第45卷第2期 中国科学技术大学学报 Vol. 45,No. 2
2015年2月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Feb. 2015

文章编号:0253-2778(2015)02-0101-06

NSD随机变量加权和的强收敛性

郑璐璐,王 嫱,王学军

(安徽大学数学与科学学院,安徽合肥 230601)

摘要:利用负超可加可相依(negatively superadditive dependent,NSD)随机变量的Marcinkiewicz-Zygmund型矩不等式、Kolmogorov型指数不等式和随机变量的截断方法,给出NSD随机变量阵列加权和的若干完全收敛性的结果.所得到的结果把同分布负相协(negatively associated,NA)随机变量加权和的相应结论推广到了NSD随机变量变列加权和的情形,并且不需要同分布的条件.

关键词:NSD随机变量;完全收敛性;随机控制

中图分类号:O211.4 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2015.02.002

AMS Subject Classification (2010): 60F15

引用格式: Zheng Lulu, Wang Qiang, Wang Xuejun. Strong convergence for weighted sums of negatively superadditive dependent random variables[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2015,45(2):101-106.

郑璐璐,王嫱,王学军. NSD随机变量加权和的强收敛性[J]. 中国科学技术大学学报,2015,45(2):101-106.

Strong convergence for weighted sums of negatively superadditive dependent random variables

ZHENG Lulu, WANG Qiang, WANG Xuejun

(*School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei* 230601, *China*)

Abstract: Some results on the complete convergence for sequences of negatively superadditive dependent (NSD) random variables were obtained by using the Marcinkiewicz-Zygmund type moment inequality, Kolmogorov type exponential inequality and the truncated method. The obtained results extend the corresponding conclusions for weighted sums of negatively associated (NA) random variables with identical distribution to the case of sequences of NSD random variables with nonidentical distribution.

Key words: NSD random variables; complete convergence; stochastic domination

0 引言

设$\{X_n, n \geqslant 1\}$是定义在概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的随机变量阵列,$\{b_{ni}, 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1\}$是实数列.令$S_n = \sum_{i=1}^{n} b_{ni} X_i$,在权系数满足条件$\sum_{i=1}^{n} b_{ni} = O(n)$时,有很多文献研究了加权和$S_n$的完全收敛性,具体可见文献[1-4].而在很多随机模型中,加权和的

收稿日期:2014-06-30;**修回日期**:2014-10-17

基金项目:安徽省自然科学基金(1308085QA03,1408085QA02),安徽大学研究性教学示范课程项目(xjyjkc1407),安徽大学研究生学术创新研究项目(yfc100024),安徽大学大学生创新创业训练计划项目(201410357117)资助.

作者简介:郑璐璐,女,1989年生,硕士.研究方向:概率论与数理统计. E-mail: 349937922@qq.com

通讯作者:王学军,博士/副教授. E-mail: wxjahdx2000@126.com

最大值 $\max\limits_{1\leqslant m\leqslant n}\sum\limits_{i=1}^{m}b_{ni}X_i$ 的极限性质的研究是非常重要的. 然而已有文献中很多经典的结果都是对独立变量而言,但随着相依变量在实际生活中的应用越来越重要,目前很多学者将研究的重心放到了相依变量极限性质的研究上.

在众多相依变量中,负相协(negatively associated, NA)随机变量是概率统计学者们最感兴趣的相依变量之一. NA 随机变量的概念由文献[5]引入,之后文献[6]对其进行了仔细研究.

称随机变量 $\{X_i, 1\leqslant i\leqslant n\}$ 为负相协的(NA),如果对每一不相交的子集 $A,B\subset\{1,2,\cdots,n\}$,有

$$\mathrm{Cov}(f(X_i, i\in A), g(X_j, j\in B))\leqslant 0,$$

其中,f 和 g 是使上式有意义且对各变元不降的函数. 称随机变量序列 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 是 NA 的,如果其每一个有限子集是 NA 的.

下面一个相依变量的概念是负超可加相依(negatively superadditive dependent, NSD)随机变量,它比 NA 随机变量要弱一些.

定义 0.1[8] 函数 $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 称为超可加的,如果 $\phi(x\vee y)+\phi(x\wedge y)\geqslant\phi(x)+\phi(y)$ 对任意的 $x,y\in\mathbb{R}^n$ 成立. 其中,$\vee$ 表示两者之间的最大值,$\wedge$ 表示两者之间的最小值.

定义 0.2[3] 称随机向量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为负超可加相依(NSD)的,如果

$$E\phi(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leqslant E\phi(X_1^*,X_2^*,\cdots,X_n^*)\tag{1}$$

式中,$X_1^*,X_2^*,\cdots,X_n^*$ 是相互独立的,且对每一个 i,X_i^* 和 X_i 有相同的分布,ϕ 是一个超可加函数且使得式(1)中的期望存在. 称随机变量序列 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为 NSD 的,如果对任意的 $n\geqslant 1$,$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 NSD 的.

NSD 随机变量的概念是在文献[7]中引入的,它是建立在超可加函数的基础上. 文献[7]举例说明了 NSD 推不出 NA,且提出了一个开放性的问题:NA 能不能推出 NSD? 文献[9]解决了这个开放性的问题,指出 NA 是能推出 NSD 的. 文献[10]推导出 NSD 随机变量的二次型形式的两个极大值不等式和强大数定律. 文献[11]建立了 NSD 随机变量的强极限定理. 文献[12]研究了 NSD 随机变量阵列的完全收敛性并给出了它在非参数回归模型中的应用. 文献[13]给出了 NSD 随机变量的 Rosenthal 型矩不等式的一些具体应用. 本文的主要目的就是进一步探究在不同分布下 NSD 随机变量序列加权和的完全收敛性.

定义 0.3 称随机变量序列 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 被随机变量 X 随机控制,如果存在一个正数 C,使得

$$P(|X_n|>x)\leqslant CP(|X|>x),\ x\geqslant 0,\ n\geqslant 1.$$

全文中,C 表示不依赖于 n 的正常数,它在不同的地方可取不同的值. $a_n=O(b_n)$ 表示对所有的 $n\geqslant 1$,有 $a_n\leqslant Cb_n$. $I(A)$ 是集合 A 上的示性函数. 令 $\log x=\ln\max(x,e)$.

1 引理

在这一部分,我们给出几个重要的引理.

引理 1.1[7] 如果 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 NSD,且 $g_1,g_2,\cdots,g_n$ 都是非降函数,则 $(g_1(X_1),g_2(X_2),\cdots,g_n(X_n))$ 是 NSD.

引理 1.2[7,12] 设 $p>1$,$\{X_n, n\geqslant 1\}$ 是 NSD 随机变量序列且 $E|X_i|^p<\infty$,则对任意的 $n\geqslant 1$,

$$E\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^{k}X_i\Big|^p\Big)\leqslant 2^{3-p}\sum_{i=1}^{n}E|X_i|^p,\ 1<p\leqslant 2\tag{2}$$

引理 1.3[7,12] 设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 是均值为零的 NSD 随机变量序列且其二阶矩存在. 令

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i,\ B_n=\sum_{i=1}^{n}EX_i^2.$$

则对任意的 $x>0$,$y>0$ 和 $n\geqslant 1$,

$$P\big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant x\big)\leqslant 2P\big(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k|\geqslant y\big)+8\Big(\frac{2B_n}{3xy}\Big)^{x/(12y)}\tag{3}$$

引理 1.2 是 NSD 变量的 Marcinkiewicz-Zygmund 型矩不等式,引理 1.3 是 Kolmogorov 型指数概率不等式.

引理 1.4 设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 是 NSD 随机变量序列,则存在正常数 C,使得对任意的 $\epsilon\geqslant 0$,$n\geqslant 1$,

$$\big[1-P\big(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|>\epsilon\big)\big]^2\sum_{i=1}^{n}P(|X_i|>\epsilon)\leqslant CP\big(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|>\epsilon\big)\tag{4}$$

证明 设 $A_i=(|X_i|>\epsilon)$,且

$$a_n=1-P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)=1-P\big(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i|>\epsilon\big).$$

为了不失一般性,假设 $a_n>0$. 由引理 1.1 知 $\{I(X_i>\epsilon)-EI(X_i>\epsilon), i\geqslant 1\}$ 和 $\{I(X_i<-\epsilon)-EI(X_i<-\epsilon), i\geqslant 1\}$ 仍然是 NSD. 根据式(2)我们有

$$E(\sum_{i=1}^{n}(I(A_i)-EI(A_i)))^2\leqslant$$
$$2E(\sum_{i=1}^{n}(I(X_i>\varepsilon)-EI(X_i>\varepsilon)))^2+$$
$$2E(\sum_{i=1}^{n}I(X_i<-\varepsilon)-EI(X_i<-\varepsilon))^2\leqslant$$
$$C\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

结合 Canchy-Schwarz 不等式,可以得到

$$\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i\cap(\bigcup_{j=1}^{n}A_j))=$$
$$\sum_{i=1}^{n}E(I(A_i)I(\bigcup_{j=1}^{n}A_j))\leqslant$$
$$(E(\sum_{i=1}^{n}(I(A_i)-EI(A_i)))^2EI(\bigcup_{j=1}^{n}A_j))^{1/2}+$$
$$(1-a_n)\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\leqslant$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{C(1-a_n)}{a_n}+a_n\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\right)+$$
$$(1-a_n)\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

则 $a_n^2\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\leqslant C(1-a_n)$,此即推出了式(4). □

接下来的引理 1.5 是随机控制的基本性质,证明过程可以参阅文献[14-16].

引理 1.5　设$\{X_n,n\geqslant1\}$是被随机变量 X 随机控制的随机变量序列,则对任意的 $\alpha>0$ 和 $b>0$,有下面两式成立:

$$E|X_n|^{\alpha}I(|X_n|\leqslant b)\leqslant$$
$$C_1[E|X|^{\alpha}I(|X|\leqslant b)+b^{\alpha}P(|X|>b)],$$
$$E|X_n|^{\alpha}I(|X_n|>b)\leqslant C_2E|X|^{\alpha}I(|X|>b).$$

其中,C_1 和 C_2 是正数.进一步有,$E|X_n|^{\alpha}\leqslant CE|X|^{\alpha}$,其中,$C$ 是正数.

利用引理 1.3,且类似于文献[17,引理 3.1]的证明,可以得到下面的结果.

引理 1.6　设$\{X_{ni},1\leqslant i\leqslant k_n,n\geqslant1\}$是 NSD 随机变量阵列,其中,$\{k_n,n\geqslant1\}$是正实数序列且满足当 $n\to\infty$时,$k_n\uparrow\infty$,$\{a_n,n\geqslant1\}$是正实数列.假定下面的条件都满足:

① 对任意的 $\varepsilon>0$,
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sum_{i=1}^{k_n}P(|X_{ni}|>\varepsilon)<\infty;$$
② 对某个 $\delta>0$,存在 $q\geqslant1$ 使得
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\sum_{i=1}^{k_n}\mathrm{Var}(X_{ni}I(|X_{ni}|\leqslant\delta)))^q<\infty,$$
则
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nP(\max_{1\leqslant m\leqslant k_n}|\sum_{i=1}^{m}(X_{ni}-EX_{ni}I(X_{ni}|\leqslant\delta))|>\varepsilon)<\infty,\ \forall\varepsilon>0\tag{5}$$

2　主要结果及其证明

定理 2.1　设$\{X_n,n\geqslant1\}$是被随机变量 X 控制的 NSD 随机变量序列,满足 $EX_i=0,i\geqslant1$,且对某个 $1<p\leqslant2,r>0$,有 $E|X|^p/(\log|X|)^r<\infty$.令 $\beta\in\mathbb{R}$,假设$\{b_{ni},1\leqslant i\leqslant n,n\geqslant1\}$是常数列,且满足下列条件:

① 对任意的 $\varepsilon>0$,
$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta}\sum_{i=1}^{n}P(|b_{ni}X_i|>\varepsilon)<\infty;$$
② 存在 $j\geqslant1$,使得
$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta}(\sum_{i=1}^{n}|b_{ni}|^p(\log n)^r)^j<\infty;$$
③ $\sum_{i=1}^{n}|b_{ni}|^p=o(1/(\log n)^r)$.

则对任意的 $\varepsilon>0$,有
$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta}P(\max_{1\leqslant m\leqslant n}|\sum_{i=1}^{m}b_{ni}X_i|>\varepsilon)<\infty\tag{6}$$

证明　当 $\beta<-1$ 时,结果是显然的.所以这里我们假设 $\beta\geqslant-1$.注意到 $b_{ni}=b_{ni}^{+}-b_{ni}^{-}$,不失一般性,我们假设 $b_{ni}>0$.对 $n\geqslant1$,$1\leqslant i\leqslant n$,定义:

$$Y_{ni}=b_{ni}[X_iI(|X_i|\leqslant f(n))+$$
$$f(n)I(X_i>f(n))-f(n)I(X_i<-f(n))],$$
$$Z_{ni}=b_{ni}\{[X_i-f(n)]I(X_i>f(n))+$$
$$[X_i+f(n)]I(X_i<-f(n))\},$$

其中,$f(x)$是定义在$[0,\infty)$上的非降函数,满足 $f(0)=0$,且对所有充分大的 n,
$$f(n)=n^{(\beta+2)/p}(\log n)^{r/p}.$$

对固定的 $n\geqslant1$,引理 1.1 表明$\{Y_{ni},1\leqslant i\leqslant n\}$仍是 NSD 随机变量.注意到 $Y_{ni}+Z_{ni}=b_{ni}X_i$,要证式(6),我们只要证明:

$$I_1=\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta}P(\max_{1\leqslant m\leqslant n}|\sum_{i=1}^{m}Z_{ni}|>\varepsilon)<\infty,$$
$$I_2=\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta}P(\max_{1\leqslant m\leqslant n}|\sum_{i=1}^{m}Y_{ni}|>\varepsilon)<\infty.$$

首先,我们来证明 $I_1<\infty$.注意到对所有的充分大 n,$f(n)=n^{(\beta+2)/p}(\log n)^{r/p}$,故有

$$I_1 \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta+1}\sum_{i=n}^{\infty} P(f(i) < |X| \leqslant f(i+1)) \leqslant C\sum_{i=1}^{\infty} P(f(i) < |X| \leqslant f(i+1))(f(i))^p/(\log f(i))^r \leqslant CE|X|^p/(\log|X|)^r < \infty \tag{7}$$

要证 $I_2<\infty$，需用到引理 1.6，其中,序列是$\{Y_{ni}\}$，$a_n=n^\beta$，$k_n=n$. 由式(7)和条件①得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\beta \sum_{i=1}^{n} P(|Y_{ni}| > \epsilon) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^\beta \sum_{i=1}^{n} [P(|X_i| > f(n)) + P(|X_i| \leqslant f(n), |b_{ni}X_i| > \epsilon)] \leqslant CE|X|^p/(\log|X|)^r + \sum_{n=1}^{\infty} n^\beta \sum_{i=1}^{n} P(|b_{ni}X_i| > \epsilon) < \infty,$$

这表明引理 1.6 的条件①是满足的. 又注意到 $1<p\leqslant 2$，我们可由引理 1.5 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\beta (\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(Y_{ni}I(|Y_{ni}| \leqslant 1)))^j \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^\beta (\sum_{i=1}^{n} EY_{ni}^2 I(|Y_{ni}| \leqslant 1))^j \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^\beta (\sum_{i=1}^{n} |b_{ni}|^p E|X|^p I(|X| \leqslant f(n)))^j + C\sum_{n=1}^{\infty} n^\beta (\sum_{i=1}^{n} |b_{ni}|^p (f(n))^p P(|X| > f(n)))^j \doteq I_3 + I_4.$$

根据 $E|X|^p/(\log|X|)^r<\infty$和条件②得

$$I_3 \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^\beta (\sum_{i=1}^{n} |b_{ni}|^p (\log f(n))^r E|X|^p/(\log|X|)^r I(|X| \leqslant f(n)))^j < \infty \tag{8}$$

易见对充分大的 $M>0$，$(\log x)^r/x^p$ 在$[M,\infty)$上是减函数，再次根据 $E|X|^p/(\log|X|)^r<\infty$ 和条件②得到

$$I_4 \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^\beta (\sum_{i=1}^{n} |b_{ni}|^p (\log f(n))^r E|X|^p/(\log|X|)^r I(|X| > f(n)))^j < \infty \tag{9}$$

由式(8)和(9)知，引理 1.6 的条件②也满足了. 故根据引理 1.6 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\beta P(\max_{1\leqslant m\leqslant n} |\sum_{i=1}^{m} (Y_{ni} - EY_{ni}I(|Y_{ni}| \leqslant 1))| > \epsilon) < \infty.$$

现在要证 $I_2<\infty$，只需证明

$$\left.\begin{aligned} I_5 \doteq \max_{1\leqslant m\leqslant n} |\sum_{i=1}^{m} EY_{ni}I(|Y_{ni}| \leqslant 1)| \to 0, \\ \text{当 } n\to\infty \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

注意到

$$Y_{ni}I(|Y_{ni}| \leqslant 1) + Y_{ni}I(|Y_{ni}| > 1) + Z_{ni} = b_{ni}X_i$$

且 $EX_i=0$，则有

$$I_5 \leqslant \sum_{i=1}^{n} E|Y_{ni}|I(|Y_{ni}| > 1) + \sum_{i=1}^{n} E|Z_{ni}| \doteq I_6 + I_7.$$

易见：如果$|b_{ni}|f(n)>1$，则

$$\{|Y_{ni}| > 1\} = \{|X_i| > f(n)\} \cup \{|X_i| \leqslant f(n), |b_{ni}X_i| > 1\}.$$

结合 $E|X|^p/(\log|X|)^r<\infty$，条件③和引理 1.5，得

$$\begin{aligned} I_6 = &\sum_{i:|b_{ni}|f(n)>1} \{E|Y_{ni}|I(|X_i| > f(n)) + E|Y_{ni}|I(|X_i| \leqslant f(n)), |b_{ni}X_i| > 1\} \leqslant \\ &\sum_{i=1}^{n} |b_{ni}f(n)|^p P(|X_i| > f(n)) + \sum_{i=1}^{n} |b_{ni}|^p E|X_i|^p I(|X_i| \leqslant f(n)) \leqslant \\ &C\sum_{i=1}^{n} |b_{ni}|^p (\log f(n))^r E|X|^p/(\log|X|)^r I(|X| > f(n)) + \\ &C\sum_{i=1}^{n} |b_{ni}|^p (\log f(n))^r E|X|^p/(\log|X|)^r I(|X| \leqslant f(n)) \leqslant \\ &C\sum_{i=1}^{n} |b_{ni}|^p (\log f(n))^r \to 0, \text{当 } n\to\infty \end{aligned} \tag{11}$$

再次利用 Hölder's 不等式、条件③和引理 1.5，有

$$I_7 \leqslant C\sum_{i=1}^{n} |b_{ni}| (\log f(n))^r (f(n))^{-(p-1)} E|X|^p/(\log|X|)^r I(|X|>f(n)) \leqslant$$
$$C(\sum_{i=1}^{n}|b_{ni}|^p)^{1/p} n^{1-1/p} (\log f(n))^r (f(n))^{-(p-1)} E|X|^p/(\log|X|)^r I(|X|>f(n)) \leqslant$$
$$C(\sum_{i=1}^{n}|b_{ni}|^p)^{1/p} n^{-(\beta+1)(p-1)/p} (\log n)^{r/p} E|X|^p/(\log|X|)^r I(|X|>f(n)) \to 0,$$
$$\text{当 } n\to\infty \tag{12}$$

故由式(11)和(12)，能推出式(10)．定理证毕． □

定理 2.2 设 $1<\alpha\leqslant 2,\alpha>\gamma>0,\{X_n,n\geqslant 1\}$是被随机变量 X 控制的 NSD 随机变量序列，满足 $EX_i=0$，$i\geqslant 1, E|X|^\alpha/(\log|X|)^{\alpha/\gamma-\delta}<\infty$，其中，$0<\delta<\alpha/\gamma$．假设$\{a_{ni}, 1\leqslant i\leqslant n, n\geqslant 1\}$是实数列，且满足

$$\sum_{i=1}^{n}|a_{ni}|^\alpha = O(n), b_n = n^{1/\alpha}(\log n)^{1/\gamma}.$$

则对$\forall \epsilon>0$,下面两式是等价的：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P(|a_{ni}X_i|>b_n\epsilon)<\infty \tag{13}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P(\max_{1\leqslant m\leqslant n}|\sum_{i=1}^{m}a_{ni}X_i|>b_n\epsilon)<\infty \tag{14}$$

证明 首先，根据定理 2.1 证明式(13)能推出式(14)．令

$$\beta=-1,\ p=\alpha,$$
$$r=\alpha/\gamma-\delta,\ b_{ni}=a_{ni}/b_n.$$

由式(13),很容易证明，定理 2.1 的条件①是满足的．注意到

$$\sum_{i=1}^{n}|b_{ni}|^p(\log n)^r \leqslant C(\log n)^{-\delta},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\beta(\sum_{i=1}^{n}|b_{ni}|^p(\log n)^r)^j \leqslant$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(\log n)^{-\delta j},$$

取 $j>\max\{1,1/\delta\}$，则定理 2.1 的条件②和③满足．因此由定理 2.1 立即就得到了式(14)．

接下来我们证明式(14)能推出式(13)．为了不失一般性,我们假定 $b_{ni}>0$．注意到

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|b_{ni}X_i| \leqslant 2\max_{1\leqslant m\leqslant n}|\sum_{i=1}^{m}b_{ni}X_i|,$$

由引理 1.4 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P(\max_{1\leqslant m\leqslant n}|\sum_{i=1}^{m}a_{ni}X_i|>b_n\epsilon) \geqslant$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|b_{ni}X_i|>2\epsilon) \geqslant$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[1-P(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|b_{ni}X_i|>2\epsilon)]^2 \cdot$$
$$\sum_{i=1}^{n}P(|b_{ni}X_i|>2\epsilon) \tag{15}$$

现在我们先来证明 $P(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|b_{ni}X_i|>2\epsilon)\to 0$．$Y_{ni}$ 和 Z_{ni} 与定理 2.1 中的记号一样．根据 Markov 不等式、定理 2.1 中的证明以及引理 1.5，有

$$P(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|b_{ni}X_i|>2\epsilon) \leqslant$$
$$\epsilon^{-p}\sum_{i=1}^{n}E|Y_{ni}|^p + \epsilon^{-1}\sum_{i=1}^{n}E|Z_{ni}| \leqslant$$
$$C\sum_{i=1}^{n}|b_{ni}|^p(\log f(n))^r E|X|^p/(\log|X|)^r +$$
$$C(\sum_{i=1}^{n}|b_{ni}|^p)^{1/p} n^{-(\beta+1)(p-1)/p}(\log n)^{r/p} \cdot$$
$$E|X|^p/(\log|X|)^r \leqslant$$
$$C(\log n)^{-\delta}E|X|^\alpha/(\log|X|)^{\alpha/\gamma-\delta} +$$
$$C(\log n)^{-\delta/\alpha}E|X|^\alpha/(\log|X|)^{\alpha/\gamma-\delta} \to 0,$$
$$\text{当 } n\to\infty. \tag{16}$$

结合式(15)和(16)，可以得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P(\max_{1\leqslant m\leqslant n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ni}X_i|>b_n\epsilon) \geqslant$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P(|b_{ni}X_i|>2\epsilon).$$

故式(14)能推出式(13)．定理证毕． □

注 2.1 本文中定理 2.1 和 2.2 的结果将文献[18]中关于同分布的 NA 随机变量序列的结果推广到了 NSD 随机变量序列的情形，且不需要同分布的条件．

参考文献(References)

[1] Bai Z D, Cheng P E. Marcinkiewicz strong laws for linear statistics[J]. Statistics & Probability Letters, 2000, 46: 105-112.

[2] Cai G H. Strong laws for weighted sums of NA random variables[J]. Metrika, 2008, 68: 323-331.

[3] Sung S H. On the strong convergence for weighted sums of random variables[J]. Statistical Papers, 2011, 52: 447-454.

[4] Shen A T. On strong convergence for weighted sums of a class of random variables [J]. Abstract and Applied Analysis, 2013, 2013: Article ID 216236.

[5] Alam K, Saxena K M L. Positive dependence in multivariate distributions [J]. Communications in Statistics: Theory and Methods, 1981, 10: 1 183-1 196.

[6] Joag-Dev K, Proschan F. Negative association of random variables with applications [J]. Annals of Statistics, 1983, 11 (1): 286-295.

[7] Hu T Z. Negatively superadditive dependence of random variables with applications[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2000, 16: 133-144.

[8] Kemperman J H B. On the FKG-inequalities for measures on a partially ordered space[J]. Nederl Akad Wetensch Proc Ser A, 1977, 80: 313-331.

[9] Christofides T C, Vaggelatou E. A connection between supermodular ordering and positive/negative association [J]. Journal of Multivariate Analysis, 2004, 88: 138-151.

[10] Eghbal N, Amini M, Bozorgnia A. Some maximal inequalities for quadratic forms of negative superadditive dependence random variables [J]. Statistics & Probability Letters, 2010, 80: 587-591.

[11] Shen Y, Wang X J, Yang W Z, et al. Almost sure convergence theorem and strong stability for weighted sums of NSD random variables[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2013, 29 (4): 743-756.

[12] Wang X J, Deng X, Zheng L L, et al. Complete convergence for arrays of rowwise negatively superadditive- dependent random variables and its applications[J]. Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics, 2014, 48: 834-850.

[13] Shen A T, Zhang Y, Volodin A. Applications of the Rosenthal-type inequality for negatively super-additive dependent random variables[J]. Metrika, 2014: DOI 10.1007/s00184-014-0503-y.

[14] 吴群英. 混合序列的概率极限理论[M]. 北京:中国科学出版社, 2006.

[15] Wu Q Y. A complete convergence theorem for weighted sums of arrays of rowwise negatively dependent random variables[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2012, 2012: 50.

[16] Shen A T. Bernstein-type inequality for widely dependent sequence and its application to nonparametric regression models[J]. Abstract and Applied Analysis, 2013, 2013: Article ID 862602.

[17] Shen A T. On the strong convergence rate for weighted sums of arrays of rowwise negatively orthant dependent random variables [J]. RACSAM, 2013, 107 (2): 257-271.

[18] Chen P Y, Sung S H. On the strong convergence for weighted sums of negatively associated random variables[J]. Statistics and Probability Letters, 2014, 92: 45-52.