄米特-杨-米尔斯热流的长时间解存在性

令(M,ω)是一复维数 n 的紧致凯勒流形,$(\mathscr{E},\phi)$是其上一希格斯丛.我们在希格斯丛上考虑以任一固定光滑度量 $\hat{H}$ 为初始值的厄米特-杨-米尔斯热流式(5),Simpson[2]证明了该热流长时间解的存在性.为简单起见我们设:

$$\Phi(H(t),\omega)=\sqrt{-1}\Lambda_\omega(F_{H(t)}+[\phi,\phi^{*H(t)}])-\lambda Id_E \tag{11}$$

根据 Simpson 的结果(文献[2]引理 6.1),沿着热流式(5)我们有:

$$(\triangle-\frac{\partial}{\partial t})tr(\Phi(H(t),\omega))=0 \tag{12}$$

$$(\triangle-\frac{\partial}{\partial t})|\Phi(H(t),\omega)|_H^2(t)=2|D_{H(t),\phi}(\Phi(H(t),\omega))|_{H(t),\omega}^2 \tag{13}$$

和

$$(\triangle-\frac{\partial}{\partial t})|\Phi(H(t),\omega)|_H^2(t)\geqslant 0 \tag{14}$$

给定两厄米特度量 H 和 K,我们回顾它们之间的 Donaldson 距离函数:

$$\sigma(H,K)=tr(K^{-1}H)+tr(H^{-1}K)-2rank(E) \tag{15}$$

设 $H(t)$和 $K(t)$为厄米特-杨-米尔斯热流式(5)的两个解,容易验证:

$$(\triangle-\frac{\partial}{\partial t})\sigma(H(t),K(t))\geqslant 0 \qquad (16)$$

由上式和极大值原理，可得厄米特-杨-米尔斯热流式(5)解的唯一性结果.

令 $h(t)=\hat{H}^{-1}H(t)=\exp S(t)$，这里 $S(t)\in End(E)$关于度量 $\hat{H}$ 和 $H(t)$均是自共轭的.通过直接计算可得，

$$\frac{\partial}{\partial t}\log(trh(t)+trh^{-1}(t))=\frac{tr\ (hh^{-1}\frac{\partial h}{\partial t})-\operatorname{tr}(h^{-1}\frac{\partial h}{\partial t}h^{-1})}{trh+trh^{-1}}\leqslant 2\mid\Phi(H(t),\omega)\mid_{H(t)} \qquad (17)$$

和

$$\log(\frac{1}{2r}(trh+trh^{-1}))\leqslant \mid S\mid\leqslant r^{\frac{1}{2}}\log(trh+trh^{-1}) \qquad (18)$$

这里 $r=rank(E)$.根据(式 5)容易验证：

$$(\triangle-\frac{\partial}{\partial t})\log(trh(t)+trh^{-1}(t))\geqslant -2\mid\Phi(\hat{H},\omega)\mid_{\hat{H}} \qquad (19)$$

和

$$\triangle\log(trh(t)+trh^{-1}(t))\geqslant -2\mid\Phi(H(t),\omega)\mid_{H(t)}-2\mid\Phi(\hat{H},\omega)\mid_{\hat{H}} \qquad (20)$$

由上式，我们得

$$\| S(t)\|_{L^\infty}\leqslant C_1\| S(t)\|_{L^1}+C_2 \qquad (21)$$

这里 C_1 和 C_2 是仅依赖于初始厄米特度量 K 的平均曲率和(M,ω)的几何量.

关于希格斯场我们有如下的不等式(文献[22]中式(2.5))：

$$(\triangle-\frac{\partial}{\partial t})\mid\phi\mid^2_{H(t),\omega}\geqslant 2\mid\nabla_{H(t)}\phi\mid^2_{H(t),\omega}+2\mid\sqrt{-1}\ \Lambda_\omega[\phi,\phi^{*H(t)}]\mid^2_{H(t)}-2\mid Ric(\omega)\mid_\omega\mid\phi\mid^2_{H(t),\omega} \qquad (22)$$

根据文献[27]中的引理 2.7，我们有：

$$\mid\sqrt{-1}\ \Lambda_\omega[\phi,\phi^{*H(t)}]\mid_{H(t)}=\mid[\phi,\phi^{*H(t)}]\mid_{H(t),\omega}\geqslant a_1\mid\phi\mid^2_{H(t),\omega}-a_2\mid\phi\mid^2_{\hat{H},\omega} \qquad (23)$$

式中，a_1 和 a_2 是仅依赖于 r 和 n 的正常数.根据上面不等式和极大值原理，在紧致凯勒流形上沿着厄米特-杨-米尔斯流式(5)，$|\phi|_{H(t)}$必是一致有界的.

另外，我们有关于抛物方程式(5)的局部 C^1，局部曲率估计以及高阶估计.

引理 1.1[16] 令 $T(t)=h^{-1}(t)\partial_{\hat{H}}h_{\zeta}(t)$.假设 $H(t)$是局部 C^0 有界的，即存在一常数 $\overline{C}_0$使得

$$\max_{(x,t)\in(B_\omega(\delta))\times[0,T]}\mid S(t)\mid_{\hat{H}}(x)\leqslant\overline{C}_0 \qquad (24)$$

则必存在一常数 $\overline{C}_1$ 仅依赖于 $\overline{C}_0$ 和 δ^{-1}使得成立：

$$\max_{(x,t)\in(\overline{M}\backslash B_\omega(\frac{1}{2}\delta))\times[0,T]}\mid T(t)\mid_{\hat{H},\omega}(x)\leqslant\overline{C}_1 \qquad (25)$$

下面为简单起见我们记：

$$\Xi_j(x,t)=\mid\nabla^j_{H(t)}(F_{H(t)}+[\phi,\phi^{*H(t)}])\mid^2_{H(t),\omega}(x)+\mid\nabla^{j+1}_{H(t)}\phi\mid^2_{H(t),\omega}(x) \qquad (26)$$

对于 $j=0,1,\cdots$.这里$\nabla_{H(t)}$记为关于陈联络 $D_{H_\zeta}(t)$的共变导数.

引理 1.2[16] 假设存在一常数 $\overline{C}_0$ 使得

$$\max_{(x,t)\in(B_\omega(\delta))\times[0,T]}\mid S(t)\mid_{\hat{H}}(x)\leqslant\overline{C}_0 \qquad (27)$$

则对于任何整数 $j\geqslant 0$，必存在常数 $\overline{C}_{j+2}$仅依赖于 $\overline{C}_0,\delta^{-1}$和 j，使得成立

$$\max_{(x,t)\in(B_\omega(\frac{1}{4}\delta))\times[0,T]}\Xi_j(x,t)\leqslant\overline{C}_{j+2} \qquad (28)$$

进一步，

$$\max_{(x,t)\in(B_{\omega 1}(\frac{1}{4}\delta))\times[0,T]}\mid\nabla^{j+2}_{\hat{H}}h(t)\mid_{\hat{H},\omega}(x)\leqslant\hat{C}_{j+2} \qquad (29)$$

式中，$\hat{C}_{j+2}$是仅依赖于 $\overline{C}_0,\delta^{-1}$和 j 的常数.

接下来我们回顾希格斯丛上的 Donaldson 泛函(具体可见文献[2]中的第 5 节)，

$$\mu_\omega(\hat{H},H)=\int_M tr(S\sqrt{-1}\ \Lambda_\omega F_{\hat{H},\phi})+\langle\Psi(S)(\bar{\partial}_\phi S),\bar{\partial}_{\phi S}\rangle_K\frac{\omega^n}{n!} \qquad (30)$$

式中，$\Psi(x,\ y)=(x-y)^{-2}(e^{y-x}-(y-x)-1)$.根据文献[2]中的引理 7.1，关于厄米特-杨-米尔斯热流式(5) 的解 $H(t)$我们有下面的公式：

$$\frac{d}{dt}\mu_\omega(\hat{H},H(t))=-2\int_M\mid\Phi(H(t),\phi)\mid^2_{H(t)}\frac{\omega^n}{n!} \qquad (31)$$

上式说明厄米特-杨-米尔斯热流式(5)实际上是 Donaldson 泛函式(30)的梯度流.

当希格斯丛 $(\mathscr{E},\phi)$是稳定时，Simpson 得到下述估计：

$$\sup_M\mid S\mid\leqslant\hat{C}_1\mu_\omega(\hat{H},\hat{H}\exp S)+\hat{C}_2 \qquad (32)$$

式中，常数 $\hat{C}_1$ 和 $\hat{C}_2$ 依赖于$\|\Lambda_\omega F_H\|_{L^\infty}$和$\|\Lambda_\omega F_{\hat{H}\exp S}\|_{L^\infty}$.Simpson 运用反证法来得到上述不等式，其中用到了 Uhlenbeck 等[6]的关键命题，即将无挠子层与某类 L^2_1 截面建立对应.由此上述估计很容易得到厄米特-杨-米尔斯热流式(5)长时间解

特约评述

$H(t)$的一致 C^0 估计,因而得到一致的各阶估计.从而 Simpson 证明长时间解 $H(t)$必收敛于一厄米特-爱因斯坦度量.

上述热流方法被 Bando 和 Siu 应用于求解稳定自反层上的厄米特-爱因斯坦度量.由于自反层是有奇点存在的,在分析上带来许多困难.接下来我们介绍 Bando 和 Siu[8] 得到自反层上厄米特-杨-米尔斯热流长时间解存在性的基本思想.我们考虑自反希格斯层情形,现在设$(\mathscr{E},\phi)$是(M,ω)一自反希格斯层,Σ为其奇点集.所谓长时间解,即存在一族厄米特度量 $H(t)$定义于 $M\backslash\Sigma\times[0,+\infty)$上满足发展方程式(5).

我们对自反层 $\mathscr{E}$ 作如下正则化:根据 Hironaka's flattening theorem[8,28-29],必存在有限次具光滑中心 $Y_{i-1}\subset M_{i-1}$ 的吹大(blowing up)π_i: $M_i\rightarrow M_{i-1}$,这里 $i=1,\cdots,k$, $M_0=M$,使得 $\pi^*\mathscr{E}/torsion$ 是整体局部自由的,并且复合映射

$$\pi=\pi_1\circ\cdots\circ\pi_\kappa:M_\kappa\rightarrow M \tag{33}$$

在奇点集Σ外是双全纯等价.我们记复流形 M_k 为 $\widetilde{M}$,全纯向量丛$(\pi^*\mathscr{E}^*/\mathrm{torsion})^*$ 为 E.由于 $\mathscr{E}$ 在Σ之外是局部自由的,在 $\widetilde{M}\backslash\pi^{-1}\Sigma$上全纯丛 E 同构于 $\mathscr{E}$.令 $\pi^*\phi$ 是 ϕ 所诱导的拉回层 $\pi^*\mathscr{E}$上的希格斯场.容易验证 $\pi^*\phi$ 保持挠率层,因而诱导了商层 $\pi^*\mathscr{E}/$torsion(即全纯丛 E)上的希格斯场.为简单起见,我们记该诱导的希格斯层仍为 ϕ.这样我们在复流形 $\widetilde{M}$ 上得到一个希格斯丛(E,ϕ),其在 $\pi^{-1}\Sigma$之外希格斯同构于$(\mathscr{E},\phi)$.为简单起见,文中我们假设吹大的次数 k 总是 1,一般情形可通过类似的重复讨论得到.

容易验证 $\widetilde{M}$ 是凯勒流形[30],固定 $\widetilde{M}$ 上一凯勒度量 η 并设:

$$\omega_\epsilon=\pi^*\omega+\epsilon\eta \tag{34}$$

式中,$0<\epsilon\leqslant 1$.在丛 E 上给定一光滑厄米特度量 $\hat{H}$,容易验证必存在一不依赖于 ϵ 的常数 $\hat{C}_0$ 使得以下估计成立:

$$\int_{\widetilde{M}}(|\wedge_{\omega_\epsilon}F_{\hat{H}}|_{\hat{H}}+|\phi|^2_{\hat{H},\omega_\epsilon})\frac{\omega_\epsilon^n}{n!}\leqslant\hat{C}_0 \tag{35}$$

我们在希格斯丛(E,ϕ)上考虑以固定光滑度量 $\hat{H}$ 为初始值,对应于凯勒度量 ω_ϵ 的杨-米尔斯-希格斯热流,

$$\begin{cases}H_\epsilon(t)^{-1}\dfrac{\partial H_\epsilon(t)}{\partial t}=\\-2(\sqrt{-1}\wedge_{\omega_\epsilon}(F_{H_\epsilon(t)}+[\phi,\phi^{*H_\epsilon(t)}])-\lambda_\epsilon Id_E),\\H_\epsilon(0)=\hat{H},\end{cases} \tag{36}$$

式中,$\lambda_\epsilon=\dfrac{2\pi}{Vol(\widetilde{M},\omega_\epsilon)}\mu_{\omega_\epsilon}(E)$.

在文献中,Bando 和 Siu[8] 得到关于$(\widetilde{M},\omega_\epsilon)$的一致 Sobolev 不等式,结合 Cheng-Li[31] 估计和 Grigor'yan 的结果(文献[32]定理 1.1),我们有下述热核的一致上界估计和格林函数的一致下界估计.

引理 1.3[8] 记 $K_\epsilon(x,y,t)$是对应于凯勒度量 ω_ϵ 的热核,对于任意常数 $\tau>0$,必存在一不依赖于 ϵ 的正常数 $C_K(\tau)$,对于所有 x, $y\in\widetilde{M}$ 和 $0<t<+\infty$均成立:

$$0\leqslant K_\epsilon(x,y,t)\leqslant$$
$$C_K(\tau)(t^{-n}\exp(-\frac{(d_{\omega_\epsilon}(x,y))^2}{(4+\tau)t})+1) \tag{37}$$

式中,$d_{\omega_\epsilon}(x,y)$是对应于度量 ω_ϵ 关于两点 x 和 y 之间的距离.

利用上述一致的热核估计式(37),我们可得关于 $H_\epsilon(t)$的局部一致 C^0-估计,并由此导出局部一致 C^1,以及高阶估计,具体证明可参见文献[16].通过取一子列,我们得到希格斯层$(\mathscr{E},\phi)$上厄米特-杨-米尔斯热流的长时间解存在性,参见文献[16]或[15].

命题 1.4[16] 通过取一子列 $\epsilon\rightarrow 0$, $H_\epsilon(x,t)$必在 $M\backslash\Sigma\times[0,+\infty)$局部光滑收敛于杨-米尔斯-希格斯热流式(5)的解 $H(x,t)$,并且 $H(x,t)$满足如下估计:

$$\int_M|\Phi(H(t),\omega)|_{H(t)}\frac{\omega^n}{n!}\leqslant$$
$$\int_M|\Phi(\hat{H},\omega)|_{\hat{H}}\frac{\omega^n}{n!}\leqslant\hat{C}_1 \tag{38}$$

和

$$|\Phi(H(t+\tilde{t}),\omega)|_{H(t+\tilde{t})}(x)\leqslant$$
$$\int_M K_\omega(x,y,t)|\Phi(H(\tilde{t}),\omega)|_{H(\tilde{t})}\frac{\omega^n}{n!} \tag{39}$$

式中,$x\in M\backslash\Sigma$, $t>0$,$\tilde{t}\geqslant 0$.

由于希格斯层$(\mathscr{E},\phi)$具有奇点,不等式(22)仅在非紧区域 $M\backslash\Sigma$上成立,因而我们不能直接利用极大值原理来得到$|\phi|_{H(t),\omega}$的一致估计.在文献[16]中我们利用一致的积分估计来解决这一问题.我们得到如下关于希格斯场的一致估计:

命题 1.5[16] 沿着热流式(5),必存在一依赖于 t_0^{-1} 的常数 $\hat{C}_\phi$,使得对于任何 $t\geqslant t_0>0$ 必成立

$$\sup_{M\backslash\Sigma}|\phi|^2_{H(t),\omega}\leqslant\hat{C}_\phi \tag{40}$$

2 厄米特-杨-米尔斯流的小能量正则性估计

在上一节中我们介绍了希格斯层$(\mathscr{E},\phi)$上厄米特-杨-米尔斯热流长时间解 $H(t)$的存在性.并且我们知道如果希格斯层是稳定的,则必有 $H(t)$的一致 C^0 估计,由此得到一致高阶估计,从而证明 $H(t)$收敛于一厄米特-爱因斯坦度量.当希格斯层是非稳定时则没有 $H(t)$的一致 C^0 估计,此时相关的曲率估计是我们研究厄米特-杨-米尔斯热流收敛性的关键,本节中我们介绍厄米特-杨-米尔斯流的小能量正则性估计.

我们首先介绍文献[21-22]中利用 Donaldson[4] 的思想将厄米特-杨-米尔斯热流转化为关于希格斯对的热流.文中我们记 $E=\mathscr{E}|_{M\setminus\Sigma}$,即为 $M\setminus\Sigma$上的向量丛.记 $\mathscr{A}^{1,1}_{H_0}$为 E 与度量 H_0 相容的联络全体,记 $\mathscr{A}^{1,1}_{H_0}$为其可积联络所构成的子空间.我们称$(A,\phi)\in\mathscr{A}^{1,1}_{H_0}\times\Omega^{1,0}(End(E))$为一个希格斯对(Higgs pair),即其满足:$\bar{\partial}_A\phi=0$ 和 $\phi\wedge\phi=0$.我们记厄米特向量丛上(E,H_0)上希格斯对的全体为 $\mathscr{B}_{(E,H_0)}$.

设 $H(t)$ 是厄米特-杨-米尔斯热流(式(5))的解,其中希格斯场记为 ϕ_0,令 $h(t)=H_0^{-1}H(t)$,则成立:

$$\frac{\partial h}{\partial t}=-2\sqrt{-1}h\wedge_\omega(F_{A_0}+\bar{\partial}_{A_0}(h^{-1}\partial_{A_0}h)+[\phi_0,h^{-1}\phi_0^{*H_0}h])+2\lambda h \tag{41}$$

记厄米特向量丛(E,H_0)上的复规范群(规范群)为 $\mathscr{G}^C$($\mathscr{G}$,这里 $\mathscr{G}=\{\sigma\in\mathscr{G}^C\mid\sigma^{*H_0}\sigma=Id\}$).$\mathscr{G}^C$在空间 $\mathscr{A}^{1,1}_{H_0}\times\Omega^{1,0}(End(E))$上的作用如下:令 $\sigma\in\mathscr{G}^C$

$$\bar{\partial}_{\sigma(A)}=\sigma\circ\bar{\partial}\circ\sigma^{-1},\partial_{\sigma(A)}=(\sigma^{*H_0})^{-1}\circ\partial_A\circ\sigma^{*H_0} \tag{42}$$

$$\sigma(\phi)=\sigma\circ\phi\circ\sigma^{-1} \tag{43}$$

在固定一厄米特度量 H_0 后,为简单起见我们记 ϕ^{*H_0} 为 ϕ^*,σ^{*H_0}记为 σ^*.取一族复规范变换 $\sigma(t)\in\mathscr{G}^C$满足 $\sigma^*(t)\sigma(t)=h(t)$.直接计算可得

$$((\sigma^*)^{-1}\frac{\partial\sigma^*}{\partial t}+\frac{\partial\sigma}{\partial t}\sigma^{-1}=-2\sqrt{-1}\wedge(F_{\sigma(A_0)}+[\sigma(\phi_0),(\sigma(\phi_0))^*])+2\lambda Id_E \tag{44}$$

令 $\widetilde{A}(t)=\sigma(t)(A_0)$和 $\widetilde{\phi}(t)=\sigma(t)(\phi_0)$,则成立

$$\frac{\partial\widetilde{A}}{\partial t}=-\sqrt{-1}(\bar{\partial}_{\widetilde{A}}-\bar{\partial}_{\widetilde{A}})\wedge_\omega(F_{\widetilde{A}}+[\widetilde{\phi},\widetilde{\phi}^*])-\frac{1}{2}(\partial_{\widetilde{A}}+\bar{\partial}_{\widetilde{A}})(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\sigma^{-1}-(\sigma^*)^{-1}\frac{\partial\sigma^*}{\partial t}),$$

$$\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial t}=[\widetilde{\phi},\sqrt{-1}\wedge_\omega(F_{\widetilde{A}}+[\widetilde{\phi},\widetilde{\phi}^*])]-\frac{1}{2}[\widetilde{\phi},\frac{\partial\sigma}{\partial t}\sigma^{-1}-(\sigma^*)^{-1}\frac{\partial\sigma^*}{\partial t}].$$

设 $\alpha=-\frac{1}{2}(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\sigma^{-1}-(\sigma^*)^{-1}\frac{\partial\sigma^*}{\partial t})$,显然 $\alpha(t)\in Lie(\mathscr{G})$.记 $S(t)\in\mathscr{G}$ 为下列线性常微分方程的唯一解:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=S\alpha,\ S(0)=I \tag{45}$$

设 $A=S(\widetilde{A})$ and $\phi=S(\widetilde{\phi})$,容易验证其必满足下列抛物方程

$$\begin{cases}\frac{\partial A}{\partial t}=-D_A^*F_A-\sqrt{-1}(\partial_A\wedge_\omega-\bar{\partial}_A\wedge_\omega)[\phi,\phi^*],\\ \frac{\partial\phi}{\partial t}=-[\sqrt{-1}\wedge_\omega(F_A+[\phi,\phi^*]),\phi]\end{cases} \tag{46}$$

并且满足 $\phi(t)\wedge\phi(t)=0$,和 $\bar{\partial}_{A(t)}\phi(t)=0$.上述关于希格斯对的抛物方程我们也称为杨-米尔斯-希格斯热流.我们在空间 $\mathscr{B}_{(E,H_0)}$上定义杨-米尔斯-希格斯泛函如下:

$$YMH(A,\phi)=\int_M(|F_A+[\phi,\phi^*]|^2+2|\partial_A\phi|^2)\mathrm{d}V_g \tag{47}$$

实际上热流式(46)是上述杨-米尔斯-希格斯泛函的梯度流.容易验证成立下列等式

$$|F_{A(t)}|^2_{H_0}=|F_{H(t)}|^2_{H(t)},\ |\phi(t)|^2_{H_0}=|\phi_0|^2_{H(t)} \tag{48}$$

如果$\Sigma=\varnothing$,根据文献[17,22]中的结果我们有

$$YMH(t)+2\int_0^t\int_M(|\frac{\partial A}{\partial t}|^2+2|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2)=YMH(0) \tag{49}$$

如果Σ非空,根据文献[8]中的讨论可得,对于任何 $0<t_0<T$ 必成立

$$\int_{M\setminus\Sigma}|\sqrt{-1}\wedge_\omega(F_{H(T)}+[\phi,\phi_0^{*H(T)}])-\lambda Id_{\mathscr{E}}|^2_{H(T)}\frac{\omega^n}{n!}+2\int_0^T\int_{M\setminus\Sigma}(|\frac{\partial A}{\partial t}|^2+2|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2)\frac{\omega^n}{n!}\mathrm{d}t\leqslant\int_{M\setminus\Sigma}|\sqrt{-1}\wedge_\omega(F_{H(t_0)}+[\phi,\phi^{*H(t_0)}])-\lambda Id_{\mathscr{E}}|^2_{H(t_0)}\frac{\omega^n}{n!} \tag{50}$$

进一步,根据文献[22]中式(2.41)的证明可得,当 $t\to+\infty$时必有

特约评述

$$\int_{M\setminus\Sigma}(|\frac{\partial A}{\partial t}|^2+2|\frac{\partial\phi}{\partial t}|^2)\frac{\omega^n}{n!}\to 0 \quad (51)$$

接下来我们介绍关于杨-米尔斯-希格斯热流的单调性公式以及小能量正则性估计，具体背景及证明细节可参照文献[17,22,26,33-34]和文献①.任给 $u_0=(x_0,t_0)\in M\setminus\Sigma\times R_+$，我们记

$$S_r(u_0)=M\times\{t=t_0-r^2\},$$

$$T_r(u_0)=$$
$$\{u=(x,t):t_0-4r^2<t<t_0-r^2,x\in M\},$$

和

$$P_r(u_0)=B_r(x_0)\times[t_0-r^2,t_0+r^2].$$

记 C^n 上热方程基本解为

$$K_{(z_0,t_0)}(z,t)=$$
$$\frac{1}{(4\pi(t_0-t))^m}\exp(-\frac{|z-z_0|^2}{4(t_0-t)}),\ t<t_0.$$

记 $\exp_{x_0}$ 为凯勒流形 (M,ω) 上以 x_0 为中心的指数映照，设

$$G_{u_0}(x,t)=K_{(0,t_0)}(\exp_{x_0}{}^{-1}(x),t) \quad (52)$$

假设 $(A(t),\phi(t))$ 是杨-米尔斯-希格斯热流式(46)的解.设 $d_{x0}=\min\{dist(x_0,\Sigma),i(M)\}$，其中 $dist(x_0,\Sigma)$ 是 x_0 到闭集 Σ 的距离，$i(M)$ 为 (M,ω) 的内射半径.令 $\varphi_{x_0}\in C_0^\infty(B_{d_{x_0}}(x_0))$ 是一光滑截断函数使得在 $B_{d_{x_0}/2}(x_0)$ 上 $\varphi_{x_0}\equiv 1$，$0\leqslant\varphi_{x_0}\leqslant 1$，在 $B_{d_{x_0}}(x_0)\setminus B_{d_{x_0}/2}(x_0)$ 上 $|\nabla\varphi_{x_0}|\leqslant 4/d_{x_0}$. 我们设

$$e(A,\phi)(x,t)=$$
$$|F_A+[\phi,\phi^{*H_0}]|_{H_0}^2+2|\partial_A\phi|_{H_0}^2 \quad (53)$$

和

$$\Phi(r;A,\phi)=r^2\int_{T_r(x_0,t_0)}e(A,\phi)\varphi_{x_0}^2G_{u_0}\,\mathrm{d}V_g\,\mathrm{d}t \quad (54)$$

我们可得下列单调性公式：

命题 2.1① 对于任何 $u_0=(x_0,t_0)\in M\setminus\Sigma\times(0,T]$，$r_1$ 和 r_2 满足 $0<r_1\leqslant r_2\leqslant\min\{d_{x0},\sqrt{t_0}/2\}$，成立

$$\Phi(r_1;A,\phi)\leqslant C\exp(C(r_2-r_1))\Phi(r_2;A,\phi)+$$
$$C(r_2^2-r_1^2)YMH(A_0,\phi_0) \quad (55)$$

其中 C 是一正常数仅依赖于 $dist(x_0,\Sigma)^{-1}$ 和 (X,ω) 的相关几何量.

命题 2.2① 设 $R\leqslant d_{x_0}$，令 $f_{x_0,R}\in C_0^\infty(B_R(x_0))$ 是一光滑截断函数使得在 $B_{R/2}(x_0)$ 上 $f_{x_0,R}\equiv 1$，$0\leqslant f_{x_0,R}\leqslant 1$，在 $B_R(x_0)\setminus B_{R/2}(x_0)$ 上 $|\nabla f_{x_0,R}|\leqslant 4/R$.对于任何 $0<r_1\leqslant r_2\leqslant R/2$，则成立

$$r_1^2\int_{T_{r1}(x_0,t_0)}e(A,\phi)f_{x_0,R}^2G_{u_0}\,\mathrm{d}V_g\,\mathrm{d}t\leqslant$$
$$C\exp(C(r_2-r_1))r_2^2\int_{T_{r2}(x_0,t_0)}e(A,\phi)f_{x_0,R}^2G_{u_0}\,\mathrm{d}V_g\,\mathrm{d}t+$$
$$C(r_2^2-r_1^2)\setminus YMH(A_0,\phi_0)+$$
$$CR^{2-2m}\int_{P_R(x_0,t_0)}e(A,\phi)\,\mathrm{d}V_g\,\mathrm{d}t \quad (56)$$

其中 C 是一正常数仅依赖于 (X,ω) 的相关几何量.

进一步我们给出 $|\nabla_A\phi|^2$ 在区域 $P_R(u_0)$ 上的积分估计，其中 $R\leqslant\min\{\sqrt{t_0},d_{X_0}/2\}$.

引理 2.3① 令 $(A(t),\phi(t))$ 是热流式(46)的解，其初值设为 (A_0,ϕ_0).对任何点 $u_0=(x_0,t_0)\in X\setminus\Sigma\times\mathbb{R}_+$ 和 $R\in(0,\min\{\sqrt{t_0},d_{X_0}/2\}]$，必成立：

$$\int_{P_R(u_0)}|\nabla_A\phi|^2\mathrm{d}v_g\,\mathrm{d}t\leqslant CR^{2n} \quad (57)$$

这里常数 C 仅依赖于 (X,ω) 的相关几何量和初始值 (A_0,ϕ_0).

利用上面的单调不等式和希格斯层的积分估计，类似于 Hong 和 Tian 在文献[17]中的讨论，我们可得下列小能量正则性结果和收敛性结果.

命题 2.4① 令 $(A(t),\phi(t))$ 是 $(M\setminus\Sigma)$ 上热流式(46)的解，其初值设为 (A_0,ϕ_0).则存在正常数 $\epsilon_0,\delta_0<1/4$ 使得：对于任何 $x_0\in M\setminus\Sigma$，如果成立下列不等式

$$R^{2-2n}\int_{P_R(x_0,t_0)}e(A(t),\phi(t))\,\mathrm{d}V_g\,\mathrm{d}t\leqslant\epsilon_0 \quad (58)$$

其中 $0<R<\min\{d_{x_0},\frac{\sqrt{t_0}}{2}\}$，对于任何 $\delta\in(0,\delta_0)$ 必成立

$$\sup_{P_{\delta R}(x_0,t_0)}e(A(t),\phi(t))\leqslant 16(\delta R)^{-4} \quad (59)$$

和

$$\sup_{P_{\delta R}(x_0,t_0)}|\nabla_{A(t)}\phi(t)|^2\leqslant C \quad (60)$$

这里常数 C 仅依赖于 (X,ω) 的几何量，初始值 (A_0,ϕ_0)，$\delta_0{}^{-1}$ 和 R^{-1}.

命题 2.5① 令 $(A(t),\phi(t))$ 是 $(M\setminus\Sigma)$ 上热流式(46)的解.则必存在一时间子列 $\{t_i\}$ 使得：$t_i\to\infty$，在作相应一系列规范变换后，在一 Hausdorff 余维数至少为 4 的爆破闭集 Σ_n 外，$(A(t_i),\phi(t_i))$ 局部光滑收敛于一希格斯对 (A_∞,ϕ_∞)，该希格斯对在 $M\setminus(\Sigma\cup\Sigma_n)$ 上满足如下杨-米尔斯-希格

① LI J Y, ZHANG C J, ZHANG X. The limit of the Hermitian-Yang-Mills flow on Higgs sheaves[J]. In preparation.

特约评述

斯方程

$$\begin{cases} D_A^* F_A + \sqrt{-1}(\partial_A \wedge_\omega - \bar{\partial}_A \wedge_\omega)[\phi, \phi^*] = 0, \\ [\sqrt{-1} \wedge_\omega (F_A + [\phi, \phi^*]), \phi] = 0 \end{cases} \tag{61}$$

3 厄米特-杨-米尔斯热流的极限

本节中我们首先介绍文献①中关于厄米特-杨-米尔斯流的一个新的曲率估计,该估计的好处在于它可以确定前面一节所涉及的爆破集均位于一固定代数奇点中.为了更清楚地表达我们新曲率估计的思想方法,文中我们仅考虑全纯丛 E 情形,即凝聚层 $\mathscr{E}$ 为局部自由的,希格斯场 $\phi \equiv 0$.同时我们假设 Harder-Narasimhan-Seshadri 滤过式(7)中非平凡子层的个数为 1,即存在一个正合序列

$$0 \to S \to \mathscr{E} \to Q \to 0 \tag{62}$$

式中,S 是稳定子层,Q 是稳定的无挠凝聚层.

再次运用 Hironaka 的平坦化定理,我们知道必存在有限次吹大 π_i,记其复合为 $\pi = \pi_1 \circ \cdots \circ \pi_k$: $\widetilde{M} \to M$,并且存在 $\widetilde{M}$ 上的正合序列

$$0 \to \widetilde{S} \to \widetilde{E} \to \widetilde{Q} \to 0 \tag{63}$$

满足:$\widetilde{S}, \widetilde{E}, \widetilde{Q}$ 均是局部自由的,在 $\pi^{-1}\Sigma_Q$ 之外 $\widetilde{S}$, $\widetilde{E}$, $\widetilde{Q}$ 分别同构于 $S, \mathscr{E}, Q$,这里 Σ_Q 是层 Q 的奇点集.设 $H(t)$ 是全纯丛 E 上以 H_0 为初始值的厄米特-杨-米尔斯热流式(5)的长时间解,记 $\hat{H} = \pi^* H_0$,同时记 $H_\epsilon(t)$ 为 $\widetilde{E}$ 上以 $\hat{H}$ 为初始值对应于度量 ω_ϵ 厄米特-杨-米尔斯热流式(5)的长时间解.容易知道在 $\pi^{-1}\Sigma_Q$ 之外,当 $\epsilon \to 0$ 时 $H_\epsilon(t) \to H(t)$.

在全纯丛 $\widetilde{E}$ 上给定一厄米特度量 H,则必诱导一个向量丛的同构

$$f_H: \widetilde{S} \oplus \widetilde{Q} \to \widetilde{E},$$
$$(X, [Y]) \mapsto i(X) + (Id_{\widetilde{E}} - \pi_H)(Y) \tag{64}$$

这里 $X \in \widetilde{S}$, $Y \in \widetilde{E}$, $i: \widetilde{S} \hookrightarrow \widetilde{E}$ 是包含映射,$\pi_H: \widetilde{E} \to \widetilde{E}$ 对应于度量 H 到 $\widetilde{S}$ 的正交投影.

我们记 H_S 和 H_Q 为 H 在子丛 $\widetilde{S}$ 和商丛 $\widetilde{Q}$ 上所诱导的厄米特度量,由定义可知拉回度量可表达为

$$f_H^*(H) = \begin{pmatrix} H_S & 0 \\ 0 & H_Q \end{pmatrix} \tag{65}$$

对于任何 $e \in \widetilde{S}$ 和 $[Y] \in \widetilde{Q}$,成立

$$f_H^*(\bar{\partial}_{\widetilde{E}})(e, [Y]) = (\bar{\partial}_{\widetilde{S}} e + \gamma([Y]), \bar{\partial}_{\widetilde{Q}}[Y]) \tag{66}$$

这里 $\gamma([Y]) = -(\bar{\partial}_{\widetilde{E}} \pi_H)(Y)$.因此我们有下列表达式

$$f_H^*(\bar{\partial}_{\widetilde{E}}) - \bar{\partial}_{\widetilde{S} \oplus \widetilde{Q}} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{67}$$

这里 $\gamma \in \Omega^{0,1}(Hom(\widetilde{Q}, \widetilde{S}))$ 称为第二基本形式.通过将曲率形式拉回,我们有下列 Gauss-Codazzi 公式:

$$f_H^*(F_H) = \begin{pmatrix} F_{H_S} - \gamma \wedge \gamma^{*H} & \partial_{H_S}\gamma + \gamma\partial_{H_Q} \\ -\bar{\partial}_Q \gamma^{*H} - \gamma^{*H} \bar{\partial}_S & F_{H_Q} - \gamma^{*H} \wedge \gamma \end{pmatrix} \tag{68}$$

这里 $F_{H_S}(F_{H_Q})$ 分别是陈联络 $D_{(\bar{\partial}_S, H_S)}(D_{(\bar{\partial}_Q, H_Q)})$ 的曲率.

记 $H_\epsilon(t)$ 在子丛 S 和商丛 Q 上诱导的度量分别为 $H_{S,\epsilon}(t)$ 和 $H_{Q,\epsilon}(t)$,根据上述 Gauss-Codazzi 公式(式(68)),我们有下列发展方程:

$$H_{S,\epsilon}^{-1} \frac{\partial H_{S,\epsilon}}{\partial t} = -2(\sqrt{-1} \wedge_{\omega_\epsilon} (F_{H_{S,\epsilon}} - \gamma_\epsilon \wedge \gamma_\epsilon^*) - \lambda_{E,\epsilon} Id) \tag{69}$$

$$H_{Q,\epsilon}^{-1} \frac{\partial H_{Q,\epsilon}}{\partial t} = -2(\sqrt{-1} \wedge_{\omega_\epsilon} (F_{H_{Q,\epsilon}} - \gamma_\epsilon^* \wedge \gamma_\epsilon) - \lambda_{E,\epsilon} Id) \tag{70}$$

$$f_{H_\epsilon}^{-1} \frac{\partial f_{H_\epsilon}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{-1} \wedge_{\omega_\epsilon} (\partial_{H_{S,\epsilon}} \gamma_\epsilon + \gamma_\epsilon \partial_{H_{Q,\epsilon}}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{71}$$

进一步我们得到关于第二基本形式的发展方程:

$$\frac{\partial}{\partial t}\gamma_\epsilon = 2\bar{\partial}_{S \oplus Q^*}(\sqrt{-1} \wedge_{\omega_\epsilon} (\partial_{H_{S,\epsilon}} \gamma_\epsilon + \gamma_\epsilon \partial_{H_{Q,\epsilon}})) \tag{72}$$

令 $f_{H_\epsilon}(t)$ 式(4.3)中定义的丛同构,则有

$$f_{H_0}^{-1} f_{H_\epsilon}(t) = \begin{pmatrix} Id_S & G_\epsilon(t) \\ 0 & Id_Q \end{pmatrix} \tag{73}$$

这里 $G_\epsilon(t) \in \Gamma(S \oplus Q^*)$ 且 $G_\epsilon(0) = 0$.容易验证下式成立,

$$\frac{\partial}{\partial t} G = 2\sqrt{-1} \wedge_\omega (\partial_{H_S}\gamma + \gamma\partial_{H_Q}) \tag{74}$$

和

$$\bar{\partial}_{S \oplus Q^*} G = \gamma(t) - \gamma_0 \tag{75}$$

因为对于充分小的 ϵ $(\widetilde{S}, \bar{\partial}_S)$ 和 $(\widetilde{Q}, \bar{\partial}_Q)$ 均是

① LI J Y, ZHANG C J, ZHANG X. A note on curvature estimate of the Hermitian-Yang-Mills flow[J]. In preparation.

特约评述

ω_ϵ-稳定,则根据 Donaldson-Uhlenbeck-Yau 定理可知其上必存在厄米特-爱因斯坦度量.设 $K_{S,\epsilon}$ 和 $K_{Q,\epsilon}$ 是 $\tilde{S}$ 和 $\tilde{Q}$ 上的 ω_ϵ-厄米特- 爱因斯坦度量.记 $h_{S,\epsilon}(t)=K_{S,\epsilon}^{-1}H_{S,\epsilon}(t)$，$h_{Q,\epsilon}(t)=K_{Q,\epsilon}^{-1}H_{Q,\epsilon}(t)$，$\tilde{h}_{S,\epsilon}(t)=e^{2(\lambda_{S,\epsilon}-\lambda_{E,\epsilon})t}h_{S,\epsilon}(t)$和 $\tilde{h}_{Q,\epsilon}(t)=e^{2(\lambda_{Q,\epsilon}-\lambda_{E,\epsilon})t}h_{Q,\epsilon}(t)$,考虑$-\sqrt{-1}\Lambda_{\omega_\epsilon}(\gamma\wedge\gamma^*)\geqslant 0$ 并应用式(69)和(70)可得

$$(\triangle_\epsilon-\frac{\partial}{\partial t})\log(tr\tilde{h}_{S,\epsilon}+1)\geqslant 0 \tag{76}$$

和

$$(\triangle_\epsilon-\frac{\partial}{\partial t})\log(tr\,\tilde{h}_{Q,\epsilon}^{-1}+1)\geqslant 0 \tag{77}$$

根据极大值原理和前面所得的一致热核估计,我们得

$$\log(tr\,\tilde{h}_S(t)+1)(x)\leqslant C_K(1+t^{-m})\int_M\log(tr\tilde{h}_S(0)+1)\frac{\omega_\epsilon^n}{n!} \tag{78}$$

和

$$\log(tr\,\tilde{h}_Q{}^{-1}(t)+1)(x)\leqslant C_K(1+t^{-m})\int_M\log(tr\tilde{h}_Q^{-1}(0)+1)\frac{\omega_\epsilon^n}{n!} \tag{79}$$

这里 C_K 是不依赖于 ϵ 的一致常数.

根据假设中 S 和 Q 均为稳定层,类似于文献[16]引理 5.1 中的证明我们可得如下一致估计:

$$\int_M\log(tr\tilde{h}_{S,\epsilon}(0)+tr\tilde{h}_{S,\epsilon}^{-1}(0))\frac{\omega_\epsilon^n}{n!}\leqslant C \tag{80}$$

和

$$\int_M\log(tr\tilde{h}_{Q,\epsilon}(0)+tr\tilde{h}_{Q,\epsilon}^{-1}(0))\frac{\omega_\epsilon^n}{n!}\leqslant C \tag{81}$$

这里 C 是不依赖于 ϵ 的一致常数.

进一步我们可得 Donaldson 泛函的一致下界估计,具体细节可参见文献①,即存在一致常数 C 使得下列不等式成立

$$\mathscr{M}_{S,\epsilon}(H_{S,\epsilon}(0),H_{S,\epsilon}(t))\geqslant -C \tag{82}$$

和

$$\mathscr{M}_{Q,\epsilon}(H_{Q,\epsilon}(0),H_{Q,\epsilon}(t))\geqslant -C \tag{83}$$

设:

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}(t)=&2(\lambda_S-\lambda_Q)\|\gamma\|_{L^2}^2(t)+\|\partial_{H_S}\gamma+\gamma\partial_{H_Q}\|_{L^2}^2(t)\\&+\|\sqrt{-1}\Lambda_\omega(F_{H_S}-\gamma\wedge\gamma^*)-\lambda_SId_S\|_{L^2}^2(t)\\&+\|\sqrt{-1}\Lambda_\omega(F_{H_Q}-\gamma^*\wedge\gamma)-\lambda_QId_Q\|_{L^2}^2(t)\end{aligned} \tag{84}$$

根据上述一致估计并通过取极限 $\epsilon\to 0$,我们证明:必存在一致常数 C^* 使得下式成立,

$$\int_0^{+\infty}\tilde{\xi}(t)\mathrm{d}t\leqslant C^*<+\infty \tag{85}$$

由式(69) 可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\log(det\tilde{h}_S^{-1})=2tr(\sqrt{-1}\Lambda_\omega(F_{H_S}-\gamma\wedge\gamma^*)-\lambda_SId_S) \tag{86}$$

式(85) 隐含了必存在一致常数 C^{**} 使得成立:

$$\log(det\tilde{h}_S^{-1}(t))-\log(det\tilde{h}_S^{-1}(0))\leqslant C^{**} \tag{87}$$

$\log(det\tilde{h}_Q(t))$ 也有类似估计.结合式(87),(78) 和(79),我们得到厄米特-杨-米尔斯热流 $H(t)$的局部 C^0-估计:

引理 3.1① 对于任一紧集 $U\subset M\backslash\Sigma$ 都存在一致常数 $\tilde{C}$,使得对任何 $t\geqslant 1$ 都成立

$$tr\,\tilde{h}_S(t)+tr\tilde{h}_S^{-1}(t)+tr\tilde{h}_Q(t)+tr\tilde{h}_Q^{-1}(t)\leqslant\tilde{C}_U \tag{88}$$

利用上述局部 C^0-estimate(式(88))和关于 $G(t)$ 的发展方程式(74),我们可得 $G(t)$的局部 C^0-估计,即对于任何紧集 $U\subset M\backslash\Sigma$ 都存在一致常数 $\tilde{C}_{G,U}$,使得对于所有 $t>1$ 均成立:

$$\sup_{x\in U}|G(t)|_{H(t)}^2(x)\leqslant\tilde{C}_{G,U} \tag{89}$$

设:

$$\begin{aligned}T_S(t)=&D_{(H_S(t),\bar{\partial}_S)}-D_{(K_S,\bar{\partial}_S)}=\\&h_S^{-1}\partial_{K_S}h_S=(\partial_{H_S}h_S)h_S^{-1}\end{aligned} \tag{90}$$

和

$$\begin{aligned}T_Q(t)=&D_{(H_Q(t),\bar{\partial}_Q)}-D_{(K_Q,\bar{\partial}_Q)}=\\&h_S^{-1}\partial_{K_Q}h_Q=(\partial_{H_Q}h_Q)h_Q^{-1}\end{aligned} \tag{91}$$

由于第二基本形式 $\gamma_0\in\Omega^{0,1}(S\otimes Q^*)$ 满足条件 $\tilde{\partial}_{S\otimes Q^*}\gamma_0=0$,局部地,即对任何点 $P\in M$ 必存在一邻域 U_P 和一局部截面 $G_0\in\Gamma(U_P;S\otimes Q^*)$ 使得成立

$$\gamma_0=\bar{\partial}_{S\otimes Q^*}G_0 \tag{92}$$

我们考虑下列检测函数:

$$\begin{aligned}\eta(\cdot,t)=&\varphi_1(|T_S(t)|_{H_S(t)}^2+|T_Q(t)|_{H_Q(t)}^2+\\&|\gamma(t)|_{H_S,Q(t)}^2+|\partial_{(K_S,K_Q)}(G+G_0)|_{H_S,Q(t)}^2)+\\&a\varphi_2(|G+G_0|_{H(t)}^2+tr\tilde{h}_S(t)+tr\tilde{h}_Q^{-1}(t))\end{aligned} \tag{93}$$

这里常数 α 可取充分大,φ_1 和 φ_2 为适当的截断函数,具体参见文献①.在极大值点(q,t_0),可验证成立

① LI J Y, ZHANG C J, ZHANG X. The limit of the Hermitian-Yang-Mills flow on Higgs sheaves[J]. In preparation.

$$0\geqslant(\triangle-\frac{\partial}{\partial t})\eta\geqslant|T_S(t)|^2_{H_{S(t)}}+$$
$$|T_Q(t)|^2_{H_{Q(t)}}+|\gamma(t)|^2_{H_S,Q(t)}+$$
$$|\partial_{(K_S,K_Q)}(G+G_0)|^2_{H_S,Q(t)}-c_5 \tag{94}$$

这里 c_5 是不依赖于 t 的常数.这样我们得到了如下一致 C^1 估计:对于任何紧集 $U\subset M\setminus\Sigma$,必存在一致常数 $C_{1,U}$ 使得对任何点 $(x,t)\in U\times[1,+\infty)$ 都成立

$$(|T_S(t)|^2_{H_{S(t)}}+|T_Q(t)|^2_{H_{Q(t)}}+$$
$$|\gamma(t)|^2_{H_S,Q(t)})(x,t)\leqslant C_{1,U} \tag{95}$$

为简单起见,我们记:

$$\nu=|\gamma|^2_{H(t)}+|T_S|^2_{H_{S(t)}}+|T_Q|^2_{H_{Q(t)}} \tag{96}$$

我们考虑下列检测函数

$$\zeta=\rho^2\frac{|F_H(t)|^2_{H_t}}{\widetilde{C}_1+1-\upsilon} \tag{97}$$

式中,$\widetilde{C}_1$ 可取充分大,ρ 为一适当截断函数.通过直接计算在极大值点 (p,t_0) 成立

$$0\geqslant(\triangle-\frac{\partial}{\partial t})\zeta\geqslant$$
$$\frac{|F_H(t)|^2_{H_t}}{(\widetilde{C}_1+1-\upsilon)^2}(\frac{1}{8}\zeta-(C_1+C_2+1)\upsilon^2-C_3) \tag{98}$$

因此我们有

$$\zeta(p,t_0)\leqslant C_6 \tag{99}$$

这里 C_6 是不依赖于 t 的一致常数.这样我们就得到奇点集 Σ 之外的局部一致曲率估计:对于任何紧集 $K\subset M\setminus\Sigma_Q$,必存在一常数 C_K 使得成立

$$\sup_{(x,t)\in K\times[0,+\infty)}|F_{H(t)}|_{H(t)}\leqslant C_K \tag{100}$$

上述的曲率估计的方法可自然推广到自反希格斯层情形,我们可得如下局部一致曲率估计:

命题 3.2[①] 令 $H(t)$ 是非稳定自反希格斯层 $(\mathscr{E},\phi)$ 上以 H_0 为初始值的厄米特-杨-米尔斯热流式(5)的长时间解,假设 $(\mathscr{E},\phi)$ 的 Harder-Narasimhan-Seshadri 滤过式(7)中非平凡子层的个数为 1,记商层 Q 的奇点集为 Σ_Q.则对于任何紧集 $U\subset M\setminus(\Sigma\cup\Sigma_Q)$,存在一致常数 $C_{2,U}$ 使得成立

$$\max_{U\times[1,\infty)}(|F_{H(t)}+[\phi,\phi^{*H(t)}]|^2_{H(t)}+$$
$$2|D_H\phi|^2_{H(t)})\leqslant C_{2,U} \tag{101}$$

进一步在一个关于 Harder-Narasimhan-Seshadri 滤过的假设下我们得到如下收敛性结果以及极限的刻画,部分验证了 Bando-Siu 猜测,我们希望在以后的研究中除去这个假设条件.

定理 3.3[①] 设 $(\mathscr{E},\phi)$ 是紧致凯勒流形 (M,ω) 上的一非稳定自反希格斯层,假设其 Harder-Narasimhan-Seshadri 滤过式(7)中非平凡子层的个数为 1,即存在一个正合序列

$$0\to S\to\mathscr{E}\to Q\to 0 \tag{102}$$

其中,S 是稳定子层,Q 是稳定的无挠凝聚层.令 $(A(t),\phi(t))$ 是其上杨-米尔斯-希格斯热流式(46)的长时间解,则必成立:

(Ⅰ)必存在一时间子列 $\{t_i\}$ 使得:$t_i\to\infty$,在作相应一系列规范变换后,在闭集 $\Sigma_{\mathscr{E}}\cup\Sigma_Q$ 外,$(A(t_i),\phi(t_i))$ 局部光滑收敛于一希格斯对 (A_∞,ϕ_∞),该希格斯对在 $M\setminus(\Sigma_{\mathscr{E}}\cup\Sigma_Q)$ 上满足杨-米尔斯-希格斯方程式(61).

(Ⅱ)极限希格斯丛 $(E_\infty,A_\infty,\phi_\infty)$ 可延拓为整体 M 上的自反希格斯层,并具有如下全纯正交直和分解:

$$(E_\infty,A_\infty,\phi_\infty)=\bigoplus_{i=1}^{2}(E^i_\infty,A^i_\infty,\phi^i_\infty) \tag{103}$$

式中,每个希格斯对 $(A^i_\infty,\phi^i_\infty)$ 在 E^i_∞ 的局部自由部分满足厄米特-爱因斯坦方程.

(Ⅲ)存在下列希格斯层间的同构:

$$(E_\infty,A_\infty,\phi_\infty)\simeq Gr^{hns}_\omega(\mathscr{E},\phi)^{**}=(S\oplus Q)^{**} \tag{104}$$

本文的最后部分,我们介绍上述定理的证明思想,细节可参见文献[②].结论(Ⅰ)可有前面的曲率估计和 Uhlenbeck 的紧性定理.由估计式(51)可知极限希格斯对 (A_∞,ϕ_∞) 必满足:

$$D_{A_\infty}\theta_\infty=0,\ [\theta_\infty,\phi_\infty]=0 \tag{105}$$

这里 $\theta_\infty=\wedge_\omega(F_{A_\infty}+[\phi_\infty,\phi^*_\infty])$.因为 $\sqrt{-1}\theta_\infty$ 是平行的并且自共轭,这样我们可以对极限丛 E_∞ 根据 $\sqrt{-1}\theta_\infty$ 的特征值进行分解,因此我们得到全纯直和分解式(103).设常数特征值为 $\lambda_1>\cdots>\lambda_i>\lambda_{i+1}\cdots>\lambda_l$.令 ϕ^i_∞ 是极限希格斯场 ϕ_∞ 在 E^i 上的限制,$A^i_\infty=A_\infty|_{E^i}$.则 $(A^i_\infty,\phi^i_\infty)$ 是 E^i_∞ 上的希格斯对并满足:

$$\sqrt{-1}\wedge_\omega(F_{A^i_\infty}+[\phi^i_\infty,(\phi^i_\infty)^*])=\lambda_i Id_{E^i_\infty} \tag{106}$$

也即 $(A^i_\infty,\phi^i_\infty)$ 是 E^i_∞ 上的厄米特-爱因斯坦希格斯对.这样我们得到了结论(Ⅱ).

另外在上述曲率估计中,由式(85)可得:当 $t\to$

① LI J Y, ZHANG C J, ZHANG X. The limit of the Hermitian-Yang-Mills flow on Higgs sheaves[J]. In preparation.

② LI J Y, ZHANG C J, ZHANG X. A note on curvature estimate of the Hermitian-Yang-Mills flow[J]. In preparation.

∞时必有

$$\| \sqrt{-1}\ \wedge_{\omega}(F_{H_{S(t)}} + [\phi_S, \phi_S^*]) - \lambda_S Id_S \|_{L^1}(t) + \| \sqrt{-1}\ \wedge_{\omega}(F_{H_{Q(t)}} + [\phi_Q, \phi_Q^*]) - \lambda_Q Id_Q \|_{L^1}(t) \to 0 \quad (107)$$

这样实际上我们可确定 $\sqrt{-1}\theta_{\infty}$ 的特征值，即 $l=2$，并且

$$\lambda_1 = \lambda_S = \frac{2\pi}{Vol(M)rank(S)} deg_{\omega}(S),$$

$$\lambda_2 = \lambda_Q = \frac{2\pi}{Vol(M)rank(Q)} deg_{\omega}(Q) \quad (108)$$

由于杨-米尔斯-希格斯泛函

$$\int_M (|F_A + [\phi, \phi^*]|^2 + 2|\partial_A \phi|^2) dV_g$$

沿着厄米特-杨-米尔斯热流（式(5)）单调递减，并且已证得 $|\phi|_H(t)$ 是一致有界的，因此我们得

$$\int_{M\setminus\sum_{an}} |F_{A\infty}|^2_{H\infty} \frac{\omega^n}{n!} \leqslant C < \infty \quad (109)$$

根据 Bando-Siu[8]的奇点可去定理，每个（E^i_{∞}，$\bar{\partial}_{A^i_{\infty}}$）（定义于 $M\setminus(\sum_{\mathscr{E}} \cup \sum_Q)$）可整体延拓到 M 作为一个自反层（为简单起见仍记为（E^i_{∞}，$\bar{\partial}_{A^i_{\infty}}$）），并且 ϕ^i_{∞} 可光滑延拓到层（E^i_{∞}，$\bar{\partial}_{A^i_{\infty}}$）的局部自由部分.因此我们得到厄米特-爱因斯坦自反希格斯层的直和：

$$(E_{\infty}, \bar{\partial}_{A_{\infty}}, \phi_{\infty}) = \bigoplus_{i=1}^{2} (E^i_{\infty}, \bar{\partial}_{A^i_{\infty}}, \phi^i_{\infty}) \quad (110)$$

由式(108)，我们还得到

$$\mu_{\omega}(E^1_{\infty}) = \mu_{\omega}(S),\ \mu_{\omega}(E^2_{\infty}) = \mu_{\omega}(Q) \quad (111)$$

现在我们仅需证明：(E_{∞}，A_{∞}，ϕ_{∞}）是在希格斯意义下全纯同构于 $Gr^{HNS}(\mathscr{E}, \phi)^{**}$，也即存在全纯同构映射

$$f_{\infty}: \oplus_{i=1}^{l} Q_i^{**} \to (E_{\infty}, A_{\infty})$$

使得对所有 i，$f_{\infty}(Q_i^{**})$ 是 ϕ_{∞}-不变.下面我们列出证明的关键步骤.

记(A_j，ϕ_j)=($A(t_j)$，$\phi(t_j)$)=$g_j(A_0, \phi_0)$，其中 g_j 是复规范群.记 $E=\mathscr{E}|_{M\setminus\Sigma_{\mathscr{E}}}$，$S$ 是（$\mathscr{E}$，ϕ)的极大希格斯子层，Q 为其商层. $S|_{M\setminus(\Sigma_{\mathscr{E}}\cup\Sigma_Q)}$ 可看作 E 一全纯子丛，令 $i: S|_{M\setminus\Sigma} \to \mathscr{E}$ 是 ϕ-不变的全纯包含映射，定义 $f_j: S|_{M\setminus(\Sigma_{\mathscr{E}}\cup\Sigma_Q)} \to (E, \bar{\partial}_{A_j})$ 为 $f_j = g_j \circ i$，容易验证

$$\partial_{A_0, A_j} f_j = 0,\ f_j \circ \phi = \phi_j \circ f_j \quad (112)$$

也即 f_j 是一个 ϕ-不变的全纯映射.

我们可证明：通过选取一子列并乘上相应常数，

$$f_j \to f_{\infty}$$

即 f_j 在 $C^{\infty}_{loc}(M\setminus(\sum_{\mathscr{E}} \cup \sum_Q))$ 意义下一非平凡 ϕ-不变全纯映射.

记 $\pi_1^{(j)}$ 为往 $g_j(S)$ 的正交投影，取一子列在 L^2_1 弱收敛意义下 $\pi_1^{(j)} \to \pi_1^{\infty}$. 根据 Uhlenbeck-Yau 的结果[6]，我们知道 π_1^{∞} 决定了(E_{∞}，$\bar{\partial}_{A_{\infty}}$，$\phi_{\infty}$）的一个希格斯子层 E_1^{∞}，满足 $rank(E_1^{\infty}) = rank(S)$，$\mu_{\omega}(E_1^{\infty}) = \mu_{\omega}(S)$.由式(108)可知 E_1^{∞} 必是半稳定希格斯层.

由于 $\pi_1^{(j)} \circ f_j = f_j$，自然地 $\pi_1^{\infty} \circ f_{\infty} = f_{\infty}$.由前可知存在 $M\setminus(\sum_{\mathscr{E}} \cup \sum_Q)$ 上一非平凡 ϕ-不变全纯映射

$$f_{\infty}: S \to (E_1^{\infty}, \bar{\partial}_{A_{\infty}}).$$

根据 Hartog 定理，f_{∞} 可延拓为整个 M 上的希格斯层同态. 由于 S 是希格斯稳定的，根据 Kobayashi 的结果可知 f_{∞} 必是一内射，因此在 $M\setminus(\sum_{\mathscr{E}} \cup \sum_Q)$ 上

$$S \simeq E_1^{\infty} = f_{\infty}(S) \quad (113)$$

记 $E_{\infty} = E_1^{\infty} \oplus Q_{\infty}$，其中 $Q_{\infty} = E_{\infty}/E_1^{\infty}$.我们考虑 Q 中诱导的希格斯对(A_j^Q，ϕ_j^Q)，容易验证 Q 上存在一列希格斯对（A_j^Q，ϕ_j^Q）使得成立：

①在 $M\setminus(\sum_{\mathscr{E}} \cup \sum_Q)$ 上在局部光滑意义下 $(A_j^Q, \phi_j^Q) \to (A_{\infty}^{Q_{\infty}}, \phi_{\infty}^{Q_{\infty}})$.

②存在 $g_j \in G^C(Q)$ 使得(A_j^Q，ϕ_j^Q)$= g_j(A_0^Q$，$\phi_0^Q)$.

③存在一非平凡 ϕ-不变全纯映射

$$f_{\infty}^Q: (Q, \bar{\partial}_{A_0^Q}) \to (Q_{\infty}, \bar{\partial}_{A^{Q_{\infty}}}).$$

重复前面步骤可得，存在 $M\setminus(\sum_{\mathscr{E}} \cup \sum_Q)$ 上的同构

$$E_{\infty} \simeq Gr^{HNS}(\mathscr{E}, \phi_0) = S \oplus Q \quad (114)$$

根据 Siu 的自反延拓（reflexive extension）唯一性定理，必存在 M 上一自反希格斯层间的同构

$$f: (E_{\infty}, \bar{\partial}_{A_{\infty}}, \phi_{\infty}) \to Gr^{HNS}(E, \bar{\partial}_{A_0}, \phi_0)^{**} \quad (115)$$

这样我们完成了定理的证明.

参考文献(References)

[1] HITCHINN J. The self-duality equations on a Riemann surface[J]. Proc London Math Soc, 1987, 55(1): 59-126.

[2] SIMPSON C T. Constructing variations of Hodge structures using Yang-Mills connections and applications to uniformization[J]. J Amer Math Soc, 1998, 1(4): 867-918.

[3] NARASIMHAN M S, SESHADRI C S. Stable and unitary vector bundles on compact Riemann surfaces

特约评述

[J]. Ann Math,1965, 82(3): 540-567.

[4] DONALDSON S K. Anti-self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles [J].Proc London Math Soc,1985, 50(1): 1-26.

[5] DONALDSON S K. Infinite determinants, stable bundles and curvature[J]. Duke Math J, 1987,54(1): 231-247.

[6] UHLENBECK K K, YAU S T. On the existence of Hermitian-Yang-Mills connection in stable vector bundles[J]. Comm Pure Appl Math, 1986,39(S1): 257-293.

[7] LI J, YAU S T. Hermitian-Yang-Mills connection on non-K ä hler manifolds[M]// Mathematical Aspects Of String Theory. Singapore: World Scientific Publishing,1987: 560-573.

[8] BANDO S, SIU Y T. Stable sheaves and Einstein-Hermitian metrics[M]// Gemetry and Analysis on Complex Manifolds. Singapore: World Scientific Publishing,1994: 39-50.

[9] BARTOLOMEIS P D, TIAN G. Stability of complex vector bundles[J]. J Differential Geom, 1996, 43: 232-275.

[10] BIQUARD O. On parabolic bundles over a complex surface[J]. J London Math Soc, 1996,53(2): 302-316.

[11] LI J Y, NARASIMHAN M S. Hermitian-Einstein metrics on parabolic stable bundles[J]. Acta Math Sin (Engl Ser), 1999,15(1): 93-114.

[12] LI J Y. Hermitian-Einstein metrics and Chern number inequalities on parabolic stable bundles over K ä hler manifolds[J].Comm Anal Geom, 2000,8(3): 445-475.

[13] ATIYAH M, BOTT R. The Yang-Mills equations over Riemann surfaces[J]. Phil Trans Roy Soc London A, 1983,308(1505):523-615.

[14] DASKALOPOULOS G D. The topology of the space of stable bundles on a Riemann surface[J]. J Differential Geom, 1992,36(3):699-746.

[15] BISWAS I, SCHUMACHER G. Yang-Mills equation for stable Higgs sheaves[J]. Inter J Math,2009, 20 (5):541-556.

[16] LI J Y, ZHANG C J, Zhang X. Semi-stable Higgs sheaves and Bogomolov type inequality[EB/OL].(2016-01-05) [2016-09-01]. https://arxiv.org/abs/1601.00729.

[17] HONG M C, TIAN G. Asymptotical behaviour of the Yang-Mills ow and singular Yang-Mills connections[J]. Math Ann, 2004,330(3): 441-472.

[18] DASKALOPOULOS G. The topology of the space of stable bundles on a Riemann surface[J]. J Differential Geom, 1992,36:699-746.

[19] DASKALOPOULOS G, WENTWORTH R. Convergence properties of the Yang-Mills ow on Kähler surfaces[J]. J Reine Angew Math,2004, 575: 69-99.

[20] SIBLEY B. Asymptotics of the Yang-Mills ow for holomorphic vector bundles over K ä hler manifolds: The canonical structure of the limit[J]. J Reine Angew Math, 2015, 706: 123-191.

[21] WILKIN G. Morse theory for the space of Higgs bundles[J]. Comm Anal Geom, 2008, 16: 283-332.

[22] LI J Y,ZHANG X. The gradient flow of Higgs pairs [J]. J Eur Math Soc, 2011,13(5): 1373-1422.

[23] LI J Y, ZHANG X. The limit of the Yang-Mills-Higgs flow on Higgs bundles[J]. Int Math Res Notices, 2017,2017(1):232-276; doi:10.1093/imrn/rnw008.

[24] KOBAYASHI S. Differential geometry of complex vector bundles [M]. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1987.

[25] JACOB A. Existence of approximate Hermitian-Einstein structures on semi-stable bundles[J]. Asian J Math, 2014,18(5): 859-884.

[26] LI J Y, ZHANG X. Existence of approximate Hermitian-Einstein structures on semi-stable Higgs bundles[J]. Calc Var, 2015,52(3): 783-795.

[27] SIMPSONC T. Higgs bundles and local systems[J]. Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques,1992,75(1):5-95.

[28] HIRONAKA H. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero[J]. Ann Math, 1964,79(1): 109-203.

[29] HIRONAKA H. Flattening theorem in complex-analytic geometry[J]. Amer J Math, 1975,97(2): 503-547.

[30] GRIFFITHS P, HARRIS J. Principles of algebraic geometry[M]// Pure and Applied Mathematics. New York: Wiley-Interscience , 1978.

[31] CHENGS Y, LI P. Heat kernel estimates and lower bound of eigenvalues[J]. Comment Math Helv, 1981, 56:327-338.

[32] GRIGOR'YANA. Gaussian upper bounds for the heat kernel on arbitrary manifolds[J]. J Differential Geom, 1997,45: 33-52.

[33] CHEN Y, SHEN C L. Monotonicity formula and small action regularity for Yang-Mills flows in higher dimensions[J].Calc Var ,1994, 2(4):389-403.

[34] CHEN Y, SHEN C L. Evolution problem of Yang-Mills flow over 4-dimensional manifold [M]// Variational methods in nonlinear analysis. Basel, Switzerland: Gordon and Breach, 1995.