第44卷第5期 中国科学技术大学学报 Vol. 44, No. 5
2014年5月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA May 2014

文章编号:0253-2778(2014)05-0439-05

Landau 阻尼和能量守恒

秦 宏[1],王晓钢[2],刘万东[1],郑 坚[1]

(1. 中国科学技术大学近代物理系,安徽合肥 230026; 2. 哈尔滨工业大学物理系,哈尔滨 150001)

摘要:Landau 阻尼是线性 Vlasov-Poisson 方程所描述的无碰撞等离子体中静电振荡强度的衰减或增长. 其物理本质在学术界至今一直存在争论,主流的观点认为 Landau 阻尼是波和粒子交换能量的结果. 但是目前用来解释 Landau 阻尼的物理图像和线性 Vlasov-Poisson 方程是矛盾的,这是因为线性 Vlasov-Poisson 系统的动能是守恒的,电场的能量不能转化为动能. 本文发展了和线性 Vlasov-Poisson 方程完全一致的能量关系,并证明这个能量关系在数学上就是 Landau 阻尼. 这应该是 Landau 阻尼最准确的物理图像.

关键词:Landau 阻尼;能量守恒;等离子体波

中图分类号:O53 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2014.05.009

引用格式: QING Hong, WANG Xiaogang, LIU Wandong, et al. Landau damping and energy conservation[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2014,44(5):439-443.
秦宏,王晓钢,刘万东,等. Landau 阻尼和能量守恒[J]. 中国科学技术大学学报,2014,44(5):439-443.

Landau damping and energy conservation

QING Hong[1], WANG Xiaogang[2], LIU Wandong[1], ZHENG Jian[1]

(1. *Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026, *China*;
2. *Department of Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin* 150001, *China*)

Abstract: Landau damping is a collisionless dissipation process for electrostatic plasma waves governed by the linearized Vlasov-Poisson equations. Its physical mechanism is still being debated. It is commonly believed that Landau damping is caused by the energy exchange between waves and particles. However, this picture is not compatible with the linearized Vlasov-Poisson system, because the kinetic energy of particles in the linearized Vlasov-Poisson system is conserved, and the energy of the electrical field cannot be converted into the kinetic energy for the particles. We derived an energy relation that is fully consistent

收稿日期:2014-05-23;**修回日期**:2014-05-27

基金项目:中国科学院交叉创新团队,国家自然科学基金中日韩前瞻计划(JSPS-NRF-NSFC A3 NSFC-11261140328),教育部创新团队发展计划(IRT1190)资助.

作者简介:秦宏(通讯作者),中国科学技术大学近代物理系教授,中国科学院磁约束聚变理论中心主任. 1990 年毕业于北京大学空间物理学专业,1993 年获得北京大学空间物理学硕士学位,1998 年获得普林斯顿大学天体物理学(等离子体物理)博士学位. 历任普林斯顿等离子体物理国家实验室助理研究员、副研究、研究员,并兼任普林斯顿大学天体物理系 Lecturer with the rank of Professor. 因在磁约束聚变理论和强流加速器物理领域的突出贡献,于 2004 年荣获"美国总统青年科学家工程师早期成就奖"和"美国能源部青年科学家工程师早期成就奖";2009 年入选中组部"千人计划". 近年来在国际上首先推动了等离子体物理几何理论和几何算法的研究方向,在国际一类期刊上发表论文约 120 篇.

E-mail:hongqin@ustc.edu.cn

with the linearized Vlasov-Poisson system. It is shown that this energy relation is an exact statement of Landau damping, and thus the most accurate physical picture for it.

Key words: Landau damping; energy conservation; plasma waves

0 问题的提出

Landau 阻尼是等离子体物理中最重要的物理过程. 1946 年 Landau 从线性 Vlasov-Poisson 方程出发,在数学上第一次推导出在无碰撞等离子体中静电振荡的强度根据背景粒子分布函数的情况会随时间衰减或者增长[1]. 这就是我们所说的 Landau 阻尼. 作为一种无物理耗散的阻尼过程,Landau 阻尼是等离子物理的开山之作. 其后不久,1949 年 Bohm 和 Gross 从波和粒子能量交换的角度得到了相同的结果[2]. 1968 年 Dawson 明确地指出 Landau 阻尼的物理本质是波-粒子相互作用[3]. 在此之后, O'Neil[4], Krall 和 Trivelpiece[5], Nicholson[6], Stix[7] 等都采用了这一物理图像. Landau 阻尼所表征的波-粒子相互作用成为等离子体物理的永恒主题,也在数学物理领域受到了广泛关注[8-10].

但是与 Landau 阻尼对应的具体物理过程至今似乎还没有定论,其中关键的问题在于 Landau 阻尼在物理本质上是线性的还是非线性的. 不同学者的观点大相径庭. Swanson[11], Oraevksy[12] 等认为 Landau 阻尼的本质是非线性的,而 Dawson 等却指出采用非线性模型是没有必要的[3],甚至还有学者认为 Landau 阻尼和能量交换没有关系[13-14]. 其中的矛盾,我们从下面的线性 Vlasov-Poisson 方程中可以看出端倪:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+v\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{qE_1}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial x}=4\pi q\int f_1\mathrm{d}v \tag{2}$$

式中, $f_0(v)$ 是空间均匀的背景粒子分布函数. 我们假设 $f_0(v)$ 不产生宏观流,即 $\int f_0(v)\mathrm{d}v=0$, 且 $\lim\limits_{v\to\pm\infty}f_0(v)=0$. Landau 就是从方程(1) 和(2) 推导出 Landau 阻尼的. 对方程(1) 即线性 Vlasov 方程求二阶矩并对整个空间积分得到

$$\iint\mathrm{d}x\mathrm{d}v v^2\frac{\partial f_1}{\partial t}+\iint\mathrm{d}x\mathrm{d}v v^3\frac{\partial f_1}{\partial x}=0 \tag{3}$$

如果进一步假设 f_1 具有空间周期性或者系统是有界的,即 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f_1(x,v)=0$,则有

$$\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t}=0 \tag{4}$$

$$T_1\equiv\iint\mathrm{d}x\mathrm{d}v\frac{m}{2}v^2 f_1 \tag{5}$$

显然系统的整体动能 T_1(包括了热运动的粒子运动的能量)是守恒的. 因此线性 Vlasov-Poisson 系统从整体来讲是不允许电场的能量传递给粒子而变成动能的,这就是矛盾所在. 一方面,Landau 阻尼是线性方程的结果,另一方面,线性系统又不允许能量的交换. 如果坚持波-粒子相互作用的物理图像,那就必须脱离线性系统所描述的物理过程. 仔细分析目前所有用来解释 Landau 阻尼的波-粒子相互作用的物理模型,可以发现,这些模型都或多或少地引入了和线性方程不相容的物理内容,比如由碰撞引起的混合[15-18]或者非线性[7]相互作用.

本文的目标是解决这一矛盾. 我们的理论分析表明,由方程(1)～(2)所描述的 Landau 阻尼的物理本质的确是波和粒子的能量交换. 但这种能量交换并不引起线性系统粒子动能的增加或减少. 线性系统(1)～(2)的能量是不“守恒”的. 这两个事实并不矛盾,取代能量“守恒”的是一个“非守恒”的波-粒子相互作用的能量关系. 这个线性系统(1)～(2)严格满足的能量关系就是 Landau 阻尼的物理本质.

需要强调的是,我们所寻找的是和线性系统(1)～(2)的 Landau 阻尼完全一致的物理机制. 该机制应该是线性系统(1)～(2)严格满足的. 从另一个角度来看,如果我们不强调和线性系统(1)～(2)在理论和逻辑上的一致性,那么系统的动能就未必需要守恒. 我们可以采取其他方法,比如非线性 Vlasov 方程,来计算粒子的动能. 然后进一步讨论粒子的动能和电场能量的交换. 这种方法在物理上并非不真实,只是和线性 Vlasov-Poisson 方程相矛盾,所以不能用来解释线性系统(1)～(2)的 Landau 阻尼. Landau 在他的文章[1]中没有给 Landau 阻尼做出任何物理解释. 同时,我们注意到 Bohm 和 Gross 的论文[2]中也没有提到过解释 Landau 的结果. 他们只是从粒子轨道方程出发,计算了静电波的增长率. 是后人错误地把 Bohm 和 Gross 的结果当成了系统(1)～(2)的 Landau 阻尼的物理图像. 我们在本文

的节 1 提出系统(1)～(2)的能量关系，并阐述该能量关系和非线性系统的联系. 在节 2 中我们从这个线性能量关系出发推导出 Landau 阻尼率，从而证实该能量关系就是 Landau 阻尼的物理本质.

1　线性 Vlasov-Poisson 系统的能量关系

我们现在来推导线性 Vlasov-Poisson 系统的能量关系. 首先，方程(4)就是第一个能量关系. 虽然粒子的动能不变，但电场能量

$$w_1 \equiv \frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}x E_1^2 \tag{6}$$

却不守恒. 其变化率可以由 Poisson 方程(2)给出，

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial x \partial t} = 4\pi q\int \mathrm{d}v \frac{\partial f_1}{\partial t} = -4\pi q \frac{\partial}{\partial x}\int \mathrm{d}v v f_1 \tag{7}$$

因此

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} = -4\pi q\int \mathrm{d}v v f_1 + c_1(t) \tag{8}$$

式中，$c_1(t)$是一个不随空间位置变化的函数. $c_1(t)$的下标“1”表示它与线性扰动成正比. 如果扰动存在于有界的空间，即 $\mathrm{Supp}(E_1, f_1)$有界，则 $c_1(t)=0$. 对于扰动场在空间无界的情况，$c_1(t)$一般不为零. 由此，

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{dx} \frac{\partial E_1^2}{\partial t} = -4\pi q\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}v v f_1 E_1 + \int \mathrm{d}x c_1(t) E_1 \tag{9}$$

对于扰动场有界或者具有空间周期性的情况，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}t} = -q\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}v v f_1 E_1 \tag{10}$$

其物理意义是明确的. 电场能量的改变等于它对系统做功的负值. 方程(10)就是我们要找的线性系统(1)～(2)的第二个能量关系. 当 E_1 和 f_1 由方程(1)～(2)解出后，它们必须满足方程(4)和(10). 同时这也表明线性系统的总能量是不守恒的：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T_1 + w_1) = -q\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}v v f_1 E_1 \neq 0 \tag{11}$$

这一点和非线性系统是不同的，也是我们需要特别关注的. 非线性 Vlasov-Poisson 方程为

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{qE}{m}\frac{\partial f}{\partial v} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi q\int (f - f_0)\mathrm{d}v \tag{13}$$

系统整体的总能量是守恒的，

$$\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}v \frac{1}{2} m v^2 f + \frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}x E^2 = \mathrm{const} \tag{14}$$

这是一个非线性守恒律，我们可以针对方程(12)～(13)所描述的物理系统讨论动能和电场能量的相互转换. 但对线性系统和线性 Landau 阻尼而言，我们不能这样做. 线性系统能量“不守恒”了，但能量关系(4)和(10)是成立的，即电场能量的损失是由于电场对粒子做功. 事实上这应该是能量守恒的更准确的概念. 在下一节，我们将证明能量关系(10)就是线性 Landau 阻尼的物理本质.

读者或许会问电场对粒子做了功，但粒子的动能没有增加. 那么什么是电场能量的去向呢? 在本节的最后我们来回答这个问题. 首先，对线性系统来说，这个问题的提法是不成立的. 因为线性系统的解满足方程(11)，能量就应该“不守恒”. 从方程(1)～(2)出发，我们去寻找 E_1 和 f_1 的解，在数学上我们关心 E_1 和 f_1 的解是否准确地满足方程(1)～(2)以及相应的能量关系(4)和(10). 至于损失的 w_1 的去向，原本不是线性系统所关心的问题. 线性系统也回答不了这个问题.

当然从物理上我们还是好奇电场能量的去向. 这个问题需要从线性系统的框架之外来寻找答案. 我们从非线性 Vlasov-Poisson 方程(12)～(13)来观察. 对扰动场进行小扰动展开，

$$f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \cdots \tag{15}$$

$$E = \varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2 + \cdots \tag{16}$$

非线性 Vlasov-Poisson 方程(12)～(13)的一阶量即为线性 Vlasov-Poisson 方程(1)～(2). 二阶量为

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + v\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{qE_2}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{qE_1}{m}\frac{\partial f_1}{\partial v} = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial x} = 4\pi q\int f_2 \mathrm{d}v \tag{18}$$

对方程(17)求二阶矩并对空间积分得到

$$\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}v v^2 \frac{\partial f_2}{\partial t} + \iint \mathrm{d}x\mathrm{d}v v^3 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \iint \mathrm{d}x\mathrm{d}v v^2 \frac{qE_1}{m}\frac{\partial f_1}{\partial v} = 0.$$

如果系统的扰动是有界的或者具有周期性，我们有

$$\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t} = \iint \mathrm{d}x\mathrm{d}v v q E_1 f_1 \tag{19}$$

$$T_2 \equiv \iint \mathrm{d}x\mathrm{d}v \frac{m}{2} v^2 f_2 \tag{20}$$

结合方程(10)我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(w_1 + T_2) = 0 \tag{21}$$

即电场的能量转化了二阶动能. 从物理上来看，这个结论非常合理，但这个能量关系是独立于线性系统

之外的.换句话说,从线性 Vlasov-Poisson 方程(1)～(2)解出 f_1 和 E_1 之后,问题就解决了.它们只满足能量关系(4)和(10).我们没有必要去解二阶方程(17)和(18),因此也无从了解方程(19)和(21)是否满足.所以方程(19)和(21)从逻辑上和物理上不应该是线性方程 Landau 阻尼的物理原因.

2 线性 Landau 阻尼的物理本质

在本节,我们从和线性 Vlasov-Poisson 方程完全一致的能量关系(4)和(10)来推导出正确的 Landau 阻尼率,从而证明 Landau 阻尼的物理本质是波-粒子的能量交换.假定系统经过一定时间的演化后处于一个 Landau"本征态",即扰动场的波数 $k\in R$ 和频率 $\omega=\omega_r+\mathrm{i}\nu$ 满足色散关系

$$1+\frac{\omega_p^2}{nk}\int_L \mathrm{d}v\frac{1}{(\omega-kv)}\frac{\partial f_0}{\partial v}=0 \tag{22}$$

式中,$\int_L \mathrm{d}v$ 为 Landau 积分路径;$n=\int \mathrm{d}v f_0(v)$ 是等离子体密度;$\omega_p^2=4\pi nq^2/m$ 是等离子体频率平方.该"本征态"的电场具有以下形式:

$$E_1=\hat{E}_1\exp(\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega t) \tag{23}$$

与之相对应的分布函数 f_1 可以由下面的线性 Vlasov 方程解出:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+v\frac{\partial f_1}{\partial x}=-\frac{q}{m}\hat{E}_1\exp(\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega t)\frac{\partial f_0}{\partial v} \tag{24}$$

f_1 的一般解为

$$f_1=f_{1g}(x-vt,v)+\frac{q}{m}\frac{\hat{E}_1}{\mathrm{i}(\omega-kv)}\frac{\partial f_0}{\partial v}\exp(\mathrm{i}kx-\mathrm{i}\omega t) \tag{25}$$

式中,右边第二项是一个特解,而 $f_{1g}(x-vt,v)$ 是和方程(24)对应的齐次方程的通解.显然 $f_{1g}(x-vt,v)$ 是一个在 $t=0$ 时刻为 $f_{1g}(x,v)$ 的自由流动解.将 f_1 代入 Poisson 方程得到

$$\frac{\omega_p^2}{k}\int \mathrm{d}v\frac{1}{(\omega-kv)}\frac{\partial f_0}{\partial v}+\frac{4\pi q\mathrm{i}}{k\hat{E}_1}\int \mathrm{d}v f_{1g}(x-vt,v)=-1 \tag{26}$$

我们选取适当的 $f_{1g}(x,v)$ 使得方程(26)的左边为 Landau 积分,即

$$\frac{\omega_p^2}{nk}\int_L \mathrm{d}v\frac{1}{(\omega-kv)}\frac{\partial f_0}{\partial v}=\frac{\omega_p^2}{nk}\int \mathrm{d}v\frac{1}{(\omega-kv)}\frac{\partial f_0}{\partial v}+\frac{4\pi q\mathrm{i}}{k\hat{E}_1}\int \mathrm{d}v f_{1g}(x-vt,v) \tag{27}$$

如此选取的 $f_{1g}(x,v)$ 保证了系统处于色散关系(22)所给出的 Landau"本征态"(ω,k).具体地,

$$f_{1g}(x,v)=-\frac{\alpha q}{mk}\frac{\partial f_0}{\partial v}\delta\left(v-\frac{\omega}{k}\right)\hat{E}_1\exp(\mathrm{i}kx).$$

$$\alpha=\begin{cases}0, & \nu>0\\ 1, & \nu=0\\ 2, & \nu<0\end{cases}$$

现在我们可以把 f_1 等价地写成

$$f_1=\left[-\frac{\pi}{k}\frac{\partial f_0}{\partial v}\delta\left(v-\frac{\omega}{k}\right)+P\frac{1}{\mathrm{i}(\omega-kv)}\frac{\partial f_0}{\partial v}\right]\cdot\frac{m}{q}\hat{E}_1\exp(\mathrm{i}kx) \tag{28}$$

式中,P 表示主值.

针对这个 Landau"本征态"(ω,k),我们再来考察和线性 Vlasov-Poisson 相对应是能量关系(10).因为现在 f_1 和 E_1 都是具有空间周期的复数场,能量关系(10)转化为

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle E_1E_1^*\rangle=-4\pi\langle\int \mathrm{d}vqvf_1E_1^*+c.c.\rangle \tag{29}$$

式中,$\langle\ \rangle$ 表示对一个空间周期的平均.将方程(23)和(28)代入方程(29),我们得到

$$2\nu=\frac{\omega_p^2}{nk}\left[\pi f_0'\left(\frac{\omega}{k}\right)\frac{\omega}{k}+P\int \mathrm{d}v\frac{\mathrm{i}\omega}{\omega-kv}f_0'+c.c.\right] \tag{30}$$

在 $\nu\ll\omega_r$ 的情况下,色散关系(22)给出 $\omega_r\approx\omega_p$,而方程(30)为

$$2\nu=\omega_p^2\left[\frac{2\pi}{nk}f_0'\left(\frac{\omega_r}{k}\right)\frac{\omega_r}{k}-\frac{2}{\omega_r^2}\nu\right] \tag{31}$$

即

$$\nu=\frac{\pi}{2n}f_0'\left(\frac{\omega_p}{k}\right)\frac{\omega_p^3}{k^2} \tag{32}$$

这就是 Landau 阻尼的基本结果.从方程(29)～(32)的推导过程来看,该结果其实就是线性 Vlasov-Poisson 所满足的能量关系(10).因此 Landau 阻尼的物理本质就是由方程(10)所表示的线性 Vlasov-Poisson 所描述的波-粒子相互作用.

3 总结和讨论

Landau 于 1946 年发现的 Landau 阻尼是线性 Vlasov-Poisson 方程的一个特殊性质.其物理成因学术界一直存在争论.主流的观点认为 Landau 阻尼是波和粒子交换能量的结果.但是目前用来解释 Landau 阻尼的物理图像和线性 Vlasov-Poisson 方程是矛盾的.线性 Vlasov-Poisson 系统的动能是守

恒的，电场的能量不允许被转化成动能.因此目前主流观点所采纳的 Landau 阻尼物理图像是不合理的.本文发展了和线性 Vlasov-Poisson 方程完全一致的能量关系，并证明这个能量关系在数学上就是 Landau 阻尼本身.我们认为这是 Landau 阻尼最为准确的物理图像.

最后，我们讨论一个深层次的问题来启发下一步的研究.对于非线性系统(12)～(13)，我们有能量守恒(14).该守恒律在小扰动的情况下表现为方程(21).另一方面，我们证明了线性 Vlasov-Poisson 所满足的能量关系(10)反映的物理内容就是 Landau 阻尼.这似乎意味着线性系统没有一个能量守恒律.其实不然，我们在这里不加证明地给出下面的线性系统的一个形式能量守恒律：

$$\frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}x E_1^2 - \iint \mathrm{d}x\mathrm{d}v \frac{mv}{2f_0'(v)} f_1^2 = \mathrm{const} \quad (33)$$

该守恒律具有能量的量纲，但动能部分的结构比较特殊，因此我们称之为形式能量守恒律.如果我们把线性 Vlasov-Poisson 方程看成是一个 Lie-Poisson 系统，这个守恒量则是它的 Hamilton 量.Morrison 等在这个方向上进行了深入的研究，发展了一套被称为能量-Casimir 方法的理论框架[19].注意方程(33)中 $f_0'(v)$ 出现在分母中，这表明当 $f_0(v)$ 不是能量单调函数的时候，这个形式能量守恒是不成立的.线性和非线性系统形式能量守恒和稳定性之间有着深刻的关联，我们将在以后的工作中针对这一课题展开研究.

参考文献(References)

[1] Landau L. On the vibration of the electronic plasma [J]. J Phyiscs(USSR), 1946, 10(1): 25-34.

[2] Bohm D, Gross E P. Theory of plasma oscillations. A. Origin of medium-like behavior [J]. Physical Review, 1949, 75(12): 1851; doi: 10.1103/PhysRev.75.1851.

[3] Dawson J. On landau damping[J]. Physics of Fluids, 1961, 4: 869; doi: 10.1063/1.1706419.

[4] O'Neil T. Collisionless damping of nonlinear plasma oscillations[J]. Physics of Fluids, 1965, 8: 2255; doi: 10.1063/1.1761193.

[5] Krall N A, Trivelpiece A W. Principles of Plasma Physics [M]. San Francisco: San Francisco Press, 1986.

[6] Nicholson D R. Introduction to Plasma Theory[M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 1983.

[7] Stix T H. Waves in Plasmas [M]. New York: Springer-Verlag, 1992.

[8] Backus G. Linearized plasma oscillations in arbitrary electron velocity distributions [J]. Journal of Mathematical Physics, 1960, 1: 178; doi: 10.1063/1.1703651.

[9] Mouhot C, Villani C. On landau damping[J]. Acta mathematica, 2011, 207(1): 29-201.

[10] Villani C. Particle systems and nonlinear Landau damping[J]. Physics of Plasmas, 2014, 21: 030901; doi: 10.1063/1.4867237.

[11] Swanson D G. Plasma Waves[M]. Boston: Academic Press, 1989.

[12] Oraevsky V N. Handbook of Plasma Physic [M]. Amsterdam: North-Holland, 1983.

[13] Jones W D, Doucet H J, Buzzi J M. An Introduction to the Linear Theories and Methods of Electrostatic Waves in Plasmas [M]. Plenum Publishing Corporation, 1985.

[14] 蔡恒进，陈培仁. 线性 Vlasov 方程的准确解及对 Landau 阻尼不稳定性和共振相互作用的讨论[J]. 中国科学 A 辑，1990，20(7)：736-745.

[15] Short R W, Simon A. Damping of perturbations in weakly collisional plasmas [J]. Physics of Plasmas, 2002, 9(8): 3 245-3 253.

[16] Ng C S, Bhattacharjee A, Skiff F. Complete spectrum of kinetic eigenmodes for plasma oscillations in a weakly collisional plasma[J]. Physical Review Letters, 2004, 92(6): 065002; doi: 10.1103/PhysRevLett.92.065002.

[17] Zheng J, Qin H. On the singularity of the Vlasov-Poisson system[J]. Physics of Plasmas, 2013, 20(9): 092114; doi: 10.1063/1.4821831.

[18] Callen J D. Coulomb collision effects on linear Landau damping [J]. Physics of Plasmas, 2014, 21(5): 052106; doi: 10.1063/1.4875726.

[19] Morrison P J. Hamiltonian description of Vlasov dynamics: Action-angle variables for the continuous spectrum [J]. Transport Theory and Statistical Physics, 2000, 29: 397-414.