

潜伏类和移出类具有传染性的 SEIR 模型的渐近性分析

马艳丽¹, 张仲华²

(1. 安徽新华学院公共课教学部, 安徽合肥 230088; 2. 西安科技大学理学院, 陕西西安 710049)

摘要: 研究了一类潜伏类和移出类均具有传染力的 SEIR 传染病模型, 得到了疾病流行与否的阈值: 基本再生数 R_0 . 运用 Liapunov 函数方法, 证明了当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 E_0 全局渐近稳定, 疾病最终消失; 利用 Hurwitz 判据定理, 证明了当 $R_0 > 1$ 时, E_0 不稳定, 地方病平衡点 E^* 局部渐近稳定; 当因病死亡率和剔除率为零时, 地方病平衡点 E^* 全局渐近稳定, 疾病持续存在. 最后, 进行了计算机数值模拟来进一步验证理论结果的正确性.

关键词: 基本再生数; 平衡点; 全局渐近稳定性; Liapunov 函数; 轨道渐近稳定

中图分类号: O175 **文献标识码:** A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2016.02.00

2010 Mathematics Subject Classification: 92D25

引用格式: Ma Yanli, Zhang Zhonghua. Asymptotical analysis of SEIR model with infectious force in latent and immune periods[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2016, 46(2):95-103.

马艳丽, 张仲华. 潜伏类和移出类具有传染性的 SEIR 模型的渐近性分析[J]. 中国科学技术大学学报, 2016, 46(2):95-103.

Asymptotical analysis of SEIR model with infectious force in latent and immune periods

MA Yanli¹, ZHANG Zhonghua²

(1. Public Curriculum Department, Anhui Xinhua University, Hefei 230088, China;
2. School of Sciences, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710049, China)

Abstract: A type of SEIR epidemic model with infective force in the latent and immune period was studied. And the threshold, basic reproductive number R_0 which determines whether a disease is extinct or not, was obtained. By using the Liapunov function method, it was proved that the disease-free equilibrium E_0 is globally asymptotically stable and that the disease eventually goes away if $R_0 < 1$. It was also proved that in the case where $R_0 > 1$, E_0 is unstable and the unique endemic equilibrium E^* is locally asymptotically stable by Hurwitz criterion theory. It was shown that when disease-induced death rate and elimination rate are zero, the unique endemic equilibrium E^* is globally asymptotically stable and the disease persists. Finally, numerical simulation was given to illustrate the theoretical analysis.

Key words: basic reproductive number; equilibrium; global asymptotically stability; Liapunov function; orbital asymptotical stability

收稿日期: 2015-03-19; 修回日期: 2016-01-09

基金项目: 国家自然科学基金(11201277, 11402054), 安徽省自然科学基金重点项目(KJ2015A308, KJ2015A331)资助.

作者简介: 马艳丽(通讯作者), 女, 1983年生, 硕士/讲师. 研究方向: 生物数学. E-mail: Linda-mayanli@163.com

0 引言

传染病历来就是人类健康的大敌,历史上传染病一次又一次的爆发和流行给人类生存和发展带来了巨大的灾难.世界卫生组织(WTO)发表的《2013年世界卫生报告》表明,传染病依然是人类的第一杀手,目前全球约有半数人口受到各种不同传染病的威胁.近年来,随着环境的污染,如肺结核、性病、禽流感等传染病再次抬头蔓延,而一些新出现的,如艾滋病(AIDS)、传染性非典型肺炎(SARS)等也来势凶猛.

众所周知,很多传染病在易感者被感染后成为患者之前存在病菌潜伏期,相应的传染病模型有 SEI, SEIR 或 SEIRS 等,都是利用高维 Poincaré-Bendixson 性质来证明地方病平衡点的全局稳定性,关于这方面的传染病模型并不少见^[1-7].但是一般的传染病模型较少地考虑潜伏类或移出类具有传染力的情况,而丙型肝炎和尖锐湿疣等疾病,在潜伏期或恢复期都具有一定的传染力,李桂花等^[8-9]研究了染病者、潜伏者和移出者均具有传染力的 SEIR 模型的全局稳定性,笔者等^[10]讨论了具有一般形式接触率的 SEIR 模型的稳定性分析.发生率在流行病学模型的研究中起着重要的作用,一些因素如人口密度和生活方式,可能直接或间接地影响发生率,感染率函数决定了流行病的传播情况^[11].文献[8-9]模型中考虑的疾病发生率为双线性的,当种群数量很大时,这种发生率显然是不符合实际的.文献[10]传染病模型考虑的是一般形式的接触率,但这种发生率是一种较抽象的情形.受文献[8-10]的启发,本文建立了一类具有标准发生率的 SEIR 传染病模型,同时考虑对潜伏类和染病类采取剔除策略,讨论了无病平衡点和地方病平衡点的全局稳定性,并利用计算机软件进行了数值模拟.

1 模型建立及意义

将种群分为易感者 S,潜伏者 E,染病者 I 和移出者 R,记 $N = S + E + I + R$,建立具有标准发生率的 SEIR 流行病模型仓室结构,如图 1 所示.其中, A 为种群的常数输入率,并假设新生儿均为易感者; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 分别表示潜伏者,染病者和移出者的传染率系数; α_1, α_2 分别表示潜伏者与染病者的因病死亡率, d 为自然死亡率; k_1, k_2 分别表示潜伏者与染病者的剔除率; γ 表示潜伏者发病的比例,即是由潜伏者到染病者的转换率, $1/\gamma$ 是平均潜伏期; ϵ 表示从染病者中被移出的比例, $1/\epsilon$ 为平均患病期.假设 $A, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \alpha_1, \alpha_2, \gamma, k_1, k_2, d, \epsilon$ 均为正常数.

根据流行病动力学仓室建模思想得到如下 SEIR 模型:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= A - \lambda_1 \frac{SE}{N} - \lambda_2 \frac{SI}{N} - \lambda_3 \frac{SR}{N} - dS, \\ \frac{dE}{dt} &= \lambda_1 \frac{SE}{N} + \lambda_2 \frac{SI}{N} + \lambda_3 \frac{SR}{N} - (\gamma + d + \alpha_1 + k_1)E, \\ \frac{dI}{dt} &= \gamma E - (\epsilon + d + \alpha_2 + k_2)I, \\ \frac{dR}{dt} &= \epsilon I - dR \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

则总人口方程为

$$N' = A - dN - (\alpha_1 + k_1)E - (\alpha_2 + k_2)I.$$

显然, $N' \leq A - dN$. 则根据系统(1)的生物学意义,只需要在闭集

$$\Gamma = \{(S, E, I, R) \in R^4_+ | 0 \leq S + E + I + R = N \leq A/d\}$$

内研究系统(1),其中, R^4_+ 表示 R^4 中的正锥.在考虑到系统(1)的实际意义,各种初值均在 Γ 内,即 Γ 是系统(1)的一个正向最大不变集.

通过计算可得到

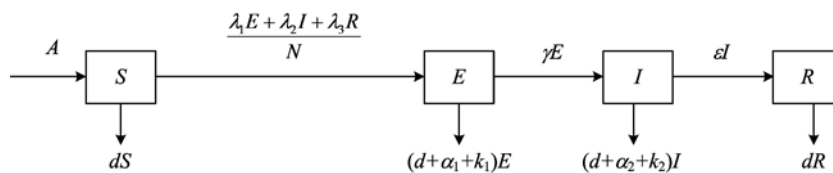


图 1 SEIR 流行病模型仓室结构

Fig. 1 Compartment structure of SEIR epidemic model

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{NA((\delta - d)\omega - \gamma(d + \epsilon))}{\left(\lambda_1\omega + \lambda_2\gamma + \lambda_3\frac{\epsilon\gamma}{d}\right)(A - dN) + dN((\delta - d)\omega - \gamma(d + \epsilon))}, \\ E &= \frac{\omega(A - dN)}{(\delta - d)\omega - \gamma(d + \epsilon)}, \\ I &= \frac{\gamma(A - dN)}{(\delta - d)\omega - \gamma(d + \epsilon)}, \\ R &= \frac{\frac{\epsilon\gamma}{d}(A - dN)}{(\delta - d)\omega - \gamma(d + \epsilon)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中,

$$\begin{aligned} \delta &= d + \alpha_1 + k_1 + \gamma, \\ \omega &= d + \alpha_2 + k_2 + \epsilon. \end{aligned}$$

并得到关于 N 的方程

$$F(N)(A - dN) = 0.$$

式中,

$$\begin{aligned} F(N) &= -Ad \left[\lambda_1\omega + \lambda_2\gamma + \lambda_3\frac{\epsilon\gamma}{d} \right] \left[\omega + \gamma + \frac{\epsilon\gamma}{d} \right] + \\ &\delta\omega dN \left[\lambda_1\omega + \lambda_2\gamma + \lambda_3\frac{\epsilon\gamma}{d} - ((\delta - d)\omega - \gamma(d + \epsilon)) \right]. \end{aligned}$$

系统 (1) 在区间 $(0, A/d)$ 总存在无病平衡点 $E_0(A/d, 0, 0, 0)$. 因为

$$\begin{aligned} F(0) &= -Ad \left[\lambda_1\omega + \lambda_2\gamma + \lambda_3\frac{\epsilon\gamma}{d} \right] \left[\omega + \gamma + \frac{\epsilon\gamma}{d} \right] < 0, \\ F(A/d) &= \delta\omega A(\delta\omega - d\omega - d\gamma) \cdot \\ &\left[\frac{\lambda_1\omega + \lambda_2\gamma + \lambda_3\frac{\epsilon\gamma}{d}}{\delta\omega} - 1 \right]. \end{aligned}$$

于是取基本再生数 $R_0 = \frac{\lambda_1\omega + \lambda_2\gamma + \lambda_3\frac{\epsilon\gamma}{d}}{\delta\omega}$. 当 $R_0 > 1$ 时, $F(A/d) > 0$, $F(0) < 0$. 又因为

$F'(N) = \delta\omega d((R_0 - 1)\delta\omega + d(\omega + \gamma)) \geq 0$, 所以 $F(N)$ 在区间 $(0, A/d)$ 上为单调递增函数, 故 $F(N) = 0$ 在区间 $(0, A/d)$ 上存在唯一的根 N^* , 即系统 (1) 存在唯一的地方病平衡点 $E^*(S^*, E^*, I^*, R^*)$, 这里 S^*, E^*, I^*, R^* 由系统 (2) 决定.

2 无病平衡点的全局稳定性

定理 1 当 $R_0 \leq 1$ 时, 无病平衡点 E_0 全局渐近稳定; 当 $R_0 > 1$ 时, 无病平衡点 E_0 不稳定, 并且除 S 轴外, 从 Γ 内充分靠近 E_0 点出发的解都远离 E_0 .

证明 取 Liapunov 函数

$$V = \frac{\lambda_1\omega + \lambda_2\gamma + \lambda_3\frac{\epsilon\gamma}{d}}{\delta\omega} E + \frac{\lambda_2 + \frac{\epsilon}{d}\lambda_3}{\omega} I + \frac{\lambda_3}{d} R.$$

它沿系统 (1) 解的导数是

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} \Big|_{(1)} &= \frac{\lambda_1\omega + \lambda_2\gamma + \lambda_3\frac{\epsilon\gamma}{d}}{\delta\omega} \cdot \\ &\left[\lambda_1\frac{SE}{N} + \lambda_2\frac{SI}{N} + \lambda_3\frac{SR}{N} - \delta E \right] + \\ &\frac{\lambda_2 + \frac{\epsilon}{d}\lambda_3}{\omega} (\gamma E - \omega I) + \frac{\lambda_3}{d} (\epsilon I - dR) = \\ &(\lambda_1 E + \lambda_2 I + \lambda_3 R) \left[R_0 \frac{S}{N} - 1 \right] \leq \\ &(\lambda_1 E + \lambda_2 I + \lambda_3 R) (R_0 - 1). \end{aligned}$$

当 $R_0 \leq 1$ 时, $V' \leq 0$ 且 $V' = 0$ 当且仅当 $E = I = R = 0$ 或 $R_0 = 1$. 所以 $\{(S, E, I, R) \in R^4_+ \mid V' = 0\}$ 的最大不变集 $M = \{E_0\}$. 根据 LaSalle 不变集原理^[12] 可知, 当 $R_0 \leq 1$ 时, 无病平衡点 E_0 全局渐近稳定; 当 $R_0 > 1$ 时, 则除 $E = I = R = 0$ 外, 当 S 充分靠近 A/d 时, 有 $V' > 0$. 故除 $E = I = R = 0$ 外, 从 Γ 内充分靠近 E_0 点出发的解都远离 E_0 . \square

3 地方病平衡点的局部稳定性

定理 2 如果 $R_0 > 1$, 则系统 (1) 的地方病平衡点 E^* 是局部渐近稳定的.

证明 系统 (1) 在 E^* 处的 Jacobian 矩阵为

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ 0 & \gamma & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & -d \end{pmatrix}.$$

其中,

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{N^* - S^*}{N^{*2}} (\lambda_1 E^* + \lambda_2 I^* + \lambda_3 R^*) - d, \\ a_2 &= -\frac{S^* (\lambda_1 N^* - (\lambda_1 E^* + \lambda_2 I^* + \lambda_3 R^*))}{N^{*2}}, \\ a_3 &= -\frac{S^* (\lambda_2 N^* - (\lambda_1 E^* + \lambda_2 I^* + \lambda_3 R^*))}{N^{*2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= -\frac{S^*(\lambda_3 N^* - (\lambda_1 E^* + \lambda_2 I^* + \lambda_3 R^*))}{N^{*2}}, \\ a_5 &= \frac{N^* - S^*}{N^{*2}}(\lambda_1 E^* + \lambda_2 I^* + \lambda_3 R^*), \\ a_6 &= \frac{S^*(\lambda_1 N^* - (\lambda_1 E^* + \lambda_2 I^* + \lambda_3 R^*))}{N^{*2}}, \\ a_7 &= \frac{S^*(\lambda_2 N^* - (\lambda_1 E^* + \lambda_2 I^* + \lambda_3 R^*))}{N^{*2}} - \delta, \\ a_8 &= \frac{S^*(\lambda_3 N^* - (\lambda_1 E^* + \lambda_2 I^* + \lambda_3 R^*))}{N^{*2}}. \end{aligned}$$

该矩阵的特征方程为

$$\det(\lambda A - J(E^*)) = 0.$$

其中, A 为四阶单位矩阵,

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{\delta E^* N^*}{\lambda_1 E^* + \lambda_2 I^* + \lambda_3 R^*}, \\ E^* &= \frac{\omega}{\gamma} I^*, \quad R^* = \frac{\varepsilon}{d} I^*. \end{aligned}$$

通过计算得

$$(\lambda + d)(\lambda^3 + b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3 - \varepsilon \gamma a_4) = 0.$$

式中,

$$\begin{aligned} b_1 &= \omega + d + \frac{\lambda_1 E^* + \lambda_2 I^* + \lambda_3 R^*}{N^*} + \\ &\quad \frac{(\lambda_2 d + \lambda_3 \varepsilon) \delta \gamma}{\lambda_1 d \omega + (\lambda_2 d + \lambda_3 \varepsilon) \gamma} > 0, \\ b_2 &= d \omega + \frac{(\lambda_2 d + \lambda_3 \varepsilon) \delta \gamma d}{\lambda_1 d \omega + (\lambda_2 d + \lambda_3 \varepsilon) \gamma} + \\ &\quad \delta \frac{N^* - S^*}{N^{*2}} (\lambda_1 E^* + \lambda_2 I^* + \lambda_3 R^*) + \\ &\quad \frac{\omega N^* + (d + \gamma) S^*}{N^{*2}} (\lambda_1 E^* + \lambda_2 I^* + \lambda_3 R^*) > 0, \\ b_3 &= \frac{S^* (\lambda_1 E^* + \lambda_2 I^* + \lambda_3 R^*) (\gamma d + \varepsilon \gamma + \omega d)}{N^{*2}} + \\ &\quad \omega d \frac{N^* - S^*}{N^{*2}} (\lambda_1 E^* + \lambda_2 I^* + \lambda_3 R^*) > 0. \end{aligned}$$

通过分析可知 $b_1 b_2 - (b_3 + \varepsilon \gamma a_4) > 0$. 根据 Hurwitz 判据可知, 系统(1)的地方病平衡点 E^* 是局部渐近稳定的. \square

4 地方病平衡点的全局稳定性

以下结论^[13]将用于地方病平衡点 E^* 全局渐近稳定性证明.

考虑以下系统

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (3)$$

和

$$\dot{y} = g(y) \quad (4)$$

式中, f, g 都是连续函数且满足局部 Lipschitz 条

件, 对任意 $t > 0$, 其解都存在. 若 $t \rightarrow \infty$ 时, 对任意 $x \in R^n$, 都有 $f(t, x) \rightarrow g(x)$, 则称系统(4)为渐近自治系统(3)的极限系统.

引理 1 设 P 是系统(4)的局部渐近稳定平衡点, ω 是系统(3)的有界解 $x(t)$ 的一个 ω 极限集. 如果 $y_0 \in \omega$ 且满足初始条件 $y(0) = y_0$ 的解 $y(t) \rightarrow P(t \rightarrow \infty)$, 则 $\omega = \{P\}$, 即 $x(t) \rightarrow P(t \rightarrow \infty)$.

推论 1 如果系统(3)的解是有界的且其极限系统(4)的平衡点 P 是全局渐近稳定的, 则系统(3)的任意解 $x(t)$ 满足 $x(t) \rightarrow P(t \rightarrow \infty)$.

令 $\tau = dt$, 系统(1)可以改成如下等价形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{d\tau} &= \frac{A}{d} - \beta_1 \frac{SE}{N} - \beta_2 \frac{SI}{N} - \beta_3 \frac{SR}{N} - S, \\ \frac{dE}{d\tau} &= \beta_1 \frac{SE}{N} + \beta_2 \frac{SI}{N} + \beta_3 \frac{SR}{N} - \delta E, \\ \frac{dI}{d\tau} &= \gamma_0 E - \omega I, \\ \frac{dR}{d\tau} &= \varepsilon_0 I - R \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中,

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\lambda_1}{d}, \beta_2 = \frac{\lambda_2}{d}, \beta_3 = \frac{\lambda_3}{d}, \\ \delta &= 1 + \gamma_0 + \alpha_{10} + k_{10}, \omega = 1 + \varepsilon_0 + \alpha_{\varepsilon_0} + k_{20}, \\ \gamma_0 &= \frac{\gamma}{d}, \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{d}, \alpha_{10} = \frac{\alpha_1}{d}, \\ \alpha_{\varepsilon_0} &= \frac{\alpha_{\varepsilon}}{d}, k_{10} = \frac{k_1}{d}, k_{20} = \frac{k_2}{d}. \end{aligned}$$

总人口方程为

$$\frac{dN}{d\tau} = \frac{A}{d} - N - (\alpha_{10} + k_{10})E - (\alpha_{\varepsilon_0} + k_{20})I.$$

由 $N = S + E + I + R$, 系统(5)的等价系统为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE}{d\tau} &= \left[\beta_1 \frac{E}{N} + \beta_2 \frac{I}{N} + \beta_3 \frac{R}{N} \right] \cdot \\ &\quad (N - E - I - R) - \delta E, \\ \frac{dI}{d\tau} &= \gamma_0 E - \omega I, \\ \frac{dR}{d\tau} &= \varepsilon_0 I - R, \\ \frac{dN}{d\tau} &= \frac{A}{d} - N - (\alpha_{10} + k_{10})E - (\alpha_{\varepsilon_0} + k_{20})I \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

则 $T = \{(E, I, R, N) \in R^4 \mid 0 \leq E + I + R \leq N \leq A/d\}$ 为系统(6)的一个正向最大不变集. 对于系统(6), 当 $\alpha_{10} = \alpha_{\varepsilon_0} = k_{10} = k_{20} = 0$ 时, 来证明地方病平衡点 E^* 的全局渐近稳定性. 由 $\frac{dN}{d\tau} = \frac{A}{d} - N$ 可知,

当 $\tau \rightarrow \infty$ 时, $N \rightarrow \frac{A}{d}$. 得到系统(6)的极限系统为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE}{d\tau} &= (\beta_1 E + \beta_2 I + \beta_3 R) \cdot \\ &\quad \frac{d}{A} \left[\frac{A}{d} - E - I - R \right] - \delta E, \\ \frac{dI}{d\tau} &= \gamma_0 E - \omega I, \\ \frac{dR}{d\tau} &= \varepsilon_0 I - R \end{aligned} \right\}$$

令

$$\begin{aligned} x &= \frac{A}{d} - E - I - R, \\ y &= E, \quad z = I, \end{aligned}$$

则上述极限系统等价于

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{A}{d} - x - \\ &\quad \left[\beta_3 \frac{A}{d} + (\beta_1 - \beta_3)y + (\beta_2 - \beta_3)z - \beta_3 x \right] \frac{d}{A} x, \\ \frac{dy}{d\tau} &= \left[\beta_3 \frac{A}{d} + (\beta_1 - \beta_3)y + (\beta_2 - \beta_3)z - \beta_3 x \right] \cdot \\ &\quad \frac{d}{A} x - \delta y, \\ \frac{dz}{d\tau} &= \gamma_0 y - \omega z \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

定理 3^[14-15] 考虑以下系统

$$\dot{x} = f(x), f \in C^1(R^n), x \in T \subset R^n \quad (8)$$

式中, T 为一开集. 若系统满足以下条件: ① 在 T 内存在一个紧吸引子集 $K \subset T$; ② 在 T 内存在唯一的平衡点 P 且是局部渐近稳定的; ③ 满足 Poincaré-Bendixson 性质; ④ 每一个周期轨道是轨道渐近稳定的. 则 P 在 T 内是全局渐近稳定的.

定理 4^[15] 系统(8)存在周期轨道 $P = \{P(t); 0 \leq t \leq \tau\}$ 且线性系统 $z'(t) = \frac{\partial f^{[2]}}{\partial t}(P(t))z(t)$ 是渐近稳定的, 其中, $\frac{\partial f^{[2]}}{\partial t}$ 是 f 的 Jacobian 矩阵 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 的第二加复合矩阵, 系统 $z'(t) = \frac{\partial f^{[2]}}{\partial t}(P(t))z(t)$ 称为系统(8)关于 $P(t)$ 的二阶复合系统.

引理 2 系统(7)的任意周期解, 若存在, 则是轨道渐近稳定的.

证明 设 $(x(t), y(t), z(t))$ 是系统(7)的具有最小正周期 τ 的周期解且满足 $(x(0), y(0), z(0))$

在 T 内部, 周期轨道 $P = \{P(t); 0 \leq t \leq \tau\}$. 我们得到微分方程 $y' = J(P)y$ 在周期解内的二阶复合系统 $x' = J^{[2]}(P)x$ 是如下周期线性系统

$$\left. \begin{aligned} X' &= a_{11} X + (\beta_2 - \beta_3) \frac{d}{A} x (Y + Z), \\ Y' &= \gamma_0 X + a_{22} Y - (\beta_1 - \beta_3) \frac{d}{A} x Z, \\ Z' &= a_{32} Y - \left[\delta + \omega - (\beta_1 - \beta_3) \frac{d}{A} x \right] Z \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中,

$$\begin{aligned} a_{11} &= -1 + \beta_3 \frac{d}{A} x - \\ &\quad \left[\beta_3 \frac{d}{A} + (\beta_1 - \beta_3)y + (\beta_2 - \beta_3)z - \beta_3 x \right] \frac{d}{A} - \delta, \\ a_{22} &= -1 - \omega + \beta_3 \frac{d}{A} x - \\ &\quad \left[\beta_3 \frac{d}{A} + (\beta_1 - \beta_3)y + (\beta_2 - \beta_3)z - \beta_3 x \right] \frac{d}{A}, \\ a_{32} &= -2\beta_3 \frac{d}{A} x + \\ &\quad \left[\beta_3 \frac{d}{A} + (\beta_1 - \beta_3)y + (\beta_2 - \beta_3)z \right] \frac{d}{A}, \\ J(P) &= \\ &\quad \begin{pmatrix} a_{11} + \delta & -(\beta_1 - \beta_3) \frac{d}{A} x & -(\beta_2 - \beta_3) \frac{d}{A} x \\ a_{32} & (\beta_1 - \beta_3) \frac{d}{A} x - \delta & (\beta_2 - \beta_3) \frac{d}{A} x \\ 0 & \delta & -\omega \end{pmatrix}, \\ J^{[2]}(P) &= \\ &\quad \begin{pmatrix} a_{11} & (\beta_2 - \beta_3) \frac{d}{A} x & (\beta_2 - \beta_3) \frac{d}{A} x \\ \gamma_0 & a_{22} & -(\beta_1 - \beta_3) \frac{d}{A} x \\ 0 & a_{32} & -\delta - \omega + (\beta_1 - \beta_3) \frac{d}{A} x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

设 $(X(t), Y(t), Z(t))$ 是系统(9)的一个解. 考虑 Liapunov 函数

$$V(X, Y, Z, x, y, z) = \sup \left\{ |X|, \frac{y}{z} (|Y| + |Z|) \right\}$$

由定理 3 的条件①知, 存在常数 $\eta > 0$ 使得

$$\begin{aligned} V(X, Y, Z, x, y, z) &\geq \eta | (X, Y, Z) |, \\ \forall (X, Y, Z) \in R^3, (x, y, z) \in P. \end{aligned}$$

通过计算 V 的右导数, 得到以下微分不等式

$$D_+ |X(t)| \leq a_{11} |X(t)| +$$

$$\frac{(\beta_2 - \beta_3) \frac{d}{A} xz}{y} \frac{y}{z} (|Y(t)| + |Z(t)|) \quad (10)$$

$$D_+ |Y(t)| \leq \gamma_0 |X(t)| + a_{22} |Y(t)| - (\beta_1 - \beta_3) \frac{d}{A} x |Z(t)| \quad (11)$$

$$D_+ |Z(t)| \leq a_{32} |Y(t)| - \left[\delta + \omega - \left((\beta_1 - \beta_3) \frac{d}{A} x \right) \right] |Z(t)| \quad (12)$$

由式(11)和式(12)得

$$D_+ \frac{y}{z} (|Y(t)| + |Z(t)|) = \frac{yY_0}{z} |X(t)| + \left[\frac{y'}{y} - \frac{z'}{z} - \omega - 1 \right] \frac{y}{z} (|Y(t)| + |Z(t)|) \quad (13)$$

由式(10)~(13)得到

$$D_+ V(t) \leq \sup\{g_1, g_2\} V(t) \quad (14)$$

其中,

$$g_1 = -1 - \delta - \left(\beta_3 \frac{d}{A} - \beta_3 \frac{d}{A} x + (\beta_1 - \beta_3) y + (\beta_2 - \beta_3) z - \beta_3 x \right) \frac{d}{A} + \frac{(\beta_2 - \beta_3) \frac{d}{A} xz}{y} \quad (15)$$

$$g_2 = \frac{yY_0}{z} + \left[\frac{y'}{y} - \frac{z'}{z} - \omega - 1 \right] \quad (16)$$

把系统(7)的后两个方程改为

$$\frac{(\beta_2 - \beta_3) \frac{d}{A} xz}{y} = \frac{y'}{y} + \delta - \beta_3 \frac{d}{A} \frac{x}{y} - (\beta_1 - \beta_3) \frac{d}{A} x + \beta_3 \frac{d}{A} \frac{x^2}{y} \quad (17)$$

$$\frac{yY_0}{z} = \omega + \frac{z'}{z} \quad (18)$$

把式(17)代入式(15)和式(18)代入式(16)得

$$g_1 = \frac{y'}{y} - 1 - \beta_3 \frac{d}{A} \left[\frac{d}{A} - x - y - z \right] - \beta_3 \frac{d}{A} x(1 - x - y) - \beta_1 \frac{d}{A} y - \beta_2 \frac{d}{A} z \quad (19)$$

$$g_2 = \frac{y'}{y} - 1 \quad (20)$$

所以 $\sup\{g_1(t), g_2(t)\} \leq \frac{y'}{y} - 1$ 且

$$\int_0^\tau \sup\{g_1(t), g_2(t)\} dt \leq \ln y(t) \Big|_0^\tau - \tau = -\tau,$$

从上式及式(14)得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$, 故由

$$V(X, Y, Z, x, y, z) \geq \eta | (X, Y, Z) |$$

可知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $(X(t), Y(t), Z(t)) \rightarrow 0$, 即二阶复合系统(9)是渐近稳定的, 且根据定理 3 知系统(7)周期解 $(x(t), y(t), z(t))$ 是轨道渐近稳定的. 因此, 根据推论 1 可知 $(E(t), I(t), R(t))$ 是轨道渐近稳定的, 这样就验证了定理 3 的条件④满足. \square

引理 3 当 $R_0 > 1$ 时, 系统(7)是一致持续的.

证明 若定理 3 的条件都成立时, 则其结论显然成立.

首先, 根据定理 3 的条件①可知, 系统(7)是一致持续的. 事实上, 设 $G = \{P_0\}$, 由定理 3 可知, 当 $R_0 > 1$ 时, 稳定集 G^s 仅包含在 S 轴上, 因此它是 Γ 的边界, 故稳定集 G^s 在 T 中是孤立的. 则当 $R_0 > 1$ 时, 系统(7)满足定理 2^[17] 的条件, 即①最大不变紧集 G 在 T 的边界是孤立的; ② G 的稳定集 $G^s \subseteq \partial T$ (T 的边界). 因此, 若 $R_0 > 1$, 则系统(7)是一致持续的. \square

注 系统的一致持续性等价于定理 3 的条件③.

引理 4 当 $R_0 > 1$ 且 $\alpha_{10} = \alpha_{20} = k_{10} = k_{20} = 0$ 时, 系统(5)是四维竞争系统.

记 T 的内部为

$$T^0 = \{(E, I, R, N) \in R_+^4 \mid 0 < E + I + R \leq N < A/d\}.$$

证明 令 $x_1 = S, x_2 = E, x_3 = I, x_4 = R$.

可以把系统(5)改成如下等价形式

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= \frac{A}{d} - \beta_1 S \frac{d}{A} \left[\frac{A}{d} - x_1 - x_3 - x_4 \right] - \beta_2 S \frac{d}{A} \left[\frac{A}{d} - x_1 - x_2 - x_4 \right] - \beta_3 S \frac{d}{A} \left[\frac{A}{d} - x_1 - x_2 - x_3 \right] - x_1, \\ x_2' &= \beta_1 S \frac{d}{A} x_2 + \beta_2 S \frac{d}{A} x_3 + \beta_3 S \frac{d}{A} x_4 - \delta x_2, \\ x_3' &= \gamma_0 x_2 - \omega x_3, \\ x_4' &= \epsilon_0 x_3 - x_4. \end{aligned} \right\}$$

而且上述系统还可以写成如下形式

$$x' = (A(t) - B)x + C(t),$$

其中, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4, B$ 为 4 阶单位矩阵, $C(t)$ 是一个向量函数, 在这里无需要知道其具体形式. 且矩阵

$$A(t) = \begin{pmatrix} (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)S \frac{d}{A} & (\beta_2 + \beta_3)S \frac{d}{A} & (\beta_1 + \beta_3)S \frac{d}{A} & (\beta_1 + \beta_2)S \frac{d}{A} \\ 0 & \beta_1 S \frac{d}{A} - \gamma_0 & \beta_2 S \frac{d}{A} & \beta_3 S \frac{d}{A} \\ 0 & \gamma_0 & -\epsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 & 0 \end{pmatrix},$$

该矩阵的非对角线元素非负,按照文献[18-19]类似的方法可以断定上述系统是拟单调的,故系统(5)关于定义在 $K = \{(S, E, I, R) \in R^4 \mid S \geq 0, E \geq 0, I \geq 0, R \geq 0\}$ 内的偏序是竞争的. 又 T 为凸集,系统(5)在 T 内满足 Poincaré-Bendixson 性质. \square

定理 5 如果 $R_0 > 1$, 则系统(1)的地方病平衡点 E^* 在 $\alpha_1 = \alpha_2 = k_1 = k_2 = 0$ 时是全局渐近稳定的.

5 数值模拟

当 $R_0 = 0.55 < 1$ 时, 选取
 $A = 0.6, d = 0.05, \epsilon = 0.07, \gamma = 0.15,$
 $\alpha_1 = 0.08, \alpha_2 = 0.1, k_1 = 0.04, k_2 = 0.08,$

$\lambda_1 = 0.08, \lambda_2 = 0.15, \lambda_3 = 0.03.$
 并取 5 组初值 $(1.5, 2.5, 3, 4.6), (6, 0.4, 3, 2.5),$
 $(6.5, 1.8, 0.5, 2), (3.8, 2.6, 2.1, 3.3), (5, 1.7,$
 $2.3, 2)$ 进行数值模拟, 计算机的模拟结果如图 2 所示. 从图 2 可以看到, 对于选定的初值, $S = S(t),$
 $E = E(t), I = I(t)$ 和 $R = R(t)$ 都趋于无病平衡点 E_0 , 这与定理 1 是吻合的, 即无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的.

当 $R_0 = 1.73 > 1$ 时, 选取
 $A = 0.6, d = 0.05, \epsilon = 0.07, \gamma = 0.15,$
 $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, k_1 = 0, k_2 = 0,$
 $\lambda_1 = 0.07, \lambda_2 = 0.15, \lambda_3 = 0.05.$

并选取上述 5 组初值进行数值模拟, 计算机的模拟

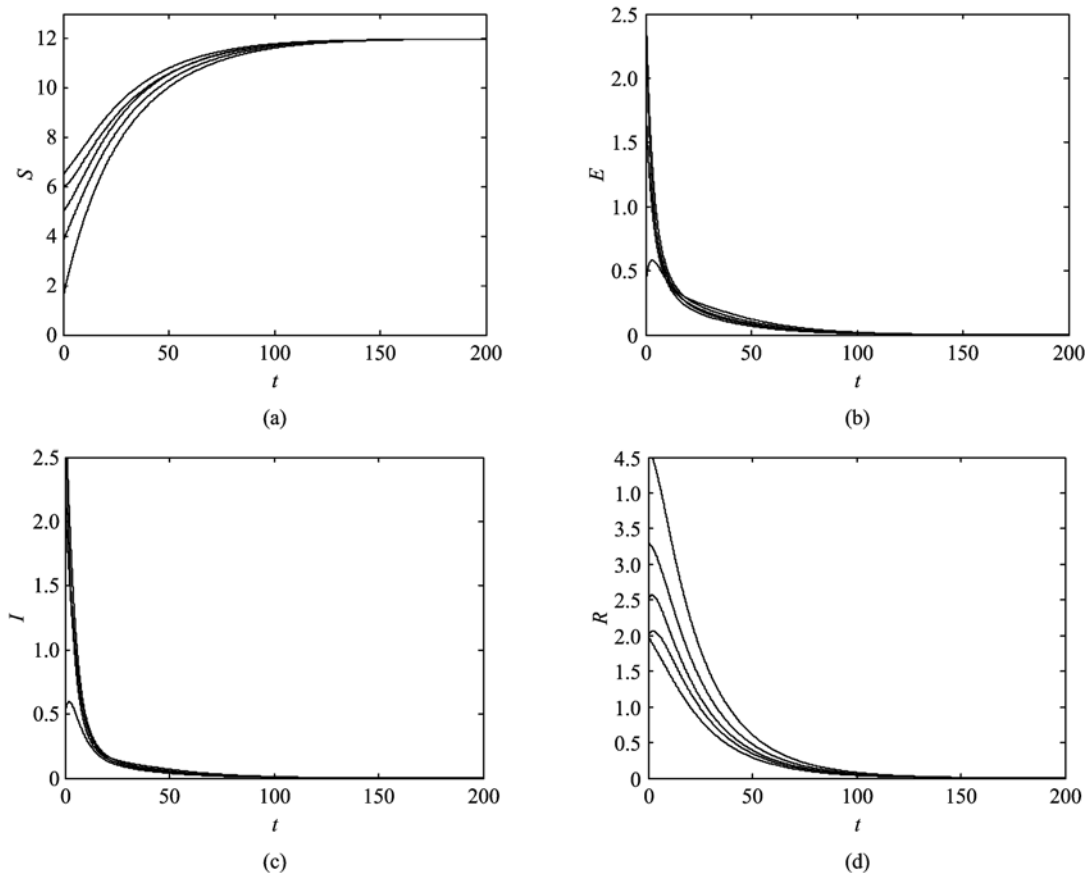


图 2 $R_0 = 0.55$ 时, S, E, I 和 R 随时间 t 的变化曲线

Fig. 2 Variational curves of S, E, I and R with t when $R_0 = 0.55$

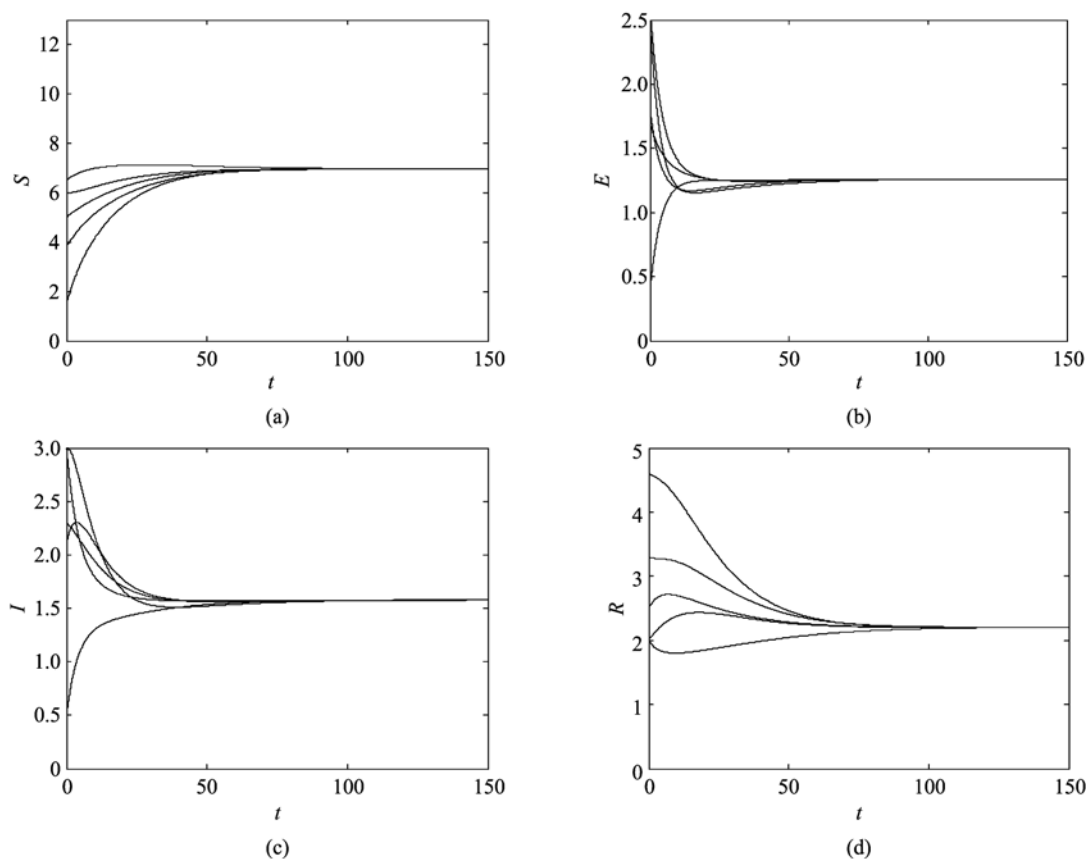


图 3 $R_0 = 1.73$ 时, S, E, I 和 R 随时间 t 的变化曲线

Fig. 3 Variational curves of S, E, I and R with t when $R_0 = 1.73$

结果如图 3 所示. 从图 3 可以看到, 对于选定的初值, $S = S(t), E = E(t), I = I(t)$ 和 $R = R(t)$ 都趋于地方病平衡点 E^* , 这与定理 5 是吻合的, 即地方病平衡点 E^* 是全局渐近稳定的.

6 结论

本文建立和研究了一类潜伏类和移出类均具有传染力的 SEIR 流行病模型, 得到了决定疾病绝灭与否的阈值: 基本再生数 R_0 . 当 $R_0 \leq 1$ 时, 仅存在无病平衡点 E_0 且是全局渐近稳定的, 疾病灭绝; 当 $R_0 > 1$ 时, 存在唯一的地方病平衡点 E^* 和无病平衡点 E_0 , 其中无病平衡点 E_0 不稳定而地方病平衡点 E^* 是局部渐近稳定的, 而当 $\alpha_1 = \alpha_2 = k_1 = k_2 = 0$ 时, 证明了地方病平衡点 E^* 的全局渐近稳定性, 疾病持续. 从基本再生数 R_0 的表达式容易知道, 潜伏类和移出类的传染力, 即系统(1)中的 λ_1 和 λ_3 越小, 越有利于疾病的控制与消除. 因此, 对于潜伏类和移出类具有传染力的疾病, 不但要控制染病期的病人而且还要控制潜伏期的病人和移出者中具有传染力的

人群, 这样可更有效地控制和消除疾病的蔓延. 若不考虑潜伏类和移出类的传染力, 此时的基本再生数为 $\bar{R}_0 = \frac{\lambda_2 \gamma}{\delta \omega}$. 显然, $\bar{R}_0 < R_0$, 也就是说, 若考虑潜伏类和移出类具有传染力的情形, 模型的基本再生数变大, 疾病容易形成地方病, 不利于传染病的控制和消除, 这与现实生活中的实际基本情况是一致的. 本文通过对潜伏类和移出类均具有传染力的 SEIR 传染病模型的渐近性研究, 丰富了传染病动力学的工作, 并为该类传染病的防治决策提供了理论基础和数量依据. 本文在传染病模型中考虑的是连续方式的控制策略, 对其他控制方式如脉冲方式等问题有待进一步研究.

参考文献 (References)

- [1] Li M Y, Muldowney J S. Global stability for SEIR model in epidemiology [J]. *Mathematics Biosciences*, 1995, 125(2): 155-164.
- [2] Li M Y, Muldowney J S. A geometric approach to the global stability problems [J]. *SIAM Journal on*

- Mathematical Analysis, 1996, 27(4): 1 070-1 083.
- [3] Li M Y, Graef J R, Wang L C, et al. Global dynamics of an SEIR model with varying total population size [J]. Mathematics Biosciences, 1999, 160 (2): 191-213.
- [4] Yuan Sanling, Han Litao, Ma Zhien. A kind of epidemic model having infectious force in both latent period and infected period [J]. Journal of Biomathematics, 2002, 169(4): 392-398.
原三领, 韩丽涛, 马知恩. 一类潜伏期和染病期均传染的流行病模型[J]. 生物数学学报, 2002, 169(4): 392-398.
- [5] Xu Wenxiong, Zhang Tailei. A kind of nonlinear SEIRS epidemic spread mathematic model[J]. Journal of Northwest University (Natural Science Edition), 2004, 34(6): 627-630.
徐文雄, 张太雷. 一类非线性 SEIRS 流行病传播数学模型[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2004, 34(6): 627-630.
- [6] Chen J J, Liu X G. Stability of an SEIS epidemic model with constant recruitment and a varying total population size[J]. Math J Chinese Univ Ser B, 2006, 21(1): 1-8.
- [7] Mukhopadhyay B, Bhattacharyya R. Analysis of a spatially extended nonlinear SEIS epidemic model with distinct incidence for exposed and infectives [J]. Nonlinear Analysis: Real World Application, 2008, 9(2): 585-589.
- [8] Li G, Wang W, Jin Z. Global stability of an SEIR epidemic model with constant immigration[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 30(4): 1 012-1 019.
- [9] Li G, Jin Z. Global stability of a SEIR epidemic model with infectious force in latent, infected and immune period[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 25(5): 1 177-1 184.
- [10] Ma Yanli, Xu Wenxiong, Zhang Zhonghua. Stability analysis of SEIR model with general contact rate[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2015, 45(1): 737-744.
马艳丽, 徐文雄, 张仲华. 具有一般形式接触率的 SEIR 模型的稳定性分析[J]. 中国科学技术大学学报, 2015, 45(1): 737-744.
- [11] Xu R, Ma Z E. Global stability of a delayed SEIRS epidemic model with saturation incidence rate [J]. Nonlinear Dynamics, 2010, 61(1-2): 229-239.
- [12] Hale J K. Ordinary Differential Equations[M]. New York: Wiley-Interscience, 1969: 296-297.
- [13] Thieme H R. Convergence results and a Poincaré-Bendixson trichotomy for asymptotically autonomous differential equations[J]. J Math Biol, 1992, 30(2): 755-763.
- [14] Li M Y, Muldowney J S. Global stability for the SEIR model in epidemiology[J]. Mathematics Biosciences, 1995, 125(2): 155-164.
- [15] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性方法与稳定性方法[M]. 北京: 科教出版社, 2001: 147-150.
- [16] Muldowney J S. Compound matrices and ordinary differential equations[J]. Rocky Mt J Math, 1990, 20(4): 857-872.
- [17] Hofbauer J, So J W H. Uniform persistence and repellers for maps[J]. Proc Amer Math Soc, 1989, 107: 1 137-1 142.
- [18] Smith H L. Systems of ordinary differential equations which generate an order preserving flow[J]. SIAM Rev, 1988, 30(1): 87-113.
- [19] Herzog G, Redheffer R. Nonautonomous SEIRS and Thron models for epidemiology and cell biology[J]. Nonlinear Anal, 2004, 5(1): 33-44.