

轴流式叶轮机 S_2 流面半反命题不可压流动的局部线性化有限元法

吕文朝

(中国科学技术大学热科学和能源工程系, 安徽合肥 230026)

摘要:为探索局部线性化的有限元法在轴流式叶轮机 S_2 流面半反命题不可压气动流场中的应用, 使用八节点曲四边形等参元, 通过通常的变分有限元法, 计算了轴流式叶轮机 S_2 流面半反命题的气动流场, 同样, 使用局部线性化有限元法也计算了该流场. 两种计算结果一致, 并且和实验结果符合较好, 但后者的计算时间明显减少, 储存量有所增加, 计算过程的收敛性是好的.

关键词:局部线性化; 变分有限元法; 半反命题; S_2 流面; 轴流式叶轮机

中图分类号:V211.1 **文献标识码:**A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2015.05.010

引用格式: Lv Wenchao. Local linearization of finite element method for semi-inverse problem of incompressible flow along S_2 stream surface in axial-flow turbomachinery[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2015, 45(5): 409-415.

吕文朝. 轴流式叶轮机 S_2 流面半反命题不可压流动的局部线性化有限元法[J]. 中国科学技术大学学报, 2015, 45(5): 409-415.

Local linearization of finite element method for semi-inverse problem of incompressible flow along S_2 stream surface in axial-flow turbomachinery

LV Wenchao

(Department of Thermal Science and Energy Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: The application of local linearization of finite element method (FEM) for the semi-inverse problem of incompressible flow along S_2 stream surface in axial-flow turbomachinery was discussed. Curved quadrilateral isoparametric elements with eight nodes were used to analyze the flow field for the semi-inverse problem along S_2 stream surface in axial-flow turbomachinery through usual variational FEM. Local linearization of FEM was also used to analyze this flow field. The computing result of local linearization of FEM is the same as the usual variational FEM and in good agreement with the experimental result. The computing time of local linearization of FEM is reduced compared with usual FEM, while the required memory of local linearization of FEM increases compared with usual FEM. The computing process shows good convergence properties.

Key words: local linearization; variational FEM; semi-inverse problem; S_2 stream surface; axial-flow turbomachinery

收稿日期: 2013-06-20; 修回日期: 2014-12-20

作者简介: 吕文朝, 男, 1938年生, 副教授. 研究方向: 气动流场数值计算. E-mail: lvwc@ustc.edu

0 引言

在气动流场的数值计算中,有限元法的特征是:先化整为零,即在求解域上任意剖分单元,在每个单元上插值;然后集零为整,即将每个单元的系数阵汇集成总体的系数阵,来求得流场的离散型解.有限元法具有高度的机动灵活性,适应复杂的边界形状,有些边界条件使用有限元法会更易于处理.刘高联^[2-3]分别给出了叶轮机械 S_1 和 S_2 流面流函数方程组的变分原理.蔡荣泉^[4]使用文献[3]的公式,计算了两级轴流式叶轮机 S_2 流面气动流场.陈德江等^[5]在半测地坐标系中采用伽略金有限元法,对可压缩离心式叶轮机内 S_1 迴转面流函数方程进行了计算.陈池等^[9]基于变域变分有限元法,对二维机翼进行了反设计.在气动流场分析中,使用通常的有限元法^[4-5,9],计算时间较长是个缺陷.局部线性化有限元法^[6]在计算可压缩势函数流场时将单元系数阵的计算作了线化处理,避免了单元系数阵在迭代过程中的重复数值积分计算,从而缩短了计算时间,但计算机的存储量有所增加.本文的目的是将局部线性化有限元法向求解流函数方程组(流场可有旋)的领域拓展.算例是一个单转子轴流风机,虽然速度低,但数值计算中考虑到的各种因素、计算过程与可压缩单转子轴流压气机基本相同,而且有精确的实验结果与计算结果相对照.

1 轴流式叶轮机 S_2 流面气动方程组

在以等角速度 $\vec{\omega}$ 旋转的系统中,黏性可压缩完全气体沿 S_2 流面做相对定常运动的气动热力学方程组如下^[1,3]:

连续性方程

$$\frac{\partial(Br\rho W_z)}{\partial z} + \frac{\partial(Br\rho W_r)}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

动量方程

$$\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} = \frac{1}{W_z} \left\{ \frac{P}{R\rho} \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{W_\varphi}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} - \frac{\partial R^0}{\partial r} + F_r + f_r \right\} \quad (2)$$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = (F_u + f_u)r \quad (3)$$

$$\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} = \frac{-1}{W_r} \left\{ \frac{P}{R\rho} \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{W_\varphi}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} - \frac{\partial R^0}{\partial z} + F_z + f_z \right\} \quad (4)$$

能量方程

$$\frac{DR^0}{Dt} = \frac{Dq}{Dt} + \frac{\Phi}{\rho} + \vec{f} \cdot \vec{W} \quad (5)$$

Gibbs 恒等式

$$\frac{P}{R\rho} \frac{DS}{Dt} = \frac{Dq}{Dt} + \frac{\Phi}{\rho} \quad (6)$$

状态方程

$$P = C\rho^k \exp(\Delta\tilde{S}), \text{ 而 } C = P_0/\rho_0^k \quad (7)$$

流面可积性条件 $\vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$, 即

$$\frac{F_r}{F_{ur}} = \left[\frac{F_r}{F_{ur}} \right]_0 + \int_{\xi_0}^z \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{F_z}{F_{ur}} \right] dz \quad (8)$$

另外,尚有关系式

$$R^0 = \frac{kmP}{\rho} + \frac{1}{2}(W^2 - u^2) = \frac{kmP^*}{\rho^*} - \omega\Gamma \quad (9)$$

$$C_u = W_\varphi + u \quad (10)$$

式中, $m=1/(k-1)$.

封闭性条件:在本文考虑的半反命题中,假定沿 S_2 流面给定分布

$$C_{ur} = \Gamma(\xi, \Psi) \quad (11)$$

以上各种符号的意义同文献[3].式中 $\frac{\partial}{\partial}$ 是沿 S_2 流面的.

2 轴流式叶轮机 S_2 流面半反命题的变分原理^[3]

从式(1)引入流函数 $\Psi(r, z)$ 如下:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = Br\rho W_z, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = -Br\rho W_r \quad (1')$$

还将式(2)改写为

$$\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} = Br \left\{ \frac{mP}{C_\nu} \frac{\partial S}{\partial \Psi} + \rho \left[\left(\frac{\Gamma}{r^2} - \omega \right) \frac{\partial \Gamma}{\partial \Psi} - \frac{\partial R^0}{\partial \Psi} \right] \right\} + \tilde{F}_r \quad (2')$$

式中, $\tilde{F}_r = (F_r + f_r)/W_z$ 由上一次近似解 $\Psi^{(N-1)}$ 迭代修正得到.

轴流式叶轮机 S_2 流面半反命题的微分方程组及边界条件等价于下列泛函 J 的极值必要条件:

$$\delta J = 0$$

$$J(\Psi) = \iint_{\Lambda} \left\{ \frac{1}{2Br\rho} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 \right] + \right.$$

$$Br\rho \frac{\Gamma}{r^2} \left[\omega^2 - \frac{\Gamma}{2} \right] + Br\rho R^0 -$$

$$\left. BrCm\rho^k \exp(\Delta\tilde{S}) - \tilde{F}_r \Psi \right\} dr dz +$$

$$\int_{c_e^c a} (W_s)_{pr} \Psi ds + \int_{i,h} (\Psi - \Psi_{pr}) \vec{W} \cdot d\vec{s} \quad (12)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} W_s &= -\frac{1}{Br\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial n}, \\ (Br\rho W)^2 &= \Psi_r^2 + \Psi_z^2 + [Br\rho(\Gamma/r - \omega r)]^2, \\ \tilde{F}_r &= \frac{C}{R} \frac{\exp(\Delta \tilde{S}) Br\rho^k}{(Br\rho W)^2} \frac{\partial S}{\partial z}, \\ \left[\frac{\partial \Psi}{\partial z} - Br\rho(\Gamma - \omega r^2) \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] - \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

3 变分公式的有限元展开

3.1 通常的有限元法(以下简称 L 法)

本文使用了四边形(曲边四边形和矩形)八节点等参元,如图 1 所示.

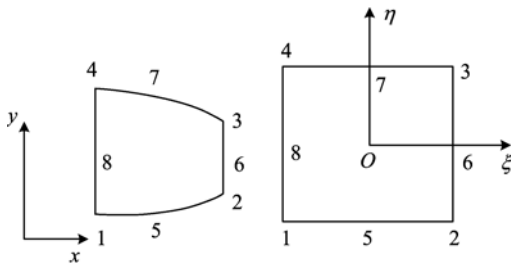


图 1 八节点四边形等参元

Fig. 1 Quadrilateral isoparametric element with eight nodes

经过适当的数学推导^[8],就得出单元上的有限元方程

$$[K]^e \{ \Psi \}^e = \{ F \}^e \quad (14)$$

式中,

$$[K]^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{\rho} f_{i,j}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (15)$$

$$\{ F \}^e = \left\{ \begin{aligned} &\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Br\rho \left(\frac{\Gamma}{r^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial \Psi} - \frac{\partial i^*}{\partial \Psi} + \frac{C}{R} \rho^{(k-1)} \exp(\Delta \tilde{S}) \frac{\partial S}{\partial \Psi} \right) \cdot \\ &N_i |J| d\xi d\eta \quad \text{无叶区} \\ &\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[Br\rho \left(\frac{\Gamma - \omega r^2}{r^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial \Psi} - \frac{\partial R^0}{\partial \Psi} + \frac{C}{R} \rho^{(k-1)} \cdot \right. \right. \\ &\left. \left. \exp(\Delta \tilde{S}) \frac{\partial S}{\partial \Psi} \right) + \tilde{F}_r \right] N_i |J| d\xi d\eta \quad \text{叶片区} \end{aligned} \right. \quad (16)$$

式中 N_i 表示插值函数, $|J|$ 为雅可比行列式^[8].

对于通常的有限元法,流场中各点的密度是不

同的,在迭代过程中,同一点的密度也在改变,每一次迭代都要重复式(15)的数值积分计算.数值积分在每个坐标方向取 3 个高斯点,汇集单元的有限元方程为总体有限元方程

$$[K] \{ \Psi \} = \{ F \} \quad (17)$$

式中, $[K]$ 为对称的带状稀疏阵,用块迭代法(block iteration method)求解.

3.2 局部线性化的有限元法^[6](以下简称 Q 法)

如果网格剖分合理,每个单元上密度趋于均匀,式(15)中的 ρ 可视为常数,则该式变为

$$[K]^e = (\rho_0^e)^{-1} [A]^e = (\rho_0^e)^{-1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{i,j}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (18)$$

显然,对固定网格, $[A]^e$ 是不变的,迭代之前,首先计算出每个单元 $[A]^e$ 的上三角阵并存储起来,每次迭代都插值出单元中心密度 ρ_0^e 来代表单元密度,在迭代过程中 ρ_0^e 在变, $[K]^e$ 也在变,这样就避免了迭代过程中单元系数矩阵 $[K]^e$ 重复的数值积分计算.单元中心点密度的插值公式为

$$\rho_0^e = N_i(0,0) \rho_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 8.$$

4 算例

本文选用文献[7]转子 2 的设计工况为算例.虽然其气流速度低,但具有现代轴流式压气机沿径向变功变熵的特性;叶片前后气流参数的测量详细准确,便于和计算结果做对比;子午通道、叶轮、叶片各截面翼型几何参数详实,使得叶片区内流场也能进行计算.所取计算区域见图 2.图中 I_1 和 I_2 为叶片前后测量站.本文中有些图直接取自文献[7]中,其中一些符号的意义也请参看文献[7].

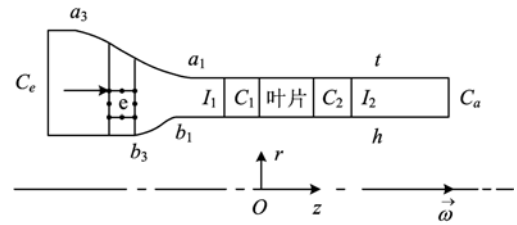


图 2 计算区域

Fig. 2 Computational domain

4.1 计算区域的确定和网格的划分

进口 C_e 为径向线,其上为平行 Z 轴的均匀流动,出口 C_a 为径向线,其上为平行 Z 轴的流动;内壳 h 上, $b_3 - b_1$ 为曲线,其余为平行 Z 轴的直线;外

壳 t 上, $a_3 - a_1$ 为曲线, 其余为平行 Z 轴的直线. 由图 2 可知, 单元的前 3 点、后 3 点及中间 2 点都分别位于 1 条径向线上. 由于气流参数在 t 和 h 处变化大, 所以单元的径向尺寸在 t 和 h 处小, 中间大. 对于 Z 向, 气流参数在叶片区, 特别是在 C_1 和 C_2 附近变化大, 单元 Z 向尺寸就小, 向着 C_e 和 C_a 划分时, Z 向尺寸逐渐增大. 网格划定后, 节点的 r, z 坐标就确定了. 由于方程组要迭代求解, 因此节点上流函数初值需给定, 一个叶片通道的流量 M 给定, 并在流动中保持不变(没有考虑内、外壳上边界层厚度增长对主流区的影响). 对于在 Z 轴上的每一站, 求某一节点的流量 Ψ , 就用该点 r 和 r_h 之间叶片通道面积比上整个叶片通道的面积来求出, 由此, 节点上 Ψ_r 和 Ψ_z 值也可算出.

4.2 边界条件

在进口 C_e 上, 给定各节点流量; 在出口截面 C_a 上, 令 W_s (即 C_r) = 0, 计算中自动满足; 在内壳 h 上, 各节点 $\Psi=0$; 在外壳 t 上, 各节点加的是 1 个叶片通道流过的流量 M .

由图 2 可知, $C_e - C_1$ 和 $C_2 - C_a$ 为无叶区, $C_1 - C_2$ 为动叶区, 在计算中, 既应对两种区域分别对待, 又要考虑其间的相互转换与衔接. 具体处理如下:

(I) 无叶区

$$\omega = u = 0, \vec{W} \rightarrow \vec{C}, R^0 \rightarrow i^*, \tilde{F}_r = 0, \Gamma = \Gamma(\Psi).$$

(II) 动叶区

与无叶区交界面 C_1 和 C_2 上的衔接条件是:

$$R^0 = i^* - \omega\Gamma, C_u = W_\varphi + \omega r, C_r = W_r, C_z = W_z.$$

4.3 全流场各节点 Γ 的计算

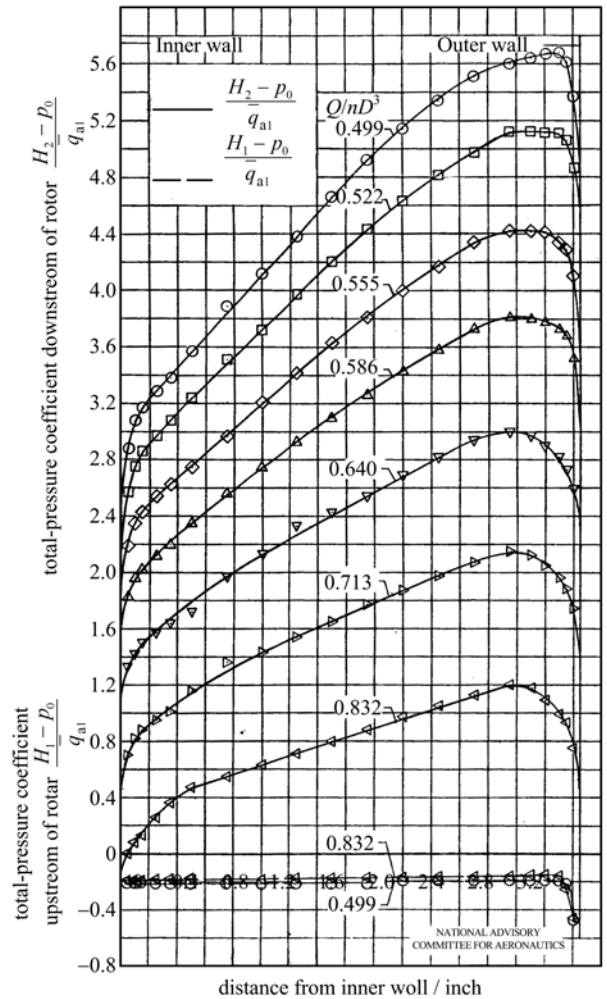
在 $C_e - C_1$ 进口区各节点, Γ 值为零, I_2 上各节点 Γ 值由输入给定; 在 $C_2 - C_a$ 区各节点, 根据该点 Ψ 值到 I_2 上插值出该 Ψ 值对应的 Γ 值; 对于 $C_1 - C_2$ 的动叶区内节点, 由该点 Ψ 值到 C_2 上插值出该 Ψ 值对应的 Γ 值, 依据 z 坐标, 简单地沿流线按照线性变化求出该点 Γ 值. 这样全流场各节点的 Γ 值可求出. 由此可算出各节点 $i^*, \Gamma_z, \frac{\partial \Gamma}{\partial \Psi} = \frac{\Gamma_r}{\Psi_r}, \frac{\partial i^*}{\partial \Psi} = \frac{i_r^*}{\Psi_r}$.

$$\text{对叶片区, 可求出节点 } R^0, \frac{\partial R^0}{\partial \Psi} = \frac{R_r^0}{\Psi_r}.$$

4.4 全流场各节点熵 ΔS 的计算

熵的计算公式为 $\Delta S = C_p \ln(T^*/T_0) - R \ln(P^*/P_0)$. 在 I_1 上, 由图 3 确定中点 P_1^* (图 3 中为 H_1), 由于 T_0 不变, $P_1^* < P_0$ 引起熵增, 这部分熵从进口 C_e 上 ($\Delta S=0$), 到 I_1 站随坐标 z 线性增长; 在 $I_1 - C_1$

视为均熵流动; $C_2 - C_a$ 视为定熵流动, 其中每一点由该点 Ψ 值到 I_2 上插值出该点的熵值; 在 $C_1 - C_2$ 的叶片区内, 每个节点由该点 Ψ 值到 C_2 上插值出该 Ψ 值对应的熵值, 其值比 C_1 上的进口熵值大, 将这个熵值的增量部分沿流线随 z 坐标线性增长, 叶片区内各节点熵值也可求出. 由此全流场各节点的 $S_z, \frac{\partial S}{\partial \Psi} = \frac{S_z}{\Psi_z}$ 也可求出.



Design $Q/(nD^3) = 0.587$

图 3 转子 2 测量结果^[7]

Fig. 3 Fan 2 survey results^[7]

4.5 求节点密度

S_2 流面半反命题 $\Psi - \rho$ 耦合迭代法中关于 ρ 的函数 $f(\rho)$ 为

$$f(\rho) = A_1 \rho^{k-1} + A_2 \rho^{-2} + A_3.$$

式中,

$$A_1 = Cmk \exp(\Delta \tilde{S}),$$

$$A_2 = 1/(Br)^2 [(\partial \Psi / \partial r)^2 + (\partial \Psi / \partial z)^2] / 2,$$

$$A_3 = (\Gamma/r)^2/2 - \omega\Gamma - R^0.$$

对此选取 ρ 的初始值为 $\rho^{(0)} = (-A_3/A_1)^m$, 应用 Newton 迭代法, 使 $f(\rho) = 0$, 求得 ρ 的迭代值. 在某些节点上 $f(\rho)$ 呈现无零点, 文献[4]给出的判别式为

$$A_2^{\frac{k-1}{k}} \leq (k-1) \frac{k-1}{k} (2/A_1)^{\frac{2}{k-1}} (-A_3/A_1),$$

在某节点上如果该式不成立, 则在其上 $f(\rho)$ 便为非零点.

节点的密度 ρ 在迭代求解时, 用 $|\rho^n - \rho^{n-1}| \leq \epsilon$ 来判断, 对流场中每个节点, 在整个迭代过程中, 求达到 ϵ 时的最大值 n . ϵ 取值 0.001 和 0.000 1 时, n 值都为 2, 不存在非零点.

4.6 叶片进口 C_1 上各节点 φ_0 初值的确定

由于转子 2 采用了直叶片, 且沿叶高翼型不变, 因此图 4(c) 表明, 翼型的几何中心位于 1 条径向线上, 图中的水平线即为 z 轴, 根据翼型和叶片的几何参数, 就可以确定出弦线前沿点到 z 轴的弧线长度, 根据 C_1 上各点的半径, 即可求出各节点的 φ_0 初值. 这就是叶片前沿和叶片中间 1 条径向线的夹角的初始值. 当叶片区内各节点上 $(\Gamma - \omega r^2)/(r^2 W_z)$ 为已知时, 即可沿流线进行数值积分^[3]:

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{z_0}^z (\Gamma - \omega r^2)/(r^2 W_z) dz.$$

求得叶片区内各节点的 φ 角分布后, 就可以求出 $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$.

5 计算结果

由于功和熵沿径向变化明显, 开始调 L 法网格时, 网格划分得较密, 径向取 8 个单元, 总共取 872 个单元, 2 851 个节点. 对于 Q 法, 没有像文献[6]那样加密网格, 直接使用该网格进行了计算. 在迭代过程中, 对节点流函数进行了松弛, 松弛因子 $\Omega = 0.001$. 节点精度的判别式为 $|\Psi^N - \Psi^{N-1}| \leq \epsilon$, ϵ 取 3 个不同值进行计算, 计算过程列在表 1 中. 转子绝热效率 $\eta_R = [(\bar{p}_2^*/p_0)^{\frac{k-1}{k}} - 1]/(\bar{T}_2^*/T_0 - 1)$. 对于 I_2 上的平均值 \bar{p}_2^* , \bar{T}_2^* , \bar{C}_{z2} (图 5 中的 \bar{V}_{ω}), 本文不同于文献[7]中采用体积流量平均, 而是采用质量流量平均. 从表 1 中可看出, Q 法计算时间比 L 法计算时间明显减少, 迭代次数越多, 减少的时间量越多. 原因是: ① $[A]^e$ 中减少了 $[K]^e$ 中节点密度参与的运算时间; ② 对固定网格, $[A]^e$ 只计算 1 次, 把它储存起来避免了 $[A]^e$ 在迭代过程中的重复数值积分计算; ③ 有可能 Q 法迭代次数 N 比 L 法少. 同时, 由于存储每个单元系数阵和单元中心点密度, Q 法比 L 法增加了 56 680 个数据的存储空间, Q 法的计算机程序比 L 法增加了近 20 条语句.

当取 $\epsilon = 0.000 5$ 时, Q 法与 L 法计算结果相同, 与实验结果符合较好 (图 5、图 6). 关于计算过程的收敛性, 当取 $\epsilon = 0.001$ 时, 两种方法一直收敛; 精度再提高时, 迭代过程出现跳动.

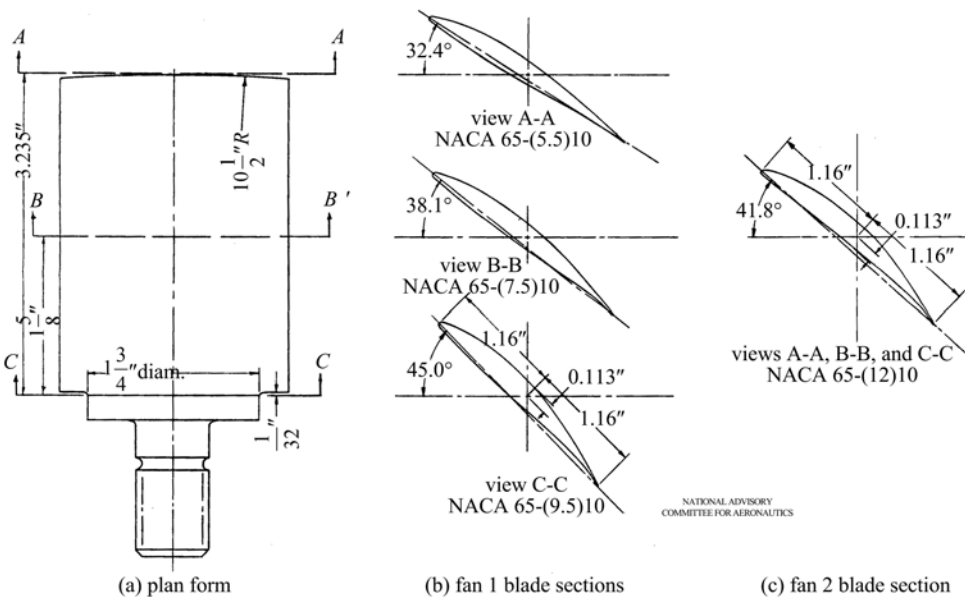


图 4 转子叶片图^[7]

Fig. 4 Drawing of rotor blades^[7]

表 1 局部线性化有限元法(Q)与通常的有限元法(L)的计算参数比较

Tab. 1 Comparison of computing parameters between the local linearization of finite element method (Q) and usual finite element method (L)

| ϵ | | N | CPU/h | η_R | \bar{q}_{z1} |
|------------|---|-------|----------|----------|----------------|
| 0.001 | L | 3 006 | 0.487 72 | 0.976 0 | 896.071 7 |
| | Q | 2 998 | 0.176 91 | 0.976 4 | 896.069 7 |
| 0.000 5 | L | 3 939 | 0.639 93 | 0.975 9 | 896.075 3 |
| | Q | 3 918 | 0.230 98 | 0.976 2 | 896.074 0 |
| 0.000 1 | L | 7 003 | 1.137 81 | 0.975 7 | 896.071 0 |
| | Q | 7 044 | 0.414 68 | 0.976 1 | 896.068 2 |

根据节 4.2 中对边界条件的处理,得到如下结果:进口 C_e 上各节点 C_z, ρ 均匀, C_r 有正负, $|C_r| < 1.0$; 外壳 t 上, $a_3 - a_1$ 收敛段 $C_r < 0$, 其余在和 z 轴平行段上 $C_r = 0$; 在内壳 h 上, $b_3 - b_1$ 收敛段 $C_r > 0$, 其余和 z 轴平行段上 $C_r = 0$; 出口 C_a 上 C_r 有正负, 但 $|C_r| \leq 4.278 \times 10^{-4}$. 此结果与实际流动情况相符.

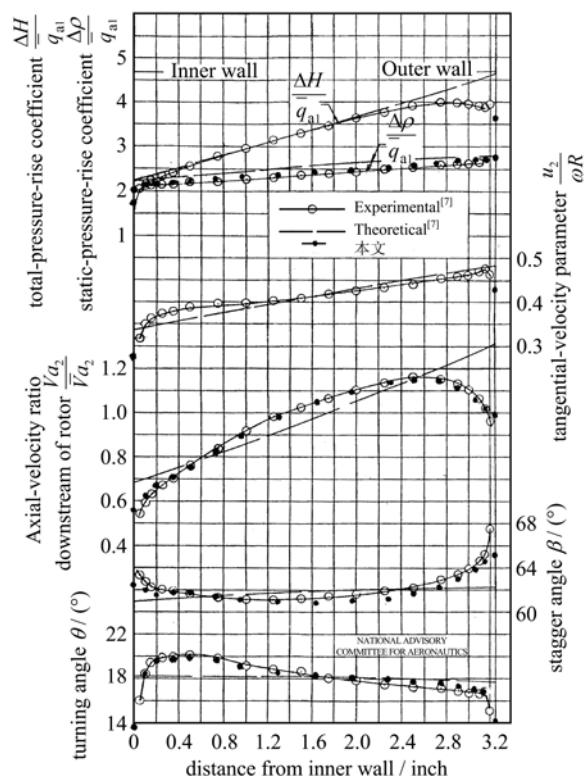


图 5 3 种结果的比较

Fig. 5 Comparison of three results

在 I_1 上, 气体流动均匀. 参数 \bar{q}_{z1} 的输入值取 896.07, 之后取 I_1 上中间一点的气流参数 ρ 和 C_z , 计算 $\bar{q}_{z1} = \rho C_z^2 / 2$ (图 3, 5, 6 中为 \bar{q}_{z1}), 所得结果 (表 1) 与输入值基本一致.

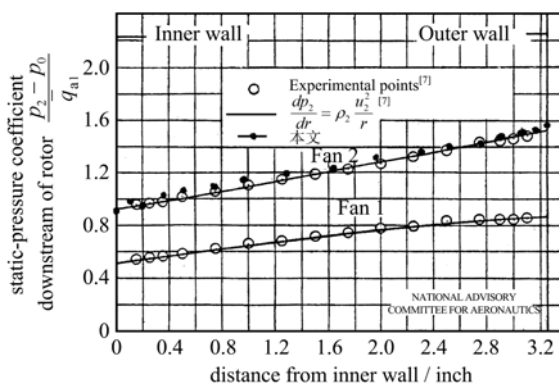


图 6 转子下游 3 种结果比较

Fig. 6 Comparison of three results downstream of rotor

表 2 给出的是叶片前沿径向 5 站和轴向 13 站上每个节点的计算 Ψ 值. 图 7 根据这些节点的 Ψ 值, 给出了 6 条由叶片前沿进口流函数值规定的流线. 在径向 12 站, 沿 z 向分析各节点流函数值变化可知, 进口流线一直在向上偏, 而且偏离半径越来越大. 在出口节点上, 该流线稍向下偏. 对于径向 2~11 站, 每站各节点的流函数值的变化规律与 12 站相似, 只是在出口节点上该站进口流线稍有上偏或持平. 对于径向 13 站, 在叶片出口处流线开始向下偏, 并且偏离程度在 14, 15, 16 站不断增大, 节点也不断增多. 对于径向 1 站和 17 站, 流线是沿上下壁的直线, 流量分别为零和一个叶片通道流过的空气流量.

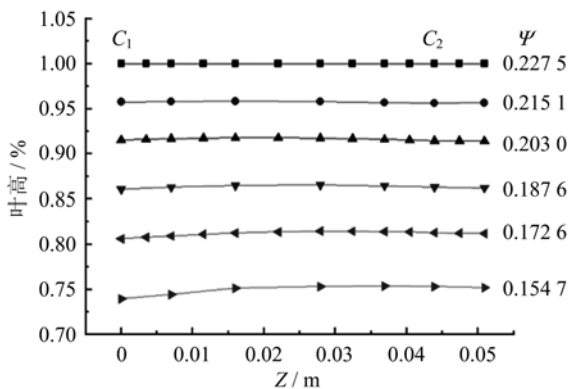


图 7 流线图

Fig. 7 The flow chart

6 结论

单转子轴流风机 S_2 流面半反命题的计算结果表明, 使用局部线性化的有限元法, 计算结果准确, 与实验结果符合较好. 计算时间与通常的有限元法相比明显减少, 迭代次数越多, 效果越显著, 但存储

表 2 叶片区部分节点流函数 Ψ (单位: kg)
 Tab. 2 Stream functions of some nodes in the blade domain Ψ (unit: kg)

| 站序 | 叶高/% | Z/m | | | | | | | | | | | | |
|----|---------|-----------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------------------------|---------|---------|
| | | C ₁ 0.0 | 0.003 5 | 0.007 | 0.011 5 | 0.016 | 0.022 0 | 0.027 9 | 0.032 4 | 0.036 9 | 0.040 4 | C ₂ 0.043 9 | 0.047 4 | 0.050 9 |
| 16 | 0.957 6 | 0.215 1 | | 0.215 0 | | 0.214 9 | | 0.215 0 | | 0.215 4 | | 0.215 5 | | 0.215 4 |
| 15 | 0.915 2 | 0.203 0 | 0.202 8 | 0.202 6 | 0.202 4 | 0.202 3 | 0.202 4 | 0.202 6 | 0.202 8 | 0.203 0 | 0.203 2 | 0.203 2 | 0.203 3 | |
| 14 | 0.860 7 | 0.187 6 | | 0.187 0 | | 0.186 4 | | 0.186 2 | | 0.186 5 | | 0.186 9 | | 0.187 2 |
| 13 | 0.806 2 | 0.172 6 | 0.172 1 | 0.171 7 | 0.171 1 | 0.170 7 | 0.170 3 | 0.170 1 | 0.170 1 | 0.170 2 | 0.170 3 | 0.170 5 | 0.170 7 | 0.170 8 |
| 12 | 0.739 6 | 0.154 7 | | 0.153 4 | | 0.152 1 | | 0.150 8 | | 0.150 5 | | 0.150 7 | | 0.151 0 |

量有所增加. 因此在用有限元法计算各种流函数的气动流场中(包括可压缩流场), 可以使用局部线性化有限元法.

在气动流场中, 通常情况下各点密度是不同的. 在迭代过程中, 同一点的密度也在变化. 用 Q 法分析一个确定的流场, 计算结果要满足工程需要, 要求单元上有一个最低的密度均匀度与之对应, 当流场中每个单元都达到这种均匀度时, 就是最佳网格, 使用该种网格进行计算, 结果满意, 时间节省, 综合性能最好. 因此, 使用局部线性化的有限元法进行计算, 为要得到好的结果和高的效益, 网格划分是关键.

参考文献(References)

[1] Wu Chung-Hua. A general theory of three-dimensional flow in subsonic and supersonic turbomachines of axial-, radial-, and mixed-flow types [R]. National Advisory Committee for Aeronautics, 1952; NACA-TN-2604.
 [2] 刘高联. 任意旋成面叶栅气动正命题的广义变分原理、

变分原理与互偶极值原理[J]. 力学学报, 1979(4): 303-314.
 [3] 刘高联. 轴流式叶轮机 S₂ 流面气动半反命题的变分原理与广义变分原理[J]. 上海机械学院学报, 1981(1): 1-14.
 [4] 蔡荣泉. 径流式叶轮机 S₂ 流面半反命题、A 型杂交命题变分原理族及对混流式的推广及其应用[J]. 空气动力学学报, 1983(1): 25-31.
 [5] 陈德江, 王尚锦. 应用有限元法计算离心式叶轮内部流场[J]. 应用力学学报, 1999, 16(1): 27-32.
 [6] 吕文朝, 廖光焯, 曹剑峰. 三维机翼亚临界定常流的局部线性化有限元法[J]. 空气动力学学报, 2000, 18(4): 460-466.
 [7] Kahane A. Investigation of axial-flow fan and compressor rotors designed for three-dimensional flow [R]. National Advisory Committee for Aeronautics, 1948.
 [8] Chung T J. 流体力学的有限元分析[M]. 张二俊, 等, 译. 北京: 电力工业出版社, 1980.
 [9] 陈池, 刘高联. 基于变域变分有限元的翼型反设计[J]. 空气动力学学报, 2004, 22(4): 443-446.