

## 曲面隐式化新进展

陈发来

(中国科学技术大学数学学院, 安徽合肥 230026)

**摘要:** 给定曲线/曲面的参数方程求其隐式方程, 称为曲线/曲面的隐式化. 隐式化是经典代数几何消元理论中的研究问题, 同时在现代计算数学与计算机应用的交叉学科分支——计算机辅助几何设计中有重要应用. 本文在回顾曲线与曲面隐式化的经典方法的基础上, 重点介绍近十几年发展起来的基于动曲线/曲面与  $\mu$  基理论的隐式化方法的相关进展.

**关键词:** 参数曲线; 参数曲面; 隐式化; 结式; Groebner 基; 吴方法; 动曲线/曲面;  $\mu$  基

**中图分类号:** TB115      **文献标识码:** A      **doi:** 10.3969/j.issn.0253-2778.2014.05.001

**引用格式:** Chen Falai. Recent advances on surface implicitization [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2014, 44(5): 345-361.

陈发来. 曲面隐式化新进展 [J]. 中国科学技术大学学报, 2014, 44(5): 345-361.

## Recent advances on surface implicitization

CHEN Falai

(School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

**Abstract:** The procedure of converting the parametric equation of a curve or a surface into the implicit equation is called implicitization. Implicitization is a classic elimination problem in algebraic geometry and has found important applications in computer aided geometric design — an inter-discipline in computer science and scientific computing. The classic methods for implicitization were reviewed first, and then the state of the art techniques in curve and surface implicitization were surveyed, especially the recent advances of the moving curves/surfaces method and  $\mu$  basis method developed in the last decade.

**Key words:** parametric curve; parametric surface; implicitization; resultant; Groebner basis; Wu's method; moving curves/surfaces;  $\mu$ -basis

**收稿日期:** 2014-04-14; **修回日期:** 2014-04-29

**基金项目:** 国家重点基础研究发展(973)计划(2011CB302400), 国家自然科学基金重点项目(11031007)资助.

**作者简介:** 陈发来, 中国科学技术大学数学学院教授, 国家杰出青年科学基金获得者, 中国工业与应用数学学会常务理事, 安徽省数学会秘书长. 1994年获中国科学技术大学博士学位. 主要研究领域为几何建模与计算机图形学, 发表学术论文100余篇, 主要研究工作包括代数曲面几何造型、参数曲线与曲面的隐式化、曲线与曲面的  $\mu$  基理论、T 网格上的样条理论及其应用等. 主持国家重大基础研究计划一级子课题、国家自然科学基金重点课题、中国科学院“百人计划”课题等. 2003年获宝钢优秀教师奖特等奖, 2009年获冯康科学计算奖. 作为主要成员分别于1997, 2001年两次获国家级教学成果二等奖.

E-mail: chenfl@ustc.edu.cn



## 0 引言

在计算机辅助几何设计中,几何模型有两种常见的表示形式:参数表示与隐式表示.这两种表示各有各的优点与缺点.参数表示(如 Bézier 曲线与曲面、非均匀有理 B 样条等)能较好地控制几何模型的形状,计算机生成也比较方便,但生成任意拓扑的光滑曲面与布尔计算都比较困难.反过来,隐式表示可以方便地构造任意拓扑的曲面,同时布尔运算具有封闭性.但隐式曲面控制不太方便,计算机生成也比较复杂.鉴于这两种表示的互补性,如果能同时拥有这两种表示将是很方便的事.因此,研究参数表示与隐式表示的相互转化在计算机辅助几何设计中有重要应用前景.将参数表示转化为隐式表示称为隐式化;将隐式表示转化为参数表示称为参数化.本文只限于讨论隐式化的相关方法及进展.

从经典代数几何的观点看,隐式化本质上是多元多项式方程组的消元问题.因此,结式是求解曲面隐式化的主要方法之一<sup>[1-2]</sup>.结式方法将曲线与曲面隐式方程表示为一个高阶的行列式,是一种紧凑的表示形式.不过,当参数方程具有基点(见节 1 中定义)时,结式方法失效.求解曲线、曲面隐式方程的另一个主要方法是 20 世纪 60~70 年代发展起来的 Groebner 基方法<sup>[3]</sup>.Groebner 基通过计算参数方程的理想的一组基求得隐式方程<sup>[4-5]</sup>.Groebner 基方法理论上总是可行的,不过其计算量十分巨大.吴(文俊)方法是基于特征列思想的消元方法,它也可以用来求解隐式化问题,并且效率比 Groebner 基方法有很大提高,不过仍然难以用于具体应用<sup>[6-7]</sup>.上世纪末,美国学者 Sederberg 与本文作者提出了一个崭新的曲线与曲面隐式化方法——动曲线/曲面方法<sup>[8]</sup>.动曲线/曲面方法将参数曲面的隐式方程表示为一个相对低阶的行列式,同时当曲面具有基点时算法仍然有效!因此,该方法为精确隐式化方法朝着实用化跨出了重大一步.不过动曲线/曲面方法没有完全自动化,并且没有从理论上证明该方法的可行性.为解决这一问题,曲线与曲面的  $\mu$  基理论被提出,并部分解答了动曲线/曲面方法的自动化算法问题以及理论上的可行性问题<sup>[9-11]</sup>.目前,这一方面的研究仍然是符号计算领域的热点研究问题之一.本文首先简单回顾各种经典隐式化算法,接着重点介绍基于动曲线/曲面方法及  $\mu$  基理论的隐式化算法最新进展.关于曲线/曲面隐式化的其他方法如插

值法与待定系数法<sup>[12-14]</sup>,以及近似隐式化问题<sup>[15-16]</sup>不在本文讨论范围.

本文结构安排如下:节 1 给出一些预备知识;节 2 回顾曲线/曲面隐式化的几个经典方法;节 3 介绍基于动曲线/曲面方法的隐式化方法新进展;节 4 介绍基于  $\mu$  基理论的隐式化方法新进展;最后节 5 对各种隐式化方法做一个总结与比较.

## 1 基础知识

我们用  $\mathbb{R}$  表示实数全体,  $\mathbb{C}$  表示复数全体,用  $R[t], R[s, t], R[x, y], R[x, y, z]$  等表示多项式环.

一条  $n$  次的平面有理多项式曲线可以表示为

$$\mathbf{P}(t) = \left( \frac{a(t)}{c(t)}, \frac{b(t)}{c(t)} \right) \quad (1)$$

式中,  $a(t), b(t), c(t) \in R[t]$  是  $n$  次多项式,且其公因子  $\gcd(a, b, c) = 1$ .有时为了方便起见,也将有理曲线表示成齐次形式:

$$\mathbf{P}(t) = (a(t), b(t), c(t)) \quad (2)$$

如果映射  $t \rightarrow \mathbf{P}(t)$  除有限个点外是一一的,则称上述参数表示是恰当的.本文只讨论平面有理曲线的隐式化问题,空间曲线的隐式化不在本文讨论范围.

一个双  $(m, n)$  次的有理多项式曲面可表示为

$$\mathbf{P}(s, t) = \left( \frac{a(s, t)}{d(s, t)}, \frac{b(s, t)}{d(s, t)}, \frac{c(s, t)}{d(s, t)} \right) \quad (3)$$

式中,  $a(s, t), b(s, t), c(s, t), d(s, t) \in R[s, t]$  是双  $(m, n)$  次多项式,且其公因子  $\gcd(a, b, c, d) = 1$ .上述有理曲面的齐次形式是

$$\mathbf{P}(s, t) = (a(s, t), b(s, t), c(s, t), d(s, t)) \quad (4)$$

如果映射  $(s, t) \rightarrow \mathbf{P}(s, t)$  除有限个点外是一一的,则称上述参数表示是恰当的.本文以下假定所有参数表示都是恰当的.

参数对  $(s_0, t_0)$  称为参数曲面  $\mathbf{P}(s, t)$  的基点(base point),如果

$$a(s_0, t_0) = b(s_0, t_0) = c(s_0, t_0) = d(s_0, t_0) = 0.$$

即曲面在基点没有定义.一个基点  $(s_0, t_0)$  的重数就是以下两条平面曲线

$$f(s, t) = \alpha_1 a(s, t) + \beta_1 b(s, t) + \gamma_1 c(s, t) + \delta_1 d(s, t),$$

$$g(s, t) = \alpha_2 a(s, t) + \beta_2 b(s, t) + \gamma_2 c(s, t) + \delta_2 d(s, t)$$

在  $(s_0, t_0)$  的相交重数.这里  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, i = 1, 2$  是任意常数.

注意,即使对一个实值曲面,其基点有可能是复的,并且基点可能在无穷远点.例如,考察如下参数曲面:

$$P(s, t) = (1 + s^2, 1 - t^2, 2 + s^2 - t, s^2 t + st^2 - s + 1).$$

则易知  $(i, 1)$  及  $(-i, 1)$  是曲面的两个简单(一重)基点. 如果将曲面看成双  $(2, 2)$  次曲面, 则  $(\infty, \infty)$  是一个二重基点. 今后, 我们用齐次坐标  $1:0$  表示无穷大. 例如,  $s = \infty$  可以用齐次坐标  $(s, u) = (1, 0)$  表示.  $(s, t, u) = (1, 1, 0)$  则表示方向  $(1, 1)$  上的无穷远点.

给定参数曲线 (1), 如果存在不可约多项式  $F(x, y) \in R[x, y]$  满足

$$F\left(\frac{a(t)}{c(t)}, \frac{b(t)}{c(t)}\right) \equiv 0 \quad (5)$$

则称满足上式的多项式  $F(x, y) = 0$  为参数曲线 (1) 的隐式方程.

类似地, 对参数曲面 (3), 如果存在不可约多项式  $F(x, y, z) \in R[x, y, z]$  满足

$$F\left(\frac{a(s, t)}{d(s, t)}, \frac{b(s, t)}{d(s, t)}, \frac{c(s, t)}{d(s, t)}\right) \equiv 0 \quad (6)$$

则称满足上式的多项式  $F(x, y, z) = 0$  为参数曲面 (3) 的隐式方程.

曲线与曲面隐式化就是给定参数方程, 求隐式方程的问题. 由经典代数几何的理论知道,  $n$  次参数曲线的隐式方程为  $n$  次, 且在除去一个非零常数倍数外, 隐式方程是唯一的. 同样地,  $(m, n)$  次参数曲面的隐式方程在除去一个非零常数倍数外也是唯一的, 其次数为  $2mn - r$ , 这里  $r$  是参数曲面基点(包括重数)的个数.

接下来, 我们分别介绍一些基本的代数学知识与消元工具. 读者可参考文献 [5, 17] 了解更多细节.

首先介绍多项式环的理想与代数簇的概念.

**定义 1.1** 设  $R[x_1, \dots, x_n]$  是一个多项式环.  $I \subset R[x_1, \dots, x_n]$  称为一个理想, 如果

- ①  $0 \in I$ ;
- ② 如果  $f, g \in I$ , 则  $f + g \in I$ ;
- ③ 如果  $f \in I, h \in R[x_1, \dots, x_n]$ , 则  $hf \in I$ .

如果存在多项式  $f_1, \dots, f_m \in I$  满足

$$I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle := \{h_1 f_1 + \dots + h_m f_m \mid h_1, \dots, h_m \in R[x_1, \dots, x_n]\},$$

则称  $f_1, \dots, f_m$  为  $I$  的生成元,  $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$  是由  $f_1, \dots, f_m$  生成的理想.

**定义 1.2** 设  $k$  是数域(如实数域或复数域),  $R[x_1, \dots, x_n]$  是数域  $k$  上的多项式环,  $I \subset R[x_1, \dots, x_n]$  是一个理想. 则称集合  $V(I) := \{(a_1, \dots, a_n) \in k^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ 对任意 } f \in I\}$  是理想  $I$  确定的

代数簇. 对多项式  $f_1, \dots, f_m \in R[x_1, \dots, x_n]$ , 称  $V(f_1, \dots, f_m) = V(\langle f_1, \dots, f_m \rangle)$  是由多项式  $f_1, \dots, f_m$  确定的代数簇.

由代数簇的定义, 参数曲线/曲面隐式化就是求包含曲线/曲面的最小代数簇问题.

接着引入代数模的基本知识.

**定义 1.3** 设  $R$  是一个具有单位元 1 的环.  $M$  是一个定义了加法与标量乘法的集合.  $M$  在两种运算下封闭, 且运算满足以下规则:

①  $M$  在加法运算下构成一个 Abel 群, 即加法满足结合律与交换律,  $M$  有零元素 0, 且  $M$  中任何元素都有唯一的负元素.

② 加法与标量乘法满足分配律, 即任意  $a, b \in R$  及  $f \in M$  有  $(a + b)f = af + bf$ ; 任意  $a \in R$  及  $f, g \in M$  有  $a(f + g) = af + ag$ .

③ 标量乘法满足结合律, 即任意  $a, b \in R$  及  $f \in M$  有  $(ab)f = a(bf)$ .

④ 对任意  $f \in M, 1 \cdot f = f$ .

则称  $M$  为  $R$  上的代数模. 集合  $N \subset M$  称为  $M$  的子模, 如果  $N$  在加法与标量乘法下封闭.

代数模好比线性空间. 线性空间定义在数域上, 而模定义在环上. 例如, 记  $R^m$  表示为分量为  $R$  中元素的  $m$  维向量全体, 则  $R^m$  在环的加法与乘法下构成一个代数模. 类似地, 用  $R^{m \times n}$  表示元素为  $R$  中元素的  $m \times n$  阶矩阵全体, 则  $R^{m \times n}$  也是  $R$  上的代数模.

**定义 1.4** 设  $M$  是环  $R$  上的代数模,  $F \subset M$  称为  $M$  的生成元, 如果对任意  $f \in M$ , 存在  $F$  中元素  $f_1, f_2, \dots, f_n$  及  $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$  使得  $f$  可以表示为  $f_1, f_2, \dots, f_n$  的线性组合:

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n.$$

特别地, 如果  $F$  中元素是  $R$  线性无关的, 则称  $F$  为  $M$  的一组基. 具有一组基的模称为自由模.

例如,  $R^m$  就是自由模, 因为它有一组标准基  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0), i = 1, 2, \dots, m$ . 本文中我们的讨论限于  $R$  为多项式环.

**命题 1.5** 设  $M$  是环  $R$  上的模,  $f_1, f_2, \dots, f_m \in M$  则集合

$$\text{Syzyzy} := \langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle := \{(a_1, a_2, \dots, a_m) \in R^m \mid a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_m f_m = 0\}$$

是  $R^m$  的子模, 称为  $(f_1, f_2, \dots, f_m)$  的 Syzyzy 模.

Syzyzy 模不一定是自由模. 例如  $(x, y, z) \in R[x, y, z]$  有生成元  $(-y, x, 0), (-z, 0, x), (0, z,$



**定义 1.13** 设  $f = \sum_a f_a x^a$  是  $R[x_1, \dots, x_n]$  中多项式, 固定一个单项式序将  $f$  做项的排列. 称  $f$  中单项最大的项为首项, 记为  $LT(f)$ , 该项的单项式称为首项单项式, 记为  $LM(f)$ , 该项系数称为首项系数, 记为  $LC(f)$ .

例如, 对

$$f = 2xyz + 4y^2 - 5x^3 + 7x^2z^2 \in R[x, y, z],$$

在字典序下  $LT(f) = -5x^3, LM(f) = x^3, LC(f) = -5$ .

**命题 1.14** 设  $I$  是  $R[x_1, \dots, x_n]$  的一个理想, 固定一个单项式序. 则存在  $I$  的一组基  $g_1, \dots, g_l$  满足

$$\langle LT(g_1), \dots, LT(g_l) \rangle = \langle LT(D) \rangle.$$

其中  $\langle LT(D) \rangle$  是  $I$  的所有元素的首项生成的理想.  $g_1, \dots, g_l$  称为理想  $I$  的 Groebner 基.

Buchberger<sup>[3]</sup> 在他的博士论文中提出了 Groebner 基的基本理论与算法, 以后发展了各种改进的方法以提高算法效率.

利用 Groebner 基可以进行多项式消元运算.

**命题 1.15** 设  $I \subset R[x_1, \dots, x_n]$  是理想,  $G$  是  $I$  的关于字典序  $x_1 > x_2 > \dots > x_n$  的 Groebner 基. 则对任意  $0 \leq l \leq n$ , 集合

$$G_l = G \cap R[x_{l+1}, \dots, x_n]$$

是  $l$  阶消去理想  $I_l = I \cap R[x_{l+1}, \dots, x_n]$  的 Groebner 基.

## 2 隐式化典型方法回顾

本节我们简单回顾一下求解曲线与曲面隐式方程的常用方法——结式方法、Groebner 基方法及特征列方法.

### 2.1 结式方法

对有理曲线(1), 考虑以下两个关于  $t$  的多项式是否有公共因子:

$$f(t) := c(t)x - a(t),$$

$$g(t) := c(t)y - b(t).$$

显然  $f(t)$  与  $g(t)$  有公因子当且仅当存在  $t$  使得  $x = a(t)/c(t), y = b(t)/c(t)$ , 当且仅当  $(x, y)$  是曲线(1)上的点. 因此, 我们有

**定理 2.1**<sup>[2]</sup> 有理曲线(1)的隐式方程是  $R(c(t)x - a(t), c(t)y - b(t); t) = 0$ .

利用 Sylvester 结式, 可以将曲线的隐式方程表示为一个  $2n$  阶行列式, 每个元素关于  $x, y$  是一次

的. 如果利用 Bezout 结式, 则可以将曲线的隐式方程表示为一个  $n$  阶行列式, 且每个元素关于  $x, y$  是一次的. 因此, 用 Bezout 结式表示隐式方程结果更紧凑、更有效.

对于有理曲面(3), 考虑以下 3 个关于  $s, t$  的多项式是否有公共零点:

$$f(s, t) := d(s, t)x - a(s, t),$$

$$g(s, t) := d(s, t)y - b(s, t),$$

$$h(s, t) := d(s, t)z - c(s, t).$$

显然, 曲面(3)的基点都是上述方程组的零点. 除此之外,  $(x, y, z)$  是  $f, g, h$  的公共零点当且仅当  $f, g, h$  关于  $s, t$  的结式为零. 因此有

**定理 2.2**<sup>[2]</sup> 令

$$f = a(s, t) - d(s, t)x,$$

$$g = b(s, t) - d(s, t)y,$$

$$h = c(s, t) - d(s, t)z.$$

假设有理曲面(3)没有基点, 则它的隐式方程可以由  $f, g, h$  关于  $s, t$  的 Dixon 结式给出.

Dixon 结式将没有基点的有理曲面(3)的隐式方程表示为一个  $2mn$  阶的行列式, 行列式的每个元素都是  $x, y, z$  的一次函数. 如果有理曲面具有基点, 则结式恒等于零, 因而无法给出隐式方程. 一种方法是找出 Dixon 行列式的最大非零子式<sup>[18-19]</sup>. 通常情况下该子式就是曲面的隐式方程, 但它也可能包含了某个多余的因子, 如何消去该多余因子是一个很困难的问题. Elkadi 等<sup>[20]</sup> 基于残数计算 (residue calculus) 给出了多余因子的一种消除方法. 另一种方法是所谓的摄动法<sup>[21-22]</sup>, 其基本思想是将 Dixon 行列式的对角元都加上未知元  $\lambda$ , 展开行列式后关于  $\lambda$  次数最低项的系数一般就是曲面的隐式方程, 不过如此计算效率会大大降低. 基于单变量结式及公因子计算, Perez-Diaz 等<sup>[23]</sup> 给出了曲线/曲面隐式化的算法. 而通过所谓的剩余结式 (residual resultant), Buse<sup>[24]</sup> 给出了当曲面的基点是局部完全交及一些更严格的限制时, 曲面的隐式方程. 对于总次数为  $n$  的曲面, Aries 等<sup>[25]</sup> 基于 Sylvester 结式方法给出了曲面没有基点时, 隐式方程的行列式表示, 其阶数为  $n(5n-3)/2$ . 当曲面的基点是局部完全交时, Khetan 等<sup>[26]</sup> 利用环面代数簇 (toric variety) 及 Chou 形式 (Chou form) 给出了曲面隐式方程的行列式 (或行列式的最大非零子式) 表示.

## 2.2 Groebner 基方法

给定有理曲线(1), 曲线的隐式方程可以通过计算理想  $\langle c(t)x - a(t), c(t)y - b(t) \rangle$  的一组 Groebner 基获得.

**定理 2.3**<sup>[4-5]</sup> 给定有理曲线(1), 令

$$I_C := \langle c(t)x - a(t), c(t)y - b(t) \rangle \subset \mathbb{R}[x, y, t] \quad (9)$$

则有理曲线(1)的隐式方程  $F(x, y) \in I_C \cap \mathbb{R}[x, y]$ .

利用上述定理可以给出求曲线隐式方程的如下方法: 计算理想  $I_C$  在字典序  $t > x > y$  下的 Groebner 基, 则 Groebner 基中只含变量  $x, y$  的多项式就是曲线(1)的隐式方程.

曲面的隐式方程可以类似求得. 但为了消去基点带来的影响, 仅考虑理想  $\langle dx - a, dy - b, dz - c \rangle$  是不够的, 因此此时曲面的隐式方程不包含在该理想之内. 为此, 需要考虑理想  $\langle dx - a, dy - b, dz - c, d\omega - 1 \rangle$ .

**定理 2.4**<sup>[4-5]</sup> 给定有理曲面(3), 令

$$I_S := \langle dx - a, dy - b, dz - c, d\omega - 1 \rangle \subset \mathbb{R}[x, y, z, \omega, s, t] \quad (10)$$

则有理曲面(3)的隐式方程

$$F(x, y, z) \in I_S \cap \mathbb{R}[x, y, z].$$

利用上述定理, 按照字典序  $s > t > \omega > x > y > z$  计算理想  $I_S$  的 Groebner 基. 则 Groebner 基中仅含变量  $x, y, z$  的多项式就是有理曲面(3)的隐式方程.

基于 Groebner 基理论, Gao 等<sup>[27]</sup> 给出了确定参数方程是否独立, 以及是否恰当的算法. Alonso 等<sup>[28]</sup> 则通过计算商理想, 给出不引入多余变量  $\omega$  与方程计算曲面隐式方程的方法.

## 2.3 吴方法

吴特征列方法的主要思想是将多项式方程组化为一些三角形的方程组<sup>[6]</sup>. 作为有效的消元工具, 吴方法可以直接应用于参数曲线与曲面的隐式化. 我们仅以曲面情形为例加以说明.

给定有理曲面(3), 令

$$\mathbb{P} = \{d(s, t)x - a(s, t),$$

$$d(s, t)y - b(s, t), d(s, t)z - c(s, t)\},$$

选取变元顺序使得  $x, y, z < s, t$ , 将多项式系统  $[\{\mathbb{P}\}, \{d\}]$  分解为不可约升列(具有三角形的多项式系统), 该升列中有一个只含变元  $x, y, z$  的多项式  $F(x, y, z)$ , 则  $F(x, y, z) = 0$  就是所求的隐式方程.

不过按上述方法得到的隐式曲面  $F(x, y, z) =$

0 除了包含参数曲面(3)外, 通常还包含低维的分支, 它们不在参数曲面上. Li<sup>[7]</sup> 提出用吴投影定理来解决上述问题, 即考虑投影零点集

$$\text{Proj}_{x, y, z} \text{Zero}(\mathbb{P}/d) :=$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3, \mid s, t \in \mathbb{C} \text{ 使得 } d(s, t) \neq 0, \\ d(s, t)x = a(s, t), d(s, t)y = b(s, t), \\ d(s, t)z = c(s, t)\}.$$

其中,  $\text{Zero}(\mathbb{P}/d)$  表示  $\mathbb{P}$  的所有不使  $d$  为零的复零点全体. 一般说来, 需要用多项式方程和不等方程表示投影零点集, 通过计算特征列并使用吴投影方法, 我们可以得到该投影零点集的方程和不等方程.

通常投影过程非常耗时并会产生大量复杂的多项式, 如何简化所生成的复杂多项式从而得到简单的隐式方程和不等方程仍然是一个困难的问题. 王东明建议使用他提出的正则系统分解算法, 这使得结果的化简变得相对容易. 具体请参看文献[29].

## 2.4 实例

本小节给出两个具体例子来说明上述算法的具体求解过程.

**例 2.5** 给定三次有理曲线  $\mathbb{P}(t)$  如下:

$$a(t) = t^3 - 2t^2 + t + 2,$$

$$b(t) = 2t^3 - 3t^2 + t + 1,$$

$$c(t) = t^2 + 1,$$

求曲线  $\mathbb{P}(t)$  的隐式方程.

**解** 令

$$f := c(t)x - a(t) = -t^3 + (x+2)t^2 - t + x - 2,$$

$$g := c(t)y - b(t) = -2t^3 + (y+3)t^2 - t + y - 1,$$

用 Bezout 结式,  $\mathbb{P}(t)$  的隐式方程可表示为

$$F(x, y) = \text{Res}(f, g, t) =$$

$$\begin{vmatrix} 2x - y - 3 & 4y + 4 - 4x & -y - 1 + x \\ -1 & -2 + x & 4y + 4 - 4x \\ 1 - y + 2x & -1 & 2x - y - 3 \end{vmatrix} = 0.$$

用 Groebner 基方法, 我们需要计算理想  $\langle f, g \rangle \subset \mathbb{R}[x, y, t]$  在字典序  $t > x > y$  下的 Groebner 基:

$$G = \{-29 + 73x - 79x^2 + 34x^3 - 29y + 96xy -$$

$$81x^2y - 24y^2 + 64xy^2 - 16y^3,$$

$$18 - 83t + 95x - 136x^2 - 48y +$$

$$68ty + 256xy - 128y^2,$$

$$32 - 38t - 20x + 17tx - 17x^2 +$$

$$28y + 32xy - 16y^2,$$

$$-36 - 4t + 17t^2 + 48x - 17x^2 -$$

$$40y + 32xy - 16y^2\}.$$

因此, 求得曲线的隐式方程为

$$-29 + 73x - 79x^2 + 34x^3 - 29y + 96xy - 81x^2y - 24y^2 + 64xy^2 - 16y^3 = 0.$$

用吴特征列方法, 计算多项式系统  $\{[f, g], [c]\}$  在字典序  $t > x > y$  下的不可约升列分解得

$$C_1 := \{t + 4, 17x + 98, 17y + 179\},$$

$$C_2 := \{17t^2 - 4t + 1, 17x - 38, 68y - 83\},$$

$$C_3 := \{2tx^2 - 8x^2 - tyx - 3tx + 12yx + 6x + 2ty - 3t - 4y^2 - y + 1, 34x^3 - 81yx^2 - 79x^2 + 64y^2x + 96yx + 73x - 16y^3 - 24y^2 - 29y - 29\},$$

则曲线的隐式方程即为  $C_3$  中只与  $x, y$  有关的

多项式:

$$34x^3 - 81yx^2 - 79x^2 + 64y^2x + 96yx + 73x - 16y^3 - 24y^2 - 29y - 29 = 0.$$

例 2.6 给定有理曲面如下:

$$a = s^2 - 2s + (2s - 1)t,$$

$$b = s^2 + 3s + 3 - (2s + 5)t,$$

$$c = s + 3 + (-8s + 4)t, \quad d = 2s - 1 + (4s - 5)t,$$

求曲面的隐式方程.

解 令

$$f = dx - a, \quad g = dy - b, \quad h = dz - c.$$

计算  $f, g, h$  关于  $s, t$  的 Dixon 结式矩阵为

$$D = \begin{pmatrix} -41x + 29y - 49z - 60 & 11x - 11y + 19z + 24 & 0 & 0 \\ 45x - 33y + 57z + 72 & 9x - 9y + 9z + 12 & 24x - 24y + 36z + 48 & 0 \\ -4x + 4y - 8z - 12 & -20x + 20y - 28z - 36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于曲面有两个基点: 一个有限的基点  $(s, t) = (1, 1)$  及在无穷远的基点  $(s, t) = (\infty, \infty)$ , 因此  $f, g, h$  的 Dixon 结式  $\text{Det}(D)$  恒为零. 但是它的二阶子式

$$\begin{vmatrix} -41x + 29y - 49z - 60 & 11x - 11y + 19z + 24 \\ -4x + 4y - 8z - 12 & -20x + 20y - 28z - 36 \end{vmatrix}$$

是曲面的隐式方程.

用 Groebner 基方法求隐式方程, 我们要计算理想  $\langle f, g, h, dw - 1 \rangle$  在字典序  $t > s > w > x > y > z$  下的 Groebner 基:

$$\begin{aligned} G = \{ & 322z + 127z^2 + 191zx - 163zy + 242x + \\ & 72x^2 - 124yx + 204 - 206y + 52y^2, \\ & -160 - 88x + 104zy - 39zw + 31yw + 160y + \\ & 40yx - 210z - 61w - 67z^2 - 40y^2 - 48zx, \\ & 279xw + 72zw - 9w + 260yx - 343zx - 634x - \\ & 260y^2 + 707zy + 1102y - 482z^2 - 1520z - 1164, \\ & -27 - 18x + 13y + 2s - 22z + zs, \\ & 4xs - 4ys - 4s + 103x - 75y + 127z + 156, \\ & ws - w - 2x + 2y - 3z - 4, \\ & 4yt - 5zt - 8t - s + 3x - y + 2z + 3, \\ & 24xt + 6zt - 6s + 25x - 13y + 23z + 30, \\ & 3wt - 3w - 5x + 5y - 7z - 9\} \end{aligned}$$

由此得曲面的隐式方程为

$$F(x, y, z) = 322z + 127z^2 + 191zx - 163zy + 242x + 72x^2 - 124yx + 204 - 206y + 52y^2 = 0.$$

用特征列方法如下. 计算多项式系统  $\{[f, g,$

$h], [d]\}$  在变元序  $t > s > x > y > z$  下的不可约升列分解, 其中主要不可约升列为

$$\{24tx - 24ty + 36tz + 48t + 7x - 7y + 11z + 12, 20sx + 11x - 20sy - 11y + 28sz + 36s + 19z + 24, 72x^2 - 124yx + 191zx + 242x + 52y^2 - 163zy - 206y + 127z^2 + 322z + 204\}.$$

其中第 3 个方程就是曲面的隐式方程.

### 3 动曲线与动曲面方法及其新进展

#### 3.1 动曲线与动曲面方法介绍

动曲线与动曲面方法是 Sederberg 及本文作者于 1995 年提出的一种全新的曲线、曲面隐式化方法. 该方法源于下面的观察.

任给两族直线

$$L_1(x, y; t) := l_{11}(x, y) + tl_{12}(x, y),$$

$$L_2(x, y; t) := l_{21}(x, y) + tl_{22}(x, y),$$

其中,  $l_{ij}(x, y), i, j = 1, 2$ , 都是  $x, y$  的一次函数,  $t$  是一个实参数. 则上述两族直线交点的轨迹是一条二次曲线, 该二次曲线的隐式方程是

$$\begin{vmatrix} l_{11}(x, y) & l_{12}(x, y) \\ l_{21}(x, y) & l_{22}(x, y) \end{vmatrix} = 0.$$

反过来, 任何一条二次曲线都可以表示成某两条直线族的交点. 因此, 给定二次曲线的参数方程, 如果能把它表示成两族直线的交, 则该二次曲线的隐式方程可以很方便地给出.

幸运的是, 上述观察对一般有理曲线都成立. 事

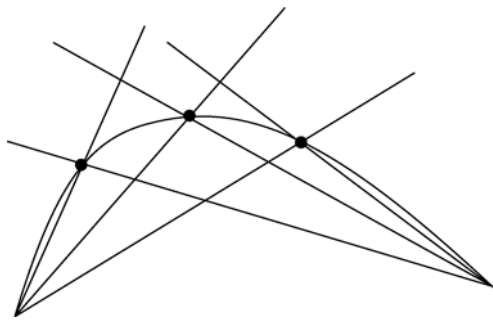


图 1 动直线跟踪有理曲线

Fig. 1 A moving line follows a rational parametric curve

实上,我们有

**定理 3.1**<sup>[30]</sup> 任一条  $n$  次的有理曲线都可以表示成两族直线的交,该两族直线关于参数  $t$  的次数之和为  $n$ .

上述定理是动直线方法的出发点.下面,我们介绍动直线隐式化方法的基本思想<sup>[30,8]</sup>.

一条动直线即一族直线

$$L(x, y, t) := A(t)x + B(t)y + C(t),$$

其中,  $A(t), B(t), C(t) \in \mathbb{R}[t]$ ,有时也用向量  $\mathbf{L}(t) = (A(t), B(t), C(t))$  记该动直线.动直线的次数就是  $A(t), B(t), C(t)$  关于  $t$  的次数中最大者.称一条动直线跟踪(follow)一条有理曲线(2)如果

$$\mathbf{L}(t) \cdot \mathbf{P}(t) = A(t)a(t) + B(t)b(t) + C(t)c(t) \equiv 0 \quad (11)$$

给定一组动直线  $L_i(x, y, t), i = 1, 2, \dots, l$ , 称  $L_i(x, y, t)$  是线性无关的, 如果不存在常数  $c_i$  (不全为零) 满足  $\sum_{i=1}^l c_i L_i(x, y, t) \equiv 0$ .

动直线可以如下计算. 设

$$a(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i, \quad b(t) = \sum_{i=0}^n b_i t^i, \quad c(t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i,$$

并设

$$L(x, y, t) = \sum_{i=0}^m (A_i x + B_i y + C_i) t^i,$$

其中,  $A_i, B_i, C_i$  为待定常数. 由式(11)可得

$$\mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{L}(t) = \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{i+j=k} (A_i a_j + B_i b_j + C_i c_j) t^k \equiv 0.$$

因此,

$$\sum_{i+j=k} (A_i a_j + B_i b_j + C_i c_j) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m+n.$$

上述方程组具有  $3(m+1)$  个未知数,  $m+n+1$  个方程, 故至少有  $2(m+1) - n$  个线性无关的解. 特别地, 当  $m=n-1$  时, 至少有  $n$  个解.

**定理 3.2**<sup>[8]</sup> 设  $L_i(x, y, t) := \sum_{j=0}^{r-1} L_{ij}(x, y) t^j$ ,

$i = 0, 1, \dots, n-1$  是  $n$  条跟踪有理曲线(2)的线性无关的动直线, 其中  $L_{ij}(x, y)$  是  $x, y$  的一次函数. 定义

$$F(x, y) := \begin{vmatrix} L_{00} & \cdots & L_{0,r-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ L_{n-1,0} & \cdots & L_{n-1,r-1} \end{vmatrix} \quad (12)$$

则  $F(x, y) = 0$  是有理曲线(2)的隐式方程.

可以证明, 上述隐式表示形式是 Bezout 结式的一个变种. 为了得到新的结果, 我们进一步考察动曲线方法.

一条动曲线就是一族曲线

$$C(x, y, t) := \sum_{i=0}^m f_i(x, y) t^i,$$

其中,  $f_i(x, y), i = 0, 1, \dots, m$  是次数不超过  $d$  的多项式. 称动曲线跟踪有理曲线(2)如果

$$c(t)^d C(a(t)/c(t), b(t)/c(t); t) \equiv 0 \quad (13)$$

动曲线可类似于动直线求解, 即由式(13)通过特定系数法求出. 从上式可知, 至少存在  $d(d+3)(m+1)/2 - nd$  条线性无关的动曲线. 如果  $d(d+3)(m+1)/2 - nd \geq m+1$ , 则可以构造  $m+1$  条动曲线来得到曲线的隐式方程.

**定理 3.3**<sup>[8]</sup> 给定  $m+1$  条跟踪有理曲线(2)的动曲线:

$$C_i(x, y, t) := \sum_{j=0}^m f_{ij}(x, y) t^j, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

定义

$$F(x, y) := \begin{vmatrix} f_{00} & \cdots & f_{0,m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ f_{m,0} & \cdots & f_{m,m} \end{vmatrix} \quad (14)$$

如果  $F(x, y)$  的次数为  $n$ , 则它是有理曲线(2)的隐式方程.

用动曲线方法隐式化的关键是, 如何找到  $m+1$  条合适的动曲线, 使得它们  $R[x, y]$  线性无关, 并且它们的次数之和为  $n$ . 我们将在下一小节介绍有关进展.

上述动曲线的思想可以推广到动曲面. 一个动曲面是带两个自由参数的曲面族:

$$S(x, y, z, s, t) := \sum_{i=1}^{\sigma} f_i(x, y, z) \gamma_i(s, t) \quad (15)$$

式中,  $\gamma_i(s, t), i = 1, 2, \dots, \sigma$  是所谓的混合函数, 它们是线性无关的,  $f_i(x, y, z)$  是次数不超过  $l$  的多项



式. 称动曲面  $S(x, y, z; s, t)$  跟踪有理曲面(4)如果

$$S(a/d, b/d, c/d; s, t) \equiv 0 \quad (16)$$

**定理 3.4**<sup>[8]</sup> 给定  $\sigma$  个跟踪有理曲面(4)的动曲面

$$S_i(x, y, z; s, t) := \sum_{j=1}^{\sigma} f_{ij}(x, y, z) \gamma_j(s, t), \quad i = 1, 2, \dots, \sigma \quad (17)$$

定义

$$F(x, y, z) := \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1,\sigma} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ f_{\sigma,1} & \cdots & f_{\sigma,\sigma} \end{vmatrix} \quad (18)$$

如果  $F(x, y, z)$  的次数等于有理曲面(4)的代数次数, 则  $F(x, y, z)$  就是有理曲面(4)的隐式方程.

对于次数为  $(m, n)$  的张量积曲面(4), 当曲面没有基点时, 可取混合函数为  $\gamma_i = s^j t^k, j=0, 1, \dots, b_1; k=0, 1, \dots, b_2; i=k(b_1+1)+j+1$ . 容易算得, 至少有  $\eta=(b_1+1)(b_2+1)(l+1)(l+2)(l+3)/6-(lm+b_1+1)(ln+b_2+1)$  个线性无关的动曲面. 取定  $l=1$  (动平面),  $b_1=2m-1, b_2=n-1$ , 则  $\eta=\sigma=2mn$ . 由定理 3.4, 存在  $2mn$  个线性无关的动平面, 它们构成的  $2mn$  阶行列式正是曲面的隐式方程, 它是 Dixon 结式的变种. 如果取定  $l=2$  (动二次曲面),  $b_1=m-1, b_2=n-1$ , 则  $\eta=\sigma=mn$ . 也就是说, 用动二次曲面, 一般地我们可以将隐式方程写成一个  $mn$  阶的行列式. 例如, 对于一个没有基点的双三次曲面, 用 Dixon 结式可以将隐式方程写成 18 阶行列式, 其中每个元素是  $x, y, z$  的一次函数. 如用动二次曲面, 则曲面的隐式方程可以写成 9 阶的行列式, 其中每个元素是  $x, y, z$  的二次函数. 因此, 用动曲面方法可以将曲面隐式方程表示为更紧凑的行列式表示. 特别地, 动二次曲面得到的隐式方程的行列式阶数是 Dixon 结式阶数的一半.

对于总次数为  $n$  的有理曲面, 可以选取基函数  $b_k(s, t) = s^i t^j, i+j=0, 1, \dots, n-1, k=(i+j)(i+j+1)/2+j+1$ . 则一般地, 有  $n$  个动平面,  $(n-1)n/2$  个动二次曲面, 它们构成的  $n(n+1)/2$  阶行列式就是有理曲面的隐式方程.

上述论断只是我们直观的认识, 需要理论上严格证明. 而当曲面具有基点时, 情形更加复杂. 通过大量数值试验发现, 当曲面有  $r$  个基点时, 一般可以用  $r$  个动平面取代某  $r$  个动二次曲面. 但如何选取合适的动曲面构造隐式方程, 以及如何给出严格的理论证明需要相当多的代数几何知识. 我们将在下

面给出有关新进展.

### 3.2 动曲线隐式化进展

取  $d=2, m=\lfloor(n-1)/2\rfloor$ , 则至少有  $m+1$  条线性无关的动二次曲线. 因此, 利用动二次曲线一般可以把一条曲线的隐式方程写成  $\lfloor(n+1)/2\rfloor$  阶行列式. 具体地, 我们有下列结果:

**定理 3.5**<sup>[31-32]</sup> ① 设  $n=2m$  是偶数. 如果不存在低于  $m$  次的动直线跟踪有理曲线(2), 则存在  $m$  个动二次曲线, 由它们构成的行列式正好是曲线(2)的隐式方程.

② 设  $n=2m+1$  是奇数. 如果只有一条次数为  $m$  的动直线跟踪有理曲线(2), 则存在  $m$  个动二次曲线, 由它们及一条  $m$  次动直线构成的  $m+1$  阶行列式正好是曲线(2)的隐式方程.

如果曲线具有低于  $n/2$  次的动直线, 则上述定理不能成立, 因而不能用上面的方法做隐式化.

当曲线具有  $r > n/2$  阶奇点时, 存在低阶  $(n-r)$  阶动直线, 这时上述定理的结论不成立. 例如, 具有一个三阶奇点的四次曲线的隐式方程就不能用动二次曲线隐式化. 但我们用高阶动曲线仍然可以得到曲线的隐式方程.

**定理 3.6**<sup>[33]</sup> 设  $n$  次曲线有一个  $r > n/2$  阶奇点, 则该曲线可以用高阶动曲线隐式化. 具体说, 曲线的隐式方程可以表示为一个  $n-r$  阶行列式.

文献[33]给出了动曲线的具体算法. 如果曲线没有高阶奇点, 但仍然有低于  $n/2$  次的动直线, 则上述方法均失效. 幸运的是, 利用  $\mu$  基的理论, 我们总可以利用动直线与动二次曲线隐式化一般参数曲线. 详细结果将在下一节论述.

下面, 我们看几个具体例子.

**例 3.7** 给定六次曲线:

$$P(t) = (2t^6 - t^4 + 2, t^5 - 2t, t^6 + 1),$$

求曲线的隐式方程.

**解** 该曲线没有低于三次的动直线, 因此可以用动二次曲线隐式化. 计算易得 3 个动二次曲线:

$$C_1(x, y, t) := -16 + 16x - 4x^2 - y^2 +$$

$$(2y - 2xy)t + (2x - x^2)t^2,$$

$$C_2(x, y, t) := xy + (-32 + 32x - 7x^2 - 2y^2)t +$$

$$(4y - 4xy)t^2,$$

$$C_3(x, y, t) := -256 + 248x - 60x^2 - 17y^2 +$$

$$(32y - 33xy)t + (32 - 8x^2 + 2y^2)t^2.$$

因此, 曲线的隐式方程为

$$\begin{vmatrix} -16 + 16x - 4x^2 - y^2 & 2y - 2xy & 2x - x^2 \\ xy & -32 + 32x - 7x^2 - 2y^2 & 4y - 4xy \\ -256 + 248x - 60x^2 - 17y^2 & 32y - 33xy & 32 - 8x^2 + 2y^2 \end{vmatrix} = 0.$$

**例 3.8** 给定六次曲线:

$$P(t) = (2t^6 - 2t^4 + 1, t^5 - 1, t^6 + 1),$$

求曲线的隐式方程.

**解** 该曲线有一条二次的动直线,因此不能用二次动曲线隐式化.但是我们可以用两个三次动曲线隐式化,即曲线的隐式方程可以表示为一个二阶行列式,行列式每个元素都是三次多项式:

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x, y) & f_{12}(x, y) \\ f_{21}(x, y) & f_{22}(x, y) \end{vmatrix} = 0.$$

其中

$$f_{11}(x, y) = 196 - 204x + 67x^2 - 7x^3 + 316y -$$

$$234xy + 42x^2y + 183y^2 - 75xy^2 + 36y^3,$$

$$f_{12}(x, y) = -106 + 85x - 18x^2 + x^3 - 257y +$$

$$142xy - 15x^2y - 206y^2 + 60xy^2 - 54y^3,$$

$$f_{21}(x, y) = -158 + 227x - 100x^2 + 13x^3 -$$

$$279y + 294xy - 69x^2y - 144y^2 + 90xy^2 - 18y^3,$$

$$f_{22}(x, y) = 133 - 149x + 39x^2 - 3x^3 + 282y -$$

$$236xy + 30x^2y + 188y^2 - 96xy^2 + 36y^3.$$

具体计算过程可参看文献[33].

**例 3.9** 考虑六次曲线:

$$P(t) = (2 + t + 2t^3 - 2t^4 + t^5, \\ -2t^2 - t^3 - t^6, -2t^4 + t^6)$$

$$p = (t^2, 1, t - t^2),$$

$$q = (t^4, t^3 - t^2, 2 + t + t^3),$$

求曲线的隐式方程.

**解** 该曲线有一个二次动直线,且没有高阶奇点,因此无法用二次或高次动曲线隐式化.后面我们将看到,利用  $\mu$  基理论可以用动直线与动二次曲线隐式化该有理曲线.

### 3.3 动曲面隐式化进展

前面介绍过,动曲面方法从数值实例得到了很好的验证,但并没有理论上的保证.本小节给出一些这方面的成果.

首先考察曲面没有基点的情形.这方面的一个最早成果是 Cox, Goldman 等给出的.

**定理 3.10**<sup>[34]</sup> 设双  $(m, n)$  次曲面  $P(s, t)$  没有基点,并且没有双  $(m-1, n-1)$  次的动平面.则恰好存在  $mn$  个动二次曲面,由它们构成的行列式正好

是曲面的隐式方程.

**定理 3.11**<sup>[34]</sup> 设总次数为  $n$  的参数曲面  $P(s, t)$  没有基点,并且恰好有  $n$  个次数为  $n-1$  的动平面.则恰好有  $n(n-1)/2$  个动二次曲面,且该  $n$  个动平面与  $n(n-1)/2$  个动二次曲面构成的行列式正好是曲面的隐式方程.

当曲面没有基点且有低于  $(m-1, n-1)$  次的动平面时,如何隐式化参数曲面,目前还没有相应的结果.

如果曲面具有基点,情况比较复杂,这是由于基点具有相当复杂的结构.如果基点比较简单,比如基点是所谓局部完全交(local complete intersection)的,则动曲面方法一般成立.所谓基点是局部完全交的,是指理想  $\langle a, b, c, d \rangle$  在基点的领域局部内可以由两个生成元生成.确切的定义可参看文献[35].

**定理 3.12**<sup>[36]</sup> 设参数曲面具有  $r$  个基点,这  $r$  个基点是局部完全交的.则一般来说,我们可以用  $r$  个动平面取代  $r$  个动二次曲面,从而由动平面与动二次曲面构成曲面的隐式方程.

如果基点不是局部完全交的,但满足一些特定条件,即基点是所谓的  $k-1$  三角点或  $k \times l-1$  矩形点(详细定义请参看文献[37]),且它们互不相干时,可以通过恰当选取混合函数及动平面与动二次曲线隐式化.具体地,我们有

**定理 3.13**<sup>[37]</sup> 设参数曲面的基点都是  $k-1$  三角点或  $k \times l-1$  矩形点.假设混合函数  $\gamma_i$  取自理想  $I$  的导理想  $I'$ ,其中  $I = \langle a, b, c, d \rangle$  且

$$I' = \langle a, b, c, da_s, b_s, c_s, d_s, a_t, b_t, c_t, d_t \rangle.$$

则可以选取合适的动平面与动曲面,它们构成的行列式是曲面的隐式方程.

对于一些特殊类型的曲面,动曲面方法可以给出有效的隐式化方法.例如,对于二次参数曲面,本文作者及合作者获得了以下结果:

**定理 3.14**<sup>[38-40]</sup> 给定总次数为二次的参数曲面  $P(s, t)$ .

① 当曲面  $P(s, t)$  具有二个基点时,存在 3 个线性无关的动平面

$$p = p_0 + p_1 s, q = q_0 + p_1 t, r = r_0 + r_1 s + r_2 t,$$

且曲面的隐式方程为  $p_0 r_1 + q_0 r_2 - p_1 r_0 = 0$ .

② 当曲面  $\mathbf{P}(s, t)$  具有一个基点时, 存在 3 个线性无关的动平面

$$p = p_0 + p_1 s + p_2 t, \quad q = q_0 + q_1 s + q_2 t, \\ r = r_0 + r_1 s + r_2 t.$$

曲面的隐式方程为

$$\begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \\ r_0 & r_1 & r_2 \end{vmatrix} = 0.$$

③ 当曲面没有基点时, 存在两个动平面及一个动二次曲面

$$p = p_0 + p_1 s + p_2 t, \quad q = q_0 + q_1 s + q_2 t, \\ r = r_0 + r_1 s + r_2 t,$$

其中,  $p_i, q_i, i=0, 1, 2$  是  $x, y, z$  的一次函数.  $r_i, i=0, 1, 2$  是  $x, y, z$  的二次函数. 且曲面的隐式方程为

$$\begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \\ r_0 & r_1 & r_2 \end{vmatrix} = 0.$$

对于旋转曲面, 用动平面方法可以得到以下隐式化结论:

**定理 3.15**<sup>[41]</sup> 设曲面  $S$  是由次数为  $n$  的平面曲线绕该平面内一条轴线旋转而成的曲面. 则存在  $2n$  个动平面跟踪旋转曲面  $S$ , 且这  $2n$  个动平面构成的  $2n$  阶行列式就是  $S$  的隐式方程.

对于任意曲面具有一般基点的情形, 动曲面方法是否仍然有效是一个没有解决的问题.

下面我们给出几个例子解释上述结果.

**例 3.16** 给定二次曲面

$$a = 2st, \quad b = 2t, \quad c = 2s, \quad d = s^2 + t^2 + 1,$$

用动曲面的方法求曲面的隐式方程.

**解** 这是一个没有基点的二次曲面(即 Steiner 曲面). 根据定理 3.14, 取混合函数  $\gamma_1 = s, \gamma_2 = t, \gamma_3 = 1$ , 可得到 3 个动曲面:

$$\begin{pmatrix} y & -2z & x \\ y & -z & 0 \\ xz & xy - xz - 2z & x^2 + yz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

则系数矩阵的行列式就是曲面的隐式方程.

**例 3.17** 给定(2,1)次有理曲面

$$a = s^2 + s + (s^2 - 2)t, \\ b = 2s^2 - s + (s + 1)t, \\ c = 2s + (s^2 - 1)t, \quad d = s^2 + t,$$

用动曲面方法求曲面的隐式方程.

**解** 如果该曲面没有基点, 取混合函数  $b_1(s, t) = 1, b_2(s, t) = s$ , 则可以用两个动二次曲面隐

式化. 现易知该曲面具有一个简单基点  $(s, t) = (0, 0)$ , 因而是局部完全交的. 由定理 3.12, 一个动二次曲面可以被一个动平面取代. 可计算得曲面有一个动平面

$$5x - 11y - 8z + 13 + (-7x + 3y + 7z + 1)s,$$

一个动二次曲面

$$777x^2 - 1662xy - 139y^2 - 1995xz + 1549yz + \\ 1197z^2 + 2154x - 100y - 2136z + 321 + \\ (-1106x^2 + 378xy + 50y^2 + 2170xz - \\ 357yz - 1064z^2 + 50y + 50)s.$$

由此, 曲面的隐式方程为一个二阶的行列式. 第一行为动平面确定的线性函数, 第二行为动曲面确定的二次函数.

**例 3.18** 本例取自文献[26]. 设三次曲面的参数方程为

$$\mathbf{P}(s, t) = (s^3 + t^2, s^2 + t^3, s^2t + st^2, st),$$

求曲面的隐式方程.

**解** 对没有基点的三次参数曲面, 取混合函数  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = s, \gamma_3 = t, \gamma_4 = s^2, \gamma_5 = st, \gamma_6 = t^2$  去隐式化, 需要 3 个动平面及 3 个动二次曲面. 现该曲面具有一个基点  $(0, 0)$ , 其重数为 4, 故其隐式次数是  $3^2 - 4 = 5$ . 按定理 3.12, 可以用 4 个动平面取代 4 个动二次曲面得到隐式方程. 然而我们没有足够多的动二次曲面被替换, 因此需要考虑用更低阶行列式做隐式化. 为此取混合函数  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = s, \gamma_3 = t$ , 可计算出一个动平面  $s + t - z = 0$  及两个动二次曲面:  $-1 + xy - z + 2yz + z^2 + (-1 + x - 2y - y^2 - z + xz - yz + z^2)s + (-x^2 - 2xz + yz)t, -z - yz - z^2 + (2 + x + y + 2z - yz - z^2)s + (xz + z^2)t$ .

由它们构成的三阶行列式(一个线性行及两个二次行)就是曲面的隐式方程.

**例 3.19** 本例取自文献[37]. 考虑双三次曲面

$$\mathbf{P}(s, t) = (s^2t - st, 5s^2t^2 + 5s^2t + 3, \\ 2s^2t^2 + 4s^2t - st, \\ -s^3t^3 + s^2t^2 + 2s^2t - st + 1),$$

求曲面隐式方程.

**解** 该曲面具有两个无穷远基点: 一个 3-三角(共 9 重)基点  $(0, 1, 0)$  及一个 6 重基点  $(1, 0, 0)$ , 因此曲面隐式次数为  $3^2 - 9 - 6 = 3$ . 为便于处理, 我们将其中一个无穷远基点变为有限基点. 例如, 做参数变换  $s = 1/\bar{s}$ , 将基点  $(1, 0, 0)$  变为有限基点  $(0, 0)$ . 原三次曲面变为

$$\mathbf{P}(\bar{s}, t) = (\bar{s}t - \bar{s}^2 t, 4\bar{s}t + 2\bar{s}t^2 - \bar{s}^2 t, \\ -t^3 + 2\bar{s}t + \bar{s}t^2 - \bar{s}^2 t + \bar{s}^3, 5\bar{s}t + 5\bar{s}t^2 + 3\bar{s}^3).$$

利用定理 3.13, 计算导理想得  $I' = \langle \bar{s}, t \rangle$ . 因此可取混合函数  $\gamma_1 = \bar{s}, \gamma_2 = t$ , 则我们得到一个动平面

$(-81 + 7x + 27y + 5z)\bar{s} + (47x - 23y + 17z)t$  及一个动二次曲面

$$(6885 - 610x - 2011x^2 - 5862y + 1298xy + \\ 1189y^2 + 595z - 312xz - 366yz + 119z^2)\bar{s} + \\ (-6885x - 580x^2 + 1377y + 2986xy - 574y^2)t,$$

由它们构成的二阶行列式就是曲面的隐式方程.

## 4 $\mu$ 基方法及其新进展

$\mu$  基方法<sup>[9-11,42]</sup>是由 Cox, Sederberg 及本文作者等提出的曲线与曲面隐式化的新方法, 它是基于上节所述的动直线与动平面方法发展起来. 上节介绍的动曲线与动曲面方法没有完全自动化, 理论上也没有完整的保证.  $\mu$  基方法就是为了解决动曲线与动曲面方法的自动化问题提出来的. 在介绍有关方法之前, 我们先引进一些基本概念.

### 4.1 基于曲线 $\mu$ 基的隐式化

给定有理曲线(2), 用  $\mathbf{L}$  表示所有跟踪(2)的动直线的全体. 则  $\mathbf{L} = \text{syzy}(a, b, c)$  是一个 Syzygy 模.  $\mathbf{L}$  给出了曲线性质的一个很好的代数刻画.

**定理 4.1**<sup>[9,42]</sup>  $\mathbf{L}$  是一个二维的自由模. 即存在  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}[t]^3$  使得对任意  $l \in \mathbf{L}$  都存在  $h_1, h_2 \in \mathbb{R}[t]$  满足

$$l = h_1 \mathbf{p} + h_2 \mathbf{q},$$

同时  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  具有性质:

- ①  $\deg(\mathbf{p}) + \deg(\mathbf{q}) = n$ ;
- ②  $\mathbf{p} \times \mathbf{q} = \kappa \mathbf{P}(t)$ , 其中  $\kappa$  为非零常数;
- ③  $\deg(h_1 \mathbf{p}) \leq \deg(D), \deg(h_2 \mathbf{q}) \leq \deg(D)$ ;
- ④ 曲线(2)的隐式方程  $f(x, y) \in \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ . 其中  $\mathbf{p} \cdot (x, y, 1), \mathbf{q} \cdot (x, y, 1)$ .

假设  $\deg(\mathbf{p}) = \mu \leq \deg(\mathbf{q})$ , 则  $\mu \leq [n/2]$ .  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  称

为有理曲线(2)的  $\mu$  基. 有时也称  $p = \mathbf{p} \cdot (x, y, 1)$  和  $q = \mathbf{q} \cdot (x, y, 1)$  为曲线的  $\mu$  基. 由  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  可以方便地给出有理曲线的隐式方程.

**定理 4.2**<sup>[9]</sup> 设  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  是有理曲线(2)的  $\mu$  基. 则有有理曲线(2)的隐式方程是  $\text{Res}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = 0$ .

由上述定理, 利用 Bezout 结式可以将曲线的隐式方程写成一个  $n - \mu$  阶行列式, 其中  $n - 2\mu$  行是线性的,  $\mu$  行是二次的. 因此, 任意有理曲线都可以利用动直线与动二次曲线隐式化! 也就是说,  $\mu$  基理论完全解决了有理曲线的动曲线隐式化问题. 在通常情况下,  $\mu = n/2$ , 此时隐式方程可以写成  $n/2$  阶行列式. 由于此时曲线没有低于  $n/2$  阶的动直线, 此结论刚好与定理 3.5 一致.

存在非常有效的算法来计算有理曲线的  $\mu$  基. 其基本思想依赖于以下结论:

**引理 4.3**<sup>[42]</sup> Syzygy 模  $\mathbf{L}_i$  由 3 个向量  $\mathbf{v}_1 = (b, -a, 0), \mathbf{v}_2 = (c, 0, -a)$  与  $\mathbf{v}_3 = (0, c, -b)$  生成. 并且  $\text{rank}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = 2$ .

利用上述引理, 从 3 个多项式向量  $\mathbf{v}_1 = (b, -a, 0), \mathbf{v}_2 = (c, 0, -a)$  与  $\mathbf{v}_3 = (0, c, -b)$  出发, 通过类似于 Gauss 消元的思想可以得到两个次数最低的多项式向量, 这两个多项式向量就是曲线的  $\mu$  基. 可以证明, 该算法的运算量为  $O(n^2)$ .

平面曲线  $\mu$  基的概念可以推广到空间曲线, 并由此计算空间曲线的隐式方程, 具体可参看文献[43].

下面我们看一个例子.

**例 4.4** 重新考察例 3.9. 曲线的参数方程是

$$\mathbf{P}(t) = (2t^6 - t^5 + t^4 + 2t^2 + 1, \\ -t^6 + 2t^5 + t^3, t^6 - t^4 + t^2),$$

求曲线的隐式方程.

**解** 容易计算得该曲线的一组  $\mu$  基

$$\mathbf{p} = (x - 2)t^2 - yt - 1, \\ \mathbf{q} = 21(y + 1)t^4 + (62 - 52x)t^3 + \\ 31yt^2 + 31t + 21y,$$

则  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  的 Bezout 结式就是曲线的隐式方程:

$$\text{Res}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) =$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & -y & -1 & 0 \\ 0 & x-2 & -y & -1 \\ -31xy+41y-21 & 31y^2+21x & -21xy+73y & 21y^2 \\ 52x^2-21y^2-166x-21y+124 & -31xy+41y-21 & -31(x-2) & -21y(x-2) \end{vmatrix} = 0.$$

### 4.2 基于直纹面 $\mu$ 基的隐式化

曲线  $\mu$  基的概念可成功地推广到直纹面(即双  $(n, 1)$  次张量积曲面)上.

给定  $(n, 1)$  次有理曲面

$$P(s, t) = P_0(s) + tP_1(s) \quad (19)$$

式中,  $P_i(s) = (a_i(s), b_i(s), c_i(s), d_i(s)) \in \mathbf{R}[s]^4$ ,  $i=0, 1$ .  $P_0(s), P_1(s)$  的最大次数为  $n$ . 用  $L_s$  表示只与参数  $s$  有关的动平面的全体, 即

$$L_s := \{(A, B, C, D) \in \mathbf{R}[s]^4 \mid aA + bB + cC + dD \equiv 0\} \quad (20)$$

**定理 4.5**<sup>[10]</sup>  $L_s$  是二维的自由模. 存在自由模的两个基向量  $p, q \in \mathbf{R}[s]^4$  满足  $\deg(p) + \deg(q) = m$ , 其中  $m$  是直纹面的隐式方程的次数. 并且, 曲面的隐式方程为  $\text{Res}(p \cdot X, q \cdot X, s)$ , 其中  $X = (x, y, z, 1)$ .

上述定理中的  $p, q$  称为直纹面的  $\mu$  基.  $\mu$  基的计算依赖于下面的结论.

**引理 4.6**<sup>[10]</sup> 令  $g(s) = \text{GCD}([a, b], [a, c], [a, d], [b, c], [b, d], [c, d])$ , 其中  $[a, b] = a_0(s)b_1(s) - a_1(s)b_0(s)$ , 其他类似定义. 则  $L_s$  由下列矩阵的 4 个行生成:

$$M := \frac{1}{g(s)} \begin{pmatrix} 0 & [c, d] & [d, b] & [b, c] \\ [d, c] & 0 & [a, d] & [c, a] \\ [b, d] & [d, a] & 0 & [a, b] \\ [c, b] & [a, c] & [b, a] & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

并且  $\text{rank}(M) = 2$  对任意  $s$  成立.

利用上述引理, 类似求曲线的  $\mu$  基方法可以求出直纹面的  $\mu$  基.

不过由上述  $\mu$  基无法恢复参数曲面的方程. 为此, 可以进一步引进一个新的多项式向量  $r(s, t) = r_0(s) + tr_1(s)$  满足

$$[p, q, r] = \kappa P(s, t),$$

其中,  $\kappa$  为非零常数. 根据需要, 有时称满足上述条件的  $p, q, r$  为直纹面(19)的一组  $\mu$  基. 或称  $p = p \cdot X, q = q \cdot X, r = r \cdot X$  为直纹面的一组  $\mu$  基.

**定理 4.7**<sup>[44]</sup> 直纹面(19)的  $\mu$  基有以下性质:

①  $p, q, r$  构成 Syzygy 模  $\text{Syzy}(a, b, c, d)$  的一组基.

② 直纹面的隐式方程  $f(x, y, z) \in \langle p, q, r \rangle$ .

Dohm<sup>[45]</sup> 将上述结果推广到非恰当参数化情形, 并给出了直纹面  $\mu$  基的新算法.

下面, 我们可以给出一个具体实例.

**例 4.8** 给定直纹面

$$\begin{aligned} P_0(s) &= (s^3 + 2s^2 - s + 3, -3s + 3, \\ &\quad -2s^2 - 2s + 3, 2s^2 + s + 2), \\ P_1(s) &= (2s^3 + 2s^2 - 3s + 7, 2s^2 - 5s + 5, \\ &\quad -6s^2 - 8s + 4, 5s^2 + 4s + 5), \end{aligned}$$

求它的隐式方程.

**解** 由引理 4.6 求得直纹面的  $\mu$  基为

$$\begin{aligned} p &= (22s + 31, 15s^2 + 39s + 33, \\ &\quad 19s^2 - 11s - 28, 8s^2 - 11s - 54), \\ q &= (62s - 154, 4s^2 - 39s - 259, \\ &\quad -23s^2 - 189s + 207, -54s^2 - 164s + 309), \end{aligned}$$

于是曲面的隐式方程  $F(x, y, z)$ , 即  $p \cdot X$  与  $q \cdot X$  的结式可以写成一个二阶行列式, 每行元素都是  $x, y, z$  的二次多项式.

进一步, 还可以计算出  $\mu$  基的另一个元素  $r = u + tv$ , 其中

$$\begin{aligned} u &= (882, 410s + 871, 379s - 1109, -62s - 966), \\ v &= (1818, 742s + 1718, 575s - 2389, -334s - 2352). \end{aligned}$$

### 4.3 基于一般曲面 $\mu$ 基的隐式化

给定参数曲面(4), 考虑跟踪该参数曲面的动平面全体

$$\begin{aligned} L &:= \text{Syzy}(a, b, c, d) = \\ &\{(A, B, C, D) \in \mathbf{R}[s, t]^4 \mid aA + bB + cC + dD \equiv 0\}. \end{aligned}$$

显然,  $L$  是  $\mathbf{R}[s, t]$  上的 Syzygy 模. 一个重要的事实是, 该模是自由模.

**定理 4.9**<sup>[11]</sup> 给定曲面的参数方程(4),  $\text{Syzy}(a, b, c, d)$  是维数为 3 的自由模.

**定义 4.10** 称  $\text{Syzy}(a, b, c, d)$  的一组基  $p, q, r$  为参数曲面(4)的一组  $\mu$  基. 称  $p, q, r$  是一组极小  $\mu$  基, 如果

- ①  $\deg_s(p) + \deg_s(q) + \deg_s(r)$  达到最小;
- ② 在满足前一条的  $\mu$  中,  $\deg_s(p) + \deg_s(q) + \deg_s(r)$  达到最小.

类似地, 我们也称  $p = p \cdot X, q = q \cdot X, r = r \cdot X, X = (x, y, z, 1)$  为一组  $\mu$  基.

本文作者及合作者利用多项式矩阵分解技术给出了  $\mu$  基的算法, 详见文献[46].

$\mu$  基有以下性质:

**定理 4.11**<sup>[11]</sup> 设  $p, q, r$  是有理曲面(4)的  $\mu$  基. 则有

① 对任意动平面  $l \in syz(a, b, c, d)$ ,  $l$  可唯一地表示成

$$l = h_1 p + h_2 q + h_3 r,$$

其中  $h_1, h_2, h_3 \in R[s, t]$ . 且  $\deg_t(h_1 p), \deg_t(h_2 q), \deg_t(h_3 r)$  的上界为  $\deg_t(l) + \deg_t(p) + \deg_t(q) + \deg_t(r) - n$ ,  $\deg_s(h_1 p), \deg_s(h_2 q), \deg_s(h_3 r)$  的上界为  $\deg_s(l) + \deg_s(p) + \deg_s(q) + \deg_s(r) - m$ .

② 存在非零常数  $\kappa$  满足  $[p, q, r] = \kappa P(s, t)$ , 其中  $[p, q, r]$  表示向量  $p, q, r$  的外积:

$$[p, q, r] = \left\{ \begin{array}{c} \begin{vmatrix} p_2 & p_3 & p_4 \\ q_2 & q_3 & q_4 \\ r_2 & r_3 & r_4 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} p_1 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_3 & q_4 \\ r_1 & r_3 & r_4 \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_4 \\ r_1 & r_2 & r_4 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} \end{array} \right\}.$$

这里,  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4), q = (q_1, q_2, q_3, q_4), r = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ .

③ 曲面(4)的基点是局部完全交(LCD)的, 当且仅当对任意  $(s, t), \text{rank}(p, q, r) \geq 2$ .

④ 如果曲面(4)的基点都是局部完全交的, 则曲面的隐式方程  $F(x, y, z) \in \langle p, q, r \rangle \cap R[x, y, z]$ .

利用上述定理, 当曲面的基点是局部完全交时, 曲面的隐式方程可以计算如下:

- ① 计算曲面(4)的一组  $\mu$  基  $p, q, r$ .
- ② 计算  $p, q, r$  在序  $s, t > x, y, z$  下的 Groebner 基, 则其中关于  $x, y, z$  的多项式就是曲面的隐式方程.

如果曲面的基点不是局部完全交的, 则我们有以下结论:

**定理 4.12**<sup>[11]</sup> 令  $g(s) \in R[s]$  是由  $\langle a, b, c, d \rangle \cap R[s] = \langle g \rangle$  确定的多项式.  $p, q, r$  是曲面的一组  $\mu$  基, 则存在非负整数  $N$  ( $N$  不超过曲面的隐式方程的次数) 使得曲面的隐式方程  $F(x, y, z)$  满足

$$F \in \langle p, q, r \rangle : g^N.$$

基于上述结论, 如果曲面的基点不是完全交的, 我们可以给出曲面隐式化的如下算法:

- ① 计算曲面(4)的一组  $\mu$  基  $p, q, r$ , 令  $J = \langle p, q, r \rangle$ .
- ② 计算  $J' = J : g$ . 如果  $J' = J$ , 则做下一步. 否

则, 令  $J = J'$ , 继续执行本步算法.

③ 计算  $J$  关于字典序  $t > s > x > y > z$  的一组 Groebner 基, 其中关于  $x, y, z$  的多项式就是曲面的隐式方程.

上述算法都是基于 Groebner 基计算隐式方程, 能否直接由曲面的  $\mu$  基给出隐式方程? 这有待进一步的探索.

对于一些特殊的曲面, 如旋转面, 曲面的隐式方程可以用  $\mu$  基方法计算获得.

**定理 4.13**<sup>[47]</sup> 设  $S$  是由一条  $n$  次平面有理曲线  $C$  绕一轴线旋转所得的旋转面. 设  $C$  的一组  $\mu$  基为

$$p = (p_1(t), p_2(t), p_3(t)), \\ q = (q_1(t), q_2(t), q_3(t)).$$

则曲面  $S$  具有极小  $\mu$  基:

$$p^* = (p_1, sp_1, p_2, p_3), \\ q^* = (q_1, sq_1, q_2, q_3), \\ r^* = (-2s, 1 - s^2, 0, 0).$$

且由极小  $\mu$  基可以构造出一个  $2(n - \mu)$  阶行列式, 该行列式就是旋转面的隐式方程.

文献[48]进一步将上述结果推广到由相互垂直的平面曲线所生成的有理曲面的情形.

Berry 等研究了具有 6 个基点的非奇异三次参数曲面的隐式化问题, 显然其隐式表示是一个三次代数曲面.

**定理 4.14**<sup>[49]</sup> 给定具有 6 个一般基点的非奇异三次参数曲面  $P(s, t)$ , 则存在一组关于  $s, t$  为一次的  $\mu$  基

$$p = p_0 + p_1 s + p_2 t, \\ q = q_0 + q_1 s + q_2 t, \\ r = r_0 + r_1 s + r_2 t,$$

其中  $p_i, q_i, r_i, i=0, 1, 2$  都是  $x, y, z$  的一次函数. 且曲面的隐式方程为

$$\begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \\ r_0 & r_1 & r_2 \end{vmatrix} = 0.$$

文献[50]进一步研究了管道曲面的隐式化问题.

下面, 我们给两个例子.

**例 4.15** 给定三次参数曲面

$$P(s, t) = (s^2 t - t^2, -s + s^3 + st^2, -t + st + s^2 t - t^2, -t + s^2 t + t^2).$$

求曲面隐式方程.

**解** 该曲面具有4个简单基点:  $(s, t) = (1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 0)$  及无穷远基点  $(0, 1, 0)$ , 因此基点是局部完全交的. 曲面的一组  $\mu$  基为

$$p = (-2s^2 - s + 2, 0, 2s^3 - 1, -s + 1),$$

$$q = (-2ts - 3t + s + 1, 0,$$

$$2ts + 2t - s - 1, -t + 1),$$

$$r = (ts + 2t + 4s^4 + 6s^3 - 4s - 4, -2t,$$

$$-2ts - t - 4s^4 - 4s^3 + 4s + 2, ts + t + 2s^3 - 2).$$

计算  $p, q, r$  在字典序  $t > s > x > y > z$  下的一组 Groebner 基可得曲面的隐式方程为

$$\begin{aligned} & -1 - 2x + 2x^2 + 2x^3 + 8x^5 + y - xy + 2x^2y + \\ & 19x^3y - 5x^4y + 4xy^2 + 4x^2y^2 - 4x^3y^2 + \\ & 3z + 4xz - 12x^2z - 22x^3z - 12x^4z - 8xyz - \\ & 46x^2yz + 10x^3yz - 4y^2z - 12xy^2z + 4x^2y^2z - \\ & 5z^2 + 14xz^2 + 47x^2z^2 - 2x^3z^2 + 5yz^2 + \\ & 38xyz^2 + x^2yz^2 + 8y^2z^2 + 4xy^2z^2 - 5z^3 - \\ & 32xz^3 + 11x^2z^3 - 10yz^3 - 10xyz^3 - 4y^2z^3 + \\ & 7z^4 - 6xz^4 + 4yz^4 + z^5 = 0. \end{aligned}$$

**例 4.16** 考察双二次曲面

$$a = t^2 + st + 2s^2 - 2s^2t,$$

$$b = t^2 + 2st + st^2 + 2s^2 - s^2t + 2s^2t^2,$$

$$c = -t^2 + st + 2st^2 + 2s^2 - s^2t - 2s^2t^2,$$

$$d = 2st - 2st^2 - 2s^2t - s^2t^2.$$

求曲面的隐式方程.

**解** 该曲面具有一个4重基点  $(0, 0)$ , 它不是局部完全交的. 计算曲面的一组  $\mu$  基  $p, q, r$ , 再计算理想  $J = \langle p, q, r \rangle$  的 Groebner 基, 其中所含与  $x, y, z$  相关的多项式不是曲面的隐式方程(它包含了一个多余的因子). 为计算隐式方程, 我们计算  $J : g$  的 Groebner 基, 这里  $\langle g \rangle = \langle a, b, c, d \rangle \cap R[s]$ . 则 Groebner 基中关于  $x, y, z$  的多项式是曲面的隐式方程:

$$\begin{aligned} & 7028 - 27627x + 6028x^2 + 53371x^3 + 35836x^4 + \\ & 33238y - 85025xy - 36329x^2y - 12848x^3y + \\ & 60041y^2 - 66840xy^2 + 678x^2y^2 + 44040y^3 - \\ & 23036xy^3 + 11804y^4 - 7676z + 23239xz - \\ & 49383x^2z - 58602x^3z - 13453yz + 84030xyz + \\ & 41602x^2yz - 22648y^2z + 5280xy^2z - 5900y^3z + \\ & 18806z^2 - 2855xz^2 + 26134x^2z^2 + 10799yz^2 - \\ & 60272xy^2z^2 + 18146y^2z^2 - 9813z^3 + 3462xz^3 + \\ & 14158yz^3 + 3558z^4 = 0. \end{aligned}$$

## 5 结论

参数曲线/曲面隐式化是计算机辅助几何设计中重要的研究课题之一. 本文综述了曲线/曲面隐式化的各种主要方法, 包括结式方法、Groebner 基方法、吴特征列方法, 特别地, 详尽地介绍了近十几年发展起来的动曲线/曲面方法与  $\mu$  基方法的最新进展.

相比而言, 结式方法将曲线/曲面的隐式方程表示为一个行列式的形式, 从形式上很紧凑, 且效率较高. 遗憾的是, 当曲面具有基点时该方法失效. Groebner 基方法与吴特征列方法从理论上很完善, 它们对任何曲线与曲面都有效, 不过效率低下而不实用. 动曲线与动曲面方法将曲线/曲面的隐式方程表示为较低阶的行列式形式, 因此效率比结式方法更高, 不过如何选取混合函数及相应的动曲面还没有自动的方法.  $\mu$  基方法是建立在动曲线/曲面方法基础之上, 是新近发展起来的求解曲线/曲面隐式化的最有效的方法. 目前, 我们只对曲线与直纹面给出了  $\mu$  基的完整理论, 如何求解一般有理由曲面的  $\mu$  基及其在曲面隐式化中的应用仍是一个十分有意义的研究课题.

### 参考文献 (References)

- [1] Sederberg T W. Implicit and Parametric Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design [D]. West Lafayette, USA: Purdue University, 1983.
- [2] Sederberg T W, Anderson D, Goldman R. Implicit representation of parametric curves and surfaces [J]. Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 1984, 28(1): 72-84.
- [3] Buchberger B. Bruno Buchberger's PhD thesis 1965: An algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero dimensional polynomial ideal [J]. Journal of symbolic Computation, 2006, 41(3): 475-511.
- [4] Buchberger B. Applications of Grobner bases in nonlinear computational geometry [M]// Kapur D, Mundy J. Geometric Reasoning. Cambridge, USA: MIT Press, 1989: 413-446.
- [5] Cox D, Little J, O'Shea D. Ideas, Varieties and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra [M]. New York, USA: Springer-Verlag, 1992.
- [6] 吴文俊. 几何定理机器证明的基本原理 [M]. 北京: 科学出版社, 1984.

- [7] Li Z. Automatic Implicitization of Parametric Objects [J]. *MM Research Preprints*, 1989, 4: 54-62.
- [8] Sederberg T W, Chen F. Implicitization using moving curves and surfaces [C]//*Proceedings of the 22nd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*. New York, NY, USA: ACM, 1995: 301-308.
- [9] Cox D, Sederberg T W, Chen F. The moving line ideal basis of planar rational curves [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 1998, 15(8): 803-827.
- [10] Chen F, Zheng J, Sederberg T W. The  $\mu$ -basis of a rational ruled surface [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2001, 18(1): 61-72.
- [11] Chen F, Cox D, Liu Y. The  $\mu$ -basis and implicitization of a rational parametric surface [J]. *Journal of Symbolic Computation*, 2005, 39(6): 689-706.
- [12] Marco A, Martinez J J. Implicitization of rational surfaces by means of polynomial interpolation [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2002, 19(5): 327-344.
- [13] Corless R M, Giesbrecht M W, Kotsireas I S, et al. Numerical implicitization of parametric hypersurfaces with linear algebra [J]. *Lecture Notes in Computer Science*, 2001, 1930: 174-183.
- [14] Wang D. A simple method for implicitizing rational curves and surfaces [J]. *Journal of Symbolic Computation*, 2004, 38(1): 899-914.
- [15] Dokken T, Thomassen J B. Overview of approximate implicitization [M]// Goldman R, Krasauskas R. *Contemporary Mathematics*, Vol 334: Topics in Algebraic Geometry and Geometric Modeling. American Mathematical Society, 2003: 169-184.
- [16] Chen F, Deng L. Interval implicitization of rational curves [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2004, 21(4): 401-415.
- [17] Cox D, Little J, O'Shea D. *Using Algebraic Geometry* [M]. New York, USA: Springer-Verlag, 1998.
- [18] Krishnan S, Manocha D. An efficient surface intersection algorithm based on lower-dimensional formulation [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 1997, 16(1): 74-106.
- [19] Chionh E W, Zhang M, Goldman R. Implicitization by Dixon A-resultant [C]// *Proceedings of Geometric Modeling and Processing*. Piscataway, USA: IEEE Press, 2000: 310-318.
- [20] Elkadi M, Mourrain B. Residue and implicitization problem for rational surfaces [J]. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 2004, 14(5): 361-379.
- [21] Chionh E W, Goldman R. Implicitizing rational surfaces with base points by applying perturbations and factors of zero theorem [M]// Lyche T, Schumaker L. *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design II*. San Diego, USA: Academic Press Professional, Inc, 1992: 101-110.
- [22] Manocha D, Canny J. Algorithms for implicitizing rational parametric surfaces [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 1992, 9(1): 25-50.
- [23] Pérez-Díaz S, Sendra J R. A univariate resultant-based implicitization algorithm for surfaces [J]. *Journal of Symbolic Computation*, 2008, 43(2): 118-139.
- [24] Buse L. Residual resultant over the projective plane and the implicitization problem [C]// *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*. New York, NY, USA: ACM, 2001: 48-55.
- [25] Aries F, Senoussi R. An implicitization algorithm for rational surfaces with no base points [J]. *Journal of Symbolic Computation*, 2001, 31(4): 357-365.
- [26] Khetan A, D'Andrea C. Implicitization of rational surfaces using toric varieties [J]. *Journal of Algebra*, 2006, 303(2): 543-565.
- [27] Gao X, Chou S. Implicitization of rational parametric equations [J]. *Journal of Symbolic Computation*, 1992, 14(5): 459-470.
- [28] Alonso C, Gutierrez J, Recio T. An implicitization algorithm with fewer variables [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 1995, 12(3): 251-258.
- [29] 王东明. 消去法及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [30] Sederberg T W, Saito T, Qi D, et al. Curve implicitization using moving Lines [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 1994, 11(6): 687-706.
- [31] Sederberg T, Goldman R, Du H. Implicitizing rational curves by the method of moving algebraic curves [J]. *Journal of Symbolic Computation*, 1997, 23(2): 153-175.
- [32] Zhang M, Chionh E W, Goldman R. On a relationship between the moving line and moving conic coefficient matrices [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 1999, 16(6): 517-527.
- [33] Chen F, Sederberg T W. A new implicit representation of a planar rational curve with high order singularity [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2002, 19(2): 151-167.
- [34] Cox D, Goldman R, Zhang M. On the validity of implicitization by moving quadrics for rational surfaces with no base points [J]. *Journal of Symbolic Computation*, 2000, 29: 419-440.
- [35] Cox D. *Curves, surfaces and syzygies* [M]// Goldman



- R, Krasauskas R. Contemporary Mathematics, Vol 334: Topics in Algebraic Geometry and Geometric Modeling. American Mathematical Society, 2003: 131-150.
- [36] Buse L, Cox D, D'andrea C. Implicitization of surfaces in  $\mathbf{P}^3$  in the presence of base points. Journal of Algebra and Its Applications, 2003,2: 189-214.
- [37] Zheng J, Sederberg T W, Chionh E W, et al. Implicitizing rational surfaces with base points using the method of moving surfaces [M]// Goldman R, Krasauskas R. Contemporary Mathematics, Vol 334: Topics in Algebraic Geometry and Geometric Modeling. American Mathematical Society, 2003: 151-168.
- [38] Chen F, Shen L, Deng J. Implicitization and parameterization of quadratic and cubic surfaces by  $\mu$ -bases[J]. Computing, 2007,79: 131-142.
- [39] Wang X, Chen F, Deng J. Implicitization and parameterization of quadratic surfaces with one simple base point [C]//Proceedings of the Twenty-first International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. New York, NY, USA: ACM, 2008: 31-38.
- [40] Wang X, Chen F. Implicitization, parameterization and singularity computation of Steiner surfaces using moving surfaces[J]. Journal of Symbolic Computation, 2012, 47(6):733-750.
- [41] Chionh E W. Shifting planes always implicitize a surface of revolution [J]. Computer Aided Geometric Design, 2009,26(4): 369-377.
- [42] Chen F, Wang W. The  $\mu$ -basis of a planar rational curve-properties and computation [J]. Graphical Models, 2002,64(6): 368-381.
- [43] Song N, Goldman R.  $\mu$ -bases for polynomial systems in one variable[J]. Computer Aided Geometric Design, 2009,26(2): 217-230.
- [44] Chen F, Wang W. Revisiting the  $\mu$ -basis of a rational ruled surface [J]. Journal of Symbolic Computation, 2003, 36(5):699-716.
- [45] Dohm M. Implicitization of rational ruled surfaces with  $\mu$ -bases [J]. Journal of Symbolic Computation, 2009, 44(5): 479-489.
- [46] Deng J, Chen F, Shen L. Computing  $\mu$  bases of rational curves and surfaces using polynomial matrix factorization [C]//Proceedings of the 2005 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. ACM, 2005: 132-149.
- [47] Shi X, Goldman R. Implicitizing rational surfaces of revolution using  $\mu$ -bases [J]. Computer Aided Geometric Design, 2012,29(6): 348-362.
- [48] Shi X, Wang X, Goldman R. Using  $\mu$ -bases to implicitize rational surfaces with a pair of orthogonal directrices [J]. Computer Aided Geometric Design, 2012,29(7): 541-554.
- [49] Berry T G, Patterson R R. Implicitization and parametrization of nonsingular cubic surfaces [J]. Computer Aided Geometric Design, 2001, 18(8): 723-738.
- [50] Dohm M, Zube S. The implicit equation of a canal surface [J]. Journal of Symbolic Computation, 2009, 44(2):111-130.