

6 自由度绳索牵引并联机器人的 悬链线建模与动力学分析

颜玉娇,尚伟伟

(中国科学技术大自动化系,安徽合肥 230027)

摘要:针对6自由度大跨度绳索牵引并联机器人存在绳索悬链线效应的问题,分别建立了绳索的直线模型和绳索的悬链线模型,在此基础上推导了并联机器人的动力学模型,并对二者进行分析和比较.在绳索牵引并联机器人逆动力学的求解过程中,采用带约束的非线性优化方法作为求解工具来计算满足绳索单向力约束的绳索张力.仿真结果表明,考虑绳索的悬链线模型时,并联机器人逆动力学解得到的绳索末端张力与绳索的线性模型相比有很大的变化,故绳索悬链线效应不可忽略,动力学分析中必须加入绳索的悬链线模型.

关键词:绳索牵引并联机器人;动力学;悬链线;带约束的非线性优化方法

中图分类号: TP242 **文献标识码:** A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2015.07.002

引用格式: YAN Yujiao, SHANG Weiwei. Catenary model and dynamic analysis of a 6-DOF cable-driven parallel robot[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2015,45(7): 546-564.

颜玉娇,尚伟伟. 6自由度绳索牵引并联机器人的悬链线建模与动力学分析[J]. 中国科学技术大学学报,2015,45(7): 546-564.

Catenary model and dynamic analysis of a 6-DOF cable-driven parallel robot

YAN Yujiao, SHANG Weiwei

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China)

Abstract: For the catenary effect on the large-scale of 6-DOF cable-driven parallel robot, the straight-line model and the catenary model of the cables were established, respectively, on the basis of which, the dynamic model of the cable-driven parallel robot was derived and the models were compared at the same time. In order to solve the inverse dynamics of the cable-driven parallel robot, a nonlinear optimization method with constraints was chosen to obtain the cable tension that satisfies the force constraints. Simulation experiment demonstrated that when considering the catenary model, the inverse dynamical solution differs noticeably between the straight line model and the catenary model of the parallel robot. Thus the catenary effect cannot be ignored and the catenary model should be considered in the dynamic analysis.

Key words: cable-driven parallel robot; dynamic; catenary; nonlinear optimization with constraints

收稿日期: 2015-03-05; **修回日期:** 2015-04-16

基金项目: 国家自然科学基金(51275500),机械系统与振动国家重点实验室课题(MSV201502),中国科大-国购机器人研究中心项目,中国科学院青年创新促进会项目资助.

作者简介: 颜玉娇,女,1990年生,硕士生.研究方向:并联机器人. E-mail: yan0069@mail.ustc.edu.cn

通讯作者: 尚伟伟,男,博士/副教授. E-mail: wwshang@ustc.edu.cn

0 引言

绳索牵引并联机器人(cable-driven parallel robots)是 20 世纪 80 年代发展起来的一种新型并联机器人,它采用绳索代替刚性连杆将末端执行器与基座连接起来.由于采用绳索代替刚性连杆,绳索牵引并联机器人具有更大的工作空间和更高的负载质量比,同时还降低了制造、维修成本并且易于模块化.这些优点使得绳索牵引并联机器人在许多领域得到了应用,如用于天文观测的 500m 口径球面射电望远镜(five-hundred-meter aperture spherical telescope, FAST)^[1],用于快速抓取和摆放的猎鹰(FALCON)并联机器人^[2],以及用于低速风洞实验的并联机器人^[3].绳索牵引并联机器人的潜在优势和应用前景使得相关研究成为机器人领域的一个热点.

绳索牵引并联机器人有多种分类方式.根据绳索数目 m 和末端执行器自由度 n 之间的关系,绳索牵引并联机器人可分为欠约束($m < n + 1$),完全约束($m = n + 1$)和冗余约束($m > n + 1$)三种^[4].机器人的动力学是控制系统设计的基础,其准确性直接影响系统的控制性能,因而建立准确的动力学模型尤为重要.尤其对于欠约束绳索牵引并联机器人,由于其可能存在不可控的扰动,末端执行器极易出现摇摆,因而必须对绳索的张力进行控制.已有很多文献对绳索牵引并联机器人的动力学进行了分析.张立勋等对绳索牵引并联康复机器人的动力学进行了研究^[5].刘欣等研究了 8 根绳索 6 自由度的冗余约束并联机器人动力学模型^[6].訾斌等针对基于绳索的完全约束混合驱动并联机器人进行集成机构设计和控制^[7].现有的研究工作中,大多将绳索简单的处理成理想的索杆单元.部分文献考虑了绳索的各种特性来建立其动力学模型,如訾斌等考虑绳索的垂度影响,用抛物线模型来近似绳索的模型从而建立绳索支撑系统的动力学模型^[8].刘志华等针对柔性绳索容易引起系统振动的特点,对 6 自由度绳索并联机构的振动特性进行分析^[9].杜敬利等针对绳索长度的时变特点,建立了考虑绳索变质量时的并联机器人动力学模型^[10].Mohammad 等则针对柔性绳索的弹性建立了完全约束绳索牵引并联机器人的动力学模型^[11].目前,对于绳索牵引并联机器人的动力学的研究仍不够成熟,要建立一个囊括所有问题的动力学模型显然是极其复杂的,且难以求解.对

于不同的绳索牵引并联机器人,当忽略对整个系统影响较小的因素,即可建立满足系统精度要求的绳索牵引并联机器人动力学模型.对于大跨度绳索牵引并联机器人,由于绳索的跨度巨大且定位精度要求较高,力学分析时认为需要考虑绳索垂度的影响.当系统运动缓慢,可忽略绳索的动态特性,基于绳索的静力学模型进行控制^[12].当前,研究大跨度绳索牵引并联机器人绳索垂度的工作较少,已有文献只简单的给出了绳索的抛物线或悬链线模型,以及在该绳索模型下的绳索牵引并联机器人的末端执行器的作用力,并未深入研究绳索的直线模型和绳索悬链线模型对并联机器人动力学模型的影响.

本文针对 6 自由度大跨度绳索牵引并联机器人,采用悬链线模型来分析绳索的力学特性,通过拉格朗日方程建立其动力学模型,通过仿真实验来验证动力学模型的正确性.文献[12]采用具有二次收敛性的 Newton-Raphson 迭代法来获得给定索长所对应的参数,进而得到绳索的水平张力及竖直方向的张力.由于悬链线模型的绳长与绳索端部的作用力有关,且在仿真实验过程中,不能获取绳索长度,因而本文首先建立绳索的悬链线模型,在求得绳索牵引并联机器人动力学方程的基础上,提出用 fmincon 优化方法来求解绳索的张力. Newton-Raphson 迭代法虽然具有较高的迭代性,但只有迭代的初值充分接近真解,才能保证迭代序列的正确性,本文将考虑绳索的直线模型获得的绳索牵引并联机器人的逆动力学解作为 fmincon 优化算法的初值,从而使得所得的结果能够充分的接近真值.仿真实验的结果表明,当绳索跨度较大时,由于绳索的自重相对于绳索的张力不可忽视,此时绳索将产生较为明显的下垂,使得绳索牵引并联机器人的动力学结果有显著变化,必须考虑绳索的悬链线模型而不能将绳索视为理想的索杆单元.

1 运动学分析

本文所研究的 6 自由度绳索牵引并联机器人如图 1 所示.图 1 中,绳索的一端 $A_i B_i (i=1, 2, \dots, 6)$ 与一端 A_i 静平台连接,另一端 B_i 与动平台相连,动平台为一圆台.绳索的牵引点 A_i 均匀分布在同一个圆周上构成完全对称的结构.绳索的连接点 $B_i (i=1, 3, 5)$ 分布在动平台的底圆上, $B_i (i=2, 4, 6)$ 分布在动平台的顶圆上.为了描述动平台的位姿,在牵引点所在圆的圆心下方建立全局坐标系 OXYZ 以及

固连于动平台的局部坐标系 $oxyz$. 局部坐标系在全局坐标系中的位置矢量记为 $\mathbf{P} = [x, y, z]^T$. 动平台在全局坐标系中的姿态用绕局部坐标系的 RPY(横滚(roll)、俯仰(pitch)和偏转(yaw))旋转来表示, 如图 2 所示. 动平台绕局部坐标系 z, y, x 轴的旋转角分别为 γ, β, α . 局部坐标系 $oxyz$ 到全局坐标系 OXYZ 的旋转矩阵如下:

$$\mathbf{R} = \text{rot}(z, \gamma) \text{rot}(y, \beta) \text{rot}(x, \alpha) = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & c\gamma s\alpha s\beta - c\alpha s\gamma & s\alpha s\gamma + c\alpha c\gamma s\beta \\ c\beta s\gamma & c\alpha c\gamma + s\alpha s\beta s\gamma & c\alpha s\beta s\gamma - c\gamma s\alpha \\ -s\beta & c\beta s\alpha & c\alpha c\beta \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中, c 表示余弦符号 \cos , s 表示正弦符号 \sin .

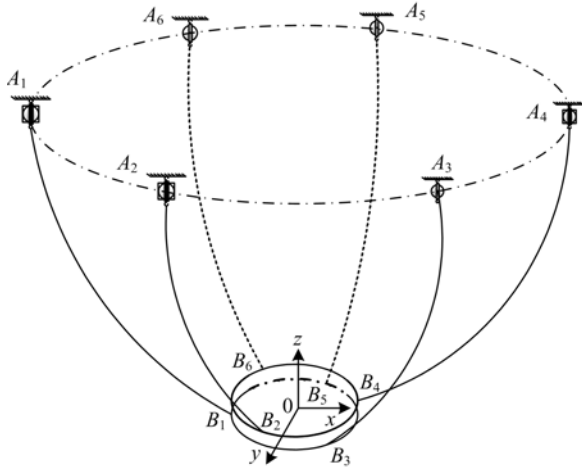


图 1 6 自由度绳索牵引并联机器人的结构简图
Fig. 1 The structure diagram of a 6-DOF cable-driven robot

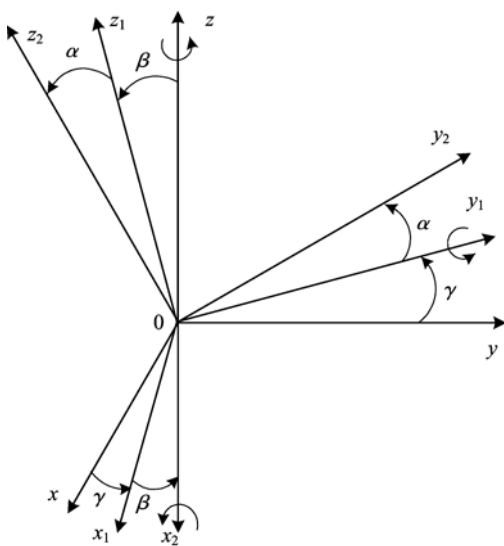


图 2 旋转变换
Fig. 2 Rotate transformation

绳索连接点 B_i 在局部坐标系中的坐标为 b_i , 则其在全局坐标系中的坐标为:

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{R}b_i + \mathbf{P} \quad (2)$$

动平台的位姿为 $\mathbf{X} = [x \ y \ z \ \alpha \ \beta \ \gamma]^T$, 动平台的运动包括与动平台固连的局部坐标系沿全局坐标系坐标轴的平动以及动平台绕自身坐标系的转动. 由于动平台绕固连于其本身的局部坐标系原点旋转, 因而动平台的旋转运动不会影响其位置. 此时动平台的平动速度为:

$$\mathbf{v} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}] \quad (3)$$

刚体的角速度描述了刚体的姿态变化, 只有在定轴转动的情况下角速度才有角坐标对时间导数的概念^[13]. 此时, 动平台的转动速度在全局坐标系中可表示为:

$$\mathbf{w} = \mathbf{E}_i \dot{q}_i = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & -s\gamma & 0 \\ c\beta s\gamma & c\gamma & 0 \\ -s\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

1.1 绳索的直线模型

假设绳索为理想的轻质索杆单元. 如图 3 所示, 绳索为一直线, 绳索长为 L , 绳索两端的水平距离为 l , 垂直距离为 h , 绳索端点的张力大小为 t , 张力的水平分量为 H , 张力的竖直分量为 V . 此时绳索满足如下约束关系:

$$L^2 = h^2 + l^2, \quad t^2 = V^2 + H^2$$

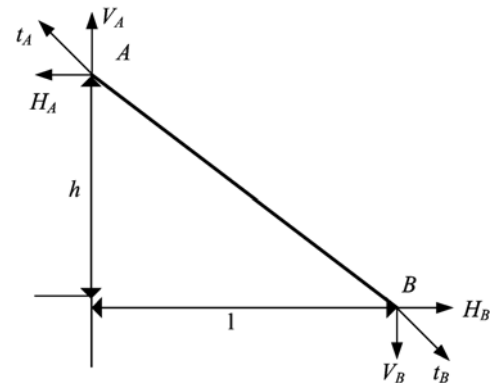


图 3 绳索的直线模型
Fig. 3 Straight line model of cable

以并联机器人的其中一根绳索为研究对象, 分析理想绳索矢量与动平台位置矢量之间的关系. 如图 4 所示, 可以看出绳长矢量满足:

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_{A_i} - \mathbf{r}_{B_i} = \mathbf{A}_i - \mathbf{R}b_i - \mathbf{P} \quad (5)$$

因而绳索的长度为:

$$l_i = \sqrt{(\mathbf{A}_i - \mathbf{R}b_i - \mathbf{P})^T (\mathbf{A}_i - \mathbf{R}b_i - \mathbf{P})}$$

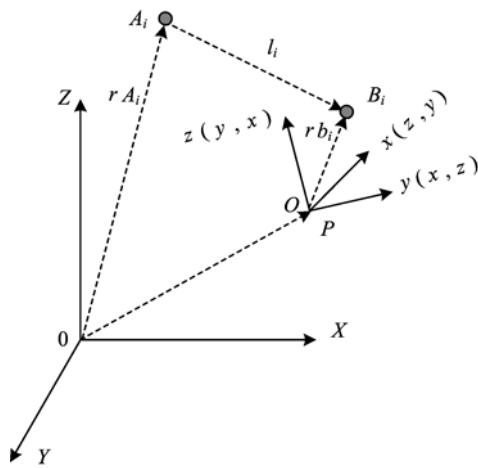


图 4 第 i 根绳索的矢量分析
Fig. 4 Vector analysis of cable

由于理想绳索为直线模型,故绳索的张力大小在绳索各点处处相等,张力方向与绳索方向一致.绳索方向的单位矢量为:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{l}_i / l_i \quad (6)$$

索长变化速度 $\dot{\mathbf{l}} = [\dot{l}_1 \ \dot{l}_2 \ \dot{l}_3 \ \dot{l}_4 \ \dot{l}_5 \ \dot{l}_6]^T$ 与动平台运动速度 $\dot{\mathbf{r}} = [\mathbf{v} \ \mathbf{w}]$ 之间的关系如下:

$$\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{J}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (7)$$

式中, \mathbf{J}_1 为 6×6 维的雅克比矩阵,其定义如下:

$$\mathbf{J}_1 = - \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_6 \\ (\mathbf{Rb}_1) \times \mathbf{u}_1 & (\mathbf{Rb}_2) \times \mathbf{u}_2 & \cdots & (\mathbf{Rb}_3) \times \mathbf{u}_6 \end{bmatrix}^T \quad (8)$$

动平台的广义速度为系统广义坐标的导数 $\dot{\mathbf{X}} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \dot{\gamma}]^T$. 系统广义速度和动平台的运动速度有如下关系:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_1 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \quad (9)$$

式中, \mathbf{I} 为 3 阶单位矩阵. 索长变化速度与系统广义速度之间的关系如下:

$$\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{J}_1 \mathbf{E} \dot{\mathbf{X}}$$

1.2 绳索的悬链线模型

对于大跨度绳索牵引并联机器人,当绳索的自重与绳索的张力相比不可忽视时,绳索将在其自重的影响下产生明显的下垂^[14].

为了对绳索进行受力分析,我们建立绳索平面坐标系 $ox'z'$. 绳索受到重力的作用,单位长度绳索的重量为 q , 如图 5 所示. 如图 6 取绳索的微元段 ds 进行受力分析, 如图 6 所示.

绳索在力的作用下保持平衡,分别建立 x 、 z 方向的力平衡方程:

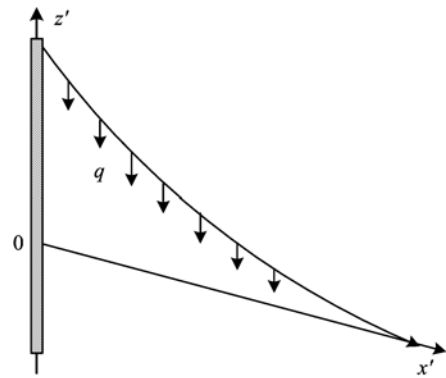


图 5 绳索的受力分析
Fig. 5 Force analysis of cable

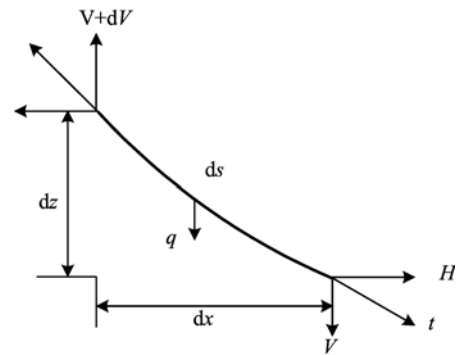


图 6 绳索上的微元段
Fig. 6 Infinitesimal section of cable

$$\left. \begin{aligned} dH = d\left(t \frac{dx}{ds}\right) &= 0 \\ dV = d\left(t \frac{dz}{ds}\right) &= q ds \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中, t 为绳索张力, H 和 V 分别为绳索张力的水平分量和垂直分量. 当绳索长度固定时,水平分量 H 在绳索上的各点处处相等. 由(10)式 $dH = d\left(t \frac{dx}{ds}\right) = 0$,

$$\text{则 } t \frac{dz}{ds} = H, d\left(t \frac{dz}{ds}\right) = d\left(t \frac{dz}{dx} \frac{dx}{ds}\right) = Hd\left(\frac{dz}{dx}\right) = q ds,$$

故 $d\left(\frac{dz}{dx}\right)/dx = q \frac{ds}{dx}$, 即 $H\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = q \frac{ds}{dx}$. 因此绳索的悬链线微分方程为:

$$H\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = q \frac{ds}{dx} \quad (11)$$

由于绳索的微元段满足如下的几何约束:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dz)^2 \quad (12)$$

解该微分方程得到绳索的悬链线方程为:

$$z = \frac{H}{q} \cosh\left(\frac{q}{H}x + c_2\right) + c_1 \quad (13)$$

将绳索边界条件 $z|_{x=0} = h, z|_{x=l} = 0$ 代入式(13), 求

解出上式中的参数 c_1 和 c_2 分别为:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= h - \frac{H}{q} \cosh(c_2) \\ c_2 &= -\operatorname{arcsinh}\left(\frac{qh}{2H} \frac{1}{\sinh\left(\frac{qh}{2H}\right)}\right) - \frac{ql}{2H} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式(13)、(14)构成了绳索的悬链线模型,它反映了绳索在自身重力作用下的特性.悬链线表达式是一个超越函数,它将绳索的位形与绳索的张力联系起来.与绳索直线模型绳长等于绳索两端点间距离不同,此时对应的悬链线长度 L 为:

$$L = \frac{2H}{ql} \cosh\left[\frac{ql}{2H} + c_2\right] \sinh\left(\frac{ql}{2H}\right).$$

整理得到^[14]:

$$L^2 = h^2 + \frac{\sinh^2(\lambda)}{\lambda^2} l^2, \lambda = \frac{ql}{2H} \quad (15)$$

由式(15)可以看出,绳索的长度大于绳索直线模型的长度.绳索在 B_i 点的作用力不再沿 $B_i A_i$ 的方向,而是绳索在 B_i 点的切线方向.绳索张力在端点 B_i 处竖直方向的分量为:

$$V_B = H \cdot \tan\varphi = -H \cdot \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=l} = -H \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{ql}{H} + c_2\right) \quad (16)$$

绳索对动平台的作用力在全局坐标系中可表示为:

$$\mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} H \cos\varphi \\ H \sin\varphi \\ \mathbf{V}_B \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中,角度 φ 满足:

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{x_A - x_B}{\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}}; \\ \sin\varphi &= \frac{y_A - y_B}{\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}}. \end{aligned}$$

由式(17)可得

$$\mathbf{F}_B = \begin{bmatrix} H \cos\varphi \\ H \sin\varphi \\ \mathbf{V}_B \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ \tan\Phi \end{bmatrix} = H \sec\Phi \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\Phi \\ \sin\varphi \cos\Phi \\ \sin\Phi \end{bmatrix},$$

且 φ 满足如下函数关系:

$$(\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 + (\tan\Phi)^2 = 1 + (\tan\Phi)^2 = (\sec\Phi)^2$$

由上可以看出,与考虑绳索为理想的直线模型不同,当考虑绳索在自重作用下而下垂时,绳索在 B_i 点的作用力方向沿其切矢量,即为:

$$\mathbf{u}_i = [\cos\varphi_i \cos\Phi_i \quad \sin\varphi_i \cos\Phi_i \quad \sin\Phi_i]^T \quad (18)$$

考虑绳索悬链线模型时,索长变化速度 $\dot{\mathbf{l}} = [\dot{l}_1 \ \dot{l}_2 \ \dot{l}_3 \ \dot{l}_4 \ \dot{l}_5 \ \dot{l}_6]^T$ 与系统广义速度 $\dot{\mathbf{X}} =$

$[\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \dot{\gamma}]^T$ 之间的关系如下:

$$\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{J}_2 \mathbf{E} \dot{\mathbf{X}} \quad (19)$$

式中,速度雅克比矩阵 \mathbf{J}_2 可写为:

$$\mathbf{J}_2 = - \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_6 \\ (\mathbf{R}_{b_1}) \times \mathbf{u}_1 & (\mathbf{R}_{b_2}) \times \mathbf{u}_2 & \cdots & (\mathbf{R}_{b_3}) \times \mathbf{u}_6 \end{bmatrix}^T \quad (20)$$

2 绳索牵引并联机器人的动力学模型

本节采用拉格朗日方法建立绳索牵引并联机器人的动力学模型.在拉格朗日方程中,广义坐标是用来描述系统位形所需要的独立参数,选取动平台的位姿 $\mathbf{X} = [x \ y \ z \ \alpha \ \beta \ \gamma]^T$ 为系统的广义坐标.绳索牵引并联机器人的动能包括动平台移动动能和转动动能, $\mathbf{v} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]$ 为动平台的移动速度, $\mathbf{w} = \mathbf{E}_1 \dot{\mathbf{q}}$ 为动平台的转动速度,则绳索牵引并联机器人的动能为:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\zeta}_s \mathbf{w} = \\ &= \frac{1}{2} m [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}] [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T + \\ &= \frac{1}{2} [\dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \dot{\gamma}] \mathbf{E}_1^T \mathbf{R}_{\zeta_b}^T \mathbf{R}^T \mathbf{E}_1 [\dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \dot{\gamma}]^T \end{aligned} \quad (21)$$

式中, m 为动平台的质量, $\boldsymbol{\zeta}_s$ 为动平台在全局坐标系中的惯性矩阵, $\boldsymbol{\zeta}_b$ 为动平台在局部坐标系中的惯性矩阵,二者有如下关系:

$$\boldsymbol{\zeta}_s = \mathbf{R}_{\zeta_b}^T \mathbf{R}^T \quad (22)$$

绳索牵引并联机器人的重力势能为: $U = mgz$.

拉格朗日函数为系统动能与势能之差,因而绳索牵引并联机器人的拉格朗日函数为^[15]:

$$\begin{aligned} E_L &= E_k - U = \\ &= \frac{1}{2} m [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}] [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T + \\ &= \frac{1}{2} [\dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \dot{\gamma}] \mathbf{E}_1^T \mathbf{R}_{\zeta_b}^T \mathbf{R}^T \mathbf{E}_1 [\dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \dot{\gamma}]^T - mgz \end{aligned} \quad (23)$$

对于广义坐标为 \mathbf{X} 、拉格朗日函数为 E_L 的机械系统,其运动方程为^[15]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_L}{\partial \dot{\mathbf{X}}} \right) - \frac{\partial E_L}{\partial \mathbf{X}} = \boldsymbol{\tau} \quad (24)$$

式中, $\boldsymbol{\tau}$ 为系统的广义力,即用广义坐标来表示作用于系统的外力.

将式(23)代入式(24)可得到拉格朗日方程的各分量.综上可得到绳索牵引并联机器人的动力学方程为:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_i}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_i}{\partial x} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_i}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial E_i}{\partial y} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_i}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial E_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_i}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_i}{\partial x} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_i}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial E_i}{\partial y} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_i}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial E_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{E}_1^T \mathbf{R} \boldsymbol{\zeta}_b \mathbf{R}^T \mathbf{E}_1 \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \end{bmatrix} + (\dot{\mathbf{E}}_1^T \mathbf{R} \boldsymbol{\zeta}_b \mathbf{R}^T \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_1^T \dot{\mathbf{R}} \boldsymbol{\zeta}_b \mathbf{R}^T \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_1^T \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\zeta}}_b \mathbf{R}^T \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_1^T \mathbf{R} \boldsymbol{\zeta}_b \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{E}}_1) \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial (\mathbf{E}_1^T \mathbf{R} \boldsymbol{\zeta}_b \mathbf{R}^T \mathbf{E}_1)}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial (\mathbf{E}_1^T \mathbf{R} \boldsymbol{\zeta}_b \mathbf{R}^T \mathbf{E}_1)}{\partial \beta} \\ \frac{\partial (\mathbf{E}_1^T \mathbf{R} \boldsymbol{\zeta}_b \mathbf{R}^T \mathbf{E}_1)}{\partial \gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (26)$$

对式(25)-(26)进行化简可得到绳索牵引并联机器人的动力学模型为:

$$\mathbf{M}(\mathbf{X}) \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{G}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\tau} \quad (27)$$

式中, \mathbf{M} 为机器人的惯性矩阵, 定义如下:

$$\mathbf{M}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} m \mathbf{I}_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_1^T \mathbf{R} \boldsymbol{\zeta}_b \mathbf{R}^T \mathbf{E}_1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

式中, $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ 为单位矩阵. \mathbf{C} 为哥氏矩阵, 定义如下:

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\mathbf{M}_1 + \mathbf{N}^T - \mathbf{N}) \end{bmatrix} \quad (29)$$

式中, $\mathbf{M}_1 = \mathbf{E}_1^T \mathbf{R} \boldsymbol{\zeta}_b \mathbf{R}^T \mathbf{E}_1$; $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} & \dot{\beta} & \dot{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial \alpha} +$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dot{\alpha} & \dot{\beta} & \dot{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial \beta} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\alpha} & \dot{\beta} & \dot{\gamma} \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial \gamma}$$

此时哥氏矩阵 \mathbf{C}

满足机器人运动方程结构特性. \mathbf{G} 为重力矩阵, 定义如下:

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}) = [0 \ 0 \ mg \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (30)$$

由于本文假设末端执行器未受其他外力作用, 仅受到绳索张力的作用, 因而有

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{E}^T \mathbf{J}^T \mathbf{T} \quad (31)$$

式中, $\mathbf{T} = [t_1 \ t_2 \ t_3 \ t_4 \ t_5 \ t_6]^T$ 为 6 根绳索的张力大小. 综上, 式(27)-(31)即为图 1 所示 6 自由度绳索牵引并联机器人的动力学模型.

3 绳索牵引并联机器人的动力学仿真

为了验证本文所建立的绳索牵引并联机器人的动力学模型, 本节将对图 1 所示的绳索牵引并联机器人进行动力学仿真. 假设动平台的运动轨迹为一水平圆周, 圆周的轨迹定义为: $x=20+3\sin(0.1t)$ m, $y=20+3\cos(0.1t)$ m, $\alpha=-\pi, \beta=0, \gamma=0$, 运动轨迹曲线如图 7-8 所示.

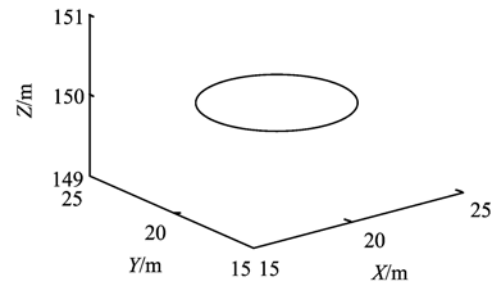


图 7 动平台的运动轨迹

Fig. 7 The trajectory of platform

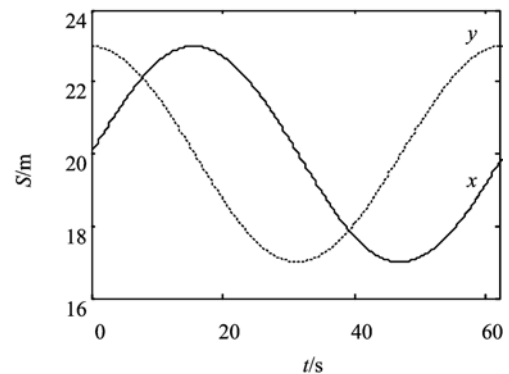


图 8 动平台沿 x、y 方向的运动轨迹

Fig. 8 The trajectory along the direction of x and y

仿真实验中, 设定绳索与固定支架的连接点在全局坐标系中的坐标分别为:

$$\mathbf{A}_1 = [-250 \ 0 \ 210]^T \text{m},$$

$$\mathbf{A}_2 = [-125 \ -215 \ 210]^T \text{m},$$

$$\mathbf{A}_3 = [125 \ -215 \ 210]^T \text{m},$$

$$\mathbf{A}_4 = [250 \ 0 \ 210]^T \text{m},$$

$$A_5 = [125 \quad 215 \quad 210]^T \text{m},$$

$$A_6 = [-125 \quad 215 \quad 210]^T \text{m}.$$

绳索与动平台的连接点在局部坐标系中的坐标分别为:

$$B_1 = [0 \quad 5 \quad -2]^T \text{m},$$

$$B_2 = [-4.3 \quad 2.5 \quad 2]^T \text{m},$$

$$B_3 = [-4.3 \quad -2.5 \quad -2]^T \text{m},$$

$$B_4 = [0 \quad -5 \quad 2]^T \text{m},$$

$$B_5 = [4.3 \quad -2.5 \quad -2]^T \text{m},$$

$$B_6 = [4.3 \quad 2.5 \quad 2]^T \text{m}.$$

绳索牵引并联机器人动平台的质量为 1 200 kg,单位长度绳索的重量为 3.7 N/m,重力加速度为 9.8 N/m².动平台在局部坐标系中的惯性矩阵为:

$$\zeta_b = \begin{bmatrix} 340 & 0 & 0 \\ 0 & 340 & 0 \\ 0 & 0 & 340 \end{bmatrix}.$$

当动平台沿着如图 7 所示的轨迹运动时,绳索对动平台的作用力如图 9-10 所示.

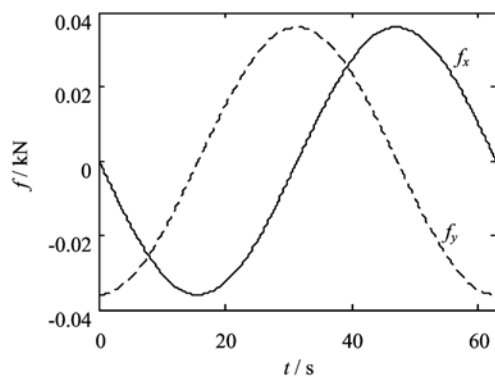


图 9 动平台沿 x、y 方向的力

Fig. 9 The force along direction of x and y

考虑绳索的直线模型,当动平台沿着上述轨迹运动时,逆动力学模型所求得的绳索张力为:

$$T = -(J_1 E)^{-T} (M(X)\ddot{X} + C(X, \dot{X})\dot{X} + G(X)) \quad (32)$$

此时,绳索张力的变化如图 11 所示.绳索的长度变化如图 12 所示.

考虑绳索的悬链线模型时,绳索牵引并联机器人的动力学模型为:

$$T = -(J_2 E)^{-T} (M(X)\ddot{X} + C(X, \dot{X})\dot{X} + G(X)) \quad (33)$$

由于 J₂ 的大小与绳索的张力有关,因而求解绳索牵引并联机器人的逆动力学问题关键在于求解如下式所示的一个非线性方程组:

$$f(T) = M(X)\ddot{X} + C(X, \dot{X})\dot{X} + G(X) + E^T J^T T \quad (34)$$

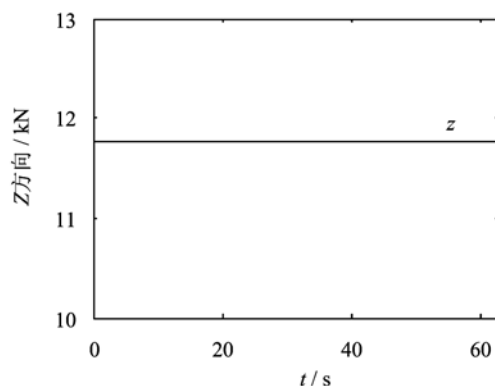


图 10 动平台沿 z 方向的力

Fig. 10 The force along direction of z

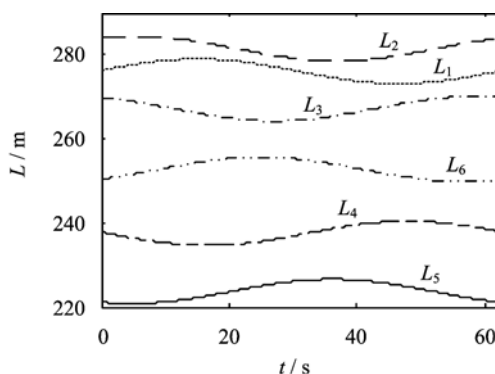


图 11 直线模型的绳索绳长变化

Fig. 11 The length variation of straight line model

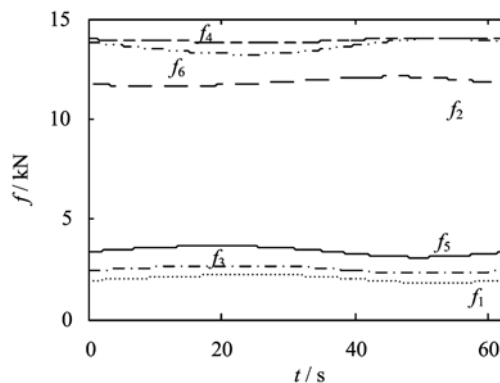


图 12 直线模型的绳索张力变化

Fig. 12 The tension variation of straight line

由上可知,悬链线超越函数的引入,使得求解逆动力学变得很复杂.目前对于非线性方程组的解的研究远不如线性方程组那样成熟,现有的解法也不如线性方程组那样有效.通过直接方法不能求得式(34)的精确解,因而本文采用其他方法来求近似解.由于绳索的单边约束条件即绳索的张力必须大于 0,因而要求非线性方程组的解不仅满足一定的

精度也必须保证所有绳索张力都必须大于 0. 本文采用 fmincon 优化函数求解该非线性方程组. fmincon 函数用于求解带约束的优化问题, 在 Matlab 中可以直接调用该函数求解优化问题如下: $[x, fval, exitflag]=$

fmincon(fun, x0, A, b, Aeq, beq, lb, ub, options).

其中, fun 为目标优化函数, x0 为变量初始值, 此处为 6 根绳索的张力大小, A 和 b 为线性不等式约束. Aeq 和 beq 为线性等式约束. lb 和 ub 为变量的上下边界. 由于绳索的单向力特性以及实际绳索上的张力不可能无限大, 因而此处设定每根绳索张力的上界为 10^5 N, 下界为 0 N, 返回值 x 为所求的解, fval 为目标函数的值, exitflag 描述函数计算的有效性, 当 exitflag=1 时一阶最优性条件满足容许范围. 综上所述, 给出优化表达式如下:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } f(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)(f(\mathbf{T})^T f(\mathbf{T}); \\ & \text{subject to } 10^5 \geq t_i \geq 0 \text{ N.} \end{aligned}$$

为了保证所求得的解能够充分接近真实解, 首先由绳索的线性模型求得绳索张力, 即将式 (32) 求得的绳索张力值作为优化函数的初始值进行优化求解, 从而得到考虑绳索悬链线模型时的逆动力学结果. 根据上述分析求解绳索牵引并联机器人逆动力学的步骤如图 13 所示.

根据上述步骤所求得的绳索的张力变化如图 14 所示. 绳索的长度变化如图 15 所示.

由图 14 可以看出, 在绳索牵引并联机器人的跨度较大时, 考虑绳索下垂时绳索的悬链线模型, 绳索牵引并联机器人逆动力学解得到的绳索末端张力与绳索的线性模型相比有很大的变化. 因而当绳索较长时, 不能忽略绳索的自重对绳索模型的影响, 必须考虑绳索的悬链线模型.

图 11 与图 15 相比我们可以看出绳长 L_1, L_3, L_5 的变化比较明显, 而绳长 L_2, L_4, L_6 的变化则不甚明显, 这是由于绳索张力的影响. 由图 13 绳索张力变化, 我们可以看出绳索 L_2, L_4, L_6 的张力是很大的 (大于 10 000N), 而绳索 L_1, L_3, L_5 的张力则相对较小 (小于 5 000N), 因此我们可以看到绳索的张力越大, 此时绳索的自重相对于绳索张力来说是比较小的, 绳索的下垂就会越小, 而绳索的张力较小的时候, 绳索的自重相对于绳索张力来说是不可忽略的, 绳索的下垂就很明显. 由此我们也可以得出, 当绳索的自重远小于绳索的张力时, 可以认为是绳索是理想的直线模型.

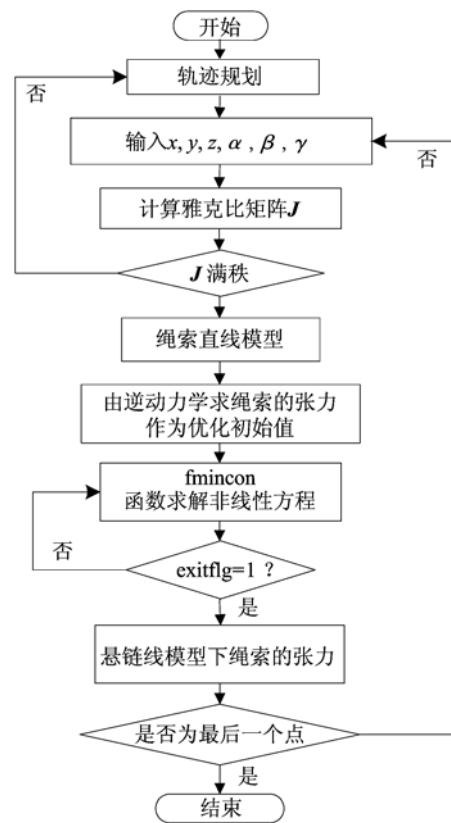


图 13 考虑绳索悬链线模型的绳索张力求解
Fig. 13 Solve the tension of cable of catenary model

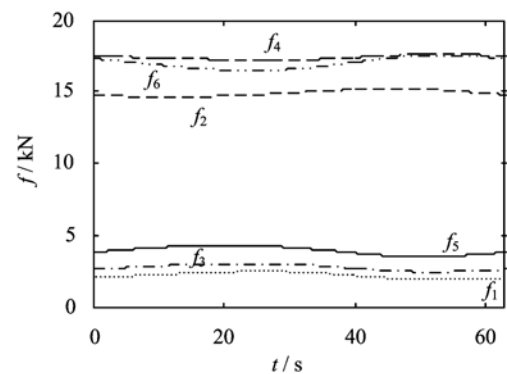


图 14 悬链线模型的绳索张力变化
Fig. 14 The length variation of catenary model

以上的仿真实验中给出了考虑绳索的直线模型与考虑绳索的悬链线模型时绳索牵引并联机器人运动学对比分析结果, 此外还给出了考虑绳索的直线模型与考虑绳索的悬链线模型时绳索牵引并联机器人的逆动力学的对比分析图, 与文献 [12] 相比, 能够更好地说明绳索牵引并联机器人在绳索的自重不可忽略的条件下, 在进行动力学建模时考虑绳索悬链线模型的必要性.

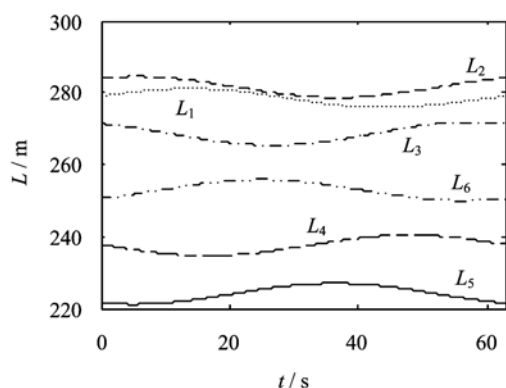


图 15 悬链线模型的绳长变化

Fig. 15 The tension variation of catenary model

4 结论

本文针对 6 根绳索牵引的 6 自由度并联机器人分别考虑了绳索的直线和悬链线模型建立了其动力学模型, 并进行分析比较. 在理论方面, 本文首先对绳索进行受力分析, 并分别给出了绳索的直线模型和绳索的悬链线模型. 在此基础上, 推导了绳索牵引并联机器人的动力学模型. 由仿真结果我们可以看出采用 *fmincon* 优化函数求解绳索牵引并联机器人逆动力学可以获得满足绳索单向力约束的绳索张力. 同时由于在绳索牵引并联机器人的跨度较大时, 考虑绳索下垂时绳索的悬链线模型, 绳索牵引并联机器人逆动力学解得到的绳索末端张力与绳索的线性模型相比有很大的变化, 验证了大跨度绳索牵引并联机器人必须采用绳索的悬链线模型的必要性. 最后仿真结果表明, 当绳索的自重相对绳索的张力的比例较大时, 绳索的下垂对绳索牵引并联机器人的动力学结果影响较大.

参考文献 (References)

- [1]Duan B Y. A new design project of the line feed structure for large spherical radio telescope and its nonlinear dynamic analysis[J]. *Mechatronics*, 1999, 9(1): 53-64.
- [2]Kawamura S, Tanaka W S, Pandian S R. Development of an ultrahigh speed robot falcon using wire drive system[C]// *International Conference on Robotics and Automation*. Nsgoya, Japan: IEEE Press, 1995: 215-220.
- [3]胡龙, 郑亚青, 林麒, 等. 低速风洞绳牵引并联机构的动力学分析[J]. *华侨大学学报*, 2008, 29(2): 184-189.
- [4]Ming A, Higuchi T. Study on multiple degree-of-freedom positioning mechanism using wires I: Concept, design and control[J]. *International Journal of Japan Society for Precision Engineering*, 1994, 28(2): 131-138.
- [5]张立勋, 刘攀, 王克义, 等. 绳索牵引并联康复机器人的建模与控制[J]. *哈尔滨工程大学学报*, 2009, 31(1): 81-85.
- [6]刘欣, 仇原鹰, 盛英. 6 自由度柔索并联机器人的动力学建模与抗扰控制[J]. *系统仿真学报*, 2009, 21(18): 5801-5806.
LIU Xin, QIU Yuanying, SHENG Ying. Dynamic modeling and disturbance-rejection control of 6-DOF cable driven parallel manipulator[J]. *Journal of System Simulation*, 2009, 21(18): 5801-5806.
- [7]Zi B, Ding H F, Cao J B, et al. Integrated mechanism design and control for completely restrained hybrid-driven based cable parallel manipulators[J]. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 2014, 74(3-4): 643-661.
- [8]Zi B, Zhu Z C, Du J L. Analysis and control of the cable-supporting system including actuator dynamics [J]. *Control Engineering Practice*, 2011, 19(5): 491-501.
- [9]刘志华, 唐晓强, 邵珠峰, 等. 6 自由度索并联机构的振动特性[J]. *机械工程学报*, 2013, 49(3): 49-55.
- [10]Du J L, Bao H, Cui C Z, et al. Dynamic analysis of cable-driven parallel manipulators with time-varying cable lengths [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2012, 48(1): 1392-1399.
- [11]Khosravil M A, Taghirad H D. Dynamic analysis and control of cable driven robots considering elasticity in cables[J]. *Advanced Robotics and Automated systems*, 2011: 1-12.
- [12]誉斌, 段宝岩, 杜敬利. 柔索驱动并联机器人动力学建模与数值仿真[J]. *机械工程学报*, 2007, 43(11): 82-88.
- [13]洪嘉振. 计算多体系统动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.
- [14]黄亮, 朱文白, 唐晓强. 大射电望远镜巨型柔性并联机构绳索分析及简化[J]. *天文研究与技术*, 2013, 10(1): 77-84.
Huang Liang, Zhu Wenbai, Tang Xiaoqiang. Analysis and a simplified model of the cable of a large-scale flexible parallel manipulator for a large radio telescope [J]. *Astronomical Research and Technology*, 2013, 10(1): 77-84.
- [15]Murray R M, Sasrty S S, Li Z X. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation[M]. Boca Raton, USA: CRC Press, 1994.