

一类新的二重六点细分方案

邢燕, 郭本云, 檀结庆

(合肥工业大学数学学院, 安徽合肥 230009)

摘要: 提出一类新的插值与逼近混合的二重六点细分方案, 用 Laurent 多项式方法证明了该方案产生的极限曲线能达到 C^4 连续, 并计算了极限曲线的 Hölder 指数. 该方案与现有的二重六点细分方案相比, 连续性更高、逼近效果更好. 进一步地, 把均匀细分方案拓展到非均匀细分方案. 实验结果表明了所提细分方案的有效性, 并举例证明了形状参数的作用.

关键词: 细分; 插值; 逼近; 形状参数

中图分类号: TP391.41 **文献标识码:** A doi: 10.3969/j.issn.0253-2778.2017.11.005

2010 Mathematics Subject Classification: 65D17

引用格式: 邢燕, 郭本云, 檀结庆. 一类新的二重六点细分方案[J]. 中国科学技术大学学报, 2017, 47(11): 912-918.

XING Yan, GUO Benyun, TAN Jieqing. A class of new binary 6-point subdivision scheme[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2017, 47(11): 912-918.

A class of new binary 6-point subdivision scheme

XING Yan, GUO Benyun, TAN Jieqing

(School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: A class of interpolation and approximation blending binary 6-point subdivision scheme was presented. The smoothness of the scheme was analyzed by the Laurent polynomial method. The limit curve can reach C^4 continuous. The Hölder exponent of the limit curves was also calculated. Compared with the existing binary 6-point subdivision schemes, the proposed scheme achieves higher continuity and better approximating results. Furthermore, the uniform subdivision scheme is extended to the non-uniform subdivision scheme. Experimental results illustrate the effectiveness of the subdivision scheme and the role of the shape parameters.

Key words: subdivision; interpolation; approximation; shape parameter

0 引言

在计算机辅助几何设计和几何建模中, 细分是非常有用的工具. 细分可以划分为两大类: 插值细分和逼近细分. 虽然很多逼近细分方案可以产生光

滑性更高的曲线, 但插值细分方案在工程中的应用却更广泛. 在 20 世纪 50 年代, 法国数学家 de Rham^[1] 提出了第一个逼近方案: 一个 C^1 连续的线性逼近细分方案. Dyn 等^[2] 提出了最早且最流行插值细分方案, 即经典的二重四点方案, 它也仅能产

收稿日期: 2016-05-08; 修回日期: 2016-09-07

基金项目: 国家自然科学基金(61472466)资助.

作者简介: 邢燕, 女, 1977 年生, 博士/副教授. 研究方向: CAGD 与计算机图形学、图像处理. E-mail: xy1128@126.com

通讯作者: 檀结庆, 博士/教授. E-mail: jieqingtan@hfut.edu.cn

生 C^1 连续的极限曲线. Hassan 等^[3,4] 提出一个三重四点插值方案和三重三点逼近方案, 均能产生 C^2 连续的极限曲线. 郑红禅等^[5] 详细讨论了双参数的四点细分法及其性质. Tan 等介绍了一类新的可以达到 C^3 连续的五点保形细分方案^[6], 并证明了单参数二重五点细分方案的保凸性^[7]. Siddiqi 等在文献^[8]中提出五点二重逼近细分方案, 可以产生 C^4 连续的极限曲线; 在文献^[9]中讨论了六点二重逼近细分方案, 该方案可以达到 C^4 连续性. 在 1989 年, Weissman^[10] 提出了一个六点二重插值细分方案, Siddiqi 等^[11] 证明它能够达到 C^4 连续, Mustafa 等^[12] 又证明它可以达到 C^3 连续. 在 2011 年, Hao 等^[13] 描述了一类有着高阶连续性的线性二重六点逼近细分方案, 包含了文献^[8]中的细分格式. Mustafa 等^[14] 提出 m 点逼近细分方案, 它包含了一类六点逼近细分方案. Pan 等^[15] 介绍了一类混合三重细分方案, 该方案能够产生 C^3 连续的极限曲线. 之后, Rehan 等^[16] 给出插值与逼近混合的二重六点细分方案, 能生成 C^3 极限曲线.

本文提出一类新的插值与逼近混合的二重六点细分方案, 与现有的二重六点细分方案相比, 它的连续性和逼近性能都非常好.

1 预备知识

设有限非零数构成的掩模 $a = \{a_i\}_{i \in Z}$ 上定义的二重细分 S 如下:

$$p_i^{k+1} = \sum_{j \in Z} a_{i-2j} p_j^k, i \in Z \quad (1)$$

Laurent 多项式 $a(z) = \sum_{i \in Z} a_i z^i$ 称为细分方案的生成多项式或者标志. 它对细分方案的收敛性和光滑性分析具有重要作用.

定理 1.1^[17] 假设 S 是一个收敛的二重细分方案, 那么相对应的 mask $a = \{a_i\}_{i \in Z}$ 满足

$$\sum_{i \in Z} a_{2i} = \sum_{i \in Z} a_{2i+1} = 1 \quad (2)$$

从定理 1.1 可知一个收敛的二重细分方案满足 $a(-1) = 0$ 和 $a(1) = 2$.

定理 1.2^[17] 设 S 表示掩模 $a = \{a_i\}_{i \in Z}$ 满足式(2)的二重细分方案, 那么存在细分方案 S_1 (S 的一阶差商方案) 满足性质

$$DP^k = S_1 DP^{k-1} \quad (3)$$

式中,

$$P^k = S^k P^0,$$

$DP^k = 2^k \Delta P^k = \{(DP^k)_i = 2^k (P_{i+1}^k - P_i^k)\}_{i \in Z}$. 并且, S 是一致收敛的当且仅当对于所有的初始数据集 P^0 , $\frac{1}{2} S_1$ 一致收敛到零函数, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \left(\frac{1}{2} S_1 \right)^k \right\|_{\infty} = 0.$$

其中, 范数定义为

$$\left\| \left(\frac{1}{2} S_n \right)^L \right\|_{\infty} = \max_{j \in Z} \left\{ \sum_{i \in Z} |b_{i+2Lj}^{[n,L]}| : i = 0, 1, \dots, 2^L - 1 \right\},$$

$$b^{[n,L]}(z) = \frac{1}{2^L} \prod_{j=0}^{L-1} a^{(n)}(z^{2^j}) \quad (4)$$

$$a^{(n)}(z) = \frac{2z}{1+z} a^{(n-1)}(z) = \left(\frac{2z}{1+z} \right)^n a(z), n \geq 1.$$

定理 1.3^[18] 假设 S 是上述形式的细分方案并且对所有的初始数据集 P^0 , $\frac{1}{2} S_{n+1}$ 一致收敛到零函数, 则对于任意初始控制多边形 P^0 , $S^{\infty} P^0 \in C^n$.

2 一类新的二重六点细分方案

2.1 细分方案的构造

受文献^[15-16]插值和逼近融合产生新格式的启发, 本文融合了一个自己推导的六点二重细分格式和文献^[10]中的六点插值格式, 产生一类新的二重六点细分方案:

$$\left. \begin{aligned} p_{2i}^{k+1} &= a_0 p_{i-2}^k + a_1 p_{i-1}^k + a_2 p_i^k + a_3 p_{i+1}^k + a_4 p_{i+2}^k, \\ p_{2i+1}^{k+1} &= b_0 p_{i-2}^k + b_1 p_{i-1}^k + b_2 p_i^k + b_3 p_{i+1}^k + \\ &\quad b_4 p_{i+2}^k + b_5 p_{i+3}^k \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中,

$$a_0 = a_4 = -\frac{7}{256}v, a_1 = a_3 = \frac{11}{64}v,$$

$$a_2 = 1 - \frac{37}{128}v,$$

$$b_0 = b_5 = u(1-v) - \frac{3}{512}v,$$

$$b_1 = b_4 = -3u(1-v) - \frac{1}{16} + \frac{25}{512}v,$$

$$b_2 = b_3 = \frac{9}{16} - \frac{11}{256}v + 2u(1-v).$$

形状参数 u 和 v 可以控制极限曲线是插值还是逼近. 若 $v=0$, 细分方案(5)为文献^[10]带有形状参数的六点插值方案. 若 $v=0, u=0$, 那么方案(5)简化为 Dubuc 细分方案^[21]. 若 $v=0, u=\frac{3}{4}$, 方案(5)可以得到文献^[19]中提出的一个细分方案.

2.2 收敛性和光滑性分析

这一节,我们将使用第一部分的定理去分析细分方案(5)的收敛性和 C^k 连续性.

定理 2.1 细分方案(5)产生的极限曲线可以达到 C^4 连续性.

证明 方案(5)对应的 Laurent 多项式如下:

$$\begin{aligned} a(z) = & \left(u - uv - \frac{3}{512}v\right)z^{-5} + \left(-\frac{7}{256}v\right)z^{-4} + \\ & \left(-3u + 3uv - \frac{1}{16} + \frac{25}{512}v\right)z^{-3} + \left(\frac{11}{64}v\right)z^{-2} + \\ & \left(\frac{9}{16} - \frac{11}{256}v + 2u - 2uv\right)z^{-1} + \left(1 - \frac{37}{128}v\right) + \\ & \left(\frac{9}{16} - \frac{11}{256}v + 2u - 2uv\right)z + \left(\frac{11}{64}v\right)z^2 + \\ & \left(-3u + 3uv - \frac{1}{16} + \frac{25}{512}v\right)z^3 + \left(-\frac{7}{256}v\right)z^4 + \\ & \left(u - uv - \frac{3}{512}v\right)z^5. \end{aligned}$$

容易证明 $a(z)$ 满足方程(5), 由定理 1.2, 有

$$\begin{aligned} a^{(1)}(z) = & \left(2u - 2uv - \frac{3v}{256}\right)z^{-4} + \\ & \left(2uv - \frac{11v}{256} - 2u\right)z^{-3} + \left(4uv - 4u - \frac{1}{8} + \frac{9v}{64}\right)z^{-2} + \\ & \left(\frac{13v}{64} + \frac{1}{8} - 4uv + 4u\right)z^{-1} + \left(1 - \frac{37v}{128}\right) + \\ & \left(1 - \frac{37v}{128}\right)z + \left(\frac{13v}{64} + \frac{1}{8} - 4uv + 4u\right)z^2 + \\ & \left(4uv - 4u - \frac{1}{8} + \frac{9v}{64}\right)z^3 + \\ & \left(2uv - \frac{11v}{256} - 2u\right)z^4 + \left(2u - 2uv - \frac{3v}{256}\right)z^5. \end{aligned}$$

由式(4),

$$\begin{aligned} b^{[1,1]}(z) = & \frac{1}{2}a^{(1)}(z) = \left(u - uv - \frac{3v}{512}\right)z^{-4} + \\ & \left(uv - \frac{11v}{512} - u\right)z^{-3} + \left(2uv - 2u - \frac{1}{16} + \frac{9v}{128}\right)z^{-2} + \\ & \left(\frac{13}{128}v + \frac{1}{16} - 2uv + 2u\right)z^{-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{37}{256}v\right) + \\ & \left(\frac{1}{2} - \frac{37}{256}v\right)z + \left(\frac{13}{128}v + \frac{1}{16} - 2uv + 2u\right)z^2 + \\ & \left(2uv - 2u - \frac{1}{16} + \frac{9}{128}v\right)z^3 + \\ & \left(uv - \frac{11}{512}v - u\right)z^4 + \left(u - uv - \frac{3}{512}v\right)z^5. \end{aligned}$$

当 $0 \leq v \leq 1, 0 \leq u < 0.0625$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2}S_1 \right\|_{\infty} = & \max \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} |b_{\frac{1+2j}{4}}^{[1,1]}| : i = 0, 1 \right\} = \\ & \left| u - uv - \frac{3v}{512} \right| + \left| -\frac{11}{512}v - u + uv \right| + \\ & \left| -2u + 2uv - \frac{1}{16} + \frac{9}{128}v \right| + \\ & \left| \frac{13}{128}v + \frac{1}{16} - 2uv + 2u \right| + \left| \frac{1}{2} - \frac{37}{256}v \right| < 1. \end{aligned}$$

所以方案(5)是一致收敛的.

$a^{(1)}(z)$ 也满足方程(2), 即

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{2i}^{(1)} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_{2i+1}^{(1)} = 1.$$

$$\begin{aligned} b^{[2,1]}(z) = & \frac{1}{2}a^{(2)}(z) = \left(2u - 2uv - \frac{3}{256}v\right)z^{-3} + \\ & \left(-\frac{v}{32} - 4u + 4uv\right)z^{-2} + \left(-\frac{1}{8} + \frac{11}{64}v\right)z^{-1} + \\ & \left(4u - 4uv + \frac{1}{4} + \frac{v}{32}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{41v}{128} + 4uv - 4u\right)z + \\ & \left(4u - 4uv + \frac{1}{4} + \frac{1}{32}v\right)z^2 + \left(-\frac{1}{8} + \frac{11}{64}v\right)z^3 + \\ & \left(-\frac{v}{32} - 4u + 4uv\right)z^4 + \left(2u - 2uv - \frac{3}{256}v\right)z^5. \end{aligned}$$

当 $0 \leq v \leq 1, 0 < u < 0.03$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2}S_2 \right\|_{\infty} = & \max \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} |b_{\frac{2+2j}{4}}^{[2,1]}| : i = 0, 1 \right\} = \\ & \max \left\{ \left| \frac{11v}{32} - \frac{1}{4} \right| + \left| 4u - 4uv - \frac{3}{128}v \right| + \right. \\ & \left. \left| \frac{3}{4} - \frac{41}{128}v + 4uv - 4u \right|, \right. \\ & \left. \left| -\frac{v}{16} - 8u + 8uv \right| + \left| 8u - 8uv + \frac{1}{2} + \frac{v}{16} \right| \right\} < 1. \end{aligned}$$

$a^{(2)}(z)$ 仍满足方程(2). 再计算

$$\begin{aligned} b^{[3,1]}(z) = & \frac{1}{2}a^{(3)}(z) = \left(4u - 4uv - \frac{3}{128}v\right)z^{-2} + \\ & \left(12uv - 12u - \frac{5v}{128}\right)z^{-1} + \\ & \left(\frac{49v}{128} + 12u - 12uv - \frac{1}{4}\right) + \\ & \left(\frac{3}{4} - \frac{41v}{128} + 4uv - 4u\right)z + \\ & \left(\frac{3}{4} - \frac{41v}{128} + 4uv - 4u\right)z^2 + \\ & \left(\frac{49v}{128} + 12u - 12uv - \frac{1}{4}\right)z^3 + \\ & \left(12uv - 12u - \frac{5v}{128}\right)z^4 + \end{aligned}$$

$$\left(4u - 4uv - \frac{3}{128}v\right)z^5.$$

当 $0 \leq v \leq 1, 0 < u < 0.02,$

$$\left\| \frac{1}{2}S_3 \right\|_\infty = \max \left\{ \sum_{j \in Z} |b_{i+2j}^{[3,1]}| : i = 0, 1 \right\} = \left| 4u - 4uv - \frac{3v}{128} \right| + \left| 12uv - 12u - \frac{5}{128}v \right| + \left| \frac{49}{128}v + 12u - 12uv - \frac{1}{4} \right| + \left| \frac{3}{4} - \frac{41}{128}v + 4uv - 4u \right| < 1.$$

$a^{(3)}(z)$ 也满足方程(2), 再计算

$$b^{[4,1]}(z) = \frac{1}{2}a^{(4)}(z) = \left(8u - 8uv - \frac{3}{64}v\right)z^{-1} + \left(32uv - \frac{v}{32} - 32u\right) + \left(\frac{51}{64}v + 56u - 56uv - \frac{1}{2}\right)z + \left(64uv - \frac{23}{16}v - 64u + 2\right)z^2 + \left(\frac{51}{64}v + 56u - 56uv - \frac{1}{2}\right)z^3 + \left(32uv - \frac{v}{32} - 32u\right)z^4 + \left(8u - 8uv - \frac{3v}{64}\right)z^5.$$

当 $0.7273 \leq v \leq 1, 0 < u < 0.02,$

$$\left\| \frac{1}{2}S_4 \right\|_\infty = \max \left\{ \left| 16u(1-v) - \frac{3v}{32} \right| + \left| \frac{51}{32}v + 112u(1-v) - 1 \right|, \left| 64uv - \frac{v}{16} - 64u \right| + \left| 2 - \frac{23}{16}v - 64u + 64uv \right| \right\} < 1.$$

若方案(5)要达到 C^4 连续性, $a^{(4)}(z)$ 仍需满足方程(2), 这意味着 $v = 1$. 这时

$$b^{[5,1]}(z) = \frac{1}{2}a^{(5)}(z) = -\frac{3}{32} + \frac{1}{32}z + \frac{9}{16}z^2 + \frac{9}{16}z^3 + \frac{1}{32}z^4 - \frac{3}{32}z^5, \left\| \frac{1}{2}S_5 \right\|_\infty = \max \left\{ \frac{22}{32}, \frac{22}{32} \right\} = \frac{11}{16} < 1.$$

所以, 由定理 1.3 可知当 $v = 1$ 时, 细分方案(5)所产生的极限曲线是 C^4 连续的.

2.3 细分方案的 Hölder 指数

定理 2.1 表明二重六点细分方案(5)可以产生 C^4 连续的极限曲线. 事实上, 基于扩展的 Rioul 方法^[20], 可以找到方案(5)的最高光滑性. 细分方案

(5)具有 Hölder 正则性 $R_H = 4 + v^k$. 对任意 $k \geq 1, v^k$ 满足

$$2^{-kv^k} = \left\| \left(\frac{1}{2}S_5 \right)^k \right\|_\infty.$$

根据 Rioul 方法, 容易推出本方案的 Hölder 指数是 $\dot{C}^{4.5406}$.

3 非均匀二重六点细分方案

这部分把均匀的二重六点细分方案推广到非均匀的细分方案上. 用参数 v_i 和 α_i 代替方案(5)中的参数 v , 得到非均匀二重六点细分方案如下:

$$\left. \begin{aligned} p_{2i}^{k+1} &= A_0 p_{i-2}^k + A_1 p_{i-1}^k + A_2 p_i^k + A_3 p_{i+1}^k + A_4 p_{i+2}^k, \\ p_{2i+1}^{k+1} &= B_0 p_{i-2}^k + B_1 p_{i-1}^k + B_2 p_i^k + B_3 p_{i+1}^k + B_4 p_{i+2}^k + B_5 p_{i+3}^k \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中,

$$A_0 = A_4 = -\frac{7}{256}v_i, A_1 = A_3 = \frac{11}{64}v_i,$$

$$A_2 = 1 - \frac{37}{128}v_i,$$

$$B_0 = B_5 = u(1 - \alpha_i) - \frac{3}{512}\alpha_i,$$

$$B_1 = B_4 = -3u(1 - \alpha_i) - \frac{1}{16} + \frac{25}{512}\alpha_i,$$

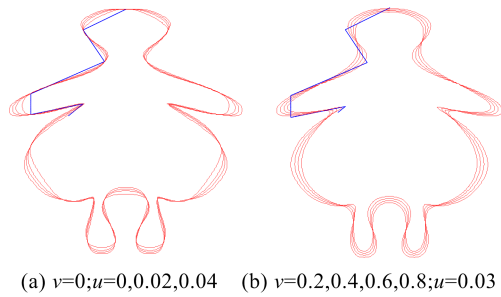
$$B_2 = B_3 = \frac{9}{16} - \frac{11}{256}\alpha_i + 2u(1 - \alpha_i).$$

本节方案(6)中的参数 v_i 和 α_i 可以分别控制极限曲线的插值和逼近, 大大提高了曲线形状设计的灵活性.

4 实验

用一些例子来证明细分方案(5)的有效及实用性. 图 1 描绘了方案(5)通过六次迭代产生的细分曲线. 取 $v = 0; u = 0, 0.02, 0.03, 0.04$ 得到插值型六点细分方案, 如图 1(a), 对应的插值曲线由内到外. 若取 $v = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8; u = 0.03$ 得到图 1(b)中由内到外的曲线, 细分方案(5)此时为逼近型六点细分方案. 图 1 表明细分方案(5)中形状参数 u 和 v 可以控制极限曲线插值或逼近原控制多边形.

图 2 展示了本文细分方案(5)与已有的六点细分方案^[10,14,16]的比较. 其中文献[10]的是本文细分方案(5)当 $v = 0$ 时的特例. 文献[14]的是单参数六点逼近细分方案, 该方案不能产生插值曲线, 而本



(a) $v=0; u=0, 0.02, 0.04$ (b) $v=0.2, 0.4, 0.6, 0.8; u=0.03$

图 1 细分方案(5)生成的插值或逼近曲线

Fig.1 The interpolation and approximation curves generated by scheme (5)

文细分方案既可以产生逼近曲线,也可以产生插值曲线.文献[16]的是插值细分格式与逼近细分格式的融合,可以发现,在相同的支撑区间下,本文细分方案(5)最高可以获得 C^4 连续的极限曲线,而文献[16]的方案融合后的细分格式最高只能产生 C^3 连续的极限曲线.通过公平的比较,即在相同连续性下,均选取细分方案达到最好效果的参数,可以观察到方案(5)产生的极限曲线比文献[10,14,16]得到的极限曲线更贴近原始控制多边形.

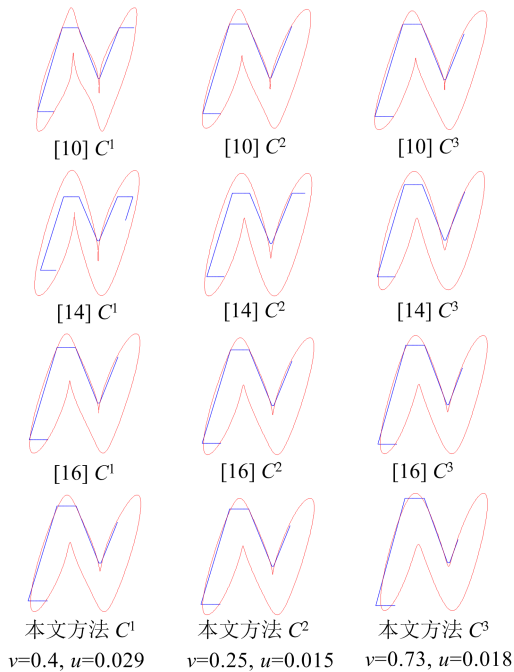


图 2 方案(5)和已有的六点细分方案的比较

Fig.2 Comparison of the presented scheme and the existing scheme

图 3 采用细分方案(5)设计了著名品牌李宁、Nike 和 Apple 的商标,例证了所给方案的实用性.图 3 中左边蓝色点线为初始控制多边形,右边红色图案的边界是参数取值为 $v=0.96, u=0$ 时由方案(5)产生的极限曲线.可见,细分方案(5)可以设计

出预期的且造型美观的图案.

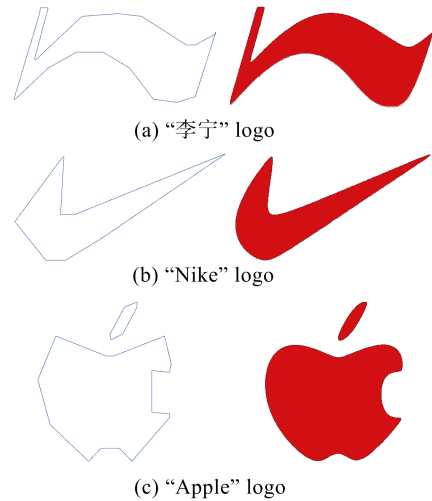
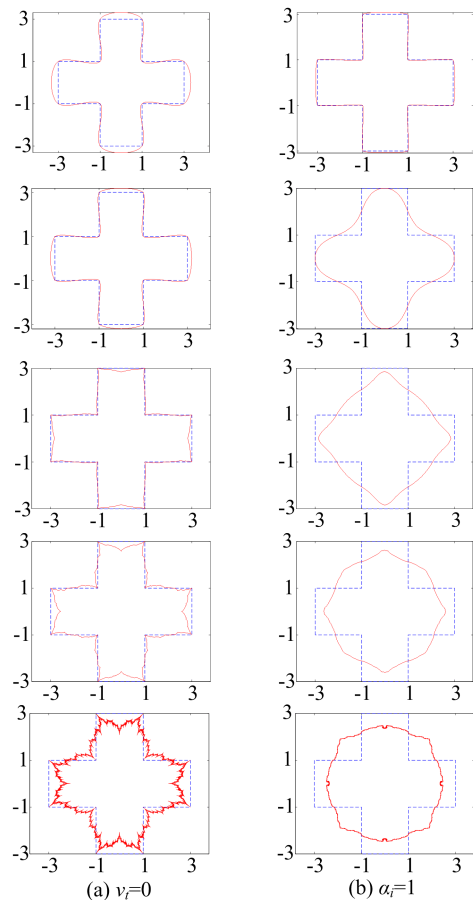


图 3 $v=0.96, u=0$ 时, 细分方案(5)设计的商标

Fig.3 Trademark designed by the presented scheme (5) as $v=0.96, u=0$



$\alpha_i=0, 0.5, 2, 3, 5$ (自上而下) $v_i=0, 1, 2, 3, 4$ (自上而下)

图 4 非均匀二重六点细分实例($u=0.01$)

Fig.4 Application examples of the non-uniform binary 6-point subdivision scheme as $u=0.01$

图 4 展示了非均匀的二重六点细分方案(6)当

$u=0.01$ 时, 参数 v_i 和 α_i 对细分曲线的插值性和逼近性的灵活控制. 图 4(a) 中极限曲线从上到下依次对应参数值 $\alpha_i=0, 0.5, 2, 3, 5$, $v_i=0$. 图 4(b) 中极限曲线从上到下依次对应参数值 $v_i=0, 1, 2, 3, 4$, $\alpha_i=1$.

5 结论

本文构造了一类二重六点细分方案, 通过 Laurent 多项式方法分析了细分方案的 C^k 连续性 ($k=0, 1, 2, 3, 4$), 计算了其 Hölder 指数; 并且进一步拓展均匀二重六点细分方案到非均匀二重六点细分方案. 最后通过实验例证了这种新的二重六点细分方案在设计曲线时可以更好地逼近初始控制多边形. 本文没有考虑如何定量地比较两个细分格式的优劣, 今后将进行这方面的研究, 并将进一步地研究插值和逼近混合的曲面细分.

参考文献 (References)

- [1] DE RHAM G. Sur une courbe plane [J]. Journal de Mathematiques Pures et Appliquees, 1956, 35: 25-42.
- [2] DYN N, LEVIN D, GREGORY J A. A 4-point interpolatory subdivision scheme for curve design [J]. Comput Aided Geometric Des, 1987, 4(4): 257-268.
- [3] HASSAN M F, IVRISSIMITZIS I P, DODGSON N A, et al. An interpolating 4-points C^2 ternary stationary subdivision scheme [J]. Computer Aided Geometric Design, 2002, 19: 1-18.
- [4] HASSAN M F, DODGSON N A. Ternary and three point univariate subdivision schemes[C]// Curve and Surface Fitting: Sant-Malo 2002. Brentwood, TN: Nashboro Press, 2003: 199-208.
- [5] 郑红婵, 叶正麟, 赵红星. 双参数四点细分法及其性质 [J]. 计算机辅助几何设计与图形学报, 2004, 16(8): 1140-1145.
ZHENG Hongchan, YE Zhenglin, ZHAO Hongxing. A class of four-point subdivision schemes with two parameters and its properties[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2004, 16(8): 1140-1145.
- [6] TAN J, ZHUANG X, ZHANG L. A new four-point shape-preserving C^3 subdivision scheme [J]. Comput Aided Geometric Des, 2014, 31: 57-62.
- [7] TAN J, YAO Y, CAO H, et al. Convexity preservation of 5-point binary subdivision scheme with a parameter [J]. Appl Math Comput, 2014, 245: 279-288.
- [8] SIDDIQI S S, AHMAD N. A new five-point approximating subdivision scheme [J]. International Journal of Computer Mathematics, 2008, 85: 65-72.
- [9] SIDDIQI S S, AHMAD N. A C^6 approximating subdivision scheme [J]. Applied Mathematics Letters, 2008, 21: 722-728.
- [10] WEISSMAN A. A 6-point interpolatory subdivision scheme for curve design[D]. Tel Aviv, Israel: Tel Aviv University, 1989.
- [11] SIDDIQI SS, NADEEM AHMAD N. A proof of the smoothness of 6-point interpolatory scheme [J]. Int J Comput Math, 2006, 83(5-6): 503-509.
- [12] MUSTAFA G, KHAN F, HASHMI M S. A generalized proof of the smoothness of 6-point interpolatory scheme [J]. Journal of Information and Computing Science, 2010, 5(4): 299-304.
- [13] HAO Y, WANG R, LI C J. Analysis of a 6-point binary subdivision scheme [J]. Appl Math Comput, 2011, 218: 3209-3216.
- [14] MUSTAFA G, KHAN F, GHAFAR A. The m -point approximating subdivision scheme [J]. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2009, 30(2): 138-145.
- [15] PAN J, LIN S, LUO X. A combined approximating and interpolating subdivision scheme with C^6 continuity [J]. Appl Math Let, 2012, 25: 2140-2146.
- [16] REHAN K, SIDDIQI S S. A combined binary 6-point subdivision scheme [J]. Appl Math Comput, 2015, 270: 130-135.
- [17] DYN N. Subdivision schemes in CAGD[C]// Advances in Numerical Analysis, Vol. II. Oxford: Oxford Univ Press, 1992: 36-104.
- [18] DYN N. Analysis of convergence and smoothness by the formalism of Laurent polynomials[C]// Tutorials on Multiresolution in Geometric Modeling. Berlin: Springer, 2002: 51-68.
- [19] HORMANN K, SABIN M A. A family of subdivision schemes with cubic precision [J]. Comput Aided Geom Des, 2008, 25: 41-52.
- [20] RIOUL O. Simple regularity criteria for subdivision schemes [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1992, 23: 1544-1576.
- [21] DUBUC S. Interpolation through an iterative scheme [J]. J Math Anal Appl, 1986, 114: 185-204.