

含不同角度穿透裂纹板拉伸断裂的有限元模拟

刘磊¹, 刘亚东¹, 张亚军², 徐胜利¹

(1. 中国科学技术大学近代力学系, 安徽合肥 230027; 2. 中国工程物理研究院流体物理研究所, 四川绵阳 621900)

摘要:对含不同预置角度穿透裂纹板受拉伸断裂过程进行了数值模拟. 选用增量型弹塑性本构关系, 采用自编有限元程序求解虚功原理方程, 裂纹扩展参照了 LS-DYNA 商业计算软件处理断裂问题的单元失效方法, 考核了不同幅值载荷和预置裂纹角度的影响, 给出了不同时刻等效应力云图和指定点的应力、应变随时间变化曲线. 计算结果表明: 当应力波在板中传播时, 会在裂纹尖端引起应力集中, 板产生垂直裂纹和水平裂纹. 垂直裂纹扩展垂直于加载方向, 水平裂纹扩展平行于加载方向, 两者均与预置裂纹角度无关. 板上不同位置的应力变化仅和相对裂尖位置相关, 而与预置裂纹角度无关. 相对裂尖位置、与板边界距离和加载位置是影响应变随时间变化的主要因素. 当载荷幅值较小时, 不会出现裂纹扩展. 当载荷幅值较大时, 聚集在裂纹尖端的应变能需较长时间才能释放, 这会影晌水平裂纹的出现时间.

关键词:有限元; 拉伸断裂; 裂纹; 弹塑性本构

中图分类号: O347.4 **文献标识码:** A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2012.04.003

引用格式: Liu Lei, Liu Yadong, Zhang Yajun, et al. Response of elastic-plastic plate embedded cracks at different orientation under impact load[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2012, 42(4): 270-278.

刘磊, 刘亚东, 张亚军, 等. 含不同角度穿透裂纹板拉伸断裂的有限元模拟[J]. 中国科学技术大学学报, 2012, 42(4): 270-278.

Response of elastic-plastic plate embedded cracks at different orientation under impact load

LIU Lei¹, LIU Yadong¹, ZHANG Yajun², XU Shengli¹

(1. Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China;
2. Institute of Fluid Physics, China Academy of Engineering Physics, Mianyang 621900, China)

Abstract: Three-dimensional computation was carried out on the dynamic response of metal plate embedded at the different inclined cracks under parallel impact load. To describe the elastic-plastic material, an increase type of constitutive relationship was adopted and governing equation in Lagrangian form was solved by finite element method (FEM). Referring to LS-DYNA commercial code, six types of failure criteria based on stress and strain respectively indicate the fatigued elements which represent the cracks. During the loading, stress waves are generated which propagate inwards the plate and lead to the stress concentration around the crack tips. Meanwhile, new cracks are formed evolving from the crack tips. In

收稿日期: 2010-11-27; 修回日期: 2011-04-10

基金项目: 国家自然科学基金青年基金(10902110)资助.

作者简介: 刘磊, 男, 1986年生, 硕士. 研究方向: 计算力学. E-mail: leil@mail.ustc.edu.cn

通讯作者: 徐胜利, 博士/教授. E-mail: slxu@ustc.edu.cn

contrast to the loading, the vertical cracks propagate perpendicularly and the parallel ones propagate horizontally. But these new cracks are independent of the inclination of the embedded cracks. The stress time history at each point in the plate is approximately related to the distance to the tips and either independent of the crack inclination. Moreover, the distances to the tips and plate frontier, and loading walls mainly affect the local strain time history. This means that the local strain is determined by the time integration of the plate loading. If the load amplitude is below a threshold value, the cracks do not prolong further. Otherwise, it takes a long time to release the strain energy concentrated around the tips, which postpones the appearance of the parallel cracks.

Key words: finite element method (FEM); tensile failure; crack; elastic-plastic constitutive relationship

0 引言

受冲击载荷作用的带裂纹结构动力学响应问题与采油、采矿和防护工程等密切相关。例如,对于复合射孔弹,其金属射流首先在钢套管中产生射孔,延时起爆的火药对已含孔洞和裂纹的钢套管再次产生冲击加载,裂纹扩展及止裂会影响射孔枪的寿命。因此,需研究包含裂纹的金属板(壳)再次受冲击加载后的起裂、扩展、分叉和止裂现象,为评估结构寿命和安全性提供参考数据^[1]。所涉及的问题归结为:①考虑应变率效应的材料动态本构关系;②含裂纹型损伤的弹塑性材料动态损伤和破坏机理;③受冲击加载后,结构从动力响应向动态失效的转化过程。相关研究包括:Broke^[2]详细分析了裂纹的扩展机理,并给出了不同类型裂纹尖端附近的应力场分布。Ravichandran等^[3]设计了受平面波加载的材料动态响应实验,验证了断裂力学中裂纹扩展的机理。Prakash等^[4]研究了高应变率钢受平面应变脉冲加载的裂纹尖端与材料动态刚度关系,指出了材料动态断裂强度存在明显的转折点。Itou^[5]研究了含两个直角的有限拉伸板的动态响应问题,讨论了影响动态应力集中的主要因素。范天佑^[6]对线弹性及非线性等多种裂纹的应力强度因子进行了计算,给出了工程结构断裂强度分析的主要步骤。刘元镛等^[7]研究了含裂纹板受低速率冲击加载的I型裂纹动态起裂问题,推导了裂尖张开位移和裂尖塑性区周线上最大周向应变的关系。胡柳青等^[8]对受剪切冲击加载的裂纹动态响应进行了数值模拟,得出了响应的动态应力强度因子。基于能量准则,杨桃林等^[9]研究了中层含预置裂纹的复合材料板的裂纹扩展机理。董新龙等^[10]对材料动态剪切断裂行为进行了实验研究。

综上所述,有大量文献研究受静态加载的材料

或结构的裂纹生成和扩展问题;对受冲击加载的相关问题仍在研究中,加载方式以剪切冲击加载为主,而针对垂直冲击加载的研究相应较少。本文采用动态有限元求解 Lagrange 坐标系下的虚功方程,对预置不同角度裂纹板受冲击加载的动态响应进行了数值研究,针对不同预置裂纹角度和载荷大小,给出了裂纹板应力应变场的分布。

1 控制方程及本构关系

本文计算采用 Lagrange 坐标系下的虚功方程^[6]:

$$\delta \Pi = \int_V \rho \ddot{x} \delta x_k dv + \int_V t^{km} \delta x_{k,m} dv - \int_V \rho f^k \delta x_k dv - \int_{s'} s^k \delta x_k da = 0. \quad (1)$$

式中, ρ 为密度; t^{km} , f^k , s^k 分别为应力张量、体积力、面力矢量; x_k 为坐标分量; dv , da 分别为体积微元、面积微元; s' 为应力加载面。假设无初始应力,给定边界条件^[11]及材料本构关系,式(1)封闭,其离散形式为

$$\sum_{n=1}^{N_e} \left(\int_{V_n} \rho [A]^T [A] dv [\ddot{x}] + \int_{V_n} [B]^T [T] dv - \int_{V_n} \rho [A]^T [f] dv - \int_{s'_n} [A]^T [s] da \right) = 0. \quad (2)$$

式中, V_n 为第 n 单元; δx_i^k 为第 i 节点沿 k 方向变分; N_e 为节点数。 A , B , T 具体形式见文献^[12]。

针对弹塑性材料,假设为各向同性,采用 von Mises 屈服函数,有

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{1}{2} x'_{ij} x'_{ij} - k^2 (e^p), \\ \sqrt{2} k &= \sqrt{\frac{2}{3}} t_y + \frac{2}{3} b H e^p. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中, $\xi'_{ij} = s_{ij} - \alpha_{ij}$, s_{ij} 为偏应力, $\alpha_{ij} = (1 - \beta) \frac{2}{3} H e^p_{ij}$,

$H = \frac{EE_t}{E - E_t}$, β 为硬化系数, E 和 E_t 分别表示杨氏弹性模量和塑性切向模量; t_y 表示初始屈服应力. 对屈服函数式 $f=0$ 求导得

$$\left(\xi'_{ij} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{2}{3} H(1 - \beta) \xi'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \right) - \sqrt{2} k \frac{d(\sqrt{2} k)}{d\dot{\epsilon}^p} \dot{\epsilon}^p = 0. \quad (4)$$

根据 Drucker 假设, 塑性应变率表示为

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda \xi'_{ij}. \quad (5)$$

包括弹性和塑性部分的总体应变率为

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p. \quad (6)$$

将式(6)代入 $\dot{\sigma}_{ij} = \mathbf{D} \dot{\epsilon}_{ij}^e$, 其中 \mathbf{D} 是弹性矩阵, 得

$$\dot{\sigma}_{ij} = \mathbf{D}(\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^p) = \mathbf{D}(\dot{\epsilon}_{ij} - \lambda \xi'_{ij}). \quad (7)$$

将式(4)~(6)代入式(7)求出

$$\lambda = \frac{\xi'_{ij} \mathbf{D}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}{\xi'_{ij} \mathbf{D}_{ij} \xi'_{ij} + \frac{4}{3} H k}. \quad (8)$$

将求出的 λ 分别代入式(4), (6)可求出 $\dot{\epsilon}_{ij}^p, \dot{\sigma}_{ij}$, 此为增量型弹塑性本构^[8]. 位移边界条件取 $u = u_0$, 应力边界条件取 $\bar{\mathbf{X}}_j = \boldsymbol{\sigma}_{ij} \cdot \mathbf{n}_i$. 其中, $\bar{\mathbf{X}}_j, \boldsymbol{\sigma}_{ij}$ 分别表示面力矢量和应力张量, \mathbf{n}_i 是单位外法向矢量.

2 数值方法与动态破碎

在位移模式下求解式(2). 体积分采用高斯积分, 显式时间积分采用 Newmark β 方法, 需引入 Neumann-Richtmyer 人工黏性, 以减小加载过大时引起的网格过度变形或变量出现间断. 采用 Flanagan-Belytschko 提出的沙漏控制方法^[13] 控制零能模式, 详见文献[13-14]. 采用单元失效法表征断裂. 根据给定的判据判断单元是否失效, 后续计算中删除失效单元. 多个删除单元可近似地表征裂纹尺度及其扩展. 常用判据分为两类: ①瞬时应力判据, 包括最大剪应力、最大第一主应力和 von Mises 等效应力; ②应变判据, 即等效塑性应变极限判据, 与时间积分相关. 上述断裂判据与材料性质无关, 且相互独立, 当满足上述任一判据时, 就删除相应的计算单元.

3 计算结果及分析

3.1 计算模型及参数

计算模型如图 1(a) 所示, 裂纹板尺寸为 $20 \times 20 \times 2 \text{ mm}^3$, 预置裂纹位于板中央, 长度 4 mm, 方向与 x 轴夹角为 α , 裂纹中心最大宽度 0.160 mm, 板左

右两端受水平方向的均布对称载荷. 图 1(b) 给出了有限元网格, 加载曲线见图 2, 表 1 给出了材料参数.

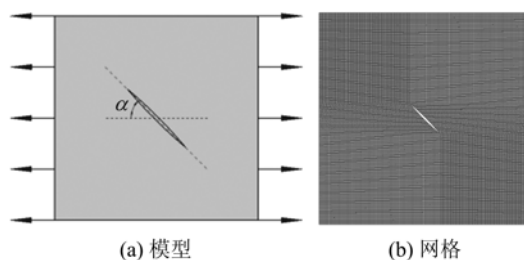


图 1 计算域、加载和计算网格示意图

Fig. 1 Schematic of domain, loading and mesh

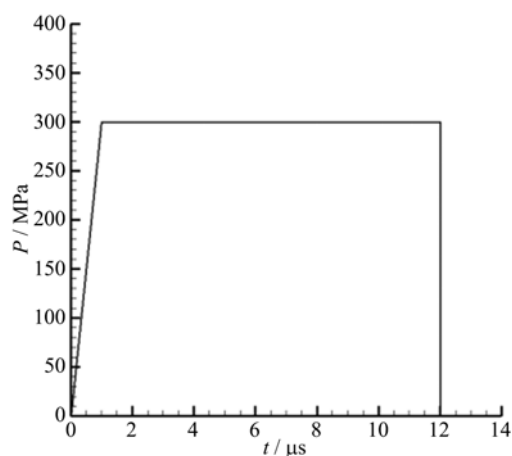


图 2 加载时间历程

Fig. 2 Loading versus time

表 1 材料参数

Tab. 1 Material properties

$\rho / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	2 700
ν	0.27
E / GPa	210
E_T / GPa	21
σ_c / MPa	355
抗拉强度 / MPa	600
抗剪强度 / MPa	300
最大塑性变形	0.16

本程序数值验证简述如下: 分别计算了一维长杆的应力波传播和预置穿透垂直裂纹弹塑性板的拉伸断裂问题, 计算结果与定性的理论分析相符^[18]. 此外, 针对静态加载的材料动态响应, 本程序与 LS-DYNA 计算结果也符合得很好.

3.2 预置不同角度穿透裂纹弹塑性板的拉伸断裂

图 3 给出了 α 为 45° 时穿透裂纹板拉伸断裂过程的等效应力云图. 当应力波未到达裂纹位置时, 应力波阵面近似为平面形状, 但在板上下自由边界处

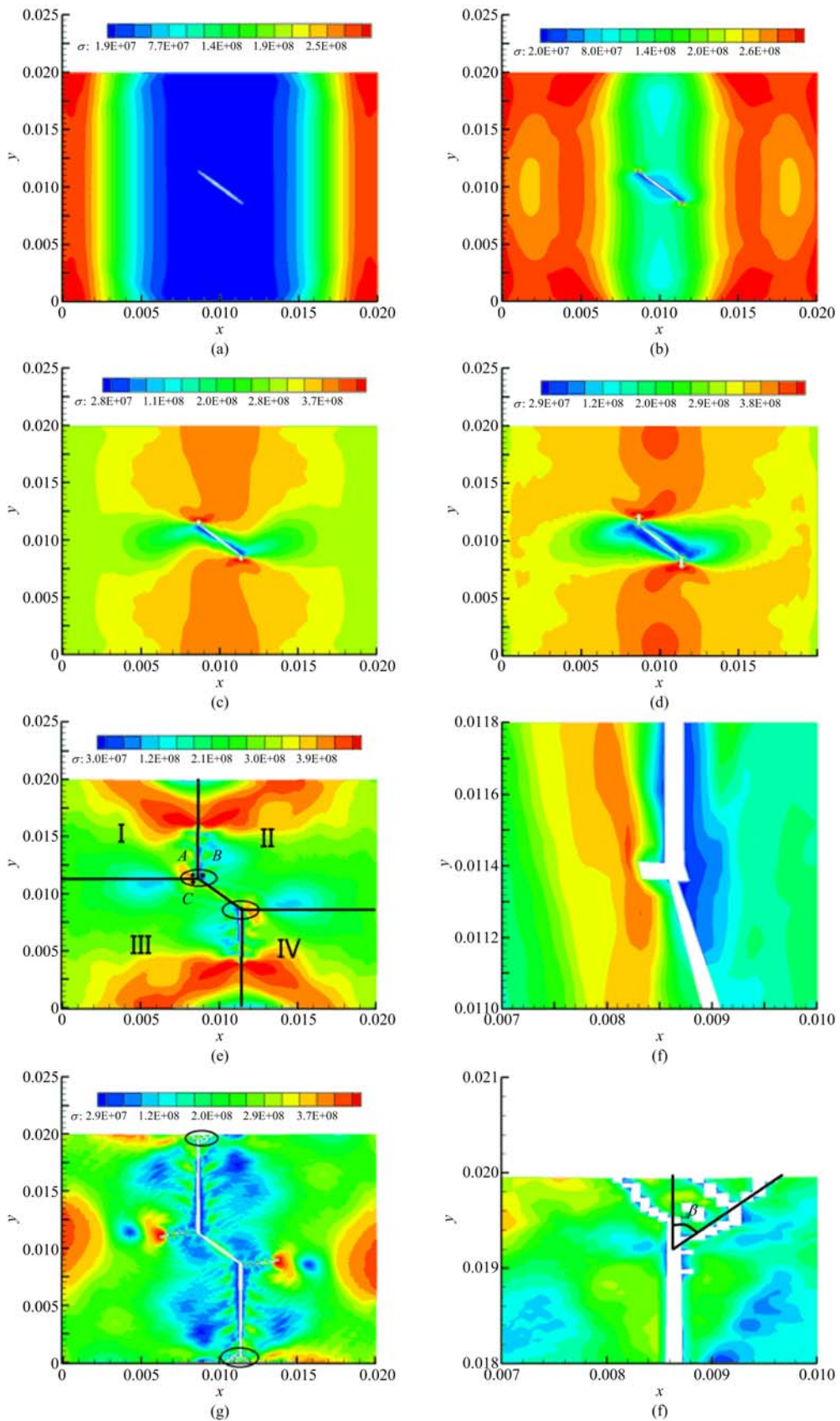


图 3 不同时刻等效应力云图和裂纹扩展 ($\alpha = 45^\circ$)

Fig. 3 von Mises stress contours and crack propagation ($\alpha = 45^\circ$)

有微小偏折(图 3(a)). 当应力波到达裂纹处, 在裂纹尖端产生应力集中(图 3(b)). 当最大等效应力大于材料屈服应力, 裂尖处会产生塑性变形. 当裂纹尖端的等效应力超过最大等效应力极限时, 裂纹由裂尖处开始扩展, 并沿着垂直加载方向延伸^[19](图 3(c)). 当 $t = 6.76 \mu\text{s}$ 时, 预置裂纹的两个尖端会产生第 2 条裂纹(图 3(e)), 并沿着平行于加载方向延

伸. 其中, t 为计算时间(下同). 当 $t = 9.09 \mu\text{s}$, 垂直裂纹出现分叉, 分叉起点和板边界相距 0.6 mm . 随着计算时间推进, 垂直裂纹继续扩展至板上下边界附近再分叉, 板断开为两部分(图 3(g)).

当其他条件不变且 α 分别为 $45^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ 时, 图 4 给出了计算结束时刻的预置裂纹扩展情况. 图 4 表明, 不同 α 对应的裂纹扩展规律几乎是相同的. 首

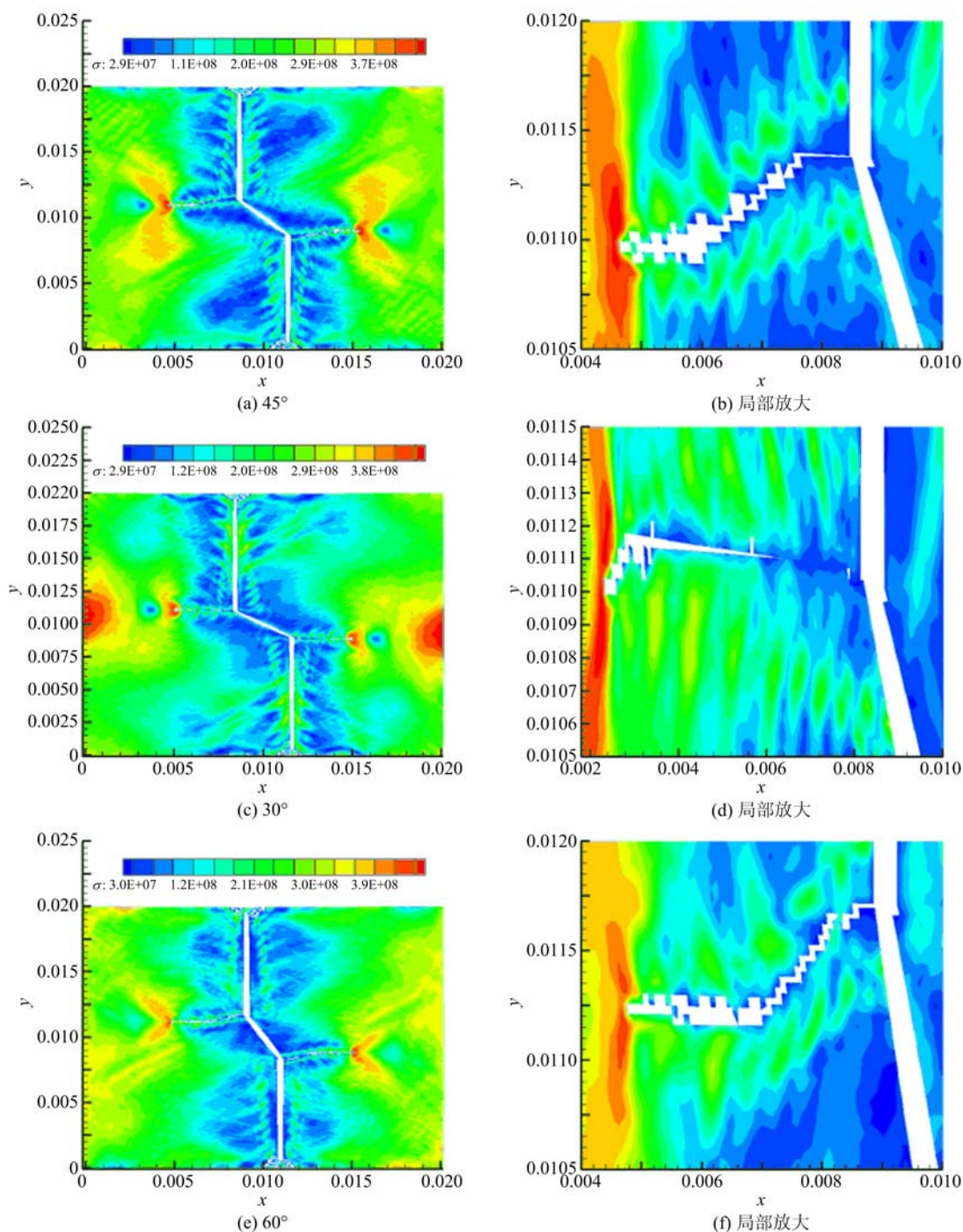


图 4 计算结束时的等效应力云图和裂纹扩展

Fig. 4 von Mises stress contours and crack propagation at the end of computation

先,自初始裂纹的尖端处,分别产生垂直方向的裂纹.这些裂纹到达板上下边界附近会出现分叉,分叉角几乎相同,约为 65° .与此同时,自预置裂纹尖端还会产生水平方向的裂纹,该裂纹近似平行于加载方向,其长度随着计算时间增加而增长.要指出的是:在初期,水平裂纹宽度随着计算时间增大而变宽;但在后期,水平裂纹尾部的宽度则是逐渐减小,原因分析见后文.

以下分别给出对垂直和水平裂纹产生及扩展原因的简要分析.对于垂直裂纹,考虑到板与加载条件的对称性,此处仅以向上裂纹为例,参考图 3(c).由于裂纹尺寸较大(约为板宽度 $1/5$),因此,板上下边界产生的侧面稀疏波会对裂纹扩展产生明显影响.当 $t = 1.38 \mu\text{s}$,应力波到达裂纹尖端,此时裂纹表面会反射卸载波,并在裂纹尖端产生应力集中.当 $t = 2.65 \mu\text{s}$,板的侧面稀疏波到达裂纹尖端,并与反射卸载波叠加,当裂纹尖端的等效应力大于屈服极限,使得裂纹尖端起裂并释放能量(图 3(c)).此时,预置裂纹区域已趋于应力平衡(图 3(d)),垂直裂纹可看作是 I 型裂纹,其前方区域可根据一维应力加载工况的裂纹扩展来处理,裂纹扩展垂直于加载方

向,与 α 无关.当 $y = 19.3$,裂纹前方计算域纵向长度与横向长度之比小于 0.05 ,此时裂纹扩展可看做处于一维应变状态.理论分析表明^[3,14],最大等效应力与裂纹扩展方向夹角为 70° ,此时等效应力已超过应力极限,因此,裂纹在板边缘分叉(图 4(a),(c),(e)),并沿两侧方向扩展.上述计算结果与理论值基本相符.

对于水平裂纹,垂直裂纹扩展导致了预置裂纹区域的应力平衡被破坏,板的 I 区与 III 区、II 区与 IV 区之间有产生相对位移的趋势(图 3(e)),预置裂纹尖端产生应力集中,经过垂直裂纹的能量释放后,应力再次增大.当 $t = 6.34 \mu\text{s}$,最大等效应力超过应力极限,从而产生水平裂纹.水平裂纹为 II 型裂纹,其传播方向近似平行于 I 区和 III 区、II 区和 IV 区的相对位移方向(图 4(a),(c),(e)),与 α 无关.受水平受方向拉伸,板中间部分会出现垂直方向位移(颈缩),使裂纹与水平方向产生夹角.沿裂纹方向的载荷分量,导致水平裂纹的始端出现收缩,并导致裂纹末端宽度大于始端宽度.

图 5 给出了指定点的应力应变、纵横坐标随时间变化.参考图 3(e),在 I, II, III 区域靠近裂纹尖

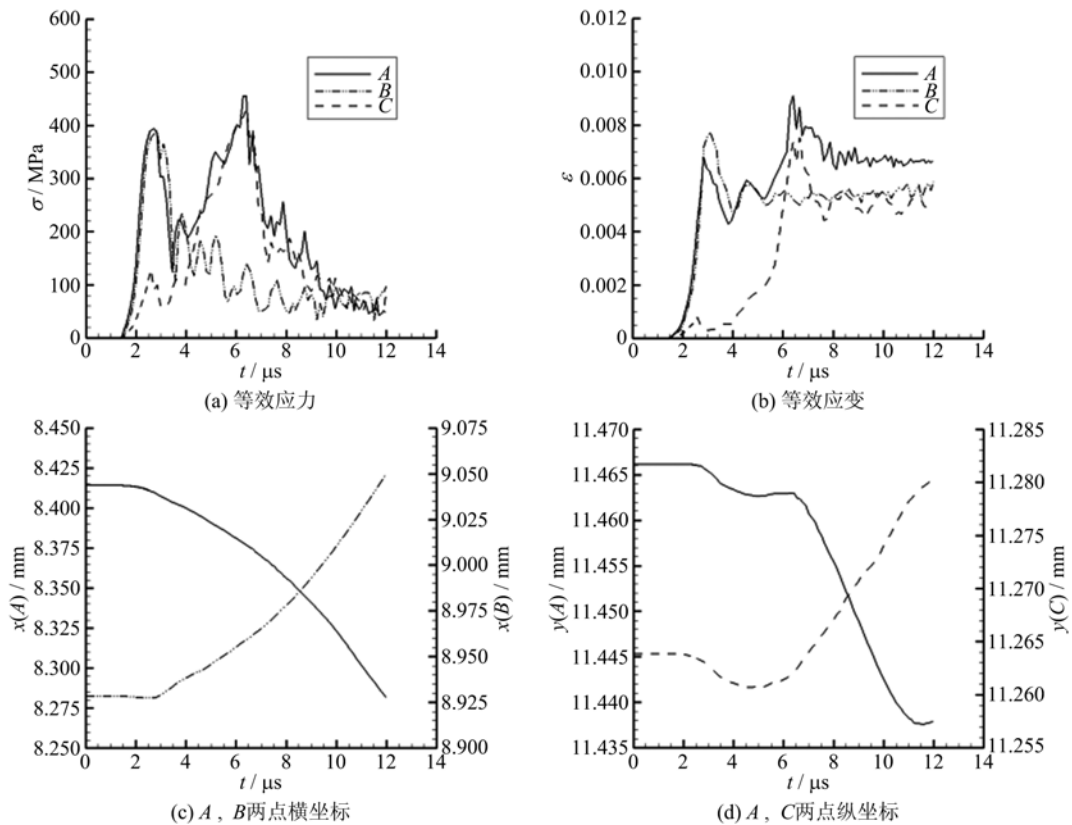


图 5 指定点等效应力和应变、纵横坐标随时间变化 ($\alpha = 45^\circ$)

Fig. 5 Time histories of stress, strain and coordinates at crack tip ($\alpha = 45^\circ$)

端取点 A, B, C. 图 5(a)和图 5(b)表明,当应力波到达裂纹尖端后, A, B 点应力应变急剧上升,应力为 393, 386 MPa, 应变为 0.006 8, 0.007 6, 而 C 点应力应变为 124 MPa, 0.000 8. 自裂纹尖端起裂后, 伴随着垂直裂纹的扩展, 3 个区域均出现卸载. A, B 和 C 点应力降为 132, 111 和 60 MPa, 应变降为 0.004 3, 0.004 5 和 0.000 3. 此后, B 点应力缓慢下降, 而应变保持为相对稳定的数值(约 0.005 3). 图 6(c)给出了 A, B 两点横坐标 x_A, x_B 随时间的变化. 图 5(c)表明, 随着垂直裂纹的扩展, 该裂纹始端逐渐扩大, 最终达 0.3 mm. 参考图 5(a), 随着 I 区和

III 区出现相对位移, A, C 两点产生应力集中, 应力最大值为 455, 419 MPa, 大于垂直裂纹产生时的应力最大值. 其原因是, 垂直裂纹产生的塑性应变可提高板的强度. 当水平裂纹产生后, 随着裂纹扩展, A, B 两点出现卸载, 最终应力约为 60 MPa, 应变值稳定为 0.006 6, 0.004 9. 图 5(d)给出了 A, C 点纵坐标 y_A, y_C 随时间的变化. 图 5(d)表明, 水平裂纹始端先随着水平裂纹产生而增大, 后随着其扩展而变小.

图 6 给出了不同 α 对应的指定点应力应变曲线. 图 6 表明, 当 α 不同时, 应力和应变随时间的变

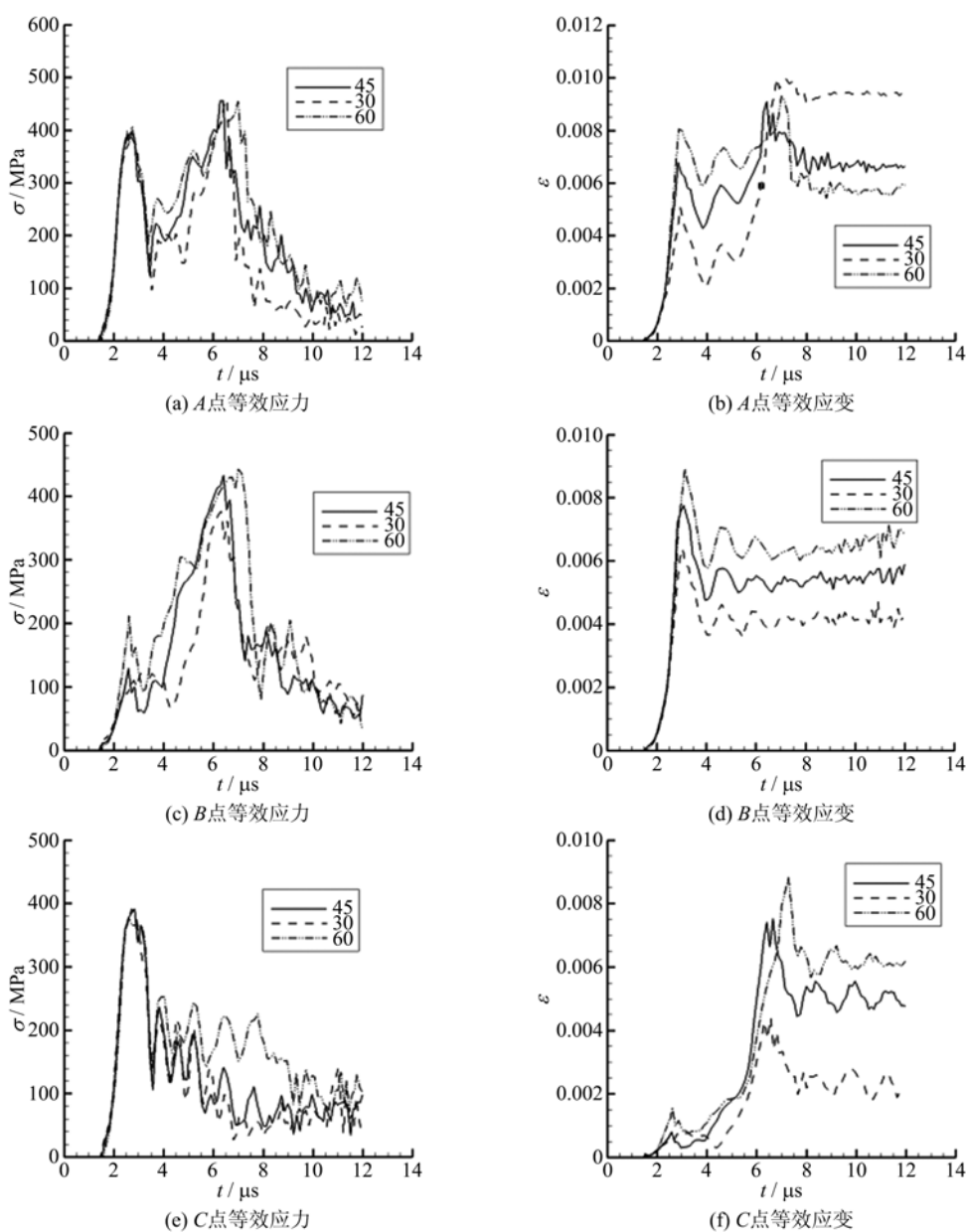


图 6 不同 α 对应的裂尖附近点的等效应力和应变时间曲线

Fig. 6 Time histories of stress and strain at different α around crack tip

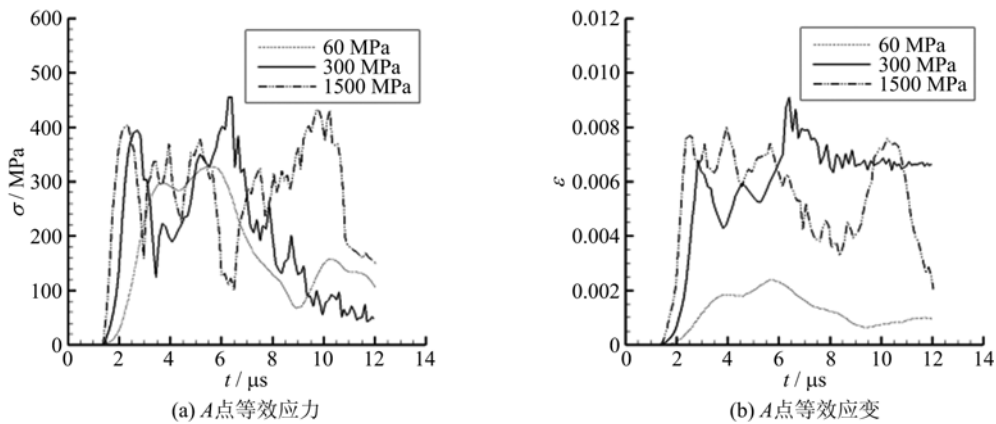


图7 不同幅值载荷 A 点应力和应变随时间变化

Fig. 7 Time histories of stress and strain at point A under different loading

化规律近似相同,特别是在加载初期.这是因为指定点应力的变化是由其相对预置裂纹尖端位置决定的.确定指定点相对预置裂纹尖端的位置,即可根据裂纹尖端塑性区应力场的分布,确定此点的应力变化规律.图6(b)表明,当 α 不同,对于第1次应力集中,A点应变随 α 增大而增大,但卸载后的应变曲线和 α 相关,较大 α 值对应的应变也较大.当出现第2次应力集中,尽管A点应变最大值近似相同,但卸载后的残余应变仍和 α 相关.其中, $\alpha=30^\circ$ 应变幅值大于 $\alpha=45^\circ$ 和 60° 的对应值.图6(f)表明,对于第1次应力集中,C点因第2次应力集中产生的应变随着裂纹角度的增加而增大.其原因是,应变的变化由其相对预置裂纹尖端的位置、与载荷加载位置的距离、与纵向边界的距离共同决定.预置角度越大,预置裂纹尖端距载荷加载位置越近,距纵向边界越远,则应变越大.

3.4 不同幅值载荷对裂纹产生和扩展的影响

当 $\alpha=45^\circ$ 时,改变载荷幅值(60, 1500 MPa),但加载时间保持不变,将计算结果和载荷峰值为300 MPa工况进行对比分析.

图7给出了A点等效应力和应变随时间变化曲线.图7(a)表明,当载荷幅值为60 MPa时,裂纹尖端的应力集中未能达到材料断裂极限,不会出现裂纹扩展,裂纹尖端的应力应变场随着应力波在板中的传播、反射和绕射而发生变化,板处于先加载后卸载再加载的动态过程.当载荷幅值为1500 MPa时,受应力波作用,裂纹板出现屈服.与载荷幅值300 MPa计算结果相比,裂纹尖端产生的应变值更大,裂纹积累的能量也更高.因此,当产生垂直裂纹后,裂纹能量释放需要更长的时间,从而导致水平裂

纹裂纹出现时间被推迟.图7(b)表明,当载荷幅值为1500 MPa时,裂纹尖端因第1次应力集中而产生的应变值高于载荷幅值为300 MPa的情况,第2次应力集中产生的应变,会很快卸载,而载荷幅值为300 MPa的情况则会稳定在一个固定的值.

4 结论

在本文条件下,可得出以下结论:

(I)对不同角度预置裂纹板的拉伸断裂问题,计算结果表明,加载后,板中形成的应力波在裂尖处出现应力集中,当应力超过断裂强度后,产生垂直裂纹(I型),沿加载垂直方向扩展,并在板边缘处分叉,与裂纹夹角约为 65° .

(II)垂直裂纹会引起不同区域出现相对位移,导致了预置裂纹尖端再次出现应力集中,并产生水平裂纹(II型),沿近似平行于加载方向扩展.板中部垂直方向的位移导致裂纹始端收缩.两道裂纹的扩展方向仅与加载方向有关,与预置裂纹角度无关.

(III)裂尖附近的指定点应力随时间变化受该点和裂尖相对位置影响,与预置裂纹角度无关.影响应变随时间变化的因素有:相对裂尖位置、与板边界距离和加载位置.

(IV)载荷幅值对裂纹产生和扩展也有较大影响.当载荷幅值较小时,不会出现裂纹扩展;当载荷幅值较大时,聚集在裂纹尖端的能量需较长的卸载时间才能释放,这会影响水平裂纹的出现时间.

参考文献(References)

- [1] Choi H J. Impact response of a surface crack in a coating/substrate system with a functionally graded

- interlayer: Antiplane deformation[J]. *Int J of Solids and Structures*, 2004, 41(20): 5 631-5 645.
- [2] 布洛克 D. 工程断裂力学基础[M]. 北京: 科学出版社, 1980.
- [3] Ravichandran G, Clifton R J. Dynamic fracture under plane wave loading[J]. *Int J of Fracture*, 1989, 40: 157-201.
- [4] Lee Y, Prakash V. Dynamic fracture toughness versus crack tip speed relationship at lower than room temperature for high strength 4340Var structural steel [J]. *J Mech Phys Solids*, 1998, 46(10): 1 943-1 967.
- [5] Itou S. Dynamic stress intensity factors around two rectangular cracks in an infinite elastic plate under impact load [J]. *Mech Research Comm*, 2002, 29: 225-234.
- [6] 范天佑. 断裂动力学: 原理与应用[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2006.
- [7] Liu Yuanyong, Zhang Gang, Li Yulong, et al. A failure criterion of crack-containing plate under impact loading [J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 1996, 14(2): 217-223.
刘元镛, 张刚, 李玉龙, 等. 含裂纹板在冲击载荷作用下的失效准则[J]. *西北工业大学学报*, 1996, 14(2): 217-223.
- [8] Hu Liuqing, Li Xibing, Gong Shengwu. Simulation on dynamic response of crack subjected to impact loading [J]. *Explosion and Shock Waves*, 2006, 26(3): 214-221.
胡柳青, 李夕兵, 龚声武. 冲击载荷作用下裂纹动态响应的数值模拟[J]. *爆炸与冲击*, 2006, 26(3): 214-221.
- [9] Yang T, Liu Y, Wang J. A study of the propagation of an embedded crack in a composite laminate of finite thickness [J]. *Composite Structures*, 2003, 59: 473-479.
- [10] Dong Xinlong, Wang Lili, Yu Jilin. An investigation on shear fracture under impact loading[J]. *J of Ningbo Univ (NSEE)*, 2003, 16(4): 429-433.
- [11] 吴家龙. 弹性力学 [M]. 上海: 同济大学出版社, 2003: 91-92.
- [12] Zhang Yajun, Zhang Mengping, Xu Shengli, et al. Numerical investigation on blast wave propagation and dynamic response of an explosion vessel[J]. *Explosion and Shock Waves*, 2003, 23(4): 331-336.
张亚军, 张梦萍, 徐胜利, 等. 爆炸容器内冲击波系演化及壳体响应的数值研究[J]. *爆炸与冲击*, 2003, 23(4): 331-336.
- [13] Hallquist J O. *LS-DYNA Theory Manual* [M]. Livermore, CA: Livermore Software Technology Corporation, 2006: 40-52.
- [14] 王勖成. 有限单元法基本原理和数值方法[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2003: 494-502.
- [15] Flangan D P, Belytschko T. A uniform strain hexahedron and quadrilateral and orthogonal hourglass control [J]. *Int J Number Mechs Eng*, 1981, 17: 679-706.
- [16] Key S W. HONDO: A finite element computer program for the large deformation dynamic response of axisymmetric solids[R]. New Mexico: Sandia National Laboratories, 1974: SLA27420039.
- [17] Belytschko T, Liu W K, Moran B. 连续体和结构的非线性有限元 (Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures)[M]. 庄茁, 译. 北京: 清华大学出版社, 2002: 269-271.
- [18] Liu Yadong, Zhang Yajun, Xu Shengli. Evolution of a crack embedded in an elastic-plastic plate[J]. *Journal of University of Science and Technology of China*, 2010, 40(3): 288-293.
刘亚东, 张亚军, 徐胜利. 含垂直穿透裂纹板拉伸断裂的有限元模拟[J]. *中国科学技术大学学报*, 2010, 40(3): 288-293.
- [19] Meyers M A. 材料的动力学行为 (Dynamic Behavior of Materials)[M]. 张庆明, 刘彦, 黄风雷, 等, 译. 北京: 国防工业出版社, 2006.