

ISSN 0253-2778

CODEN CKHPD7

# 中国科学技术大学学报

第 23 卷 第 1 期

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY  
OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Vol. 23 No. 1

1

1993

## 1992年非线性科学讨论会程序委员会

主任委员：谷超豪

付主任委员：汤拒非

委员：（以姓氏笔划为序）

汤拒非 朱栋培 李翊神

谷超豪 范洪义 侯伯元

赵保恒 郭光灿 阎沐霖

# 中国科学技术大学学报

第 23 卷 第 1 期 (总第 80 期)

1992 年非线性科学讨论会文集

——祝贺杨振宁教授 70 寿辰

## 目 录

前言	谷超豪
矩阵 Sato 理论的评注	李翊神(1)
Darboux 变换的可逆性、可换性和周期性	谷超豪(9)
Dirac 表象理论新观	范洪义(15)
具有量子群对称性的 XXZ 模型	侯伯元(25)
具有 $\delta$ 函数势的 Schrödinger 方程的解和广义函数的乘积	赵保恒(27)
非线性光学的量子效应	郭光灿(31)
Davey-Stewartson I 气体的热力学	阎沐霖 胡 忠 赵保恒(38)
等离子体中准周期混沌的实验观察	丁卫星 黄 巍 余红权 林毅君 俞昌旋(43)
一个大尺度和非线性积分方程的数值解法	丁亦兵 屈一至 王垂林 戴元本 黄朝商(48)
关于量子普适包络代数变形振子表示的若干讨论	井思聪(55)
电磁模式与约瑟夫森结的量子运动	陈永聪(64)
一个生理自调节过程的动力学模型研究	张先蔚(72)
混沌吸引子的普适转变	汪秉宏(79)
Zamolodchikov 的四面体方程的无参数解	郑庆荣 章德海(86)
混沌动力学和湍流的统计理论	钱 俭(91)
量子变形 KdV 方程的 $Q$ 形变 Gelfand-Dikii 势	章德海(97)
作为 Backlund 变换周期固定点的可积系统	程 艺(102)
Darboux 变换的周期固定点导出的有限维可积的 Hamilton 系统	曾云波(110)

# JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Vol. 23 No. 1 (Sum No. 80)

Proceedings of the 1992 Nonlinear Science Symposium  
— In Celebration of Dr. Chen Ning Yang' s 70th birthday

## CONTENTS

Preface .....	<i>Gu Chaotao</i>
Remarks on the Matrix Sato Theory .....	<i>Li Yishen</i> ( 1 )
On the Invertibility, Permutability and Periodicity of Darboux Transformation .....	<i>Gu Chaohao</i> ( 9 )
New Outlook on Dirac' s Representation Theory .....	<i>Fan Hongyi</i> (15)
XXZ Model With the Symmetry of Quantum Group .....	<i>Hou Bojuan</i> (20)
Solution of the Schrödinger Equation With $\delta'$ -Function Potential and Product of Distributions .....	<i>Zhao Baoheng</i> (27)
Quantum Effects in Nonlinear Optics .....	<i>Guo Guangcan</i> (31)
Thermodynamics for Davey-Stewartson 1 Gas .....	<i>Yan Mulin, Hu Zhong, Zhao Baoheng</i> (38)
Observation of Quasiperiodic Chao in Plasma .....	<i>Ding Weixing, Huang Wei, She Hongquan, Lin Yijun Yu Changxuan</i> (43)
On the Numerical Method for a Large Scale and Weak Nonlinear Integral Equation .....	<i>Ding Yibing Qu Yizhi, Wang Chuilin, Dai Yuanben, Huang Chaoshang</i> (48)
Some Remarks on the Deformed Oscillator Representation of the Quantum Universal Enveloping Algebra .....	<i>Jing Sicong</i> (55)
Quantum Dynamics in Josephson Junctions Coupled With Electro-Magnetic Modes .....	<i>Chen Yongcong</i> (64)
Research of a Dynamical Model for a Physiological Process .....	<i>Zhang Xianwei</i> (72)
Universal Transition of Chaotic Attractors .....	<i>Wang Binghong</i> (79)
Solutions of Zamolodchikov' s Tetrahedral Equation Without Spectral Parameters .....	<i>Zheng Qingrong, Zhang Dehai</i> (86)
Chaotic Dynamics and Statistical Theory of Turbulence .....	<i>Qian Jian</i> (91)
$Q$ -Deformed Gelfand-Dikii Potentials of Quantum Deformation KdV Equation	

..... *Zhang Delai*(97)

**Integrable Systems as the Periodic Fixed Point of the Backlund Transformation**

..... *Cheng Yi*(102)

**Finite-Dimensional Integrable Hamiltonian Systems Obtained From Periodic Fixed Points  
of Darboux Transformation**

..... *Zeng Yunbo*(110)

# 前 言

为了庆贺当代杰出物理学家、诺贝尔奖金获得者、我校名誉教授杨振宁博士的七十寿辰，我们在杨博士的出生地安徽省合肥市举行了非线性科学和理论物理学术讨论会。

杨振宁博士在物理学中多方面的重大的贡献，已有很多专家作了专门的论述，我在这里就不再重复了。但我还是想指出下面的一个侧面。现代科学的许多部门，正在从线性向非线性过渡，杨振宁博士正是这一方面的先驱。他把反映电磁场运动的  $U(1)$  群规范理论，发展为非阿贝尔群的规范场，就是从线性过渡到非线性的一个重大创造，他和 R. L. Mills 共同提出并以他们二人命名的 Yang-Mills 理论，为物质间的四种基本相互作用给出了基本理论体系。Yang-Mills 方程，非但是物理学中最基本的微分方程，和 Maxwell 方程、Einstein 方程等有同样的重要性，而且为数学中的非线性分析、微分几何和拓扑学的研究开辟了新的广阔的道路。他在统计物理中研究多体问题时，最早得到一个非线性函数方程的严格解，这个方程后来被命名为 Yang-Baxter 方程。由此产生出了物理学和数学的一个新的交接点，促使了辫子群及其表示，量子可积系统，量子群理论等在近年得到飞跃的发展。在过去两次的世界数学家大会(1986, 1990)上，世界数学最高奖 Fields 奖的八位获奖人中，有五位的工作和杨振宁博士的创造密切相关。

由于六月初已在南开大学举行了物理学中的微分几何方法国际学术会议，我们这个学术讨论会就局限于中国科学技术大学及其在北京的研究生院范围内进行。杨振宁博士到会并作了“碳 60 的结构”的报告，引起了参加者的极大的兴趣。

会议期间，杨振宁博士在中国科技大学还作了有关他的生

平和治学经历的报告,师生们对于他的热爱家乡,孝敬父母,尊重师长,关怀祖国,爱护青年,融合中西文化优秀传统,在科学中的巨大的创造精神感到非常钦佩,受到了很大的教育。

这期专辑收集了会议上的报告或和之有关的未发表过的论文 18 篇,我们谨把它们献给杨振宁博士。

谷超豪

一九九二年十一月

祝贺杨振宁教授70寿辰  
In Celebration of Dr. Chen Ning  
Yang's 70th birthday

# Remarks on the Matrix Sato Theory

Li Yishen

(Department of Mathematics, University of Science and Technology of China)

## Abstract

A multi-component KP hierarchy from the  $2 \times 2$  Sato matrix theory is deduced and discussed. A new Darboux transformation for this hierarchy, the  $1+1$  dimensional integrable system constrained from these hierarchy is also considered.

**Key words:** Sato theory, soliton theory, integrable system, Darboux transformation

**AMS Classification (1992):** 35Q

## 1 Introduction

Since Sato presented a theory that provides a unified description of the soliton equation, there has been much work on this topic<sup>[1-5]</sup>. Recently, some papers have been presented to extend the Sato theory in matrix case<sup>[6-7]</sup>. In this paper, we will deduce the multi-component KP hierarchy from the  $2 \times 2$  Sato matrix theory and consider a new Darboux transformation for this hierarchy, the  $1+1$  dimensional integrable system constrained from these hierarchy is also considered. Some of these results can be easily extended to general matrix case.

## 2 Sato Matrix Theory

We consider the Sato matrix equation

$$\frac{\partial W}{\partial t_{m,j}} = B_{m,j}W - W\sigma_j \partial W \quad m = 0, 1, 2, \dots, j = 0, 1, 2, 3 \quad (2.1)$$



where

$$W = 1 + w_1 \partial^{-1} + w_2 \partial^{-2} + \dots \quad (2.2)$$

is a micro-differential operator,  $\partial = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $w_i$  are  $2 \times 2$  matrix, each element is a function of the variable  $x$  and  $t_{m,j}$ ,

$$L_j^m = W \sigma_j \partial^m W, \quad B_{m,j} = (L_j^m)_+ \quad (2.3)$$

As usual,  $(L_j^m)_+$  denotes the differential part of the operator  $L_j^m$  and  $(L_j^m)_-$  denotes pure integral part

$$\text{and } \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Examples:

$$\begin{aligned} B_{0,j} &= \sigma_j \\ B_{1,j} &= \sigma_j \partial + P_j, \quad P_j = [w_1, \sigma_j] \\ B_{2,j} &= \sigma_j \partial^2 + P_j \partial + Q_j, \quad Q_j = [w_2, \sigma_j] - 2\sigma_j w_{1x} - P_j w_1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

From (2.1), it yields

$$\frac{\partial W}{\partial t_{1,0}} = \frac{\partial W}{\partial x} \quad (i, e, \partial t_{1,0} = \partial) \quad (2.5)$$

and the Lax type equations

$$\frac{\partial L_j^m}{\partial t_{n,j}} = [B_{n,j}, L_j^m], \quad m, n = 1, 2, \dots, j = 0, 1, 2, 3 \quad (2.6)$$

From the commutativity of  $\sigma_0$  and  $\sigma_j$ , we get

$$\frac{\partial L_0^m}{\partial t_{n,j}} = [B_{n,j}, L_0^m], \quad \frac{\partial L_j^m}{\partial t_{n,0}} = [B_{n,0}, L_j^m] \quad (2.7)$$

From (2.6), (2.7), it is easy to get the zero curvature equations

$$\frac{\partial B_{n,j}}{\partial t_{m,j}} - \frac{\partial B_{m,j}}{\partial t_{n,j}} + [B_{n,j}, B_{m,j}] = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial B_{m,j}}{\partial t_{n,0}} - \frac{\partial B_{n,0}}{\partial t_{m,j}} + [B_{m,j}, B_{n,0}] = 0 \quad (2.9)$$

Some examples:

1) We take  $n=1, m=2, t_{1,j}=y, t_{2,j}=t$ , (2.8) reads

$$\frac{\partial P_j}{\partial y} + \sigma_j \frac{\partial P_j}{\partial x} = [\sigma_j, Q_j] \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial P_j}{\partial t} - \frac{\partial Q_j}{\partial y} = \sigma_j P_{xx} - \sigma_j Q_{j,x} + P_j P_{j,x} + [Q_j, P_j] \quad (2.11)$$

When  $j=0$ , we get the linear equation

$$\frac{\partial Q_0}{\partial y} = \frac{\partial Q_0}{\partial x}$$

i) When  $j=3$ , we take

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Diag} Q_3 = (A_1, A_2)$$

(2.10), (2.11) read

$$\begin{cases} A_{1x} - A_{1y} = \frac{1}{2}[(qr)_x + (qr)_y] \\ -A_{2x} - A_{2y} = \frac{1}{2}[-(qr)_x + (qr)_y] \\ q_t = \frac{1}{2}(q_{xx} + q_{yy}) + q(A_1 - A_2) \\ r_t = -\frac{1}{2}(r_{xx} + r_{yy}) - r(A_1 - A_2) \end{cases} \quad (2.13)$$

This is generalized Davey-Stewartson equation (GDS)

ii) When  $j=1$ , we take

$$P_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}, Q_1 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, A = f + g, B = h + e$$

(2.10), (2.11) read

$$\begin{aligned} A_x - B_y &= (a^2 - b^2)_x, & B_x - A_y &= (a^2 - b^2)_y \\ 2a_t + b_{xx} + b_{yy} + 2bA &= 0, & 2b_t + a_{xx} + a_{yy} + 2aA &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

iii) When  $j=2$ , we take

$$P_2 = i \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, A = e + h, B = f - g$$

(2.10), (2.11) read

$$\begin{aligned} iB_x - A_y &= -[a^2 + b^2]_x, & A_x - iB_y &= -[a^2 + b^2]_y \\ 2a_t + i(b_{xx} + b_{yy}) - 2bB &= 0, & 2b_t - i(a_{xx} + a_{yy}) + 2aB &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

We find that the equation (2.13)–(2.15) are equivalent.

We rewrite (2.13) as follows:

$$\begin{cases} (A_1 - A_2)_x - (A_1 + A_2)_y = (qr)_x \\ (A_1 + A_2)_y - (A_1 - A_2)_x = (qr)_y \\ 2(q+r)_t + (r-q)_{xx} + (r-q)_{yy} + 2(r-q)(A_1 - A_2) = 0 \\ 2(r-q)_t + (r+q)_{xx} + (r+q)_{yy} + 2(r-q)(A_1 - A_2) = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Equation (2.14) is equivalent to (2.16) by the transformation

$$A = A_1 - A_2, B = A_1 + A_2, a = (q+r)/2, b = (r-q)/2 \quad (2.17)$$

Equation (2.15) is equivalent to (2.16) by the transformation

$$iB = A_1 - A_2, A = A_1 + A_2, a = i(q+r)/2, b = (r-q)/2 \quad (2.18)$$

2) We take  $n=2, m=1$ . When  $j=0$ , from (2.9) it yields the linear equation

$$w_{1xy} - w_{1xx} = 0$$

When  $j=3$ , we take,  $(t_{20}=t_1, t_{1j}=y)$ . (2.9) reads

$$\begin{cases} a_{xy} - a_{xx} + 2(bc)_x = 0 \\ d_{xy} + d_{xx} - 2(bc)_x = 0 \\ -b_t + b_{xy} + 2b(d_x - a_x) = 0 \\ c_t + c_{xy} + 2c(d_x - a_x) = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

This is a higher order equation of multi-component of KP hierarchy.

When  $j=1, 2$ , we have proved that the equations are also equivalent to (2. 20). One question arises, whether the equation (2. 8), (2. 9) for  $j=1, 2$  with  $j=3$  are equivalent for any  $m, n$ ?

We note that the functions  $q, r, A_1, A_2$  in (2. 13) relate to the element of  $w_1$  as follows.

$$q = -2b, r = 2c, A_1 = -2a_x + 2bc, A_2 = 2d_x - 2bc \quad (2. 21)$$

By the transformation (2. 21), Equation (2. 13) reads

$$\begin{aligned} a_{xy} - a_{xx} + 2(bc)_x &= 0, & d_{xy} + d_{xx} - 2(bc)_x &= 0 \\ b_t &= \frac{1}{2}(b_{xx} + b_{yy}) + b(-2a_x - 2d_x + 4bc) \\ c_t &= -\frac{1}{2}(c_{xx} + c_{yy}) - c(-2a_x - 2d_x + 4bc) \end{aligned} \quad (2. 22)$$

We observe that the first two equations of (2. 22) and (2. 20) are just the same, the last two equations are difference from the elliptic and hyperbolic type in space.

### 3 A New Darboux Transformation

In ref. [7], it was found that, if

$$\frac{dW}{dt_{n,j}} = B_{n,j}W - W\sigma_j\partial, \quad \frac{d\varphi}{dt_{n,j}} = B_{n,j}\varphi, \quad \frac{d\psi}{dt_{n,j}} = B_{n,j}\psi \quad (3. 1)$$

where  $\varphi$  is a  $2 \times 2$  nonsingular matrix solution, then

$$\bar{W} = \varphi\partial\varphi^{-1}W\partial^{-1}, \quad \bar{\psi} = (\varphi\partial\varphi^{-1})\psi \quad (3. 2)$$

satisfy the equations

$$\frac{d\bar{W}}{dt_{n,j}} = \bar{B}_{n,j}\bar{W} - \bar{W}\sigma_j\partial, \quad \bar{B}_{n,j} = (\bar{W}\sigma_j\partial\bar{W}^{-1})_+ \quad (3. 3)$$

$$\frac{d\bar{\psi}}{dt_{n,j}} = \bar{B}_{n,j}\bar{\psi} \quad (3. 4)$$

This is extend Darboux transformation theorem. From the binary DT's as explained by Matveev and Sall<sup>[8]</sup>, we find a new Darboux transformation for the Sato matrix equation (2. 1) as follows: If

$$\frac{dW}{dt_{n,j}} = B_{n,j}W - W\sigma_j\partial, \quad \frac{d\phi}{dt_{n,j}} = B_{n,j}^*\phi, \quad \frac{d\psi}{dt_{n,j}} = B_{n,j}\psi \quad (3. 5)$$

$\phi$  is a  $2 \times 2$  nonsingular matrix solution, where  $*$  denote the transposition of the operator  $B_{n,j}$ , and  $+$  denote the matrix trasposition, then

$$\bar{W} = (\phi^+)^{-1}\partial^{-1}\phi^+W\partial, \quad \bar{\psi} = T\psi, \quad T = (\phi^+)^{-1}\partial^{-1}\phi^+ \quad (3. 6)$$

satisfy the equations

$$\frac{d\bar{W}}{dt_{n,j}} = \bar{B}_{n,j}\bar{W} - \bar{W}\sigma_j\partial, \quad \bar{B}_{n,j} = (\bar{W}\sigma_j\partial\bar{W}^{-1})_+ \quad (3. 7)$$

$$\frac{d\bar{\psi}}{dt_{n,j}} = \bar{B}_{n,j}\bar{\psi} \quad (3. 8)$$

The main point is

$$T_{t_{n,j}}T^{-1} = (TB_{n,j}T^{-1})_+T - TB_{n,j} = - (TB_{n,j}T^{-1})_-T \quad (3. 9)$$

We prove (3. 9) as follows:

$$\begin{aligned}
 T_{i,j} T^{-1} &= -(\phi^+)^{-1} \phi_{i,j}^+ \phi^+ + (\phi^+)^{-1} \partial^{-1} [\phi_{i,j}^+ (\phi^+)^{-1} \partial \phi^+] = -(\phi^+)^{-1} \partial^{-1} [\partial (\phi_{i,j}^+ (\phi^+)^{-1}) \phi^+] \\
 - (TB_{n,j} T^{-1}) &= -((\phi^+)^{-1} \partial^{-1} \phi^+ B_{n,j} (\phi^+)^{-1} \partial \phi^+)_- = -(\phi^+)^{-1} (\partial^{-1} \phi^+ B_{n,j} (\phi^+)^{-1} \partial \phi^+)_- \\
 &= (\phi^+)^{-1} \{ \partial^{-1} (\phi \partial \phi^{-1} B_{n,j}^* \phi)^+ - (\phi^+ B_{n,j} (\phi^+)^{-1} \partial \phi^+)_- \} \\
 &= (\phi^+)^{-1} \partial^{-1} (\phi \partial (\phi^{-1} \phi_{i,j}^+))_+ = -(\phi^+)^{-1} \partial^{-1} [\partial (\phi_{i,j}^+ (\phi^+)^{-1}) \phi^+]
 \end{aligned}$$

End of proof. The other relations can be proved by standard approach as (3.3) and (3.4).

From (3.6), we find the relations

$$\bar{w}_1 = -(\phi^+)^{-1} \phi_x^+ + w_1, \quad \bar{w}_2 = w_2 + (\phi^+)^{-1} (\phi^{-1})_{xx} - w_{1x} - (\phi^+)^{-1} \phi_x^+ w_1 \tag{3.10}$$

Example: The equations

$$\psi_t = \sigma_3 \psi_x + P \psi, \quad \psi_t = \sigma_3 \psi_{xx} + P \psi_x + Q \psi \tag{3.11}$$

are the Lax pair of the GBD equation (2.13). Where

$$P = \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} A_1 & \frac{1}{2}(q_x + q_r) \\ \frac{1}{2}(r_x - r_r) & A_2 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

Now, if  $q, r, A_1, A_2$  is a solution to the GDS equation (2.13),  $\psi$  is a solution to (3.11), and  $\phi^+$  satisfies the equations

$$-\phi_x^+ = -\phi_x^+ \sigma_3 + \phi^+ P, \quad -\phi_t^+ = \phi_{xx}^+ \sigma_3 - \phi_x^+ P - \phi^+ P_x + \phi^+ Q \tag{3.13}$$

then

$$\bar{q} = q + 2\hat{b}, \quad \bar{r} = r - 2\hat{c}, \quad \bar{A}_1 = A_1 + \hat{a}_{1x} + \hat{a}_{1r}, \quad \bar{A}_2 = A_2 - \hat{d}_x + \hat{d}, \tag{3.14}$$

is a new solution of the equation (2.13), where  $(\phi^+)^{-1} \phi_x^+ = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix}$  and

$$\bar{\psi} = (\phi^+)^{-1} (1 + \int^x \phi^+ \psi dx) \tag{3.15}$$

satisfies the same equation (3.11) with  $\bar{P}, \bar{Q}$ .

#### 4 Constraints of the Multi-Component KP Hierarchy.

Following the approach in ref. [9], we consider the constraints

$$I_j^m = B_{m,j} - \phi \partial^{-1} \phi^+, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \phi^+ = (\phi_1, \phi_2) \quad j = 0 \text{ or } 3, \quad m = 1, 2, \dots \tag{4.1}$$

(Where  $\psi, \phi^+$  will be considered as new dynamical coordinates), and the Lax pair

$$\begin{aligned}
 I_j^m \Psi &= B_{n,j} \Psi - \psi \Phi = \xi \Psi & \Psi &= \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \\
 \Phi_x &= \phi^+ \Phi \\
 \Psi_{t_{n,i}} &= B_{n,i} \Psi, \quad \Phi_{t_{n,i}} = A_{n,i} \phi, \quad \partial(A_{n,i} \Psi) = \phi^+ B_{n,i} \Psi - (B_{n,i}^* \phi)^+ \Psi
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Where  $\Psi^+ = (\Psi_1, \Psi_2), \Phi$  are the eigenfunction.

From the compatibility condition of (4.2), it yields

$$(I_j^m)_{t_{n,i}} = [B_{n,i}, I_j^m]$$

$$\begin{aligned}\psi_{i..i} &= B_{i..i}\psi \\ \phi_{i..i}^+ &= -(B_{i..i}\phi)^+\end{aligned}\quad (4.3)$$

(4.3) are the hierarchy of 1+1 dimensional integrable systems by constraint (4.1). GDS equation (2.13) will be used as an example to show the exact form in the following.

1) The constraint (4.1) with  $m=1, j=0$ , then

$$L_0^1 = \partial - w_{1z}\partial^{-1} + \dots = B_{1..0} - \psi\partial^{-1}\phi^+ = \partial - \phi\phi^+\partial^{-1} + \dots\quad (4.4)$$

the constraint reads

$$w_{1z} = \phi\phi^+\quad (4.5)$$

The Lax pair (4.2) for the GDS equation (2.13) reads ( $t_{1,3}=y, t_{2,3}=t$ )

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} \xi & \psi \\ \phi^+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}\quad (4.6)$$

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} \sigma_3\Psi_x + P\Psi \\ \phi^+ \sigma_3\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi\sigma_3 + P & \sigma_3\psi \\ \phi^+ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}\quad (4.7)$$

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} \sigma_3\Psi_{xx} + P\Psi_x + Q\Psi \\ \phi^+ \sigma_3\Psi_x - \phi_x^+ \sigma_3\psi + \phi^+ P\Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_3\xi^2 + \xi P\sigma_3 + \sigma_3\psi\phi^+ + Q, \xi\psi + \sigma_3\psi_x + P\psi \\ \phi^+ \sigma_3\xi - \phi_x^+ \sigma_3 + \phi^+ P, \phi^+ \sigma_3\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}\quad (4.8)$$

Equation (4.3) reads

$$\begin{cases} P_x = [\psi\phi^+, \sigma_3] \\ \psi_y = \sigma_3\psi_x + P\psi \\ \phi_y^+ = \phi_x^+ \sigma_3 - \phi^+ P \end{cases}\quad (4.9)$$

$$\begin{cases} P_x = [\psi\phi^+, \sigma_3] \\ Q_x = \psi\phi^+ P - \psi\phi_x^+ \sigma_3 - \sigma_3\psi_x\phi^+ - 2\sigma_3\psi_x\phi^+ + \psi\phi^+ P - P\psi\phi^+ \\ \psi_t = \sigma_3\psi_{xx} + P\psi_x + Q\psi \\ \phi_t^+ = -\phi_{xx}^+ \sigma_3 + \phi_x^+ P + \phi^+ P_x - \phi^+ Q \end{cases}\quad (4.10)$$

It is clear that the GDS equation (2.13) can be reduced to two 1+1 integrable equations (4.9) and (4.10) by the constraint  $P_x = [\psi\phi^+, \sigma_3]$ , and (4.6), (4.7) is the Lax pair for (4.9); (4.6), (4.8) is the Lax pair for (4.10). Similar results had been obtained in ref. [10] by an alternative approach.

2) The constraint (4.1) with  $m=1, j=3$ , then

$$L_3^1 = B_{13} - \psi\partial^{-1}\phi^+ = \sigma_3\partial + P - \psi\partial^{-1}\phi^+\quad (4.11)$$

The Lax pair (4.2) for the GDS equation (2.13) reads

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} \sigma_3\xi & \psi \\ \phi^+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}\quad (4.12)$$

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} \sigma_3\Psi_x + P\Psi \\ \phi^+ \sigma_3\Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi + P & \sigma_3\psi \\ \phi^+ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} \sigma_3\Psi_{xx} + P\Psi_x + Q\Psi \\ \phi^+ \sigma_3\Psi_x - \phi_x^+ \sigma_3\Psi + \phi^+ P\Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_3\xi^2 + P\sigma_3\xi + \sigma_3\psi\phi^+ + Q, \xi\psi + \sigma_3\psi_x + P\psi \\ \phi^+ \xi - \phi_x^+ \sigma_3 + \phi^+ P, \phi^+ \sigma_3\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}\quad (4.14)$$

Equation (4.3) reads

$$\begin{cases} P_y = [\psi\phi^+, \sigma_3] \\ \psi_y = \sigma_3\psi_x + P\psi \\ \phi_y^+ = \phi_x^+\sigma_3 - \phi^+P \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\begin{cases} \psi_t = \sigma_3\psi_{xx} + P\psi_x + Q\psi \\ \phi_t^+ = -\phi_{xx}^+\sigma_3 + \phi_x^+P + \phi^+P_x - \phi^+Q \\ P_t = \sigma_3P_{xx} - 2\sigma_3\psi_x\phi^+ - \sigma_3\psi\phi_x^+ + \psi PP_x - P\psi\phi^+ + QP - \sigma_3Q_x \\ \sigma_3P_x - \sigma_3\psi\phi^+ + \psi\phi^+\sigma_3 + Q\sigma_3 - \sigma_3Q = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

We note that the last equation of (4.16) is nothing but the constraint of  $P_y = [\psi\phi^+, \sigma_3]$ , for the sake of the relation (2.10).

It is clear that the GDS equation (2.13) can also be reduced to two 1+1 integrable systems (4.15) and (4.16) by the constraint  $P_y = [\psi\phi^+, \sigma_3]$ , the corresponding Lax pairs are (4.12), (4.13) and (4.12), (4.14) respectively.

The Darboux transformation method can be used to find the solutions to 1+1 dimensional integrable equations and then we get the new solutions for the multi-component KP hierarchy. A detailed analysis will be published elsewhere.

#### Acknowledgement

Many thanks to Prof. R. Carroll and Prof. H. H. Chen's hospitable and useful conversation when the author visited the Illinois University (Urbana) and Maryland University (College Park). This work was also supported by National Basic Research Project "Nonlinear Science".

#### References

- [1] Sato M, *RIMS Kokyokuro Kyoto Univ.*, 439 (1981), 30.
- [2] Jimbo M, Miwa T, *Publ. RIMS Kyoto Univ.* 19 (1983), 943.
- [3] Ohta Y, Sasuma J, Takahashi D, Tokihiro T, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 94 (1988), 210.
- [4] Carroll, R, W, *Topics in Soliton Theory*. North. Holland. 1991.
- [5] Chau L L, Shaw J C, Yen H C, *Commun Math. Phys.*, 149 (1992), 241.
- [6] Kayiwara, K, Matsukidaira, J, Satsuma J, *Phys. Lett.*, 146A (1990), 115.
- [7] Kononpelchenko B G, Oevel W, *Matrix Sato theory and integrable equation in 1+1 dimensions.*, Preprint., 1991.
- [8] Matveev V B, Salle M A, *Darboux transformations and solitons*. Series in Nonlinear Dynamics, Springer, Berlin (1991).
- [9] Cheng Yi, *J. Math. Phys.*, 33(1992), 3774.
- [10] Zhou Zixiang, *A method to obtain explicit solutions of Davey-Stewartson equation*. Preprint. 1991.

## 矩阵 Sato 理论的注记

李翊神

(中国科学技术大学 数学系)

### 摘 要

本文从  $2 \times 2$  矩阵 Sato 理论导出多分量的 KP 方程族, 讨论了这方程族的新的达布变换, 并考虑从这方程族的约束而引出的  $1+1$  维的可积方程.

**关键词:** Sato 理论, 孤立子理论, 可积系统, 达布变换

**中图法分类号:** O175.29, O152.6

**AMS Classification (1992):** 35Q

祝贺杨振宁教授70寿辰  
In Celebration of Dr. Chen Ning  
Yang's 70th birthday

# Darboux 变换的可逆性,可换性和周期性\*

谷超豪

(中国科学技术大学,复旦大学数学研究所)

## 摘 要

本文讨论  $R^{1+n}$  中的一类可积系统的 Darboux 变换的可逆性,得出可逆的充要条件,并利用这条件制作出具体的可逆的 Darboux 变换。利用可逆性的研究和 Darboux 变换的可换性定理,得出了  $2N(N \geq 2)$ , 为周期的闭 Darboux 变换序列的存在性。

关键词: Darboux 变换,可换性,可逆性,可积系统

中图法分类号: O175.29

AMS Classification (1992): 35Q, 58F

## 1 引言

在古典的 Bäcklund 变换中, Bianchi 发现了可换性原理,在几何上,它表示为一个周期 4 的 Laplace 序列<sup>[1]</sup>,这对 Sine-Gordon 方程的求解起了重要的作用。

Bäcklund 变换后来成为研究可积系统和孤立子理论的重要手段,在许多情形下,它的显式形式就是 Darboux 变换<sup>[2]</sup>。对于 AKNS 系统, Darboux 变换有很好的表示形式<sup>[3,4]</sup>,并从此可以得出更完整形式的可换性定理<sup>[3]</sup>。作者最近研究了高维空间  $R^n$  和高维时空  $R^{1+n}$  的可积系统,指出了 Darboux 变换仍然有效,可换性定理也有效<sup>[5,6]</sup>。

在原始的情况下,似乎可换性原理和周期序列的存在性是一回事,这对 Sine-Gordon, Kdv 等等方积确乎如此,但到了比较复杂的 AKNS 系统,情况就未必了,这主要指 Lax 对不仅是  $2 \times 2$  阵的情况,而是高阶阵的情况。

1992年9月12日收到。

\* 此项研究由国家攀登计划项目“非线性科学”支持。



本文研究 Darboux 变换何时可逆的问题,也就是说,研究 Darboux 变换的逆变换何时仍然是一个 Darboux 变换,以可逆的 Darboux 变换所成的序列,就可以导出周期的 Darboux 变换序列. § 2 我们叙述了  $R^{1+n}$  中的一个可积系统和它的 Darboax 变换及相应的可换性定理. § 3 讨论 Darboux 变换的可逆性,得到了可逆的充要条件,并举出了显式的可逆变换的一种构作方法,这包括作者和其他同事们研究过的许多情况. § 4 利用可逆性和可换性定理证明了  $2N(N \geq 2)$  周期的 Darboux 序列的存在定理.

## 2 Darboux 变换和可换性定理

设

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = \lambda(J_i + P_i)\Psi \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \sum_{\alpha=0}^k V_\alpha \Lambda^\alpha \Psi \quad (2.2)$$

为  $R^{1+n}$  上的可积系统<sup>[6]</sup>, 式中  $J_i$  为一组  $m \times m$  可换阵,不妨设为对角阵,元素为常数,且满足要求:

$$[J_i, A] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3)$$

蕴涵  $A$  是对角阵. 设  $P_i$  具有形式

$$P_i = [P, J_j] \quad (2.4)$$

$P$  是未知的  $m \times m$  阵,  $\lambda$  是谱参数,  $V_\alpha$  是  $P$  的微分多项式,不妨设  $P$  的对角元均为 0. (2.1) 和 (2.2) 的可积条件中,除一部分用来确定  $V_\alpha$  外,还余下:

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} - \frac{\partial P_j}{\partial x_i} + [P_i, P_j] = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} - \frac{\partial V_\alpha^{off}}{\partial X_i} + [P_i, V_\alpha^{off}] = 0 \quad (2.6)$$

这里 *off* 表示一方阵减去其对角元所成的阵后的余式,即其非对角部分. (2.5), (2.6) 是一个发展型的,超定的偏微分方程,  $n=1$  时,它就是 AKNS 系统. 现称 (2.1), (2.2) 是 (2.5), (2.6) 的 Lax 组,它是  $n=1$  情况下 Lax 对的扩充.

已经清楚, Darboux 变换可以用来求 (2.1), (2.2), (2.5) 和 (2.6) 的新解(见 [6] 及其续篇). 更具体地说,设  $(\Psi, P)$  是这组方程的一组解,那么

$$\Psi_1 = (\lambda I + \alpha)\Psi, \quad P_1 = P + \alpha^{off} \quad (2.7)$$

是这套方程的新解,但  $\alpha$  应满足

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_j} = [P_j, \alpha] - [J_j, \alpha]\alpha \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = [V_0, \alpha] + [\alpha, V_1]\alpha - [\alpha, V_2]\alpha^2$$

可以证明, (2.8) 也是完全可积的, (2.7) 中  $\alpha^{off}$  也可换为  $\alpha$ , 因其对角部分对制作  $P_1$  不起作用. (2.8) 有一组一般性的显式解. 这里的一般性是指其它的解都可以用这种解的极限来达到. 这种显式解的作法如下: 选定一组谱参数  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 相应于每个  $\lambda_\alpha$ , 选取 (2.1) 的一个列向量解

$$h = \Psi(\lambda_\sigma)l_\sigma \tag{2.9}_1$$

式中  $l_\sigma$  是常列向量, 我们要求  $h$  线性无关(至少在一定的区域中). 作

$$H = [h_1, h_2, \dots, h_n] \tag{2.9}_2$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_m \end{bmatrix}$$

令

$$\alpha = -H\Lambda H^{-1} \tag{2.10}$$

它就能满足(2.8), 因此用它就可以作 Darboux 变换(2.7). (2.10)是在[3]和[4]中以不同的方法独立地得出的. 这种变换由一组参数  $(\Lambda, L)$  所决定, 这里  $L$  表示(2.9)中出现的一组列向量.

Darboux 变换的优越性在于可以利用它以普适的代数算法陆续地进行下去, 取得无限系列的解. 当然, 每制作一次, 所选的参数  $(\Lambda, L)$  都有一定的限制.

设  $(\Lambda_1, L_1), \dots, (\Lambda_N, L_N)$  是  $N$  组参数, 作 Darboux 变换:

$$(\Psi, P) \xrightarrow{(\Lambda_1, L_1)} (\Psi_1, P^1) \xrightarrow{(\Lambda_2, L_2)} (\Psi_2, P^2) \longrightarrow \dots \xrightarrow{(\Lambda_N, L_N)} (\Psi_N, P^N) \tag{2.11}$$

又记  $(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(N))$  是  $(1, 2, \dots, N)$  的一个排列, 再以重排后的参数作一系 Darboux 变换:

$$(\Psi, P) \xrightarrow{(\Lambda_{\pi(1)}, L_{\pi(1)})} (\Psi'_{\pi(1)}, P^{\pi(1)}) \xrightarrow{(\Lambda_{\pi(2)}, L_{\pi(2)})} (\Psi'_{\pi(2)}, P^{\pi(2)}) \longrightarrow \dots \xrightarrow{(\Lambda_{\pi(N)}, L_{\pi(N)})} (\Psi'_{\pi(N)}, P^{\pi(N)}) \tag{2.12}$$

成立如下的

定理(可换性定理)

$$(\Psi_N, P^N) = (\Psi'_{\pi(N)}, P^{\pi(N)}) \tag{2.13}$$

在  $n=1, m=2$  时, 这个定理的证明可见[7], 对一般  $m$ , [4]中阐述了它的证明, 在主手征场的情形, [8]中详细叙述了它的证明. 由于代数算法的相同, 这个定理在  $R^{1+m}$  时的有效性是显而易见的<sup>[5]</sup>.

证 由(2.10)所定义的 Darboux 变换, 不能取遍一切可能的 Darboux 变换, 因为,  $\alpha$  的 Jordan 标准形为简单的, 而(2.8)却可以取任何阵作为初始条件而求解. 事实上, 可换性定理对于(2.10)之外的 Darboux 变换是成立的, 在上述的有关文献中已经加以说明了. 在后文中, 我们所指的 Darboux 变换是由(2.10)所定义的, 为区别计, 我们称由(2.10)所定义的 Darboux 变换为显式的.

### 3 Darboux 变换的可逆性

我们提出如下的问题: 一个 Darboux 变换是否存在一个逆变换, 它也是 Darboux 变换? 我们有定理

定理 Darboux 变换(2.7)容有 Darboux 变换形式的逆变换的充要条件是存在一个和  $x_i$  无关的对角阵  $B$ , 使得

$$[B, P] = (a^2 - Ba)^{off} \quad (3.1)$$

证明 令

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= (\lambda + a_1)\Psi_1 = (\lambda + a_1)(\lambda + a)\Psi \\ P^2 &= P^1 + a_1 = P + a_1 + a \end{aligned} \quad (3.2)$$

是由  $(\Psi_1, P^1)$  到  $(\Psi_2, P^2)$  的 Darboux 变换. 如果它是(2.7)的逆变换, 则必有

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_i} = (\lambda J_i + P_i)\Psi_2 \quad (3.3)$$

记

$$B = a_1 + a \quad C = a_1 a \quad (3.4)$$

以(3.2)的第一式代入(3.3)式, 得:

$$\left( \frac{\partial B}{\partial x_i} \lambda + \frac{\partial C}{\partial x_i} + (\lambda^2 + B\lambda + C)(\lambda J_i + P_i) \right) \Psi = (\lambda J_i + P_i)(\lambda^2 + B\lambda + C)\Psi \quad (3.5)$$

由于  $\Psi$  是(2.1)的非异解, 所以比较  $\lambda$  的系数可得

$$[J_i, B] = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_i} = [P_i, B] + [J_i, C] \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x_i} = [P_i, C] \quad (3.8)$$

(3.6)推出  $B$  是对角的, 由于(3.7)右端是无对角部分的, 所以  $B$  和  $x_i$  无关, 又应有

$$[P_i, B] + [J_i, C] = 0 \quad (3.9)$$

利用(3.4)可知

$$C = Ba - a^2 \quad (3.10)$$

再由(2.4)及 Jacobi 恒等式, 就成立

$$[J_i, [P, B] + a^2 - Ba] = 0 \quad (3.11)$$

定理的必要性部分得证.

现证充分性部分. 为此只须证明

$$a_1 = B - a, \quad P^1 = P + a$$

能满足

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_i} = [P^1, a_1] - [J_i, a_1]a_1 \quad (3.12)$$

和(3.8)式就可以了.

首先我们见到

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_i} = -\frac{\partial a}{\partial x_i} = -[P_i, a] - [a, J_i]a \quad (3.13)$$

另一面

$$[P^1, a_1] - [J_i, a_1]a_1 = [P_i + [a, J_i], B - a] - [J_i, B - a](B - a) \quad (3.14)$$

把(3.14)右边写出来, 经过演化它就是

$$- [P_i, \alpha] - [\alpha, J_i] \alpha + [P_i, B] - [J_i, B \alpha - \alpha^2] \quad (3.15)$$

由条件(3.11)就知道(3.12)成立.

再利用  $C = \alpha_1 \alpha$ , 把它对  $X_i$  微分, 利用(2.8)和刚才证明了的(3.12), 经过一定的计算后, 就得知(3.8)成立. 定理证毕.

现证明定理 3.1 的一个推论.

**推论 3.1** 当(2.9)式中  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  只取到二个不同的数值时, 相应的 Darboux 变换必可逆.

**证明** 此时取  $B$  为阵  $bI$ ,  $C$  为  $cI$ ,  $b, c$  是两个实数. 由于  $\alpha$  的定义(2.10)可以得出, (3.10)等价于:

$$A^2 + BA = C \quad (3.16)$$

设  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  是取  $\mu_1, \mu_2$  两个数值, 那末

$$b = -\mu_1 - \mu_2, \quad c = -\mu_1 \mu_2 \quad (3.17)$$

就能使(3.16)成立. 又此时条件(3.1)显然成立. 推论证毕.

由证明可见, 在作第一 Darboux 变换时, 如  $\lambda_a = \mu_1$  或  $\mu_2$ , 则作第二 Darboux 变换时,  $\tilde{\lambda}_a = \mu_2$  或  $\mu_1$ .

**推论 3.2**  $m=2$  时, 显式表示的 Darboux 变换是可逆的.

**推论 3.3** 对[9]中提出  $U(n)$  主手征场, 对文[5], [6]提出的  $R^3$  和  $R^{1+n}$  可积系统,  $P \in su(n)$  情形, 对[10]中的推广的非线性波方程和[11]中的苏链所作的 Darboux 变换均为可逆的.

注: 我们在证明中都没有提到有关  $t$  的方程(2.2), 它的成立可见[6]中的讨论.

#### 4 周期性的 Darboux 变换序列

如果我们在 § 2 中的(2.1), (2.12)的两个序列中所取的 Darboux 变换都是可逆的, 那么利用可换性定理, 把(2.12)的每一步用它的逆变换来代替, 我们就得出  $2N$  周期的 Darboux 变换的闭序列存在.

**定理 4.1** 对任何正整数  $N$ , 可积系统(2.1), (2.2)以  $2N$  为周期的 Darboux 变换序列总是存在的.

**证明** 只要每个  $A$  中只取二个不同的实数作为对角线元素, 依推论 3.1 就得知定理的结论.

从此还可知道,  $m=2$  时, AKNS 系统任一  $N$  次 Darboux 变换所成的序列均可增补  $N$  个 Darboux 变换使之成为以  $2N$  为周期的 Darboux 变换闭序列.

还有一个遗留问题是: 除了推论 3.1, 所叙述的情形以外, 是否还存在可逆的 Darboux 变换? 为此, 需要对条件(3.11)作详细的分析.

#### 参 考 文 献

[1] Eisenlart, L P, A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces, 1909.

[2] Matveev, V B, & Salle, M A, Darboux Transformations and Solitons, Springer-Verlag, 1990.

- [ 3 ] Sattinger, D H, & Zurkowski, V D, *Physics*, 26D (1987), 225-250.
- [ 4 ] Gu, C. H. , Nankai Lectures on Mathematical Physics. (1987), World Scientific. Singapore; 1989, 162-168.
- [ 5 ] Gu, C. H. , Darboux Transformations for a Class of Integrable Systems in  $n$  Variables. IDMF Preprint 9221 (to appear in the Proc. "Colloque International. Analyse, Variétés et Physique", Kluwer). 1992.
- [ 6 ] Gu, C. H. , On the Interaction of Solitons for a class of Integrable Systems in the Space-time  $R^{n+1}$  (to appear in Lett. Math. Phys) IDMF Preprint 1992, 9222.
- [ 7 ] Gu, C. H. , & Zhou, Z. , *Lett. Math. Phys.* , 13 (1987), 179-187.
- [ 8 ] Gu, C. H. & Hu, H. S. , The Soliton Behavior of the Principal Chiral Fields, to appear in Proc. of XXI DGM Conferehce, 1992.
- [ 9 ] Gu, C. H. & Zhou, Z. , Proc. of 1988 Conference on Nonlinear Evolution Equations; Integrability and Spectral Methods, Manchester Univ. Press 1990. 115-123.
- [ 10 ] Gu, C. H. & Hu, H. S. , Explicit Solutions to the Intrinsic Generalization for the Wave and Sine-Gordon Equations, Preprint, 1992.
- [ 11 ] Hu, H. S. , On the Su-Chains in the projective space, to appear in Proc. of the International Conference on Differential Geometry (Shanghai, 1991), World Scientific, Singapore.

## On the Invertibility, Permutability and Periodicity of Darboux Transformations

Gu Chaohao

(University of Science and Technology of China)

(Institute of Mathematics, Fudan University)

### Abstract

It has been shown that the Darboux transformation method is valid for some integrable systems in the space-time  $R^{n+1}$ . The theorem of permutability holds as well. In the present paper a necessary and sufficient condition is found under which the inverse of a Darboux transformation is also a Darboux transformation. A kind of invertible Darboux transformation is constructed explicitly. Based on the theorem of permutability and the theorem on the existence of the invertible Darboux transformations the existence of closed sequences of Darboux transformations of period  $2N$  is determined, where  $N$  is any positive integer.

**Key words:** Darboux transformation, permutability, invertibility, integrable system

**AMS Classification (1992):** 35Q, 58F

祝贺杨振宁教授70寿辰  
In Celebration of Dr. Chen Ning  
Yang's 70th birthday

# Dirac 表象理论新观\*

范洪义

(中国科技大学材料科学系)

## 摘 要

Dirac 的表象理论是量子力学的数理基础. 自本世纪三十年代以来一直是学习与研究量子力学的必读内容. 但是该理论本身能否再发展呢? 它现有的表述形式至善至美了吗? 本文初步扼要地介绍如何发展该理论.

关键词: Dirac 表象理论, IWOP 技术, 对 ket-bra 算符的积分.

中图法分类号: O413

PACS (1992): 03. 65. Ca

## 1 引言

量子力学创始人之一——Dirac(狄拉克)的名著<sup>[1]</sup>“The Principles of Quantum Mechanics”自1930年出版以来一直是权威的、基本的量子论教材. 在该书中 Dirac 总结了海森堡的用矩阵表示力学量的做法和薛定谔的波动理论, 提出了自己独特的表述量子论的数学表述形式(符号法), 使量子论成为严密的理论体系. Dirac 引入了左矢和右矢, 简洁而深刻地反映出量子力学各量之间的关系. 他把非对易的量子变量称为  $q$  数, 建立了相应的表象理论(例如代表坐标的力学量  $Q$  是  $q$  数, 它的本征态是  $|q\rangle$ , 坐标表象  $|q\rangle$  的正交完备性为  $\langle q' | q \rangle = \delta(q' - q)$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} dq |q\rangle \langle q| = 1$ .) 以及以不对易量  $q$  数为基础的方程, 这些已成为物理学界的宝贵财富.

吴大猷先生<sup>[2]</sup>曾写道“学或教量子力学, 通常似有两个不同的态度及方法, 一是由目前已建立的系统的数学的形式的方法入手, 这个途径, 可以 Dirac 的 ‘The Principles of Quantum Mechanics’ 为代表, 一是沿着量子力学发展的过程, 而进入目前的阶段……前者有演绎方法的清晰的好处, 但大多数的初习者, 会感觉到抽象的数学形式和物理观念间的关系的神秘性, 不知

1992年9月10日收到.

\*国家自然科学基金资助.

这样一个抽象的理论系统是如何建立的……”，这充分说明了狄拉克的天才和超人之处。

一般认为量子论能完全由古典物理的观念脱颖而出成一完整的理论系统完成于二十年代中叶后的二、三年间，由新颖的创想、数学形式的建立，以至物理意义、哲学解释，整个新理论的系统皆完成无遗<sup>[2]</sup>。其后的半个多世纪以来，主要是将量子论发展到原子和分子物理、固体物理、量子光学、量子化学、原子核等领域中去，并找出相应的应用。而对于 Dirac 的  $q$  数理论，尤其是表象理论本身能否再发展却忽略了。那么，Dirac 的表象理论本身究竟还能发展吗，现有的表述形式至善至美了吗？让我们先看看 Dirac 本人在他的著作“*The Principles of Quantum Mechanics*”的第一版序言中是怎样讲的吧！Dirac 写道：“符号法，用抽象的方式直接地处理有根本重要意义的一些量……”，“但是符号法看来更能深入事物的本质，它可以使我们用简洁精炼的方式来表达物理规律，很可能在将来当它变得更为人们所了解，而且它本身的特殊数学得到发展时，它将更多地被人们所采用。”<sup>[1]</sup>

现在我们来披露一下 Dirac 原有表象理论有那些美中不足之处吧。尽管他已告诉我们坐标表象的完备性是  $\int_{-\infty}^{\infty} dq |q\rangle \langle q| = 1$  但比此式稍稍复杂一些的式子

$$U \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{u}} | \frac{q}{u} \rangle \langle q |, \quad (u > 0), \quad (1)$$

乍一看来就不知道它等于什么。这个积分当然是有意义的，这是因为第一  $|q/u\rangle$  也是属于坐标本征态的集合；第二这个积分代表一个算符，精确地说，是个积分型 ket-bra 算符；第三这个积分在物理上代表一种么正变换（这一点在下面还要提到）。那么如何用简单的方法来真正地解析把积分算出来呢？（注意（1）式中的左矢已经不是右矢的共轭虚量了）。我们再来考虑如下的与双模坐标表象  $|q_1, q_2\rangle \equiv |q_1\rangle |q_2\rangle$  有关的积分

$$\iint_{-\infty}^{\infty} dq_1 dq_2 \left| \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right| \equiv \langle q_1 q_2 | \quad (2)$$

其中  $A, B, C, D$  是实数，且满足  $AD - BC = 1$ 。（2）式也代表一个积分型的 ket-bra 算符。它可以看作是经典正则变换  $(q_1, q_2) \rightarrow (Aq_1 + Bq_2, Cq_1 + Dq_2)$  到量子力学 Hilbert 空间的一个映射。这个积分的演算能用简单的方法解析地实现吗？类似这种积分型的 ket-bra 算符在量子论中有很多，尤其是在表象理论的研究中则更为明显。而且我们可以根据物理的需要来构造这种类型的算符。因此有必要建立一个巧妙的方法来干净利落地算出这类积分型 ket-bra 算符，从而使得 Dirac 的表象理论更有用处。

## 2 有序算符内的积分技巧

为了实现上述目标，一个很自然的想法是：既然我们处理的对象是个积分，那么最好是能

\* [1]: There is the symbolic method, which deals directly in an abstract way with the quantities of fundamental importance.

The symbolic method, however, seems to go more deeply into the nature of things. It enables one to express the physical laws in a neat and concise way, and will probably be increasing used in the future as it becomes better understood and its own special mathematics get developed.

象对  $c$  函数积分那样来处理对 ket-bra 算符函数(即  $q$  数,但积分变量仍是  $c$  数)的积分. 究竟如何才能把它们看作  $c$  数函数呢? 回忆在量子场论中常用算符的正规乘积来计算各种物理量, 故而让我们仔细地分析一下正规乘积所具有的性质. 让  $:\ :$  代表正规乘积, 则有

- ① 在  $:\ :$  内部玻色子算符可对易;
- ②  $c$  数可以自由出入  $:\ :;$
- ③ 可以对  $:\ :$  内所含的  $c$  数作微积分运算, 当然积分要求收敛;
- ④ 在  $:\ :$  内部的正规乘积记号  $:\ ::$  可以取消;
- ⑤ 谐振子真空  $|0\rangle$  所构造的投影算符  $|0\rangle\langle 0|$  的正规乘积形式是

$$|0\rangle\langle 0| = : \exp(-a^\dagger a) : \tag{3}$$

其中  $a^\dagger$ , 分别是谐振子的消灭、产生算符, 满足对易关系  $[a, a^\dagger] = 1$ . 让我们给(3)式一个严格的证明.

由粒子数态  $|n\rangle = \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle$  的完备性  $1 = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|$  有:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \sum_{n,n'=0}^{\infty} |n\rangle\langle n'| \frac{1}{\sqrt{n!n'!}} \left( \frac{d}{dZ^*} \right)^n (Z^*)^{n'} \Big|_{Z^*=0} \\ &= e^{a^\dagger \frac{d}{dZ^*}} |0\rangle\langle 0| e^{Z^* a} \Big|_{Z^*=0} \end{aligned} \tag{4}$$

设  $|0\rangle\langle 0|$  的正规乘积形式为  $:W:$ ,  $W$  待求, 则由(4)式得

$$1 = : e^{a^\dagger \frac{d}{dZ^*}} : W : e^{Z^* a} : \Big|_{Z^*=0} = : e^{a^\dagger} : W : : \tag{5}$$

其中应用了正规乘积的定义与性质③和④, 由(5)立即证得(3)式.

由正规乘积的性质(尤其是性质 1 和 3)我们想到只要把被积算符函数(ket-bra 型的算符)化成正规乘积内的形式, 则由于所有的玻色算符在  $:\ ::$  内部可对易, 故可被视为积分参数那样对待, 从而积分就可顺利进行, 当然在积分过程中和积分后的结果中都有  $:\ ::$  存在. 如果最后要取消  $:\ ::$ , 只须把积分得到的算符明显地排成正规乘积后就可实行. 我们称此技术为有序算符内的积分技术, 英文简称为 IWOP<sup>[3-4]</sup>. 根据上述思想, 我们具体积分(1)式, 先将坐标本征态  $|q\rangle$  在福克表象中表示出来, 利用粒子数态的波函数(以  $m, \omega$  分别表示谐振子质量与圆频)

$$\langle q|n\rangle = \frac{(m\omega/h)^{1/4}}{\sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!}} e^{-\frac{m\omega}{2h} q^2} H_n \left( \sqrt{\frac{m\omega}{h}} q \right) \tag{6}$$

得到

$$\begin{aligned} |q\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|q\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{m\omega}{\pi h} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{m\omega}{2h} q^2} H_n \left( \sqrt{\frac{m\omega}{h}} q \right) \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle \\ &= \left( \frac{m\omega}{\pi h} \right)^{1/4} \exp \left\{ -\frac{m\omega}{2h} q^2 + \sqrt{\frac{2m\omega}{h}} q a^\dagger - \frac{1}{2} a^{\dagger 2} \right\} |0\rangle \end{aligned} \tag{7}$$

在得到最后表述式时用到了厄密多项式的母函数公式. 将(7)式代入(1)式并为了书写方便起见令  $\hbar = m = \omega = 1$ , 则由(3)及正规乘积性质得到(3)



$$U = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{u}} |q/u\rangle \langle q| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{u\pi}} e^{-\frac{q^2}{2u} + \sqrt{\frac{2}{u}} \frac{1}{2} a^\dagger - \frac{1}{2} \frac{q^2}{u}} |0\rangle \langle 0| e^{-\frac{q^2}{2} + \sqrt{2} q - \frac{q^2}{2}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{u\pi}} : e^{-\frac{q^2}{2}(1+\frac{1}{u}) + \sqrt{2} q (\frac{1}{u} + a) - \frac{1}{2}(a+a^\dagger)^2} :$$
(8.1)

$$= \sqrt{\operatorname{sech} \lambda} : e^{-\frac{a^{\dagger 2}}{2} \tanh \lambda + (\operatorname{sech} \lambda - 1) a^\dagger a + \frac{a^2}{2} \tanh \lambda} :$$
(8.2)

$$= \exp[-\frac{a^{\dagger 2}}{2} \tanh \lambda] \exp[(a^\dagger a + \frac{1}{2}) \ln \operatorname{sech} \lambda] \exp[\frac{a^2}{2} \tanh \lambda]$$
(8.3)

其中  $e^{\lambda} = u$ . 这样我们就真正地解析地对(1)式做了积分. 特别当  $u=1$  时. 由(8.1)式得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq |q\rangle \langle q| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{\pi}} : e^{-q^2 + 2q(a^\dagger + a) + \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} [(a^\dagger + a) / \sqrt{2}]^2} :$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{\pi}} : e^{-(q-Q)^2} : = 1, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger)$$
(9)

(9)式表示可将坐标表象的完备性写为纯高斯积分的形式. 可想而知, 动量表象  $|q\rangle$  (即动量算符  $P = \frac{a - a^\dagger}{\sqrt{2}i}$  的本征态) 的完备性也可以写成纯高斯积分, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle \langle p| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{\pi}} : e^{-(p-p)^2} : = 1$$
(10)

而相干态表象的超完备性<sup>[5]</sup>

$$\int_0^\infty \frac{d^2 z}{\pi} |z\rangle \langle z| = 1$$
(11)

其中  $|z\rangle = \exp(za^\dagger - \frac{|z|^2}{2}) |0\rangle$  是消灭算符的本征态,  $a|z\rangle = z|z\rangle$ , 可以改写为

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} |z\rangle \langle z| = \int \frac{d^2 z}{\pi} : e^{-(a^* - a^\dagger)(a - a)} : = \int \frac{d^2 z}{\pi} e^{-|z|^2} = 1$$
(12)

(9)、(10)、(12)式在某种程度上揭示了 Dirac 表象理论内在的美. 也使我们 Dirac 的表象理论有更深一层的理解, 即对它不但知其然, 而且知其所以然. 吴大猷先生在他的量子力学(甲部)中指出“Dirac 氏的 *The Principles of Quantum Mechanics*, 以严谨的写法, 建立量子力学的数学结构, 或可视为圣典, 但初读或不易……”<sup>[2]</sup>, 现在由于有了有序算符内积分技术的帮助, 人们对于 Dirac 表象理论的阅读与欣赏可以有高一层的意境了. 人们也可知道, 在 Dirac 已把经典泊松括号与量子对易子建立了联系的基础上, 用 IWOP 技术可以把经典变换与量子么正变换相联系.

### 3 结语

以上我们以积分(1)式为例说明如何用有序算符内积分技术来发展 Dirac 表象理论(用同样方法可以积分(2)式). 由(8.3)式容易导出

$$UaU^{-1} = a \cosh \lambda + a^\dagger \sinh \lambda$$

这就是著名的 Bogolyubov 变换, 在量子光学中它被称为压缩变换. 可见把 Dirac 的坐标本征态

按(1)式构造算符并积分后就得出诱导 Bogolyubov 变换的么正算符. 并且从(1)式本身就可明显地看出在经典相空间中的尺度变换  $q \rightarrow q/u$  可映射到量子压缩变换  $U$ . 因此有序算符内的积分技术——一种特殊的新发展的数学物理——提供了将经典正则变换过渡到量子么正变换的有效办法, 从而使 Dirac 表象理论能更多更好地表达物理规律, 能解决一些悬而未决的问题, 也能开拓一些新的研究领域. 经过我们的工作, Dirac 表象理论在么正变换、角动量、分子光谱理论、量子光学、量子化学、群表示论等多方面有了更广泛的应用. 另一方面, IWOP 技术本身也是可以发展的<sup>[6]</sup>, 它的发展应按 Dirac 所说: “Theoretical physicists accept the need for mathematical beauty as an act of faith.” 的要求来进行.

在本文要结束之时, 让我们引用杨振宁先生的两段话: “...他(指 Dirac)把量子力学整个的结构统统记在心中, 而后用了简单、清楚的逻辑推理, 经过他的讨论之后, 你就觉得非这样不可.” “...他的每一步跟着的下一步, 都有他的逻辑, 而他的逻辑与别人的逻辑不一样, 但是非常富有引诱力, 跟着他一走之后, 你就觉得非跟着他走不可”<sup>[7]</sup>.

### 参 考 文 献

- [1] Dirac, P A M. *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxbord, 1958.
- [2] 吴大猷, 量子力学(甲部), 科学出版社, 1984.
- [3] See e. g. Fan Hong-yi, Zaidi H R and Klauder, J R *Phys. Rev*, D35 (1987), 1831.
- [4] Fan Hong-yi, *Phys. Rev*, A41 (1990), 1526; A42(1990), 4377; A40(1989), 4237.
- [5] See e. g. Klauder J R and Skargerstam, B S. *Coherent States*, (World Scientific), Singapore, 1985.
- [6] Fan Hong-yi, *Phys. Rev*, A40 (1989), 4237; *Phys. Lett*, A 161(1991), 1; *Phys. Rev*, A42 (1992), 6928.
- [7] 杨振宁, 几位物理学家的故事, 杨振宁演讲集, 南开大学出版社, 1989 年版.

## New Outlook on Dirac's Representation Theory

Fan Hongyi

(Department of Material Science and Engineering, USTC).

### Abstract

As is well-known, Dirac's representation theory forms the mathematical and physical basis of non-relativistic quantum mechanics and has been the basic reading material for learning and studying quantum mechanics since 1930. This paper briefly discusses how to develop Dirac's representation theory so as to make it more powerful and applicable.

Key words: Dirac's representation theory, IWOP technique, integration over ket-bra operators.

PACS(1992): 03.65.Ca

祝贺杨振宁教授70寿辰  
In Celebration of Dr. Chen Ning  
Yang's 70th birthday

# 具有量子群对称性的 XXZ 模型

侯伯元

(中国科学技术大学研究生院)

## 摘 要

讨论了具有量子群 Heisenberg 自旋链 XXZ 模型. 对有限链, Bethe Ansatz 方程极复杂, 注意到体系的量子群对称性, 利用  $q$ -时变 Young 算子, 可将此哈密顿体系约化为一组耦合的线性代数方程, 可明显解出. 当  $q$  为单位根时, 某些能级发生简并, 存在零模, 利用特殊边界条件及适当的极限过程可小心去掉零因子归一, 组成可约但不可分解表示.

关键词: 量子群, XXZ 模型, 自旋链

中图法分类号: O411.1

PACS (1992): 03.65Fd, 02.20.+b

Heisenberg 自旋链 XXZ 模型, 其哈密顿量.

$$H_0 = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} (\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \lambda \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z) \quad (1)$$

通常采用 Bethe Ansatz 方法来分析此模型. 令  $S$  为体系总自旋,  $S_z$  为其在  $z$  方向投影, 可分析  $H, S_z, S^2$  的共同本征态, 对有  $n$  个 ( $n \leq N/2$ ) 自旋向下的本征态:

$$|n, \alpha\rangle = \sum_{\{x_i\}} f(x_1, \dots, x_n) |x_1, \dots, x_n\rangle \quad (2)$$

其中  $x_i$  为第  $i$  个向下自旋的位置, 而且设  $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq N$ .

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_P \varepsilon_P A(k_{P_1}, \dots, k_{P_n}) \exp(i \sum_j k_{P_j} x_j) \quad (3)$$

( $P$  为  $1, \dots, n$  的置换, 由置换的奇偶性决定  $\varepsilon_P = \pm 1$ )

$$A(k_1, \dots, k_n) = \prod_{j=1}^n \beta(-k_j) \prod_{1 \leq j < l \leq n} B(-k_j, k_l)$$

$$\beta(k) = (1 - qe^{-ik})e^{i(N+1)k}, (\Lambda \equiv (q + q^{-1}/2))$$

$$B(k_1, k_2) = (1 - 2\Lambda e^{ik_2} + e^{i(k_1+k_2)})(1 - 2\Lambda e^{-ik_1} + e^{i(k_2-k_1)})$$

以上各式中  $k_j$  满足 BAE(Bethe Ansatz Equation):

$$e^{i2Nk_j} = \prod_{l=1(l \neq j)}^n \frac{B(-k_j, k_l)}{B(k_j, k_l)} \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

(2)式是哈密顿量  $H$  的本征值为  ${}^n E_\alpha$  的本征态:

$$H|n, \alpha\rangle = {}^n E_\alpha |n, \alpha\rangle$$

$${}^n E_\alpha = 2n\Lambda - 2 \sum_{j=1}^n \cos k_j \quad (5)$$

关键在于解 BAE(4), 对它的每一组解  $\{k_j\}$ , 代入(3)与(5)式得相应本征态与本征值. 当取热力学极限 ( $N \rightarrow \infty$ ), 可将 BAE 化为线性积分方程, 可求得最大本征值, 进而求得各种热力学量. 但对有限  $N$ , BAE 的解很难, 仅对自旋反转数  $n=1$  时可解, 这时 BAE(4)式右端仅一项:

$$k = \alpha\pi/N, \alpha = 1, \dots, N$$

$${}^1 E_\alpha = 2\Lambda - 2\cos \frac{\alpha\pi}{N} \quad (6)$$

而当  $n \geq 2$  时, BAE 很难解出. 所以, 虽然 BA((2)–(5))给出了能量本征态及本征值的一般表达式, 但因 BAE(4)很复杂,  $\{k_j\}$  未能解出, 故仍未能得到体系的明显解. 对于 BA 解的存在及其性质, 杨振宁兄弟曾作了透彻分析,<sup>[1]</sup>对有限链, 杨先生指出:

“Thus, in complex  $\Lambda$  space except at the poles of the  $u$ 's ( $u_j = e^{ik_j}$ ) and at points where  $\psi' = 0$  ( $\psi = \psi \prod_{j,l} (2\Lambda u_l - 1 - u_j u_l)$ ),  $\psi'$  is an eigenstate of  $H$ . These exceptional points are finite in number. We can obtain a correct eigenfunction  $\psi''$  at these points too by properly normalizing  $\psi'$  and approaching these exceptional points.”

近两年来对 XXZ 模型的对称性有更清楚了解, 可积模型常具有非局域对称性(量子群对称性). 无穷长 XXZ 链 ( $N \rightarrow \infty$  热力学极限) 具有  $U_q(\hat{sl}(2))$  对称性, 而对具某种确定边界条件的有限链可具有  $U_q(sl(2))$  对称性. 正由于体系具有这种量子群对称性, 我们<sup>[2]</sup>利用  $q$ -畸变 Young 算子来实现  $U_q(sl(2))$  表示, 可得到 XXZ 模型有限链的精确解. 从我们的分析也可看出, 二十多年前杨先生的上述分析是正确的.

对 XXZ 模型有限链, 可对(1)式的哈密顿量  $H_0$  再加上边界项, 即选体系的哈密顿量

$$H = H_0 + \frac{\Lambda}{2}(N-1)I - \frac{q-q^{-1}}{4}(\sigma_1^- - \sigma_n^-) = \sum_{j=1}^{N-1} e_j \quad (7)$$

其中

$$e_j = |\otimes \dots \otimes | \otimes E_j \otimes | \otimes \dots \otimes |$$

$$E = q^{-1}(I - R) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & q & 1 - q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$e_j$  为 Temperley-Lieb 代数生成元, 满足如下代数关系:

$$\begin{aligned}
 e_j e_{j \pm 1} e_j &= e_j \\
 e_i e_j &= e_j e_i, \quad |i - j| \leq 2 \\
 e_j^2 &= (q + q^{-1}) e_j
 \end{aligned} \tag{8}$$

正由于哈密顿量(7)由 Temperley-Lieb 代数的生成元组成,使此体系具有  $U_q(sl(2))$  对称性. 易证如下表示的  $S^z, S^\pm$  可与  $H$  对易:

$$\begin{aligned}
 S^z &= \sum_i S_i^z, & S_i^z &= I \otimes \dots \otimes I \otimes \frac{\sigma^z}{2} \otimes I \otimes \dots \otimes I \\
 S^\pm &= \sum_i S_i^\pm, & S_i^\pm &= q^{\pm i} \otimes \dots \otimes q^{\pm i} \otimes \frac{\sigma^\pm}{2} \otimes q^{\pm i} \otimes \dots \otimes q^{\pm i}
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$[H, S^z] = 0, \quad [H, S^\pm] = 0$$

而  $\{S^z, S^\pm\}$  组成  $U_q(sl(2))$  的生成元, 满足如下代数关系:

$$\begin{aligned}
 [S^z, S^\pm] &= \pm S^\pm \\
 [S^+, S^-] &= \frac{q^{2S^z} - q^{-2S^z}}{q - q^{-1}}
 \end{aligned} \tag{10}$$

当  $q \rightarrow 1$  时,  $\Delta \rightarrow 1$ , 体系趋于各向同性 XXX 模型, 这时  $\{S^z, S^\pm\}$  趋于  $J^z = \frac{1}{2} \sum \sigma_j^z$ , 满足通常  $sl(2)$  代数关系. 当  $q \neq 1$  时, 如仅注意  $S^z, S^\pm$  对单粒子态的局域作用, 效果与  $J^z, J^\pm$  相同, 但是当考虑对  $N > 1$  的整个自旋链的作用,  $S^z$  的作用仍同  $J^z$ , 而  $S^\pm$  的作用不仅使第  $i$  个粒子自旋反向, 同时还会对  $j \geq i$  的粒子产生不同的相因子, 这种非局域对称性, 使这种自旋链具有  $U_q(sl(2))$  的对称性.

正由于体系哈密顿量具  $U_q(sl(2))$  对称性, 可利用  $q$ -Young 算子找  $H, S^z$  和总自旋  $S$  的共同本征态<sup>[3]</sup>. 对于自旋 1/2 链, 仅需讨论两行 Young 图, 首先找相应正则 Young 表所对应的  $q$ -Young 算子  $Y_n$ :

1	.....	2n-1	2n+1	.....	N
2		2n			

$$Y_n = e_1 e_3 \dots e_{2n-1} Z_n^N \tag{11}$$

其中  $\{e_i\}$  为 Temperley-Lieb 代数生成元, 而  $Z_n^N$  仅由  $e_{2n+1}, \dots, e_{2n-1}$  组成, 可利用含谱参数  $u$  的量子群群元  $g_j(u)$

$$g_j(u) = [1 + u] - [u] e_j, \quad [u] = \frac{q^u - q^{-u}}{q - q^{-1}} \tag{12}$$

来表达  $Z_n^N$  如下:

$$\begin{aligned}
 Z_n^{2n+1} &= 1, & Z_n^{2n+2} &= g_{2n+1}(1) \\
 Z_n^{2n+3} &= Z_n^{2n+2} g_{2n+2}(2) Z_n^{2n+2} \\
 &\dots \\
 Z_n^N &= Z_n^{N-1} g_{N-1}(N - 2n - 1) Z_n^{N-1}
 \end{aligned} \tag{13}$$

这样引入的  $q$ -Young 算子  $Y_n$  为幂等元, 是投影算子, 利用它们可组成 Temperley-Lieb 代数的左理想, 左理想的独立基可选为

$${}^* C_{(n)} Z_n^N \equiv C_1^n C_3^n \dots C_{2n-1}^n Z_n^N$$

其中

$$1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_n \leq N-1, m_i \geq 2i-1$$

$$C_i^m = e_m e_{m-1} \dots e_i \quad (14)$$

对于有确定总自旋  $S = \frac{N}{2} - n$  的最高权态, 在前  $2n$  个粒子中, 至少相间有  $n$  个向下自旋, 可取为  $|1, 3, 5, \dots, 2n-1\rangle$ , 注意到  $Z_n^z$  对它的作用仅改变归一常数, 略去此常数, 可将具有  $n$  个向下自旋的最高权态记为

$${}^n\chi_m = {}^n C_{(m)} |1, 3, \dots, 2n-1\rangle \quad (15)$$

Pasquier, Saleur<sup>[4]</sup>曾指出, Bethe Ansatz 态为最高权态, 故体系的具确定总角动量  $J = \frac{N}{2} - n$  的 Bethe Ansatz 态可表为具相同  $n$  的各  ${}^n\chi_m$  的线性组合:

$${}^n\phi_\alpha = \sum_m a_{(m)}^{\alpha} {}^n\chi_{(m)}$$

$$H {}^n\phi_\alpha = {}^n E_\alpha {}^n\phi_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, M_n \quad (16)$$

其中  $M_n = \binom{N-1}{n} - \binom{N-1}{n-2}$  为对给定 Young 图的 young 算子数. 用  $H = \sum_{j=1}^{N-1} e_j$  代入上式, 利用 Temperley-Lieb 代数关系, 可得关于  ${}^n E_{(m)}$  和  $a_{(m)}^{\alpha}$  的本征方程, 于是对于不太大的  $N$ , 可利用  $q$ -Young 算子得到解的明显表达式.

例如, 当  $n=1$

$$H^1 \phi_\alpha = {}^1 E_\alpha {}^1 \phi_\alpha$$

$${}^1 \phi_\alpha = \sum_m a_m^\alpha {}^1 C_m |1\rangle$$

其中  $|1\rangle = |\downarrow \uparrow \uparrow \dots \uparrow\rangle$  为第一粒子自旋向下其余粒子均自旋向上态. 注意到(7)–(8)诸式, 得

$$([2] - {}^1 E_\alpha) a_m^\alpha + a_{m+1}^\alpha + a_{m-1}^\alpha = 0 \quad (1 \leq m \leq N-1)$$

$$a_0^\alpha = 0, a_N^\alpha = 0$$

由数学归纳法易证

$$\frac{a_m^\alpha}{a_1^\alpha} = (-1)^{m-1} \frac{\sin \frac{m\alpha\pi}{N}}{\sin \frac{\alpha\pi}{N}}$$

$$= (-1)^{m-1} \sum_{\alpha=0}^{m-1} e^{i(2\alpha-m+1)\alpha\pi/N} \quad (17)$$

可选归一条件令  $a_1^\alpha = 1$ , 再由  $a_N^\alpha = 0$  条件可得能量本征值

$${}^1 E_\alpha = [2] - 2\cos \frac{\alpha\pi}{N}, \alpha = 1, 2, \dots, N-1 \quad (18)$$

此结果与用 Bethe-Ausatz 方法所得结果(6)相同.

当  $n=2$ , 由

$$H^2 \phi_\alpha = {}^2 E_\alpha {}^2 \phi_\alpha$$

$${}^2 \phi_\alpha = \sum_{m_1, m_2} a_{m_1, m_2}^\alpha {}^2 C_{m_1, m_2} |1, 3\rangle$$

与前类似用(7)–(8)诸式得  $a_{m_1, m_2}^\alpha$  满足下列循环方程组:

$$(2[2] - {}^2 E_\alpha) a_{m, m+2}^\alpha + a_{m-1, m+2}^\alpha + a_{m, m+1}^\alpha + 2a_{m+1, m+2}^\alpha + a_{m, m+3}^\alpha + a_{m+2, m+3}^\alpha = 0$$

$$(2[2] - {}^2E_\sigma) a_{m_1, m_2}^\sigma + a_{m_1-1, m_2}^\sigma + a_{m_1, m_2+1}^\sigma = 0 \quad (19)$$

$$(2[2] - {}^2E_\sigma) a_{m_1, m_2}^\sigma + a_{m_1-1, m_2}^\sigma + a_{m_1, m_2-1}^\sigma + a_{m_1+1, m_2}^\sigma + a_{m_1, m_2+1}^\sigma = 0$$

当  $m_1 + 2 < m_2$

由上列代数方程组可解得能量本征值  ${}^2E_\sigma$ , 同时可得本征态系数  $a_{m_1, m_2}$ , 例如当  $N=4$ , 上方程组化为

$$(2[2] - {}^2E_\sigma) a_{13}^\sigma + 2a_{23}^\sigma = 0$$

$$([2] - {}^2E_\sigma) a_{23}^\sigma + a_{13}^\sigma = 0$$

由此二元方程组可解得

$${}^2E_\sigma = \frac{3}{2}[2] \pm \frac{1}{2} \sqrt{[2]^2 + 8}$$

$$a_{13}^\sigma = 1, a_{23}^\sigma = \frac{1}{4}(-[2] \pm \sqrt{[2]^2 + 8}) \quad (20)$$

如仅用 Bethe Ansatz 方法, 对于  $n=2$  的有限链, 由于 BAE(4) 无法解出, 故已无法得到解的明显表达式。

下面我们进一步讨论简并情况及零模态的产生。

前面利用  $q$ -Young 算子所得  $H$  的本征态  ${}^*\phi_\sigma$  为具  $n$  个自旋向下的最高权态, 即满足

$$(S^+) {}^*\phi_\sigma = 0$$

态  ${}^*\phi_\sigma$  具有确定的总角动量  $J = \frac{N}{2} - n$ , 确定的能量本征值  ${}^*E_\sigma$ , 由于 Bethe Ansatz 方法所得态也为最高权态, 此态的能量本征值  ${}^*E_\sigma$  可形式的表示为

$${}^*E_\sigma = n[2] - 2 \sum_{j=1}^n \cos k_j$$

当用降算子  $(S^-)$  作用在  ${}^*\phi_\sigma$  态上时, 会得到具有相同能量  ${}^*E_\sigma$  及总角动量  $J$  的但却具有不同  $J^z$  本征值的本征态。以指标  $\sigma$  表法  $J^z$  的本征值

$${}^*\phi_{\sigma\sigma} = [J - \sigma]^{-1} (S^-) {}^*\phi_{\sigma\sigma+1} \quad (21)$$

当  $\sigma = J = \frac{N}{2} - n$  时, 即前述最高权态

$${}^*\phi_{\sigma\sigma} \equiv {}^*\phi_\sigma \quad (\text{当 } J = \frac{N}{2} - n)$$

对一般  $q$  值 (即各向异性参数  $\lambda = (q + q^{-1})/2$  的普点), 能级正则简并, 具不同能量或不同角动量的态相互正交

$$\langle {}^*\phi_{\sigma\sigma}, {}^*\phi_{\sigma'\sigma'} \rangle = \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\sigma\sigma'} C \quad (22)$$

但是当  $q$  为单位根时, 这时可能发生偶然简并。例如, 将单位的  $P$  次根记为  $Q, Q^P = 1$ , 且令

$$Q \equiv e^{i\tau}, \cos \tau = \frac{Q + Q^{-1}}{2} = \frac{[2]_Q}{2}$$

最高权态  ${}^*\phi_\sigma$  满足

$$H {}^*\phi_\sigma = {}^*E_\sigma {}^*\phi_\sigma$$

$${}^*E_\sigma = n[2] - 2 \sum_{j=1}^n \cos k_j, J = \frac{N}{2} - n$$

当  $q \rightarrow Q$  时, 在  $n$  个  $\{k_j\}$  中可能有  $m$  个  $k_j$  趋于  $\tau$ , 这时会存在另一最高权态  ${}^*\phi'_\sigma$  (不破坏 BAE 的另

一本征态), 其能量本征值

$${}^n E'_a = n[2]_q - 2 \sum_{j=1}^n \cos k_j, n' = n - m$$

这时能级发生偶然简并:  ${}^n \phi_a$  与  ${}^n \phi'_a$  的表示中的某非最高权态相简并, 即

$${}^n \phi'_{a,J} = \left\{ \prod_{l=1}^m [l]^{-1} (S^-) \right\} {}^n \phi_a = \lambda_q {}^n \phi_a \quad (\text{当 } q \rightarrow Q) \quad (23)$$

$$J' - J = n - n' = m > 0$$

注意到不同最高权表示相互正交, 故这样得到的  ${}^n \phi'_{a,J}$  为零模态, 且由此态出发用降算子  $(S^-)$  作用所得态均零模态. 即  $(S^-)^l {}^n \phi'_{a,J}$  ( $m \leq l < p$ ), 均为零模态

正如杨先生所指出, 在这些  $q$  的特殊值存在  $H$  的零模态时, 本征态发生简并. 下面我们采用特殊的取极限的办法设法得到新的独立态, 即令

$${}^n \psi_a = \lim_{q \rightarrow Q} \frac{{}^n \phi'_{a,J} - \lambda_q {}^n \phi_a}{q - Q}$$

易证这样得到的  ${}^n \psi_a$  与  ${}^n \phi_a$  相互独立, 进一步利用降算子  $(S^-)$  及  $(S^-)^p / [P]!$  作用, 可得到  $U_q(\mathfrak{sl}(2))$  的整个可约而不可分解 (type I) 表示的所有态, 得到本征态的完备集合.

由以上分析我们看出, 二十多年前杨先生的判断是正确的. 正因为注意到非线性可积体系的非局域对称性, 利用量子群这一新的强有力的工具, 可对有限 Heisenberg 自旋链得到明显解, 并可具体实现量子群的可约但不可分解表示.

#### 参 考 文 献

- [1] Yang C N and Yang C P, *Phys. Rev.*, 150(1966), 321, 150; *Phys. Rev.*, 151(1966), 258.
- [2] Hou B Y, Ma Z Q, *J. Phys. A. Math. Gen.*, 24(1991), 2847-2861.
- [3] Levy D, *Phys. Rev. Lett.*, 64(1990), 499.
- [4] Pasquier V, Saleur H, *Nucl. Phys.*, B330(1990), 523.



## XXZ Model With the Symmetry of Quantum Group

Hou Boyuan

(Graduate School of USTC)

### Abstract

An XXZ model of Heisenberg spin chain with the symmetry of quantum group is discussed. For a finite chain, the Bethe Ansatz equations (BAE) are very complicated. In terms of  $q$ -deformation Young operators this Hamiltonian system can be reduced to a set of coupled linear algebraic equations, which could be explicitly solved. When  $q$  is a root of unity, some energies may be degenerated, and zero models exist. By choosing a particular boundary condition and an appropriate limit process, a reducible but indecomposable representation (type I) of  $U_q(sl(2))$  is constructed.

**Key words:** quantum group, Heisenberg spin chain, XXZ model

祝贺杨振宁教授70寿辰  
In Celebration of Dr. Chen Ning  
Yang's 70th birthday

## 具有 $\delta$ 函数势的 Schrödinger 方程的解和广义函数的乘积

赵保恒

(中国科学技术大学研究生院, 北京)

摘 要

本文证明广义函数的乘积  $\varepsilon(x)\delta'(x)\sin kx=0$ . 利用这个结果我们证明

$\psi = \left(1 - \frac{c}{2}\varepsilon(x)\right)\sin kx$  是 Schrödinger 方程  $-\frac{d^2}{dx^2}\psi + c\delta'(x)\psi = E\psi$  的解。

关键词:  $\delta$  函数, 广义函数, 薛定谔方程

中图法分类号: O411.1

PACS (1992): 02.90+p, 02.20.+b

在研究 2+1 维的量子 Davey-Stewartson I 系统时<sup>[1]</sup>, 当  $N=2$  (2 粒子), 我们得到 Schrödinger 方程

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi + c\delta'(x)\psi = E\psi \quad (1)$$

其中  $c$  是耦合常数,  $\delta'(x)$  是  $\delta$  函数的微商. 方程(1)也出现在文献[2]中. 在文献[3]内, 我们曾指出[2]所得到的  $\psi$  实际上不满足(1)式, 他们所研究的是一个与  $\delta$  函数势无关的 Schrödinger 算子  $H = -\frac{d^2}{dx^2}$  的自伴扩张问题.

在[3]中我们给出(1)式的解

$$\psi = \left(1 - \frac{c}{2}\varepsilon(x)\right)\sin kx, k^2 = E \quad (2)$$

其中  $\varepsilon(x) = 1(x > 0)$ ,  $\varepsilon(x) = 0(x = 0)$ ,  $\varepsilon(x) = -1(x < 0)$ . 由于推导(2)时我们碰到广义函数的乘积, 而广义函数的乘积并不总是存在的, 因此推导有形式化的性质. 这就需要检验一下, 看看

(2)中的  $\psi$  是否真满足方程(1). 把(2)中的  $\psi$  代入(1)式,即出现广义函数的乘积  $\varepsilon(x)\delta'(x)\sin kx$ , 下面我们证明这个乘积存在并等于零. 于是进一步可以验证  $\psi$  的确是方程(1)的解.

我们按文献[4]定义  $\delta$  序列和广义函数的乘积.  $\delta$  序列是指函数  $\delta_n$  的序列,  $\delta_n \in \mathcal{D}$  (所有支集有界、无限可微函数集合), 并且

(a)  $\delta_n(x)$  在区间  $(-\alpha_n, \alpha_n)$  之外为零, 其中  $\alpha_n \rightarrow 0$  当  $n \rightarrow \infty$ ;

(b)  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = 1$ ;

(c)  $\alpha_n^k \int_{-\infty}^{\infty} |\delta_n^{(k)}(x)| dx \leq M_k$  (正整数),  $\delta_n^{(k)}$  是  $\delta_n$  的  $k$  次微商.

广义函数  $\delta(x)$  定义为  $\delta$  序列的极限.

设  $f$  和  $g$  为二广义函数, 如果对任何  $\delta$  序列  $(f * \delta_n)(g * \delta_n)$  的极限存在, 则称这个极限为广义函数的乘积  $fg$ .

由于  $\delta(x) = \delta(-x)$ , 显然  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\delta_n(x) - \delta_n(-x)) = 0$ . 把  $\delta_n$  写成  $\delta_n(x) = \frac{1}{2}(\delta_n(x) + \delta_n(-x)) + \frac{1}{2}(\delta_n(x) - \delta_n(-x))$ , 此式右边第二部分可以忽略, 故本文后面将认为  $\delta_n(x)$  是一个偶函数.

令  $\varepsilon_n = \varepsilon * \delta_n$ ,  $\delta'_n = \delta' * \delta_n$ , 易见  $\varepsilon_n(x) = \int_{-x}^x \delta_n(y) dy$ ,  $\delta'_n(x) = \frac{d}{dx} \delta_n(x)$ . 这是两个奇函数.

现在考虑  $(\varepsilon_n \delta'_n \sin kx, \varphi)$ , 其中  $\varphi \in \mathcal{D}$ . 把  $\varphi$  展开,  $\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + x^2\gamma(x)$ , 其中  $\gamma(x)$  连续、可微.

$$\begin{aligned} (\varepsilon_n \delta'_n \sin kx, \varphi) &= \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_n(x) \delta'_n(x) \sin kx dx \\ &\quad + \varphi'(0) \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_n(x) \delta'_n(x) x \sin kx dx \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_n(x) \delta'_n(x) x^2 \gamma(x) dx \end{aligned} \quad (3)$$

分别计算上式右边三个积分, 第一个积分中被积函数是三个奇函数的乘积, 故

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_n(x) \delta'_n(x) \sin kx dx = 0 \quad (4)$$

当  $n \rightarrow \infty$ , 并且  $x \neq 0$ , 我们有  $|\varepsilon_n(x)| \rightarrow 1$ , 此外注意  $|\frac{\sin kx}{x}| \leq |k|$ , 故  $n$  足够大时我们有

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_n(x) \delta'_n(x) x \sin kx dx \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon_n(x)| |\delta'_n x^2| \left| \frac{\sin kx}{x} \right| dx \\ &\leq K \int_{-\infty}^{\infty} |x^2 \delta'_n(x)| dx \leq K \alpha_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\delta'_n(x)| dx \leq K M_1 \alpha_n \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $K$  为一适当常数. 当  $n \rightarrow \infty$  时  $\alpha_n \rightarrow 0$ , 因此第二个积分的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_n(x) \delta'_n(x) x \sin kx dx = 0 \quad (6)$$

同理第三个积分的极限亦等于零. 这样我们就证明了

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varepsilon_n \delta'_n \sin kx, \varphi) = 0 \quad (7)$$

对任何  $\delta$  序列和任何  $\varphi \in \mathcal{D}$  均成立, 也就是说  $\varepsilon_n \delta'_n \sin kx$  的极限存在并等于零, 即

$$\varepsilon(x) \delta'(x) \sin kx = 0 \quad (8)$$

我们来检验(2)中的  $\psi$  是否满足方程(1). 注意  $\varepsilon'(x) = 2\delta(x)$  和  $\sin kx \delta(x) = 0$ , 就有

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi = ck\delta(x) + k^2\psi \quad (9)$$

由(8)式易见

$$c\delta'(x)\psi = c\delta'(x)\sin kx = -ck\delta(x) \quad (10)$$

(9)和(10)式表明(2)中的  $\psi$  满足方程(1).

(2)式中的  $\psi$  可按如下手续得到. 当  $x \neq 0$ , 方程(1)可写成  $-\frac{d^2}{dx^2}\psi = E\psi$ , 于是  $\psi = e^{\pm ikx}$ . 在一般情形下, 我们令

$$\psi = \theta(x)(a_1e^{ikx} + b_1e^{-ikx}) + \theta(-x)(a_2e^{ikx} + b_2e^{-ikx}) \quad (11)$$

其中  $\theta(x) = 1$  当  $x > 0$ ,  $\theta(x) = 0$  当  $x < 0$ . 假定  $\psi$  在  $x = 0$  连续:  $\psi(0) = \psi(0^+) = \psi(0^-)$ , 可以看出应取  $\theta(0) = \frac{1}{2}$ . 把(11)中的  $\psi$  代入方程(1), 要求方程左边的奇异项抵消, 就可以定出常数  $a_i, b_i$ . 于是得到(2)中  $\psi$  的表达式. 把(11)式中的  $\psi$  代入方程(1)时, 出现广义函数的乘积  $\delta'(x)\theta(\pm x)$ , 这个乘积不存在(与  $\delta^2$  不存在有关), 我们得到的似乎是没有意义的式子, 但是前面的讨论说明  $\delta'(x)\theta(\pm x)e^{\pm ikx}$  的适当线性组合是有意义的. 这表明前述表面上形式化的推导实际上是有意义的.

推广本文的讨论, 可以证明文献[1, 5]中得到的多粒子 Schrödinger 方程的解是正确的.

### 参 考 文 献

- [1] Pang G D, Pu F C and Zhao B H, *Phys. Rev. Lett.*, 65(1990), 3227.
- [2] Gesztesy F and Holden H, *J. Phys. A; Math. Gen.*, 20(1987), 5157; Seba P, *Rep. Math. Phys.* 24(1988), 111.; Albeverio S, Gesztesy F, Hoegh-Krohn R and Holden H, *Solvable Models in Quantum Mechanics*, Berlin: Springer, 1988.
- [3] Zhao B H, *J. Phys. A; Math. Gen.* 25(1992), L 617.
- [4] Antosik P, Mikusinski J and Sikorski R, *Theory of Distributions, The Sequential Approach*, Amsterdam; Elsevier, 1973.
- [5] Yan M L and Zhao B H, *Phys. Lett. A*, 168(1992), 25.

## Solution of the Schrödinger Equation With $\delta'$ -Function Potential and Product of Distributions

Zhao Baoheng

(Department of Physics, Graduate school of USTC)

### Abstract

This paper proves that the product of distributions  $\varepsilon(x)\delta'(x)\sin kx=0$ . It is then concluded that  $\psi=\left(1-\frac{c}{2}\varepsilon(x)\right)\sin kx$  is the solution to the Schrödinger equation  $-\frac{d^2}{dx^2}\psi+c\delta'(x)\psi=E\psi$ .

**Key words:**  $\delta'$ -function, distribution, Schrödinger equation

**PACS(1992):** 02.90 +p, 02.20 +b

祝贺杨振宁教授70寿辰  
In Celebration of Dr. Chen Ning  
Yang's 70th birthday

# 非线性光学的量子效应\*

郭光灿

(物理系)

## 摘 要

简要地论述单模非经典光场的普适判据,提出两种产生光子数压缩态的途径,以及证明奇、偶相干态实际上是种宏观可识别的量子叠加态(即薛定谔猫)。

关键词: 非线性光学,量子效应,薛定谔猫,光子数压缩态

中图法分类号: O437.

PACS (1992): 42. 50. Dv

## 1 引言

非线性光学在非线性科学中占有重要的地位,这不仅因为非线性光学过程中包括有孤子、分形、混沌等丰富的非线性现象,而且借助于光学,尤其激光技术能够比较容易地在实验上观察、研究这些非线性现象。因此,非线性光学的研究成果将有力地促进整个非线性科学的发展。另一方面,自然界本质上是量子的,非线性科学中的量子现象势必也会成为人们关注的课题,事实上目前关于量子孤子、量子混沌的研究正日益高涨。在这方面的研究中,量子光学同样占有特殊的地位。量子光学是采用量子理论来研究光学现象的科学,它既与物理学的基础理论紧密联系,又较容易开展实验研究,因而目前成为物理学中倍受重视且异常活跃的学科。非线性光学的量子效应是量子光学的重要前沿课题,它主要研究纯属于光场量子特性的物理现象,例如光场的压缩态,亚泊松分布(或称光子数压缩态),反聚束效应等,这些现象完全没有经典对易物,故又称为光场的非经典效应。研究非线性光学中的非经典效应能够进一步揭示光

1992年10月12日收到。

\*国家自然科学基金资助课题。

的量子本质,也有助于从更广的角度去研究非线性科学的量子现象。

本文将简要地论述判断单模光场是否具有非经典效应的普遍判据,提出两种产生光子数压缩态的途径,以及证明奇、偶相干态实际上是种宏观可识别的量子叠加态(即“薛定谔猫”)。

## 2. 单模非经典光场的普遍判据

在相干态表象中单模辐射场的 Glauber-P 表示定义为<sup>[1]</sup>

$$\hat{\rho} \equiv \int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle\langle\alpha| \quad (1)$$

式中  $\hat{\rho}$  为辐射场的密度算符。借助于 P 表示,可将量子体系任何力学量  $\hat{A}$  的系综平均值表示为如下的普通复变函数(C-数)的积分,即

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr} \hat{\rho} \hat{A} = \int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*) \bar{A}^{(\alpha)}(\alpha, \alpha^*) \quad (2)$$

式中  $\bar{A}^{(\alpha)}(\alpha, \alpha^*)$  是力学量算符函数  $\hat{A}(a, a^+)$  的正规排列缔合函数,  $a, a^+$  为光场的消灭、产生算符。由量子体系密度算符  $\hat{\rho}(a, a^+, t)$  的主方程可以推导出相应 P 表示的福克-普朗克方程。因此, P 表示的引入提供一种求解量子体系问题的有效方法。

另一方面,还可从物理角度来考察 P 表示的意义。事实上,上述的方法在于寻找一个由概率分布函数  $P(\alpha, \alpha^*, t)$  所描述的经典体系来完全等效于由密度算符  $\hat{\rho}(a, a^+, t)$  所描述的量子体系,亦即该量子体系的全部信息都可以由相应的经典体系计算出来。这种量子—经典的等效性的前提是光场必需存在具有明确物理意义的 P 表示, P 表示作为概率分布函数应当是正定、非奇异的。存在有这样 P 表示的光场所具有全部性质均可经典体系中找到对易物,因此不会出现任何非经典效应。热光场和相干态光场均属于这类光场。当然,并非所有的光场都存在有式(1)所定义、有物理意义的 P 表示。P 表示为非正定,或者奇异的光场,称为非经典光场,这种光场找不到相应的经典体系来等效之,它存在纯属于光场量子特性的效应。压缩态(squeezed state)、亚泊松分布、反聚束效应就是典型的非经典光场<sup>[2]</sup>。

我们曾引进一种普遍的判据来确定由  $\hat{\rho}$  描述的单模光场是否是非经典光场<sup>[3,4]</sup>。为此,引进如下的试探算符  $\hat{T}$ :

$$\hat{T}(\bar{a}, \bar{a}^*; \sigma^2) \equiv : \exp\left\{-\frac{1}{\sigma^2}(a^+ - \bar{a}^*)(a - \bar{a})\right\} : / \pi\sigma^2 \quad (3)$$

式中  $:$  表示正规排列,  $\bar{a}, \bar{a}^*$  为复数变量,  $0 < \sigma < 1$ 。定义相应的试探函数为

$$\bar{T}(\bar{a}, \bar{a}^*; \sigma^2) = \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{T}] \quad (4)$$

将式(1)代入上式可得

$$\bar{T}(\bar{a}, \bar{a}^*; \sigma^2) = \int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*) \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{|\alpha - \bar{a}|^2}{\sigma^2}\right) \quad (5)$$

不难证明,当  $\sigma \rightarrow 0$  时,上式右边积分式中的第二个函数为  $\delta(a - \bar{a})\delta(a^* - \bar{a}^*)$ 。因此,式(5)的意义是采用  $\delta$  函数来探测 P 表示在复平面上各点  $(\bar{a}, \bar{a}^*)$  的行为。 $\bar{T}(\bar{a}, \bar{a}^*; \sigma^2)$  能给出函数  $P(\bar{a}, \bar{a}^*)$  在该点的特性,改变参量  $(\bar{a}, \bar{a}^*)$  相当于在复平面上扫描,因此,由试探函数  $\bar{T}(\bar{a}, \bar{a}^*; \sigma^2 \rightarrow 0)$  的性质就可以了解到  $P(\bar{a}, \bar{a}^*)$  是否存在,此外,我们还可确定某非经典光场的 P 表示是呈现奇异性还是非正定性,以及在复平面的那些范围内表现出这种奇异性或非正定性,这对深入研究

各种非经典效应之间的差异显然是很有用的. 例如, 光子数本征态的  $P$  表示仅在  $\bar{\alpha}=0=\bar{\alpha}^*$  处呈现奇异性, 而压缩相干态则在整个复平面上处处呈现奇异性. 另外, 我们还发现, 迄今所揭示的非经典效应均由其  $P$  表示的奇异性造成的, 尚未找到隶属于  $P$  表示为负值的非经典效应.

在相干态表象中, 式(4)可写成所谓“反对角”表示的形式

$$\begin{aligned} \bar{T}(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}^*; \sigma^2) &= \frac{1}{\pi(1-\sigma^2)} \exp\left(\frac{|\alpha|^2}{(1-\sigma^2)}\right) \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \\ &\exp\left\{\left(\frac{1-2\sigma^2}{1-\sigma^2}\right)|\alpha|^2 + \frac{1}{1-\sigma^2}(\alpha\bar{\alpha}^* - \bar{\alpha}\alpha^*)\right\} \langle \alpha|\hat{\rho}|\alpha \rangle \end{aligned} \quad (6)$$

借助于此公式可以由光场密度算符  $\hat{\rho}$  的“反对角” $Q$  表示  $\langle \alpha|\hat{\rho}|\alpha \rangle$  来研究试探函数  $\bar{T}(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}^*; \sigma^2)$  的特性, 从而对量子光场的特性作出判断.

### 3 光子数压缩态

当光场处于相干态时, 任意力学量  $\hat{A}$  的起伏称为该力学量的标准量子噪声极限. 压缩态的最一般定义是, 若光场某个力学量  $\hat{B}$  的起伏低于其标准量子噪声极限, 则称该光场为力学量  $\hat{B}$  的压缩态, 压缩态的力学量  $\hat{B}$  噪声的降低是与其共轭力学量的噪声增大为代价的, 例如, 若坐标算符  $\hat{X}$  的噪声降低, 则动量  $\hat{P}$  的噪声必然相应地增大, 它们仍满足测不准关系. 事实上, 任何压缩态光场总噪声都高于相干态的总噪声, 换句话说, 相干态具有最小的噪声, 实质上这就是真空噪声. 压缩态只是改变噪声在一对共轭力学量之间的分配而已, 而无法克服真空噪声极限. 当然, 我们感兴趣的也正是某个力学量噪声降低的程度(即压缩量的大小), 而不关心光场的总噪声特性.

根据共轭力学量选取的不同, 目前压缩态可分为两大类: 一是压缩相干态, 相应的共轭量是电场的两个正交位相分量的振幅算符, 就相干态而言, 这对共轭量的起伏相等, 而压缩相干态的某个分量的起伏低于标准量子噪声极限; 另一类压缩态是所谓光子数压缩态, 相应的共轭力学量是光子数算符  $\hat{N}$  和相位. 对相干态有  $\langle (\Delta\hat{N}^2) \rangle = \langle \hat{N} \rangle$ , 而光子数压缩态则有  $\langle (\Delta\hat{N})^2 \rangle < \langle \hat{N} \rangle$ , 即光子数的噪声低于标准量子极限, 其代价是光场的相位起伏增大.

光子数压缩态是种典型的非经典光场, 而且在光通信等领域有着重要的应用前景. 寻找产生光子数压缩态的有效途径成为量子光学领域中重要的前沿课题之一, 目前已达到的最高水平是 Fano 因子 ( $F = \langle (\Delta\hat{N})^2 \rangle / \langle \hat{N} \rangle$ ) 为  $\frac{1}{4}$ <sup>[5]</sup>.

我们应用光泵三能级体系的 Van der Pol 方程<sup>[6]</sup>:

$$\dot{A} = -\left[\frac{1}{2} \frac{\omega_s}{Q} + i(\Omega - \omega_r)\right]A + CA - BAA^* + F(t) \quad (7)$$

来研究输出光场的量子统计特性. 式中  $A(A^*)$  为光场缓变的消灭(产生)算符,  $F(t)$  为朗之万噪声算符,  $Q$  为腔的品质因子,  $\omega_r$  为光场频率,  $\Omega$  为腔模频率,  $C$  和  $B$  分别为增益和饱和算符, 它们的具体表达式见文献<sup>[6]</sup>.

采用准线性来表达激光场  $\hat{A}(t)$ <sup>[7]</sup>

$$\hat{A}(t) = (A_0 + \lambda\hat{A})\exp(-i\lambda\varphi) \quad (8)$$



式中  $\Delta\hat{A}, \Delta\hat{\varphi}$  为厄密算符,  $A_0$  为平均的场振幅 ( $C$  数), 在光子数远大于 1 时,  $\Delta\hat{\varphi}$  为位相算符. 把式(8)代入方程(7)及其共轭方程, 可得到

$$\frac{d\Delta\hat{A}(t)}{dt} = \left(-\frac{1}{2}\frac{\omega_s}{Q} + R_s C - 3A_0^2 R_s B\right)\Delta\hat{A}(t) + H_r(t) \quad (9)$$

$$\frac{d\Delta\hat{\varphi}(t)}{dt} = -\frac{I_m C}{A_0}\Delta\hat{A}(t) + (I_m B)3A_0\Delta\hat{A}(t) + \frac{1}{A_0}H_i(t) \quad (10)$$

式中

$$H_r(t) = \frac{1}{2}[F(t)e^{i\Delta\hat{\varphi}(t)} + e^{-i\Delta\hat{\varphi}(t)}F^+(t)] \quad (11)$$

$$H_i(t) = -\frac{1}{2i}[F(t)e^{i\Delta\hat{\varphi}(t)} - e^{-i\Delta\hat{\varphi}(t)}F^+(t)] \quad (12)$$

并且有下列关系式

$$2R_s C - (2R_s B)A_0^2 - \frac{\omega_s}{Q} = 0 \quad (13)$$

变换到频域上则可得到  $\Delta\hat{A}$  的功率谱

$$\begin{aligned} P_{\Delta\hat{A}}(\Omega) &= \langle \Delta\hat{A}^+(\Omega)\Delta\hat{A}(\Omega) \rangle \\ &= \langle H_r(\Omega)H_r(\Omega) \rangle / [(\frac{\omega_s}{Q} - 2\langle R_s C \rangle)^2 + \Omega^2] \quad (14) \end{aligned}$$

式中  $\langle H_r(\Omega)H_r(\Omega) \rangle$  的表达式见文献[8]. 在详细讨论非相干泵浦、弱相干泵浦和强相干泵浦三种场合下的 Fano 因子后<sup>[8]</sup>, 我们发现, 利用激光泵浦  $N$  个均匀加宽的三能级原子体系, 在一定的条件下可获得光子数压缩态. 这些条件是: (1) 泵浦强度有一定最佳范围(弱相干泵浦); (2) 泵浦激光器工作在远离阈值的区域; (3) 原子体系的原子个数  $N$  足够大. 这些条件在实验上比较容易实现, 最佳场合下可达  $F=0.16$ , 这优于国外文献报道的结果  $F=0.25$ .

当然, 上述方案仍然达不到理想的光子数压缩态(即  $F=0$ ), 原因是该机制还无法完全抑制自发辐射和泵浦起伏的噪声. 我们进一步研究一种负反馈级联三能级体系, 发现在适当的条件下可以产生福克态光场. 这个体系的基本方程仍然可按文献[6]的方法给出, 主要的区别在于级联激光器运转于两个激光模  $\hat{a}_1$  和  $\hat{a}_2$ , 而且  $\hat{a}_1$  模输出的光电探测的信号经放大之后作为负反馈对产生  $\hat{a}_2$  模的上能级泵浦速率进行控制, 采用准线性近似, 可计算出腔内模  $\hat{a}_2$  及其输出场的振幅噪声功率谱. 我们发现, 当反馈强至一定程度时, 泵浦噪声的影响可以忽略. 此时腔内场的 Fano 因子为  $\frac{1}{2}$ , 光子数噪声比标准量子极限减少 50%. 当原子数目  $N$  足够大时, 这剩余的噪声来源于自发辐射, 对于足够少的  $N$ , 剩余噪声来源于真空起伏. 计算表明, 输出场的噪声在  $N$  很大时为标准量子极限, 外场因真空起伏不能被消除而不会出现亚泊松分布, 而当  $N$  足够少时, 在低频区, 外场光子流起伏小于标准量子极限, 即为亚泊松分布, 这是因为内场的真空起伏与从输出镜反射回来的真空起伏发生相消干涉的结果. 当  $N \rightarrow 1$  时, 外场的光子流起伏趋于零. 可见, 这种方案原则上可以获得福克态光场, 它较之现有的其它方法(如文献[9])有简便之处, 可以不采用 QND(Quantum Nondemolition Measurement)装置就可以将光子数压缩态引出.

## 4 奇、偶相干态和薛定谔猫

奇、偶相干态实际上是光场消灭算符  $\hat{a}$  的二次幂  $\hat{a}^2$  的本征态,其定义为<sup>[10,12]</sup>

$$\text{偶相干态} \quad |\psi^e\rangle = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2} (\text{ch}|\alpha|^2)^{-\frac{1}{2}} (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) \quad (15)$$

$$\text{奇相干态} \quad |\psi^o\rangle = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2} (\text{sh}|\alpha|^2)^{-\frac{1}{2}} (|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle) \quad (16)$$

我们曾证明<sup>[11]</sup>,这两个相干态具有典型的非经典效应:偶相干态有明显的压缩现象而绝无反聚束效应,而奇相干态则正好相反,它有明显的反聚束效应而绝无压缩现象,而且  $|\psi^e\rangle$  和  $|\psi^o\rangle$  构成一个完备的、以非经典光场作为基矢的表象,用这个表象有可能构造出更多的非经典光场.迄今,奇、偶相干态仅限于理论研究,尚未提出产生它们的实验方案.下面我们将论证,采用 QND 测量的实验装置可以在实验上产生这两个有趣的非经典态.

B, Yruke 和 Shang Song 等人在分析采用单通道参量下转换器的 QND 测量装置时<sup>[12,13]</sup>发现,如果在读出场探测器不是用零拍探测器来测量电场正交位相分量,而是改用光电探测器测量光子数,会使读出场约化成光子数的本征态,与此同时,信号光也会约化成两个相干态的迭加态(即宏观可分辨的量子迭加态,俗称“薛定谔猫”).我们进一步发现,通过选择不同的光子数本征态,就可以在信号光输出端得到奇、偶相干态.

按照文献[13],当读出场和信号场初始处于真空态  $|0\rangle$ ,而使读出场输出处于光子数本征态  $|m\rangle$  时,输出信号场在其正交位相分量  $X_s$  的本征态  $|x\rangle$  展开的波函数为<sup>[13]</sup>

$$\psi(x) = (-i)^m \pi^{-1/4} (2^m m!)^{-1/2} (TX)^m \exp[-(1 + T^2/2)x^2/2] \quad (17)$$

式中  $T = Kt$ ,  $K$  是信号场和读出场的耦合参量.

当  $m$  为偶数时,无论  $x$  为正负,将上式在  $x = \pm \frac{\sqrt{2m}}{T}$  附近展开可得

$$\begin{aligned} \psi_m(x) &= (-i)^m \pi^{-1/4} e^{-\frac{x^2}{2}} \left[ e^{-T^2(x - \frac{\sqrt{2m}}{T})^2} + e^{-T^2(x + \frac{\sqrt{2m}}{T})^2} \right] \\ &= (-i)^m \pi^{-1/4} \exp\left(-\frac{m}{T^2 + \frac{1}{2}}\right) \left\{ \exp\left[-\left(T^2 + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2m}T}{T^2 + \frac{1}{2}}\right)^2\right] \right. \\ &\quad \left. + \exp\left[-\left(T^2 + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2m}T}{T^2 + \frac{1}{2}}\right)^2\right] \right\} \quad (18) \end{aligned}$$

当  $m$  为奇数时,若  $x > 0$  则

$$\begin{aligned} \psi_m^o(x) &= (-i)^m \pi^{-1/4} \exp(-x^2/2) \left\{ \frac{[\frac{Tx}{\sqrt{2}}]^m}{m!} \exp[-(Tx/\sqrt{2})^2] \right\} \\ &= (-i)^m \pi^{-1/4} \exp\left(-\frac{m}{T^2 + \frac{1}{2}}\right) \left\{ \exp\left[-\left(T^2 + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2m}T}{T^2 + \frac{1}{2}}\right)^2\right] \right. \\ &\quad \left. - \exp\left[-\left(T^2 + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2m}T}{T^2 + \frac{1}{2}}\right)^2\right] \right\} \end{aligned}$$

在  $m$  很大时, 上式右边第二项趋于零, 于是

$$\psi_m^0(x) = (-i)^m \pi^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{m}{T^2 + \frac{1}{2}}\right) \exp\left[-\left(T^2 + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2mT}}{T^2 + \frac{1}{2}}\right)^2\right]$$

类似地, 当  $x < 0$  时有

$$\psi_m^0(x) = (-1)(-i)^m \pi^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{m}{T^2 + \frac{1}{2}}\right) \exp\left[-\left(T^2 + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2mT}}{T^2 + \frac{1}{2}}\right)^2\right]$$

因此, 当  $m$  为奇数时

$$\psi_m^0(x) = (-i)^m \pi^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{m}{T^2 + \frac{1}{2}}\right) \left\{ \exp\left[-\left(T^2 + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2mT}}{T^2 + \frac{1}{2}}\right)^2\right] - \exp\left[-\left(T^2 + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2mT}}{T^2 + \frac{1}{2}}\right)^2\right] \right\} \quad (19)$$

将波函数(18)和(19)分别归一化,

$$P_m^{j/o} = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_m^{j/o}(x)|^2 dx \\ = \sqrt{\frac{2}{T^2 + \frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{2mT^2}{T^2 + \frac{1}{2}}\right) \left[ \exp\left(\frac{2mT^2}{T^2 + \frac{1}{2}}\right) \pm \exp\left(\frac{-2mT^2}{T^2 + \frac{1}{2}}\right) \right] \exp\left(\frac{-2m}{T^2 + \frac{1}{2}}\right)$$

令  $\alpha = \frac{\sqrt{2mT}}{\sqrt{T^2 + \frac{1}{2}}}$ , 则

$$P_m^{j/o} = \sqrt{\frac{2}{T^2 + \frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{2m}{T^2 + \frac{1}{2}}\right) e^{-\alpha^2} (e^{\alpha^2} \pm e^{-\alpha^2})$$

于是归一化波函数为

$$\varphi_m^+(x) = \frac{\psi_m^+(x)}{\sqrt{P_m^+}} = \frac{(-i)^m \pi^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{m}{T^2 + \frac{1}{2}}\right)}{\sqrt{P_m^+}} \\ \left\{ \exp\left[-\left(\sqrt{T^2 + \frac{1}{2}}x - \alpha\right)^2\right] + \exp\left[-\left(\sqrt{T^2 + \frac{1}{2}}x + \alpha\right)^2\right] \right\} \\ \varphi_m^0(x) = \frac{\psi_m^0(x)}{\sqrt{P_m^0}} = \frac{(-i)^m \pi^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{m}{T^2 + \frac{1}{2}}\right)}{\sqrt{P_m^0}} \\ \left\{ \exp\left[-\left(\sqrt{T^2 + \frac{1}{2}}x - \alpha\right)^2\right] - \exp\left[-\left(\sqrt{T^2 + \frac{1}{2}}x + \alpha\right)^2\right] \right\}$$

比较相干态  $|\alpha\rangle$  在表象  $|x\rangle$  中的表达式

$$\langle x|\alpha\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi h}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\left(\sqrt{\frac{\omega}{2h}}x - \alpha\right)^2\right]$$

则有

$$\varphi_m^e = (-i)^m \frac{1}{2} e^{\alpha^2} (\text{ch}\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle), \quad (20)$$

$$\varphi_m^o = (-i)^m \frac{1}{2} e^{\alpha^2} (\text{sh}\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} (|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle) \quad (21)$$

式中  $\alpha = \frac{\sqrt{2mT}}{\sqrt{T^2+1/2}}$ . 由奇、偶相干态的定义式(15)和(16)不难看出,当  $m$  为偶数时,信号输出场为偶相干态,而当  $m$  为奇数时,信号输出场为奇相干态.

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Glauber R J, *Phys. Rev.*, **131**(1963), 2766
- [ 2 ] 郭光灿,量子光学,高等教育出版社,1990,第十章.
- [ 3 ] 姚德民,郭光灿,物理学报, **37**(1988), 463
- [ 4 ] Guo Guang-can, Yao De-min, *Quantum Optics*, **3**(1991), 137
- [ 5 ] Machida S. and Yamamoto Y., *Phys. Rev. Lett.*, **58**(1987), 1000
- [ 6 ] 郭光灿,物理学报, **33**(1984), 1661
- [ 7 ] Yamamoto Y and Machida S, *Phys. Rev.*, **A34**(1986), 4025
- [ 8 ] 郭光灿,柴金华,物理学报, **40**(1991), 912
- [ 9 ] Yamamoto Y, *et. al.*, *Phys. Rev.* **A33**(1986), 3243
- [ 10 ] Hillery M, *Phys. Rev.*, **A36** (1987), 3796
- [ 11 ] Xia Yun-je, Guo Guang-can, *Physics Lett. A*, **138** (1989), 218.
- [ 12 ] Yurke B, *et. al.*, *Phys. Rev.*, **A42**(1990), 1730.
- [ 13 ] Shang Song, Caves C M, *Phys. Rev.*, **A41**(1990), 5261.

## Quantum Effects in Nonlinear Optics

Guo Guangcan

(Physics Department)

### Abstract

Presented in this paper are a general criterion for non-classical radiation fields, and two different ways for generation of photon-number squeezed states. It has been shown that the odd and even coherent states are actually superpositions of macroscopically distinct quantum states (popularly known as Schrödinger cats).

Key words: non-linear optics, quantum effect, Schrödinger cats, photon number squeezed state.

PACS(1992): 42. 50. Dv

祝贺杨振宁教授70寿辰  
In Celebration of Dr. Chen Ning  
Yang's 70th birthday

## Davey-Stewartson 1 气体的热力学\*

阎沐霖 胡 忠

赵保恒

(非线性中心)

(中国科技大学研究生院,北京)

### 摘 要

用(2+1)维量子 DS 1 系统的波函数来研究 DS1 气体的热力学. 计算了密度矩阵、配分函数和熵. 在 Gibbs 佯谬消除的条件下, 发现 DS1 气体是一类一维费米气体. 还对一种新的超导机制做了推测.

关键词: DS1 系统, Gibbs 佯谬, 热力学

中图法分类号: O414.2

PACS (1992): 05.30.-d

Davey-Stewartson 1 (DS1) 系统是在二维空间和一维时间((2+1)D)中的可积模型. 近来, 人们从量子 DS1 系统中导出了一类二维的量子多体问题, 并且求出了该多体问题的精确解, 即精确的多体 Schrödinger 方程的本征波函数和本征值<sup>[1]</sup>. 当 DS1 系统的外场  $u_1 = u_2 = 0$  时, 相当于在粒子之间没有相互作用<sup>[2]</sup>, 这时称由这种粒子组成的热力学平衡态为 DS1 气体, 在本文中我们用文献[1]中的波函数来计算 DS1 气体的密度矩阵、正则配分函数以及熵, 进而审查吉布斯佯谬问题.

我们发现在消除吉布斯佯谬的要求下, DS1 气体的粒子数密度必须是

$$d = \frac{N}{L} \quad (1)$$

式中  $N$  是粒子数,  $L$  是该气体的特征长度. 值得注意的是(1)式右边的分母是一长度, 而不是面积. 这个事实说明 DS1 气体是一维的热力学平衡态而不是二维的. 这是本文的主要结论.

1992年8月12日收到.

\* 国家攀登计划、国家教委博士点基金、中科院专项基金和国家自然科学基金资助题.

$u_1 = u_2 = 0$  时, 量子 DS1 系统的哈密顿量为<sup>[1]</sup>

$$H = - \sum_{i=1}^N (\partial_{\xi_i}^2 + \partial_{\eta_i}^2) + C \sum_{i < j}^N [\delta'(\xi_{ij}) \in (\eta_{ij}) + \delta'(\eta_{ij}) \in (\xi_{ij})] \quad (2)$$

其中  $\xi_{ij} = \xi_i - \xi_j$ ,  $\delta'(\xi_{ij}) = \partial_{\xi_i} \delta(\xi_{ij})$ , 以及

$$\in (\xi_{ij}) = \begin{cases} 1, & \xi_{ij} > 0 \\ 0, & \xi_{ij} = 0 \\ -1, & \xi_{ij} < 0 \end{cases}$$

$N$  粒子波函数为

$$\psi(r^N) = C_N \prod_{i < j}^N [1 - \frac{c}{4} \in (\xi_{ij}) \in (\eta_{ij})] [\sum_P (-1)^P \prod_{i=1}^N X_{l_i}(\xi_i)] [\sum_P (-1)^P \prod_{i=1}^N Y_{k_i}(\eta_i)] \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} X_{l_i}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{L}} e^{u_i \xi}, & l_i &= \frac{n_i \pi}{L} \\ Y_{k_i}(\eta) &= \frac{1}{\sqrt{L}} e^{u_i \eta}, & k_i &= \frac{m_i \pi}{L} \end{aligned} \quad (4)$$

$$r^N = (r_1, r_2, \dots, r_n), \quad r_i = (\xi_i, \eta_i)$$

(3) 式中的  $C_N$  是归一化常数. 在坐标空间中密度矩阵的矩阵元可以写为

$$\begin{aligned} \rho_{r^N, r'^N} &= \langle \psi(r^N) | e^{-\beta H} | \psi(r'^N) \rangle \\ &= C_N^2 \prod_{i < j} [1 - \frac{c}{4} \in (\xi_{ij}) \in (\eta_{ij})] \prod_{i < j} [1 - \frac{c}{4} \in (\xi'_{ij}) \in (\eta'_{ij})] \\ &\quad \sum_B e^{-\beta B} [\sum_P (-1)^P \prod_{i=1}^N X_{l_i}(\xi_i)] [\sum_P (-1)^P \prod_{i=1}^N Y_{k_i}(\eta_i)] \\ &\quad [\sum_P (-1)^P \prod_{i=1}^N X_{l'_i}(\xi'_i)] [\sum_P (-1)^P \prod_{i=1}^N Y_{k'_i}(\eta'_i)] \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $B = \sum_{i=1}^N (l_i^2 + k_i^2)$ , 象通常一样, 在连续谱极限下, 对  $B$  的求和变成了对动量的积分, 即

$$\sum_B = \sum_{l_i} \sum_{k_i} = \left( \frac{1}{N!} \frac{L^N}{(2\pi)^N} \right) \int dl_1 \dots dl_N \left( \frac{1}{N!} \frac{L^N}{(2\pi)^N} \right) \int dk_1 \dots dk_N \quad (6)$$

注意

$$\left[ \sum_P (-1)^P \prod_{i=1}^N X_{l_i}(\xi_i) \right] \left[ \sum_P (-1)^P \prod_{i=1}^N X_{l'_i}(\xi'_i) \right] = N! \left[ \sum_P (-1)^P \prod_{i=1}^N X_{l_i}(\xi_i) X_{l'_i}(\xi'_i) \right] \quad (7)$$

以及方程(4), 我们有

$$\begin{aligned} \rho_{r^N, r'^N} &= \frac{C_N^2}{(2\pi)^N} \prod_{i < j} [1 - \frac{c}{4} \in (\xi_{ij}) \in (\eta_{ij})] \prod_{i < j} [1 - \frac{c}{4} \in (\xi'_{ij}) \in (\eta'_{ij})] \\ &\quad \left[ \sum_P (-1)^P \prod_{i=1}^N \int e^{-\beta l_i^2 + u_i (\xi_i - \xi'_i)} dl_i \right] \left[ \sum_P (-1)^P \prod_{i=1}^N \int e^{-\beta k_i^2 + u_i (\eta_i - \eta'_i)} dk_i \right] \end{aligned} \quad (8)$$

完成其中的高斯型积分, 我们就得到了 DS1 气体密度矩阵的显示表达式,

$$\begin{aligned} \rho_{r^N, r'^N} &= \frac{C_N^2}{\lambda^2 N} \prod_{i < j} [1 - \frac{c}{4} \in (\xi_{ij}) \in (\eta_{ij})] \prod_{i < j} [1 - \frac{c}{4} \in (\xi'_{ij}) \in (\eta'_{ij})] \\ &\quad \left[ \sum_P (-1)^P \prod_{i=1}^N e^{-\pi (\xi_i - \xi'_i)^2 / \lambda^2} \right] \left[ \sum_P (-1)^P \prod_{i=1}^N e^{-\pi (\eta_i - \eta'_i)^2 / \lambda^2} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $\lambda = 2(\pi\beta)^{1/2}$ , 是热德布罗意波长.

下面我们来计算正则配分函数,

$$\begin{aligned} Q(\beta, N, L) &= T_r(e^{-\beta H}) \\ &= \int \rho_{r^N, r^N} d^N r \end{aligned} \quad (10)$$

将(9)代入(10), 并注意

$$\begin{aligned} &\int \prod_{i < j} [1 - \frac{c}{4} \in (\xi_{ij}) \in (\eta_{ij})]^2 [\sum_P (-1)^P \prod_{i=1}^N e^{-\pi(\xi_{r_i} - \eta_{r_i})^2 / \lambda}] \\ &\quad [\sum_P (-1)^P \prod_{i=1}^N e^{-\pi(\eta_{r_i} - \xi_{r_i})^2 / \lambda}] d^N r \\ &= (C_N N!)^{-2} [\sum_P (-1)^P \prod_{i=1}^N e^{-\pi(\xi_{r_i} - \eta_{r_i})^2 / \lambda} dx_1 \cdots dx_N]^2 \end{aligned}$$

我们有

$$Q(B, N, L) = [\frac{1}{N!} \frac{1}{\lambda^N} \sum_P (-1)^P \prod_{i=1}^N e^{-\pi(\xi_{r_i} - \eta_{r_i})^2 / \lambda} dx_1 \cdots dx_N]^2 \quad (11)$$

我们已知<sup>[3]</sup>一维理想费米气体的正则配分函数

$$Q_1^f(\beta, N, L) = \frac{1}{\lambda^N N!} \sum_P (-1)^P \prod_{i=1}^N e^{-\pi(\xi_{r_i} - \eta_{r_i})^2 / \lambda} dx_1 \cdots dx_N \quad (12)$$

比较(11)和(12), 得知

$$Q(B, N, L) = [Q_1^f(\beta, N, L)]^2 \quad (13)$$

在高温极限下(或经典统计力学极限下),  $\lambda \rightarrow 0$ , 由(11)式, 我们有

$$Q(\beta, N, L) \rightarrow Q^c(\beta, N, L) = (\frac{1}{N!} \frac{L^N}{\lambda^N})^2 \quad (14)$$

于是在这种极限下的熵是

$$\begin{aligned} S^c &= k_B (\ln Q^c - \beta \frac{\partial (\ln Q^c)}{\partial \beta}) \\ &= 2Nk_B \ln \frac{L}{\lambda N} + 3Nk_B \end{aligned} \quad (15)$$

注意, 熵必须是一个广延量, 否则理论中就会有吉布斯佯谬. 由此, 我们得到结论  $(L/N)$  是一个强度量, 或者说 DS1 气体的粒子数密度必须是

$$d = \frac{N}{L} \quad (16)$$

而不是  $N/L^2$ . 这就说明了 DS1 气体是一维热力学平衡系统, 而不是二维的.

一维理想费米气体的巨配分函数是

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \sum_{N=1}^{\infty} z^N Q_1^f(\beta, N, L) \\ \ln \mathcal{E}_1 &= \frac{L}{\lambda} f_{3/2}(z) \end{aligned} \quad (17)$$

$$N = \frac{L}{\lambda} f_{1/2}(z) \quad (18)$$

其中  $z = e^{\beta\mu}$  是逸度,  $\mu$  是化学势, 以及

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{z^{-1}e^x + 1} dx \quad (19)$$

通过标准计算,一维理想费米气体的熵  $S_1^f$  可以由  $\mathcal{E}_1$  导出<sup>[3]</sup>,而 DS1 气体的熵是  $S_1^f$  的两倍,这在任意温度下都是成立的(参见(13)式和(14)式). 于是一般地 DS1 气体的熵为

$$S = 2S_1^f = 2Nk_B \left[ \frac{3}{2} \frac{f_{3/2}(z)}{f_{1/2}(z)} - \ln z \right] \quad (20)$$

很容易验证,在  $z \rightarrow \infty$  时,  $S \rightarrow S^0$  (见(15)式). 由(16)和(18)我们有

$$f_{1/2}(z) = \lambda d \quad (21)$$

可见  $z$  是强度量. 于是在任意温度下 DS1 气体的熵是广延量. 也就是说在任意温度下,理论都是无吉布斯佯谬的. 由(17)和(18),我们还可以求得 DS1 气体的状态方程,其结果和文献[1]所给出的相同. 最近的研究<sup>[4]</sup>表明,量子 DS1 多体问题的守恒定律也显示出两个(1+1)维费米子系统的特性. 这和上文关于 DS1 气体的热力学的分析相一致.

在哈密顿(2)中的奇异位势项为

$$V_c = c \sum_{i < j}^N [\delta'(\xi_{ij}) \in (\eta_{ij}) + \delta'(\eta_{ij}) \in (\xi_{ij})] \quad (22)$$

当  $c=0$  时,  $V_c=0$ , 系统还原为通常的二维理想玻色气体. 显然,奇异位势  $V_c$  是造成一个二维玻色统计热力学平衡系统分解为两个一维费米统计系统的动力学原因. 本文关于 DS1 气体的研究,展示了一个这种统计分解的例子. 一个有启发性的问题是,是否在三维空间中也存在使高维统计分解为低维统计的动力学? 如果存在,则三维的费米子(比如电子)统计系统就有可能在特定的动力学位势的支配下,分解为一个一维费米统计系统和一个二维的玻色统计系统. 这时在二维平面中可发生相应的玻色凝聚和  $\lambda$  相变,从而使三维费米子在二维平面中呈现出“超流”现象. 这与高温超导现象有相象之处,值得进一步加以研究.

总结之,我们用 DS1 气体的波函数计算了密度矩阵,正则配分函数和熵. 在消除吉布斯佯谬的条件下,发现粒子数密度必须是一维的. 由此,得出结论: DS1 系统在  $u_1 = u_2 = 0$  时,等价于两个一维理想费米气体. 我们还就一种新的可能的超导机制做了推测.

### 参 考 文 献

- [1] Pang G D, Pu F C and Zhao B H, *Phys. Rev. Lett.* 65(1990), 3227.
- [2] Yan M L and Zhao B H, *Phys. Lett. A* (1992).
- [3] Huang K, *Statistical Mechanics*, John Wiley & Sons Inc. (1963).
- [4] Pang G D, Zhao B H, Conservation Laws of the Quantized Davey-Stewartson I System in (2+1)-Dimensions (preprint, (1992).



# Thermodynamics for Davey-Stewartson 1 Gas

Yan Mulin, Hu Zhong

*(Center for Nonlinear Science, USTC)*

Zhao Baoheng

*(Department of Physics, Graduate School of USTC)*

## Abstract

Using the wave functions<sup>[1]</sup> of quantum DS1 system in  $(2+1)D$ , the thermodynamics for DS1 gas is investigated. The density matrix and the entropy are calculated. It is found, under the Gibbs paradox free requirement, that the DS1 gas is equivalent to two one-dimensional thermodynamical equilibrium systems of fermions. A new mechanism for superconductivity is also speculated upon.

**Key words:** DS1 System, Gibbs paradox, thermodynamics

**PACS(1982):** 05.30. —d

祝贺杨振宁教授70寿辰  
In Celebration of Dr. Chen Ning  
Yang's 70th birthday

# 等离子体中准周期混沌的实验观察\*

丁卫星 黄巍 余红权 林毅君 俞昌旋

(中国科学技术大学近代物理系)

## 摘 要

本实验研究了非驱动放电等离子体中趋向混沌的准周期道路。从实验信号的功率谱分析和 Lyapunov 指数计算定量地描述了准周期到混沌的转变。同时在这种等离子体混沌中还发现了低维奇怪吸引子。

关键词: 等离子体混沌, 不稳定性, 准周期道路

中图法分类号: O533, O361.5

PACS (1992): 52.35.Ra, 05.45.+b

## 1 引言

耗散物理系统中的有序和混沌现象是近二十年来十分引人关注的重要课题<sup>[1]</sup>, 关于等离子体中混沌定量特征的研究正引起人们极大的兴趣。等离子体是一类多自由度的非线性动力系统。它作为一种介质, 被用来检验混沌系统(诸如低维行为和通向混沌的道路)的普适特征, 是十分合适的。最近在驱动和非驱动等离子体中, 实验上已观察到倍周期分岔, 阵发混沌和奇怪吸引子等, 并且计算了一些普适常数(如 Feigenbaum 常数)和相关维数<sup>[2,3]</sup>。然而, 在动力系统中还存在另一条通向混沌的道路, 即准周期道路, 又称 Ruelle-Takens-Newhouse 道路。一般认为二维环面上的准周期运动是由 Hopf 分岔引起的, 并直接失稳而形成奇怪吸引子。另外, 在等离子体中, 已有人研究了外驱动准周期混沌现象<sup>[5,6]</sup>。在这篇文章中我们报道有关无外驱动放电等离子体中的准周期混沌现象。

1992年10月12日收到。

\* 国家基础研究重大项目“非线性科学”基金资助。

### 2 实验安排

实验是在一个非磁化稳态等离子体装置中进行的<sup>[3]</sup>, 其中包括一个发射电子的阴极(由 6 根平行钨丝组成)以及与之平行的阳极(矩形不锈钢平板)(见图 1), 阳极板支撑在探针轴上, 这样便于改变阴阳极之间的距离. 阴极与真空壁一同接地. 通过阴、阳极之间的直流放电产生氩等离子体, 放电由以下参数控制: 氩气气压( $P_0$ )、灯丝电流( $I_f$ )、放电电压( $V_d$ )、和两极间距离( $d$ ). 由 Langmuir 探针测得典型等离子体参数是: 电子密度  $n_e = 10^8 - 10^9 \text{cm}^{-3}$ , 电子温度  $T_e = 1 - 3 \text{eV}$ , 离子温度  $T_i \ll T_e$ . 电子饱和电流  $I_{e0}(t)$  (正比于电子密度)和放电电流信号  $I_d(t)$  由数据采集系统记录 (8bit, 数据点数  $N = 8192$ , 时间间隔  $\Delta t = 16 \mu\text{s}$ ). 通过快速富里叶变换 (FFT) 可以得到信号的功率谱 (其频率分辨为  $10 \text{Hz}$ ), 而且通过对时序信号的相空间重构可计算相关维数和 Lyapunov 指数谱.

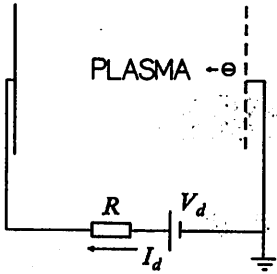


图 1 实验装置示意图  
Fig. 1 Schematic of experimental setup

### 3 实验结果和分析

放电等离子体中混沌行为与放电伏安特性曲线的迟滞效应和负微分阻抗密切相关. 图 2 是在  $I_f = 25.5 \text{A}$ ,  $P_0 < 2 \times 10^{-3} \text{torr}$  时的典型  $I-V$  曲线, 当  $V_d$  从零开始增加, 电流  $I_d$  沿着典线的下支  $A \rightarrow B$  段缓慢地增加, 在  $V_d = V_2$  点,  $I_d$  迅速跳变到曲线的上支, 并开始随着  $V_d$  而平稳增加 ( $B \rightarrow C \rightarrow D$ ); 这时减小电压  $V_d$ ,  $I_d$  并不沿原路返回, 而是沿着曲线上支变化 ( $d \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow a$ ), 并在  $V_d = V_1$  点,  $I_d$  突然降到曲线的下支, 电流在 a, b, c 点下降之前, 会产生自持振荡, 在 a 点附近是最不稳定的区域.

在实验中, 我们可以调整  $P_0$  或  $V_d$  而保持其它参数不变, 从而控制等离子体的状态趋向 a 点. 随着  $P_0, V_d$  的变化, 可以监测  $I_d$  的时间演化. 对于给定气压  $P_0 = 7.9 \times 10^{-4} \text{torr}$ , 当  $V_d > 13.06 \text{V}$  时, 等离子体是稳定的, 当  $V_d$  减小到  $13.06 \text{V}$ ,  $I_d$  开始振荡 (见图 3(a)). 在  $I_{e0}(t)$  中也可以看到自持振荡, 只是与  $I_d(t)$  存在一个相位差. 密度振荡的幅度大约 10%. 相应的功率谱给出单个尖峰 ( $f_{\text{max}} = 2240 \text{Hz}$ ), 而几乎无背景噪声 (见图 3(b)), 在  $I_d(t) - I_d(t)$  的相空间中, 运动轨迹是一个极限环 (见图 3(c)), 这是在没有任何外驱动情况下的自持周期振荡, 当把  $P_0$  增加到  $8.0 \times 10^{-4} \text{torr}$  时, 系统分岔到准周期状态,  $I_d$  的时间演化与周期振荡时明显不同 (见图 3(d)), 其功率谱图 3(e) 显示除主振荡频率  $f_1$  增加到  $3322 \text{Hz}$  外, 还出现了不可约的频率分量  $f_2 (3266 \text{Hz})$  以及分频  $f_2/2$  和它们的线性组合  $f_2 - f_1/2$ .  $f_2$  的出现导致了等离子体系统进入准周期状态. 这意味着在这种条件下, 在等离子体中激发了新的振荡模式. 两种振荡模式之间的弱耦合保持了等离子体处于准周期状态, 从相空间中 (从图 3(f)) 可以看到, 轨道限制在

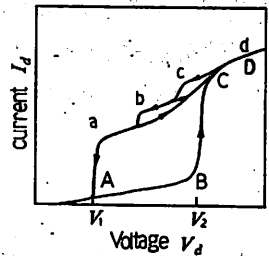


图 2 典型的等离子体放电伏安特性曲线

Fig. 2 Discharge current-voltage characteristic curve

一个扭曲的环形区域中,这显示系统是在二维环面上运动,其中一些离散的点是噪声引起的.当  $P_e$  进一步增加到  $8.1 \times 10^{-4}$  torr, 系统直接进入混沌状态,从图 3(g)、(h)中可以看到:  $I_e$  的时序信号显示出混沌振荡,在功率谱上宽带噪声显著增加,相空间的轨迹是“混乱的”.

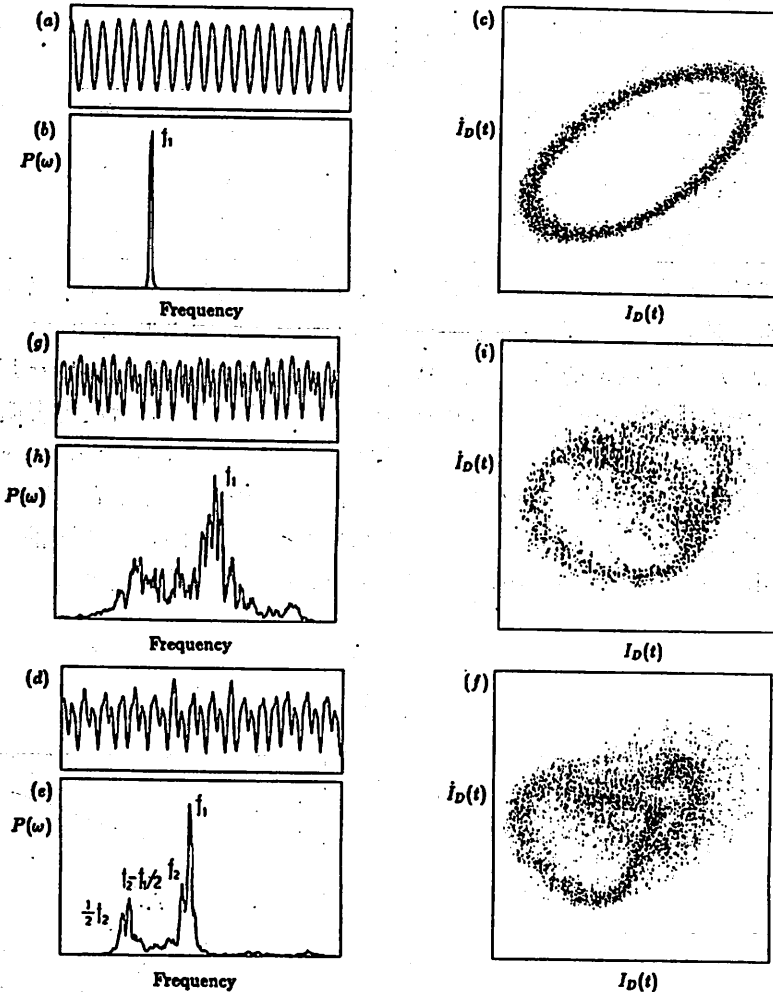


图 3 (a), (d), (g) 分别是压降  $P_e = 7.9, 8.0, 8.1 \times 10^{-4}$  torr 时的放电电流的时间演化;  
(b), (e), (h) 是相应的功率谱; (c), (f), (i) 是相图

Fig. 3 (a), (d), (g) temporal evolution of  $I_e$  for  $P_e = 7.9, 8.0, 8.1 \times 10^{-4}$  torr; (b), (e) and (h) corresponding FFT spectra; (c), (f) and (i) corresponding phase-space plots of  $I_e$  vs  $I_e$ .

为了定量地描述系统的周期、准周期和混沌行为,我们由  $I_e$  的时序信号计算了 Lyapunov 指数. Lyapunov 指数是相空间中相邻轨道发散或会聚的平均指数增长率,这是动力系统对初始扰动敏感性的定量刻划. 第一个 Lyapunov 指数为正表示系统处于混沌,由 Lyapunov 指数的正负号可以对动力系统的状态进行分类,如对于不动点、周期、准周期、混沌运动, Lyapunov 指数谱为  $(-, -, -)$ 、 $(0, -, -)$ 、 $(0, 0, -)$ 、 $(+, 0, -)$ . 因此, Lyapunov 指数谱是对混沌系统最有效的动力学诊断. 当 Lyapunov 指数谱已知,采用 Kaplan-Yorke 公式可以计算分形维数,而将所有正指数相加就得到 Kolmogorov 熵. 对于已知方程的系统,计算 Lyapunov 指数相对容易

些,但从实验数据计算却比较困难. 根据 Sano<sup>[7]</sup>,Eckmann<sup>[8]</sup>等人的工作,Zeng<sup>[9]</sup>等人发展了一套从低精度短时间序列信号计算 Lyapunov 指数的方法. 在此,我们应用改进后的算法计算了 Lyapunov 指数,以便定量研究混沌状态的性质;详细的算法将另文发表;表 1 列出了本文中分析的三组数据所得 Lyapunov 指数. 计算出的 Lyapunov 指数用主振荡频率归一化. 我们看到

表 1 不同气压下的 Lyapunov 指数谱

Tab 1 Lyapunov exponent spectra at different pressure

$P_0 \times 10^{-4} \text{ torr}$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	K entropy	$D_{KY}$
7.9	-0.022	-1.503	-3.467			
8.0	0.069	-0.054	-1.322	-2.434		
8.1	1.069	-0.080	-1.148	-3.363	1.069	2.86

对于  $P_0 = 7.9 \times 10^{-4} \text{ torr}$  时的在计算误差范围内指数谱可以认为是  $(0, -, -)$  型,这表示系统处于周期状态. 类似地,  $8.0 \times 10^{-4} \text{ torr}$  时的指数谱为  $(0, 0, -, -)$  类型,而  $8.1 \times 10^{-4} \text{ torr}$  时为  $(+, 0, -, -)$  类型,从三组数据的指数谱  $\lambda_i$  清楚地显示了  $P_0$  从  $7.9 \times 10^{-4} \text{ torr}$  增加到  $8.1 \times 10^{-4} \text{ torr}$  时,等离子体经历的周期、准周期和混沌态. 另外,准周期态的指数谱表明了系统存在二个不可约频率,这证实了我们实验中趋向混沌的道路是 Ruelle-Takens-Newhouse 道路. 需要指出的是,认为是零的指数均有一定程度的偏差,这是实验中的噪声引起的. 噪声的存在使指数的计算值偏大,混沌等离子体系统的长时间演化是由吸引子上的运动决定的. 等离子体中的吸引子形成是由不稳定和耗散之间的竞争造成的,吸引子的维数可由 Kaplan-Yorke 公式给出:

$$D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{-\lambda_{j+1}}$$

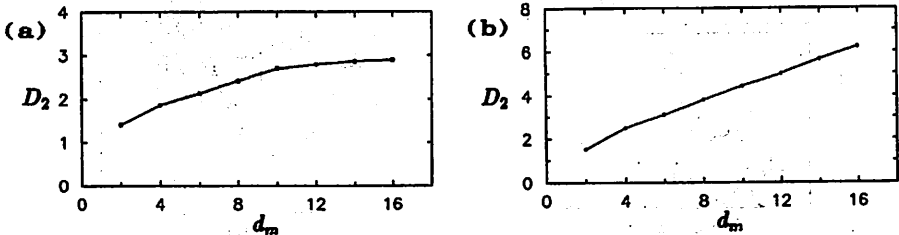


图 4 (a) 对应于  $P_0 = 8.1 \times 10^{-4} \text{ torr}$  时的相关维数随嵌入维数的变化  
(b) 对应于  $P_0 = 8.2 \times 10^{-4} \text{ torr}$  时的相关维数随嵌入维数的变化

Fig. 4 (a) Correlation dimension as the function of embedding dimension at  $P_0 = 8.1 \times 10^{-4} \text{ torr}$ ;  
(b) Correlation dimension as the function of embedding dimension at  $P_0 = 8.2 \times 10^{-4} \text{ torr}$ .

其中 Lyapunov 指数按大小次序排列 ( $\lambda_1 > \lambda_2 \dots$ ), 并且  $j$  是  $\sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0$  的最大整数, 对于  $P_0 = 8.1 \times 10^{-4} \text{ torr}$  时的混沌信号, 维数是 2.86, 这个分数维数定量地表示了本实验中非驱动等离子体混沌的奇怪吸引子. 吸引子的维数表明等离子体系统至少要用 3 个独立变量描述, 通过相关积分方法也可以计算混沌行为的相关维数. 通常要计算出相关维数随嵌套维数增加时的变化, 当相关维数饱和时才存在低维吸引子, 其饱和值也就是相关维数的最终计算结果, 对  $P_0 = 8.1 \times 10^{-4}$  的时序信号, 我们用了 8K 个数据, 嵌套维数  $d_m$  从 2 到 16 (见图 4(a)), 从图中可以看到, 当嵌套维数增加时, 相关维数迅速趋于一有限值  $2.90 \pm 0.02$ ,  $D_{KY}$  和  $D_2$  的值基本相同.

这个事实证实了在非驱动等离子体混沌中低维奇怪吸引子的存在. 事实上在混沌等离子体系统中并不总能够找到低维吸引子, 当  $P_0 = 8.2 \times 10^{-4}$  torr 时, 我们用同样的参数计算的相关维数, 其结果随嵌套维数增加而直线上升(见图 4(b)). 由此可以断言, 此时系统不存在低维吸引子, 对于  $8.2 \times 10^{-4}$  torr 的混沌振荡, Lyapunov 指数为  $(+0.820, +0.463, 0.063, -0.654, -3.983)$ . 此时有两个正指数, 这表明等离子体在更高的气压下是深度混沌的. (此时  $D_{KY}$  与  $D_2$  的值并不相同, 详细的讨论见 Zeng).

#### 4 实验结论

在非驱动等离子体中观察到了通过准周期通向混沌的道路, 通过放电电流振荡的实时信号功率谱分析以及 Lyapunov 指数计算的结果, 确证了通向混沌的准周期道路的存在. Lyapunov 指数谱定量地表征了这种转化. 同时找到了低维奇怪吸引子 ( $D_2 = 2.90 \pm 0.02$ ), 这表明等离子体系统应该由至少三个独立变量的一套自恰的微分方程描述. 本实验中的振荡可能是由等离子体中的束——等离子体不稳定和鞘不稳定性引起的, 我们观察到的现象将对等离子体中湍流现象的研究有重要的意义.

作者感谢与胡希伟副教授和王海达博士的讨论.

#### 参 考 文 献

- [1] Eckmann J P, *Rev. Mod. Phys.* **53**, (1981)643.
- [2] Cheung P Y and Wong A Y, *Phys. Rev. Lett.*, **59**(1987)551. Chenung P. Y., Donovan S. and Wong A. Y., *Phys. Rev. Lett.* **61**(1988)1360.
- [3] Jiang Yong, Wang Haida and Yu Changxuan, *Chinese Phys. Lett.*, **5**(1988)489.
- [4] Qin J., Wang L., Yuan P. P., Gao P. and Zhang B. Z. *Phys. Rev. Lett.*, **63**(1989)163.
- [5] S. H. Fan et. al, *Phys. Lett. A* **164**(1992)295.
- [6] Strohleim G. and Diel A., *Phys. Fluids B* **1**(1989)1168.
- [7] Sano M. and Sawadw Y., *Phys. Rev. Lett.* **55**(1985)1082.
- [8] Eckmann J. P., Kamphorst S. O., Ruelle D. and Vastano J., *Phys. Rev. A* **34**(1986)4971.
- [9] Zeng X., Deilke R. A. and Eykholt R., *Phys. Rev. Lett.*, **66**(1991), 3229.

## Observation of Quasiperiodic Chaos in Plasma

Ding Weixing Huang Wei She Hongquan Lin Yijun Yu Changxuan

(Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China)

#### Abstract

The quasiperiodic chaos in an undriven discharge plasma has been investigated experimentally. Results from the power spectrum and Lyapunov exponents quantitatively confirm the transition to chaos through the quasiperiodicity. A low dimension strange attractor has been found for this kind of plasma chaos.

Key words: chaos in plasma, instability, quasiperiodic transition.

祝贺杨振宁教授70寿辰  
In Celebration of Dr. Chen Ning  
Yang's 70th birthday

# 一个大尺度和非线性积分方程的数值解法

丁亦兵 屈一至

王垂林

(中国科技大学研究生院,北京)

(中国高等科学技术中心世界实验室)

戴元本 黄朝商

(中国科学院理论物理研究所)

## 摘 要

讨论了在 $t$ 夸克凝聚模型中,利用梯形近似下的Schwinger-Dyson方程计算 $t$ 夸克动力学质量的方法.研究了这个大尺度和弱非线性的积分方程的“精细调节”问题,并给出了一种新的迭代方法.

关键词: $t$ 夸克凝聚,精细调节,非线性积分方程,数值解法

中图法分类号:O175,O24,O571

PACS (1992):11.30Na,12.50Lr,02.70+d

## 1 引言

标准模型尽管经受了許多精确的实验检验,且结果都相当满意,但是它预言的 $t$ 夸克和Higgs粒子至今未能找到,而且 $t$ 夸克质量的实验值下限已达到了91GeV,因此各种替代模型,特别是 $t$ 夸克凝聚导致电弱对称性动力学破缺的研究受到广泛的注意.在这种 $t$ 夸克凝聚模型中,一种新的、高能标( $\Lambda \sim 10^{19}$ GeV)的四费米子相互作用

$$\frac{g}{\Lambda^2} (\bar{\psi}_L \ell_n) (\bar{\ell}_n \psi_L) \quad (1)$$

使 $t$ 夸克凝聚,破缺手征对称性,从而 $t$ 夸克获得很大的动力学质量<sup>[1]</sup>. Higgs粒子被看做是 $t\bar{t}$

的束缚态,而标准模型成为一种等效的低能理论.文献[2]用重整化群,文献[3]用 Landau 规范下的 Schwinger-Dyson 方程并采用了 Pagels-Stokar 近似固定赝标介子衰变常数  $F_\pi$ ,文献[4]采用 Bethe-Salpeter 方程,对这个模型进行了讨论,并给出了 t 夸克质量和 Higgs 粒子质量的理论预言.但预言的  $m_t$  值均比最近 LEP 实验给出的间接估算  $m_t < 200\text{GeV}$  大得多.能否求得一个可以接受的  $m_t$  值?除(1)式的形式外,其它可允许的四费米子相互作用、包括高量纲算符以及非定域相互作用会产生何种影响?我们利用梯形近似的 Schwinger-Dyson 方程和协变 Bethe-Salpeter 方程对上述问题进行了研究,发现在适当的相互作用形式下,  $m_t$  的值的确可以小于  $200\text{GeV}$ . 详细的内容已在另文<sup>[5]</sup>发表.本文介绍在具体计算过程中遇到的一个困难问题的处理方法.这个问题在许多文献中称为“精细调节”(fine-tuning),由于它涉及一个大尺度而又有极弱非线性的积分方程的求解,因此不仅对粒子物理,而且对非线性现象与计算物理的研究都是一个有价值问题.

## 2 方程

模型中,t 夸克的动力学质量是通过求解 t 夸克自能函数  $\Sigma(p^2)$  满足的 Schwinger-Dyson 方程得到的.如果除了式(1)的四费米子相互作用外,还考虑到夸克之间的单胶子交换的贡献,那么在 Landau 规范下、取梯形近似、经角度积分后,Schwinger-Dyson 方程简化为<sup>[3]</sup>

$$a(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Lambda^2} dy \frac{\alpha_s(M)}{M^2} \frac{y a(y)}{a^2(x) + y} + \frac{\lambda}{\Lambda^2} \int_0^{\Lambda^2} dy \frac{y a(y)}{a^2(y) + y} \quad (2)$$

其中  $x=p^2$  是相对动量的平方,  $M^2 = \max(x, y)$ ,  $\lambda = 3g/8\pi^2$ .  $\alpha_s(x)$  为 QCD 跑动耦合常数,近似为

$$\alpha_s(x) = \begin{cases} \frac{\alpha_s(M_s^2)}{1 + \frac{7}{4} [\alpha_s(M_s^2)/\pi] \ln(x/M_s^2)} & \alpha_s < \alpha_0 \\ \alpha_0 & \text{其它} \end{cases} \quad (3)$$

在数值计算中,取  $\alpha_s(M_s^2) = 0.114$ ,  $\alpha_0 = 2.0$ ,发现结果对  $\alpha_0$  是不敏感的.

动力学质量  $m_t$  由方程

$$m_t = a(m_t^2) \quad (4)$$

解得.为了能得到符合物理要求的  $a(x)$ ,仅有方程式(2)是不够的,因为其中包含有待定参量  $\lambda$  或四费米子耦合常数  $g$ .根据电弱标准模型应为本模型的低能等效理论,导出由  $t\bar{t}$  束缚成的零质量 Goldstone 粒子的衰变常数  $F_\pi$  的实验值应为  $246\text{GeV}$ ,给出  $a(x)$  和  $\lambda$  的另一个约束条件.在文献[3]中采用了 Pagels-Stoker 近似计算  $F_\pi$ ,我们采用的是求解一个描写 Goldstone 粒子的协变 Bethe-Salpeter 方程来计算  $F_\pi$  的方法.由此可以对 P-S 近似本身给出一个估计. B-S 方程的一般形式为

$$S_F^{-1}(p_1) \chi_F(p) S_F^{-1}(p_2) + \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \chi_F(p') K = 0 \quad (5)$$

其中  $p_1$  和  $p_2$  分别为夸克和反夸克的动量,  $P$  和  $p$  分别为夸克对的总动量和相对动量,  $S_F(p)$  为重整化的费米子传播子,  $K$  是相互作用核,它的普遍形式为

$$K = \sum_i \Gamma_i \otimes \Gamma_i U_i \quad (6)$$



其中  $\Gamma_i (i = S, P, V, A, T)$  是 16 个厄米的 Dirac 矩阵, 分别相应于标量、赝标量、矢量、赝矢量和张量相互作用.  $U_i$  满足的条件为

$$U_S + U_P = U_T = 0 \quad (7)$$

$\chi_P(p)$  为 Goldstone 粒子的波函数, 它的一般形式为

$$\chi_P(p) = \gamma_\mu F_1 + i\gamma_\mu \gamma_5 [P_\mu F_2 + p_\mu (pP) F_3] + i\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} P_\mu p_\nu F_4 \quad (8)$$

它包含四个独立函数  $F_i \equiv F_i(p^2, (p \cdot P)^2)$ . 假设,

$$f_i(p^2) = F_i(p^2, 0) \quad (9)$$

则对零质量的 Goldstone 粒子, 其衰变常数  $F_\pi$  为

$$F_\pi = -\frac{1}{8\pi^2} \int dx x [f_1(x) + \frac{1}{4} x f_3(x)] \quad (10)$$

四个  $f_i$  可以从(5)式导出的联立积分方程组求得, 因而  $F_\pi$  可由(10)计算出来. 模型中,  $f_i(p^2)$  是脱耦的, 它可以由下式求出:

$$f_1(x) = \frac{1}{N} \frac{a(x)}{a^2(x) + xb^2(x)} \quad (11)$$

其中  $a(x)$  和  $b(x)$  都是与自能函数  $\Sigma(p^2)$  有关的函数, 模型中(只考虑四费米子点相互作用(1)和单胶子交换)  $a(x)$  即为方程式(2)的解, 而  $b(x) = 1$ . 对 B-S 方程采用梯形近似, 积掉角变量以后, 得到  $f_2, f_3$  和  $f_4$  满足的联立方程组:

$$\begin{aligned} & [a(x) - 2a^1(x)x]f_1(x) + [x + a^2(x)][f_2(x) + xf_3(x)] \\ & = -\frac{1}{3\pi} \int_0^{\Lambda^2} dy y [G_1 f_2(y) + G_2 f_3(y)] + \frac{\lambda}{6\Lambda^2} \int_0^{\Lambda^2} dy y [f_2(y) + \frac{1}{4} y f_3(y)] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & -2a^1(x)f_1(x) + 2f_2(x) + [x + a^2(x)]f_3(x) + 2a(x)f_4(x) \\ & = -\frac{1}{3\pi x} \int_0^{\Lambda^2} dy y [G_3 f_2(y) + G_4 f_3(y)] \end{aligned} \quad (13)$$

$$f_1(x) + 2a(x)f_2(x) + [a^2(x) - x]f_4(x) = -\frac{1}{3\pi} \int_0^{\Lambda^2} dy y G_5 f_4(y) \quad (14)$$

其中

$$G_1 = \begin{cases} \alpha_s(x) \frac{3(2x-y)}{2x^2} & x > y \\ \alpha_s(y) \frac{3}{2y} & y > x \end{cases} \quad (15)$$

$$G_2 = \begin{cases} \alpha_s(x) \frac{y(3x-y)}{4x^2} & x > y \\ \alpha_s(y) \frac{3y-x}{4y} & y > x \end{cases} \quad (16)$$

$$G_3 = \begin{cases} \alpha_s(x) \frac{2(x-y)}{x^2} & x > y \\ 0 & y > x \end{cases} \quad (17)$$

$$G_4 = \begin{cases} \alpha_s(x) \frac{y(3x-2y)}{6x^2} & x > y \\ \alpha_s(y) \frac{x}{6y} & y > x \end{cases} \quad (18)$$

$$G_s = \begin{cases} \alpha_s(x) \frac{y}{2x^2} & x > y \\ \alpha_s(y) \frac{1}{2y} & y > x \end{cases} \quad (19)$$

### 3 精细调节

数值计算的全过程分为以下几个步骤:

- ① 估计  $\lambda$  的一个试探值和  $a(x)$  的一个初始函数形式, 用迭代方法求解  $a(x)$  满足的积分方程(2), 得到近似解  $a(x)$ .
- ② 把解得的  $a(x)$  和上述  $\lambda$  值代入方程(11)–(14), 求解  $f_1, f_2, f_3$  和  $f_4$ .
- ③ 利用解得的  $f_2$  和  $f_3$ , 由(10)式计算  $F_r$ .
- ④ 把算得的  $F_r$  与 246GeV 的实验值加以比较. 如果相差较大, 则改变  $\lambda$  值重新运行①–③各步骤, 直到求得的  $F_r$  在允许的误差范围内等于 246GeV 为止.
- ⑤ 利用这最后求得的  $a(x)$ , 由方程(4)解得  $m_t$  值.

计算过程中最困难的一步是求解 Schwinger-Dyson 方程((2)式). 以前我们在讨论  $\pi$  介子时曾解过类似的方程<sup>[6]</sup>, 它是非常容易收敛的. 这里由于积分的标度非常之大(从 0 到大约  $10^{30}(\text{GeV})^2$ ), 而  $a(x)$  的量级只有  $10^2\text{GeV}$ , 因而非线性效应极为微弱.  $\lambda$  和  $a(x)$  的初值选取以及计算方法本身都需要细致处理, 否则方程或者不收敛, 或者非线性效应完全丢失, 得到错误的结果.

为了讨论方便, 把方程式(2)改写成:

$$a(x) = \int_0^{\Lambda^2} K(x, y) \frac{a(y)}{a^2(y) + y} y dy \quad (20)$$

$$K(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha_s(M^2)}{M^2} + \frac{\lambda}{\Lambda^2} \quad (21)$$

在求解之前, 先对  $\lambda$  的可能范围做一个粗略的估计. 为此, 暂时忽略(21)中的  $\alpha_s(M^2)$  项, 即只考虑四费米子相互作用的贡献. 在夸克凝聚模型中这一项是起最主要作用的. 此时(20)式变成

$$a(x) = \frac{\lambda}{\Lambda^2} \int_0^{\Lambda^2} a(y) dy - \frac{\lambda}{\Lambda^2} \int_0^{\Lambda^2} \frac{a^3}{a^2 + y} dy \quad (22)$$

通常的结果<sup>[3]</sup>表明,  $a(x)$  是非常平缓的函数, 若近似地取  $a(x) \sim a = \text{常数}$ , 则可以给出  $\lambda$  值的一个近似估计, 即

$$\lambda \sim 1 - \frac{a^2}{\Lambda^2} \ln \frac{a^2}{\Lambda^2} \quad (23)$$

由于  $\Lambda \gg a$ , 所以  $\lambda$  极接近于 1, 例如: 若  $\Lambda \sim 10^{10}$ , 则因为  $a \sim 10^2$ , 相应的有

$$\lambda \sim 1 + 1.6 \times 10^{-15} \quad (24)$$

若  $\Lambda \sim 10^{20}$ , 则

$$\lambda \sim 1 + 3.6 \times 10^{-35} \quad (25)$$

显然  $\lambda$  必须在 1 附近几十位有效数字上进行调整才能找到所需要的解. 或说这个积分方程的

解对参量值的几十位小数处的变化十分敏感. 这正是通常所说的“精细调节”(fine-tuning), 普通 Fortran 程序语言中的单精度和双精度已经完全不能使用, 必须用到特殊的四精度数, 而且是对四精度的极限位数——32 位有敏感的反应.

具体求解时, 我们把(20)式改写为

$$a(x) = \int_0^{\Lambda^2} K(x, y)a(y)dy - \int_0^{\Lambda^2} K(x, y) \frac{a^3(y)}{a^2(y) + y} dy \quad (22)$$

如果只保留方程右边的第一项, (22)式则变为积分算符的本征方程. 所以可以先求解积分算符  $K$  的本征值:

$$\int_0^{\Lambda^2} K\varphi_n dy = \epsilon_n \varphi_n \quad (23)$$

然后, 把  $a(x)$  用本征函数展开

$$a(x) = \sum C_n \varphi_n(x) \quad (24)$$

将其代入方程(22), 得到一个系数  $C_n$  满足的方程为

$$C_n = - \frac{\epsilon_n}{1 - \epsilon_n} \int \varphi_n \frac{a^3}{a^2 + y} dy \quad (25)$$

发现在本征值  $\epsilon_n$  中, 只有一个大于 1 且接近于 1 (其它都比 1 小很多). 由(25)可知这个本征值相应的系数极大, 其它的系数都非常小. 实际上, 只需取这个本征值, 记为  $\epsilon_1$ , 它相应的本征函数  $\varphi_1$  作为  $a(x)$  的近似解, 即

$$a(x) \approx C_1 \varphi_1(x) \quad (26)$$

其中  $C_1$  由

$$C_1 = - \frac{\epsilon_1}{1 - \epsilon_1} \int \frac{C_1^3 \varphi_1^3}{C_1^2 \varphi_1^2 + y} dy \quad (27)$$

迭代给出. 然后用(26)给出的  $a(x)$  为方程(22)的初始解, 再进行迭代. 它很快收敛到一个稳定解上. 这就完成了本节提出的数值计算过程的第一步. 其它步骤都很普通, 不再赘述.

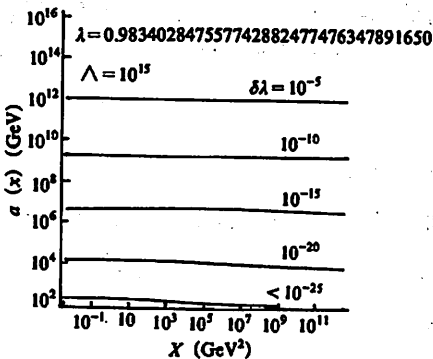


图 1  $a(x)$  曲线图, 由上至下  $\lambda$  渐减小

Fig. 1 Curves for  $a(x)$  versus  $x, \lambda$  decreasing from top to bottom

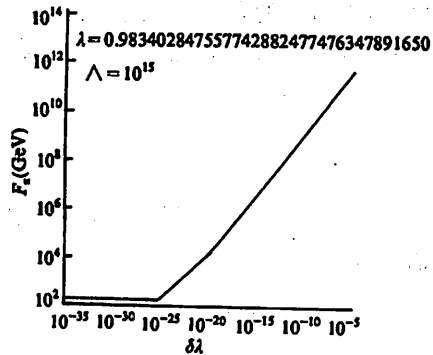


图 2 衰变常数  $F_2$  在精细调节过程中随  $\delta\lambda$  的变化曲线

Fig. 2 Dependence of decay constant  $F_2$  on  $\delta\lambda$  in the process of fine tuning

全部计算是在 VAX8550 机器上完成的. 为了对于精细调节有一个更清楚的了解, 我们给出了几张图. 它们以  $\Lambda = 10^{15} \text{ GeV}$  为例, 选取了一个  $\lambda$  的试探值, 进行精细调节. 图 1 给出了  $a(x)$  随  $x$  变化的曲线, 它们都是非常平缓的. 图 2 和图 3 分别是  $P_*$  和  $m_t$  随  $\delta\lambda$  的变化曲线, 可以看到, 它们对  $\delta\lambda$  是极为敏感的.

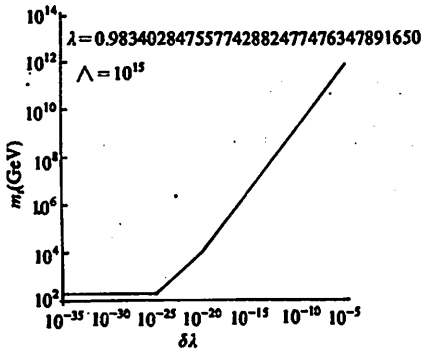


图 3  $t$  夸克质量  $m_t$  在精细调节过程中随  $\delta\lambda$  的变化曲线

Fig 3 Dependence of  $t$  quark mass  $m_t$  on  $\delta\lambda$  in the process of fine tuning.

#### 4 结语

本文只简单介绍了在  $t$  夸克凝聚模型中利用 Schwinger-Dyson 方程求解  $t$  夸克动力学质量的数值计算方法, 特别是其中的“精细调节”问题. 这个极大尺度和极弱非线性积分方程的解有着非常敏感的临界行为. 它是反映非线性现象普遍特征的又一个

很好的例证. 我们的工作的其它细节及其物理结果在 [5] 中给出了详细的论述.

本工作是在国家自然科学基金和中国科学院 LWTZ-1298 经费的资助下完成的.

#### 参 考 文 献

- [1] Nambu Y, Enrico Fermi Institute preprint 89-08(1989) Miransky, V A Tanabashi M and Yamawaki K, *Phys. Lett.* B221(1989)177.
- [2] Bardeen W A, Hill C T and Lindner M, *Phys. Rev.* D41(1990),1647.
- [3] Hasenfratz A, Hasenfratz P, Jansen K, Kuti J and Shen Y, *Nucl. Phys.*, B365(1991),79.  
King S F and Mannan S H, *Phys. Lett.*, B241(1990),249.
- [4] Chesterman H M, and King S F, *Nucl. Phys.*, B358 (1991),59.
- [5] Dai Yuan Ben, Ding yibing, Huang Chaoshang, and Wang Chuilin, *Phys. Lett.*, B285(1992),245.
- [6] Dai Y, Ding Y, Huang C, Wang C, and Zhu Y, Preprint AS-ITP-91-63.

## A Numerical Method for a Large Scale and Weak Nonlinear Integral Equation

Ding Yibing Qu Yizhi

*(Graduate School of USTC)*

Wang Chuilin

*(Chinese Center of Advanced Science and Technology (World Laboratory))*

Dai Yuanben Huang Chaoshang

*(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)*

### Abstract

Discussed in this paper is a calculation method for the dynamical mass of the top quark in the top quark condensation model with the ladder Schwinger-Dyson equation. For this large scale weak nonlinear integral equation, the "fine-tuning" problem is investigated and a new iteration method is given.

**Key words:** nonlinear integral equation, numerical method.

PACS(1992): 11.30N<sub>s</sub>, 12.50L<sub>r</sub>, 02.70+d

祝贺杨振宁教授70寿辰  
In Celebration of Dr. Chen Ning  
Yang's 70th birthday

# 关于量子普适包络代数变形振子 表示的若干讨论

井 思 聪

(近代物理系)

## 摘 要

本文回顾了量子普适包络代数及其变形振子表示的基本概念,讨论了两参数变形的量子代数,并建立了相应的两参数变形振子表示. 利用这一表示,导出了若干 $q$ 变形的组合恒等式,并用来证明了变形的双模 Fock 空间一种完备性关系.

关键词: 量子群, 变形振子, 完备性关系.

中图法分类号: O413

PACS (1992): 03. 65. -w

## 1 引言

近几年来,量子普适包络代数(QUEA)的研究引起了物理学与数学工作者广泛的兴趣. 量子普适包络代数有时也简称为量子群,或量子代数. 这一概念是1986年由Drinfeld等人提出的<sup>[1]</sup>. 现在人们已经知道量子代数与当前理论物理与数学研究的一些热门课题,如统计可解模型、量子反散射方法、共形场论、link与knot的分类等有密切的联系,为了更有效地研究量子代数在物理学中的应用,必须系统地发展它的表示理论. 类似于通常的简谐振子可以给出角动量理论的Jordan-Schwinger实现,几位作者独立地于1989年提出了变形振子的概念<sup>[2]</sup>,来给出最简单的量子代数 $su(2)_q$ 的玻色子实现. 此后,人们广泛地研究了变形振子的各种性质,构造了其它量子代数或量子超代数的类似表示. 此外,还有不少工作研究了变形振子的相干态,以及变形振子某些可能的物理应用<sup>[3]</sup>.

值得指出的是,上述量子代数及其变形振子的研究,都是对于单个变形参数(记为 $q$ )而进

行的,实际上,从物理应用的角度来看,多个变形参数的量子代数及其变形振子表示有时可能更有用一些. 虽然在数学上可以证明两个或多个参数的量子代数能够经过某些变换回到单参数情形,但是正如 Wess 与 Zumine 所指出的<sup>[4]</sup>,多个变形参数在本质上是互相独立的,因此多参数变形的量子代数及其表示的研究对于发展量子代数在物理学上的应用是有实际意义的.

另外,在量子代数的研究中,由于经常牵涉到 Gauss 数  $[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$ ,以及  $q$  变形的微分与积分,而通常的数学运算规则又不能简单地加以运用,从而给量子代数的广泛应用带来了困难. 因此,发展与推广有关的数学运算规则与技巧对于量子代数研究的顺利进行是有积极意义的.

本文就是在上述两个方面做了一些工作. 一方面,我们推广了上述单参数变形振子的概念,建立了两参数变形振子的理论,并用它去研究两参数变形的量子代数. 另一方面,我们推广了普通组合数的概念,引入了  $q$  变形的组合数,导出了一些  $q$  变形的组合恒等式,由此证明了  $q$  变形的双模 Fock 空间的一种完备性关系.

本文的安排如下:第二节回顾了量子代数的基本概念,及其单参数变形振子表示. 第三节讨论了最简单的两参数变形的量子代数,并引入两参数变形振子来给出它的 Jordan - Schwinger 实现. 第四节发展了一套  $q$  变形的组合学公式,用以证明双模 Fock 空间一种完备性关系的  $q$  类似.

## 2 单参数量子代数与变形振子

我们简要回顾一下单参数量子代数及其变形振子表示. 量子代数的生成元  $t_i$  可写成矩阵形式  $T = (t_{ij})$ ,这些生成元作用在空间  $V$  上. 量子代数的对易关系可表示成

$$RT_1T_2 = T_2T_1R \tag{1}$$

其中  $T_1 = T \otimes 1, T_2 = 1 \otimes T$ ,而  $R = (R_{\mu\nu})$  是  $V \otimes V$  空间的常数矩阵,称为量子代数的结构常数.

上述对易关系是矩阵  $T$  的二次幂形式,利用它还可以构造出矩阵  $T$  的三次幂以上的关系式. 为了使这些高次幂的关系式不给出新的对易关系,系数矩阵  $R$  必须满足 Yang - Baxter 方程

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \tag{2}$$

其中  $R_{12}$  是作用在空间  $V \otimes V \otimes V$  上的系数矩阵,只是相对于前两个空间如同(1)式的  $R$  一样,相对于第三个空间如同单位矩阵.  $R_{13}, R_{23}$  的定义类似.

对于 Yang - Baxter 方程人们已进行过广泛的研究. 该方程的解可分为有理解、三角解、椭圆解三类. 单变形参数的量子代数可由三角解得到. 事实上,对于  $su(2)$  群的自旋  $\frac{1}{2}$  表示,消去谱参数以后的三角解可化成

$$R_q = \begin{pmatrix} q & & & \\ & 1 & & \\ & q - q^{-1} & 1 & \\ & & & q \end{pmatrix} \tag{3}$$

的形式,其中  $q$  是变形参数. 引用下述三角矩阵<sup>[5]</sup>

$$L^+ = \begin{pmatrix} q^{J_0} & (q - q^{-1})\tilde{J}_+ \\ 0 & q^{-J_0} \end{pmatrix}, \quad L^- = \begin{pmatrix} q^{-J_0} & \\ (q^{-1} - q)\tilde{J}_- & q^{J_0} \end{pmatrix} \quad (4)$$

其中  $\tilde{J}_0, \tilde{J}_\pm$  是量子代数  $su(2)_q$  的生成元, 由上面的  $R_r$  矩阵, 代入如下的关系式

$$R(L^\alpha \otimes 1)(1 \otimes L^\beta) = (1 \otimes L^\beta)(L^\alpha \otimes 1)R \quad (5)$$

这里  $(\alpha, \beta) = (+, +), (+, -)$  和  $(-, -)$ , 立即得到  $su(2)_q$  的对易关系

$$[\tilde{J}_0, \tilde{J}_\pm] = \pm \tilde{J}_\pm, \quad [\tilde{J}_+, \tilde{J}_-] = [2\tilde{J}_0], \quad (6)$$

其中引用了记号  $[x]_q = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}$ , 而  $x$  可以是算符或普通的数.

玻色子实现的方法是研究群表示理论的一个有效方法. 为了构造量子代数  $su(2)_q$  的 Jordan-Schwinger 实现, 可引入如下的  $q$  变形振子<sup>[2]</sup>

$$\bar{a}\bar{a}^+ - q\bar{a}^+ \bar{a} = q^{-\tilde{N}}, \quad [\tilde{N}, \bar{a}^+] = \bar{a}^+, \quad [\tilde{N}, \bar{a}] = -\bar{a}, \quad [\tilde{N}]_q = \bar{a}^+ \bar{a} \quad (7)$$

只要选取

$$\tilde{J}_+ = \bar{a}_1^+ a_2, \quad \tilde{J}_- = \bar{a}_2^+ a_1, \quad \tilde{J}_0 = \frac{1}{2}(\tilde{N}_1 - \tilde{N}_2), \quad (8)$$

其中 1 和 2 分别表示两个独立的变形振子, 容易验证(8)式所定义的生成元满足对易关系(6).

由一个给定的真空态  $|0\rangle$  出发, 利用  $q$  变形的产生算符  $\bar{a}^+$ , 可以构造粒子数算符  $\tilde{N}$  的本征态

$$|\bar{n}\rangle = \frac{(\bar{a}^+)^n}{\sqrt{[\bar{n}]_q!}} |0\rangle, \quad [\bar{n}]_q! = [\bar{n}]_q [\bar{n}-1]_q \cdots [1]_q, \quad (9)$$

在以  $\{|\bar{n}\rangle\}$  为基矢的 Hilbert 空间中 ( $n=0, 1, \dots$ ), 算符  $\bar{a}^+, \bar{a}$  和  $\tilde{N}$  的作用为

$$\bar{a}^+ |\bar{n}\rangle = \sqrt{[\bar{n}+1]_q} |\bar{n}+1\rangle, \quad \bar{a} |\bar{n}\rangle = \sqrt{[\bar{n}]_q} |\bar{n}-1\rangle, \quad [\tilde{N}]_q |\bar{n}\rangle = [\bar{n}]_q |\bar{n}\rangle \quad (10)$$

值得指出(7)式所定义的变形振子  $\bar{a}^+, \bar{a}$  与普通玻色振子  $a^+, a$  之间有简单的变换关系

$$\bar{a}^+ = \sqrt{\frac{[\tilde{N}]_q}{N}} a^+, \quad \bar{a} = a \sqrt{\frac{[\tilde{N}]_q}{N}} \quad (11)$$

其中  $N = a^+ a$ ,  $a^+$  与  $a$  满足对易关系  $[a, a^+] = 1$ . 由此立即得到

$$|\bar{n}\rangle = |n\rangle \quad (12)$$

而  $|n\rangle = \frac{a^{+n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle$  是普通振子粒子数算符的本征态.

### 3 两参数变形的量子代数与变形振子

(3)式所给出的  $R_r$  矩阵实际上是 Yang-Baxter 方程(2)的更一般的两参数解

$$R = \begin{pmatrix} q & & & \\ & s^{-1} & & \\ & & q - q^{-1} & s \\ & & & q \end{pmatrix} \quad (13)$$

的特殊情形 ( $s=1$ ). 利用这个两参数的  $R$  矩阵, 可以得到  $su(2)$  代数的两参数变形. 为此, 引入如下的三角矩阵



$$L^+ = \begin{pmatrix} q'^0 s^{-j'_0} & s(q - q^{-1})J'_+ \\ 0 & q^{-j'_0} s^{-j'_0} \end{pmatrix}, \quad L^- = \begin{pmatrix} q^{-j'_0} s^{-j'_0} & 0 \\ s(q^{-1} - q)J'_- & q'^0 s^{-j'_0} \end{pmatrix}$$

代入(5)式,即可得到

$$[J'_0, J'_\pm] = \pm J'_\pm, \quad s^{-1}J'_+ J'_- - sJ'_- J'_+ = s^{-2j'_0} [2J'_0], \quad (14)$$

这就是两参数变形量子代数  $su(2)_{q,s}$  的生成元  $J'_0, J'_\pm$  之间的对易关系. 为了下文方便起见,引入记号

$$[x]_{q,s} = s^{1-x} [x], \quad (15)$$

同样可以构造  $su(2)_{q,s}$  量子代数的 Jordan-Schwinger 实现. 为此定义两参数变形的振子如下:

$$a'^+ a' = [N']_{q,s}, \quad a' a'^+ = [N' + 1]_{q,s}, \quad [N', a'^+] = a'^+, \quad [N', a'] = -a' \quad (16)$$

也就是说两参数变形的振子  $a'^+$  与  $a'$  满足如下的对易关系

$$a' a'^+ - s^{-1} q a'^+ a' = (sq)^{-N'}, \quad a' a'^+ - (sq)^{-1} a'^+ a' = (s^{-1} q)^{N'} \quad (17)$$

利用两个独立的变形振子  $a'_1, a'_1$  与  $a'_2, a'_2$ ,

$$\begin{aligned} a'_1 a'_1 &= [N'_1]_{q,s}, & a'_1 a'_1 &= [N'_1 + 1]_{q,s}, \\ a'_2 a'_2 &= [N'_2]_{q,s^{-1}}, & a'_2 a'_2 &= [N'_2 + 1]_{q,s^{-1}} \end{aligned} \quad (18)$$

可将  $su(2)_{q,s}$  的生成元写为

$$J_+ = a'_1 a'_2, \quad J_- = a'_2 a'_1, \quad J_0 = \frac{1}{2} (N'_1 - N'_2) \quad (19)$$

容易验证它们确实满足对易关系(14). 显然,当变形参数  $q=s=1$  时,(14)式即退化为普通  $su(2)$  Lie代数的对易关系

$$[J_0, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J_+, J_-] = 2J_0 \quad (20)$$

其中  $J_0, J_\pm$  是  $su(2)$  Lie代数的生成元.

(16)式所定义的两参数变形振子的 Hilbert 空间基矢为

$$|n\rangle' = \frac{(a'^+)^n}{\sqrt{[n]_{q,s}!}} |0\rangle \quad (21)$$

在这组基矢上,算符  $a'^+, a'$  与  $N'$  的作用为

$$a'^+ |n\rangle' = \sqrt{[n+1]_{q,s}} |n+1\rangle', \quad a' |n\rangle' = \sqrt{[n]_{q,s}} |n-1\rangle', \quad N' |n\rangle' = n |n\rangle' \quad (22)$$

利用这种基矢,对于每一个量子数  $j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ , 量子代数  $su(2)_{q,s}$  的么正不可约表示的基矢为

$$|j, m\rangle' = |j+m\rangle'_1 \otimes |j-m\rangle'_2 = \frac{(a'_1)^{j+m}}{\sqrt{[j+m]_{q,s}!}} |0\rangle \otimes \frac{(a'_2)^{j-m}}{\sqrt{[j-m]_{q,s^{-1}}!}} |0\rangle. \quad (23)$$

其中  $m$  是整数或半整数,  $-j \leq m \leq j$ . 在这组基上,生成元  $J'_0, J'_\pm$  的作用为

$$\begin{aligned} J'_+ |j, m\rangle' &= \sqrt{[j-m]_{q,s^{-1}} [j+m+1]_{q,s}} |j, m+1\rangle', \\ J'_- |j, m\rangle' &= \sqrt{[j+m]_{q,s} [j-m+1]_{q,s^{-1}}} |j, m-1\rangle', \\ J'_0 |j, m\rangle' &= m |j, m\rangle' \end{aligned} \quad (24)$$

对于量子代数  $su(2)_{q,s}$  的每一个不可约表示  $j$ , 可以找到如下简单的变换将生成元  $J_0, J_{\pm}$  与普通  $su(2)$  Lie 代数的生成元  $J_0, J_{\pm}$  联系起来

$$J'_+ = \sqrt{\frac{[j - J_0 + 1]_{q,s}^{-1} [j + J_0]_{q,s}}{(j - J_0 + 1)(j + J_0)}} J_+, \quad J'_- = J_- \sqrt{\frac{[j - J_0 + 1]_{q,s}^{-1} [j + J_0]_{q,s}}{(j - J_0 + 1)(j + J_0)}}, \quad J'_0 = J_0 \quad (25)$$

由此可以证明(23)式所定义的基矢  $|j, m\rangle'$  与通常  $su(2)$  Lie 代数  $j$  维不可约表示的基矢  $|j, m\rangle$  完全一样. 这一性质对于单参数变形的量子代数  $su(2)_q$  也成立.

对于量子代数  $su(2)_{q,s}$  的  $j$  维不可约表示, 可以构造 Perelomov 相干态为<sup>[6]</sup>

$$|z\rangle_{j,s} = e_{q,s}^{z'} |j, -j\rangle' \quad (26)$$

其中引用了记号  $e_{q,s}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_{q,s}!}$ . 利用通常的指数函数也可以将上式表为

$$|z\rangle_{j,s} = \exp(z \sqrt{\frac{(j+J_0)[j-J_0+1]_{q,s}^{-1}}{[j+J_0]_{q,s}(j-J_0+1)}} J_+) |j, -j\rangle \quad (27)$$

容易证明这样定义的量子代数  $su(2)_{q,s}$  相干态与近来很好研究过的单参数变形的  $su(2)_q$  相干态  $|z\rangle_j$  之间仅差一个标度变换, 即

$$|z\rangle_{j,s} = |s^{j-\frac{1}{2}}z\rangle_j = \sum_{m=-j}^j \sqrt{[C_{2j}^{j+m}]_q} (s^{j-\frac{1}{2}}z)^{j+m} |j, m\rangle \quad (28)$$

其中  $[C_{2j}^m]_q$  是  $q$  变形的组合记号

$$[C_n^m]_q = \frac{[n]_q!}{[m]_q! [n-m]_q!} \quad (29)$$

由单参数变形的相干态  $|z\rangle_j$  所满足的完备性条件出发, 利用上述简单的标度变换, 即可得到两参数变形的相干态  $|z\rangle_{j,s}$  所满足的完备性条件如下:

$$I = \int d\mu_j(z) |z\rangle_{j,s} \langle z| \quad (30)$$

其中积分测度为

$$d\mu_j(z) = \frac{s^{2j-1} [2j+1]_q}{2\pi} F(j, |s^{j-\frac{1}{2}}z|^2) d_q |z|^2 d\theta, \quad z = |z| e^{i\theta} \\ F(j, x) = \prod_{k=0}^{2j+1} (1 + q^{k-j-\frac{1}{2}}x)^{-1} \quad (31)$$

这清楚表明了上述积分对于复变数  $z$  的角分量  $\theta$  是普通积分, 而对径向分量  $|z|$  是  $q$  变形的积分<sup>[7]</sup>.

有趣的是, 类似于关系式(11), 在两参数变形谐振子与单参数变形谐振子之间也存在简单的变换关系:

$$a'^+ = \bar{a}^+ s^{-\bar{N}/2}, \quad a' = s^{-\bar{N}/2} \bar{a}, \quad N' = \bar{N} \quad (32)$$

由此可得  $su(2)_{q,s}$  生成元与  $su(2)_q$  生成元之间也有简单的关系

$$J'_+ = \frac{1}{s^2} s^{-J_0} \bar{J}_+, \quad J'_- = s^{-\frac{1}{2}} s^{-J_0} \bar{J}_-, \quad J'_0 = \bar{J}_0 \quad (33)$$

同样可由  $R$  矩阵(13)式出发, 构造两参数变形的  $su(1,1)_{q,s}$  量子代数, 以及它的 Jordan-Schwinger 实现. 不同于  $su(2)_{q,s}$  情形的只是对于每一个非负整数或半整数  $j$ ,  $su(2)_{q,s}$  只有一个有限维的不可约么正表示  $|j, m\rangle$ , 而  $su(1,1)_{q,s}$  却有两个元穷的分立的不可约么正表示以及一

个连续表示. 有关的详细讨论可参看文献[8].

#### 4 $q$ 变形的组合恒等式及其应用

对于实参数  $q$ , 我们定义如下的  $q$  变形二项式定理

$$\prod_{k=0}^{n-1} (x + q^{-2k-1}y) = \sum_{k=0}^n [C_n^k]_q x^k y^{n-k} \quad (34)$$

其中  $[C_n^k]_q$  由(29)式给出, 易见  $[C_{n+m}^k]_q = [C_{n+m}^k]_q$ . 利用(34)式, 可得下列  $q$  变形的组合恒等式

$$[C_{n+l}^k]_q = \sum_{i=0}^k q^{-nl + (n+l)i} [C_n^i]_q [C_l^{k-i}]_q \quad (35)$$

$$[C_{n+l}^k]_q = \sum_{i=0}^k q^{-ml + (n+l)i} [C_n^{m-i}]_q [C_l^i]_q$$

式中  $n, m, l$  皆非负整数, 当  $n > m$  时, 我们约定  $[C_n^k]_q = 0$ . 引用记号

$$[n] = q^{-1} [n]_q = \frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1} \quad (36)$$

可将(35)式表为

$$[C_{n+l}^k]_q = \sum_{i=0}^k q^{2i^2} [C_n^i]_q [C_l^{k-i}]_q \quad [C_{n+l}^k]_q = \sum_{i=0}^m q^{2i(n-m+i)} [C_n^{m-i}]_q [C_l^i]_q \quad (37)$$

其中  $[C_n^k]_q = q^{n^2-k^2} [C_n^k]_q$ ,  $[C_{n+m}^k]_q = [C_{n+m}^k]_q$ . 对比(15)式可见, (36)式定义的  $[n] = [n]_{q, q^{-1}}$ . 利用(37)式可以得到另一个有用的组合恒等式

$$\sqrt{[C_{n+l}^k]_q [C_{n+l}^k]_q} = \sum_{i=0}^m q^{2i(n-m+i)} \sqrt{[C_n^{m-i}]_q [C_n^{m-i}]_q [C_l^i]_q [C_{l-n+k}^{k-i}]_q} \quad (38)$$

在  $s = q^{-1}$  的特殊情形下, (17)式变为

$$a' a'^+ - q^2 a'^+ a' = 1, \quad a' a'^+ - a'^+ a' = q^{2N'} \quad (39)$$

由此可得

$$[N'] = a'^+ a', \quad [N' + 1] = a' a'^+ \quad (40)$$

或者

$$N' = \frac{1}{2} \ln(1 + (q^2 - 1)a'^+ a') / \ln q \quad (41)$$

考虑两个由(39)式定义的互相独立的变形振子  $a'^+ a'$  和  $b'^+ b'$ , 它们分离的本征态  $|n, m\rangle = |n\rangle \otimes |m\rangle$ , 张成一个双模 Fock 空间. 在此空间内, 可以构造单复变量态  $|z\rangle^{[9]}$  的  $q$  变形为

$$|z\rangle_q = (e_q^{|z|^2})^{-\frac{1}{2}} q^{-N' a' b'} (e_q^{a'^+ b'^+})^{-1} e_q^{a'^+} e_q^{b'^+} |0, 0\rangle \quad (42)$$

其中  $e_q^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]!}$ . 利用前面得到的组合恒等式, 可以证明  $|z\rangle_q$  满足如下的完备性条件

$$\int \frac{d_q^2 z}{\pi} |z\rangle_q \langle z| = 1 \quad (43)$$

其中积分测度为

$$\frac{d_q^2 z}{\pi} = \frac{d_q |z|^2 d\theta}{2\pi} e_q^{|z|^2} e_q^{-|z|^2} \quad (44)$$

为了证明完备性条件(43),可以先利用组合恒等式(35)及(38)式,证明如下的关系式

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} [C_{n+l}^n] |l, l\rangle &= e_q^{a^+b^+} \sum_{l=0}^n q^{2l} [C_n^l] |l, l\rangle \\ \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{[C_{n+l}^n][C_{n+l}^m]} |l+n-m, l\rangle &= e_q^{a^+b^+} \sum_{l=0}^m q^{2l(l+n-m)} \sqrt{[C_m^l][C_{n-l}^n]} |l+n-m, l\rangle \\ \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{[C_{m+l}^m][C_{n+l}^n]} |l, l+m-n\rangle &= e_q^{a^+b^+} \sum_{l=0}^n q^{2l(l+m-n)} \sqrt{[C_n^l][C_m^{n-l}]} |l, l+m-n\rangle \end{aligned} \tag{45}$$

然后可将(42)式展开为

$$|z\rangle_q = (e_q^{|z|^2})^{-\frac{1}{2}} q^{-NqNV} (e_q^{a^+b^+})^{-1} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{z^n z^{*m}}{\sqrt{[n]![m]!}} |n, m\rangle \tag{46}$$

于是有

$$\begin{aligned} \int \frac{d_q^2 z}{\pi} |z\rangle_q \langle z| &= q^{-NqNV} (e_q^{a^+b^+})^{-1} \int \frac{d_q^2 z}{\pi} (e_q^{|z|^2})^{-1} \\ &\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{z^n z^{*m}}{\sqrt{[n]![m]!}} |n, m\rangle \langle n', m'| \frac{z^{*n'} z^{m'}}{\sqrt{[n']![m']!}} (e_q^{a^+b^+})^{-1} q^{-NqNV} \end{aligned} \tag{47}$$

上式右端的关于  $\theta$  的积分可以积掉,利用  $q$  变形的 Euler 公式<sup>[7]</sup>

$$\int_0^\zeta d_q x e_q^{-x} x^n = [n]! \tag{48}$$

其中  $-\zeta$  是函数  $e_q$  的最大零点,也可以将(47)式关于  $|z|^2$  的  $q$  变形积分完成,于是可得

$$\begin{aligned} \int \frac{d_q^2 z}{\pi} |z\rangle_q \langle z| &= q^{NqNV} (e_q^{a^+b^+})^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n,m=0}^l \\ &\sqrt{[C_l^n][C_l^m]} |n, m\rangle \langle l-m, l-n| (e_q^{a^+b^+})^{-1} q^{-NqNV} \end{aligned} \tag{49}$$

另一方面,又可将单位矩阵写为

$$I = \sum_{n,m=0}^{\infty} |n, m\rangle \langle n, m| = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^l |k, l-k\rangle \langle k, l-k| \tag{50}$$

因此(43)式的证明等价于下式的证明

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n,m=0}^l \sqrt{[C_l^n][C_l^m]} |n, m\rangle \langle l-m, l-n| &(e_q^{a^+b^+})^{-1} q^{-NqNV} \\ &= e_q^{a^+b^+} q^{NqNV} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^l |k, l-k\rangle \langle k, l-k| \end{aligned} \tag{51}$$

利用关系式(45)经过一番繁杂的代数运算不难看出上式是成立的.

当变形参数  $q=1$  时,(42)式退化为

$$|z\rangle = \exp(-\frac{1}{2}|z|^2 + za^+ + z^*b^+ - a^+b^+) |0, 0\rangle \tag{52}$$

其中  $a^+, b^+$  是两个独立的普通玻色振子的产生算符,上式满足完备性关系

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} |z\rangle \langle z| = 1 \tag{53}$$

在文献(9)中,上述完备性关系是利用正规乘积下积分(IWOP)技术完成的. 在  $q$  变形情形下,不便于直接应用 IWOP 技术证明完备性关系(43),因此我们发展了一套  $q$  变形的算符代数方

法,利用所得的组合恒等式,在双模  $q$  变形的 Fock 空间直接证明了完备性条件(43). 类似的方法也可用于量子代数其它问题的研究,这方面的工作目前正在进行.

作者感谢范洪义教授提请作者研究文中第四节的问题,并感谢他的有益的讨论.

### 参 考 文 献

- [1] Drinfeld V G, in Proceedings of Intern. Congress of Math. MSRI, Berkeley, 1986 p. 798.  
Jimbo M, *Lett. Math. Phys.* 10 (1985), 63; *ibid* 11 (1986), 247.
- [2] Biedenharn L C, *J. Phys.*, A22(1989), L873.  
Macfarlane A J, *J. Phys.*, A22(1989), 4581,  
Sun C P & Fu H C, *J. Phys.*, A22(1989), L983.
- [3] Chaichian M & Kulish P, *Phys. Lett.*, 234 B (1990) 72.  
Chaichian M, Kulish P & Lukierski J, *Phys. Lett.*, 237B (1990) 401.  
Kulish P & Damaskinsky E V, *J. Phys.* A23 (1990), L415;  
Floresani R., Spiridonov V. P. & Vinet L., *Phys. Lett.* 242B (1990), 383.
- [4] Schrierrmacher A, Wess J. & Zumino B., *Z. Phys.* C49 (1991), 317.
- [5] Faddeev L D, Reshetikhin N. Y. & Takhtajan L. A., Leningrad Preprint LOMIE-14-87 (1987).
- [6] Perelomov A, Generalized coherent states and their applications, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [7] Gray R W & Nelson C A, *J. Phys.* A23 (1990), L945.
- [8] Jing S C & Cuyper F., *Commun. Theor. Phys.* (1993).
- [9] Fan H Y, *Phys. Lett.* A128 (1987), 145, 151.

## Some Remarks on the Deformed Oscillator Representation of the Quantum Universal Enveloping Algebra

Jing Sicong

(Department of Modern Physics)

### Abstract

The basic ideas of the quantum universal enveloping algebra and its deformed oscillator representation are reviewed in this paper. Then a theory of the quantum algebras with two-parametric deformation and construction is developed. From these developments, several useful  $q$ -deformed combinatorial identities are derived and a new completeness relation in the  $q$ -deformed two-mode Fock space proved.

**Key words:** quantum group, deformed oscillator, completeness relation

**PACS (1992):** 03.65. —w

祝贺杨振宁教授70寿辰  
In Celebration of Dr. Chen Ning  
Yang's 70th birthday

# Quantum Dynamics in Josephson Junctions Coupled With Electro-Magnetic Modes\*

Chen Yongcong

(Department of Physics)

## Abstract

Quantum dynamics, in particular, macroscopic quantum tunneling in Josephson junctions coupled with resonant electro-magnetic modes is studied in the paper. For a typical case, a small junction connected to a superconducting transmission line, explicit Lagrangians and Euclidean actions are derived which can be used to compute the quantum tunneling rates in a current-biased or an rf SQUID setup. It is suggested that this system may be used for more determinate macroscopic tunneling and other measurements.

**Key words:** quantum dynamics, Josephson junctions

**PACS (1992):** 74.50.+r, 03.65.-w, 05.30-d

## 1 Introduction

There has been a great deal of theoretical and experimental studies recently in the context of macroscopic quantum phenomena<sup>[1,2]</sup>. It has, in particular, quite well established that measurements of tunneling out of metastable states in some Josephson junction systems can be interpreted in terms of the theory of macroscopic quantum tunneling (MQT)<sup>[3-5]</sup>. Nevertheless, in most cases, only junctions of ultra-small sizes (with typical values of  $0.1-1\mu\text{m}^2$ ) were used. In this limit they can be well approximated by some simple lumped circuits, such as the well-known resistively shunted junction (RSJ) model. There are, however, some disadvantages. In particular, it is rather difficult to deter-

Received september 1, 1992.

\* Work supported by the Youth Science Foundation of Basic Research, the National Science Council of China.

mine precisely the parameters of a given junction, e. g. , the shunt resistance and the shunt capacitance crucial to the fit between theory and experiment (cf. [6] for more discussions). It is thus natural to ask whether MQT also works in junctions where only distributed circuits could be appropriate. Such a case can arise, for example, if the junction is actually not small. Resonant modes can then live in the cross area of the junction. This case has been recently discussed in [7]. In this paper, we discuss a different but related problem, a small Josephson junction coupled to some electro-magnetic (EM) environments<sup>[8,9]</sup>. A typical case for the environment is a superconducting transmission line, which has been extensively studied in [10]. The purpose of the present paper is twofold. (1) We will demonstrate explicitly how the problem can be cast into a standard version of Caldeira and Leggett<sup>[4]</sup>. Hence, many of our recent results<sup>[11,12]</sup> for quantum dynamics in a boson bath can be readily applied. (2) This problem has its own role in the MQT experiment. There are two possible ways to arrange it; in case (A), a usual current-biased setup can be applied for an open-end transmission line, whereas in case (B), an rf SQUID is obtained when the line is short-circuited at the other end (cf. below). We suggest that by using both setups one can overcome the parameter uncertainties inherent in the small junctions.

## 2 Total Lagrangians

### 2.1 Case (A)

We first consider the case in which the Josephson junction is biased by a d. c. current and the transmission line is open, see Fig. 1. The equations of motion for the current  $I(x,t)$  and the voltage  $V(x,t)$  of the line are as usual<sup>[14]</sup>,

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{1}{l} \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial x} \quad (1)$$

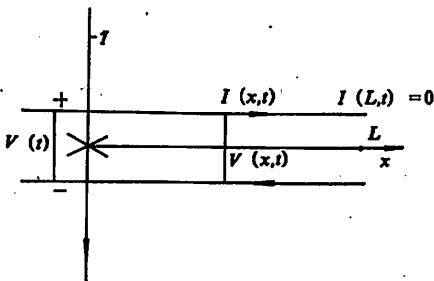


Fig. 1 Schematic representation of a current - biased Josephson junction connected to a superconducting transmission line with an open end. The cross represents the junction

where  $c$  and  $l$  are, respectively, the capacitance and the inductance per unit length. The boundary conditions for (1) are

$$I(L,t) = 0 \quad V(0,t) = V(t) = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right) \dot{\phi}(t) \quad (2)$$

where  $\Phi_0 = h/2e$  is the flux quantum and  $\phi$  is the usual phase variable of the junction. To handle the boundary condition, we introduce  $\bar{V}(x,t) = V(x,t) - V(t)$  and expand

$$\bar{V}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{V}_n(t) \sin(k_n x), \quad k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L} \quad (3)$$

Now the equation of motion for  $\bar{V}_n(t)$  reads [followed from (1)]

$$\ddot{\bar{V}}_n(t) + \omega_n^2 \bar{V}_n(t) + 2\dot{\bar{V}}(t)/(k_n L) = 0, \quad \omega_n^2 = k_n^2/(lc) \quad (4)$$

Returning to the expansion for the original voltage  $V(x,t)$ ,



$V_n = \bar{V}_n(t) + 2V(t)/(k_n L)$ , and writing  $I(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n(t) \cos(k_n x)$ , we get  $I_n = (c/k_n) \dot{V}_n(t)$ . These results then yield the whole set of equations of motion,

$$C_0 \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \ddot{\phi} + I_c \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right) \sin \phi = \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right) \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c \dot{V}_n}{k_n} \right] \quad (5)$$

$$\ddot{V}_n + \omega_n^2 V_n = \left( \frac{2\omega_n^2}{k_n L} \right) \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right) \dot{\phi} \quad (6)$$

where  $C_0$  and  $I_c$  are, respectively, the shunt resistance and the shunt capacitance of the Josephson junction (we ignore, for simplicity, the shunt resistance). Note that (5) follows simply from the current conservation at  $x=0$ . At this stage, one can think of  $V_n$  as the coordinate for the  $n$ -th EM mode with a mass  $(cL/2\omega_n^2)$ . This leads to a total Lagrangian for the whole system,

$$L[\phi, \dot{\phi}; \{V_n, \dot{V}_n\}] = \frac{C_0}{2} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \dot{\phi}^2 + \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right) (I_c \cos \phi + I \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{c}{k_n} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right) \dot{\phi} \dot{V}_n + \left( \frac{cL}{4\omega_n^2} \right) [\dot{V}_n^2 - \omega_n^2 V_n^2] \right\} \quad (7)$$

Note that the junction is coupled to the velocities of the EM modes. This case was discussed in [15]. Introduce another set of variables,

$$Y_n = \left( \frac{cL}{2\omega_n} \right) \dot{V}_n - \frac{c\omega_n}{k_n} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right) \dot{\phi} \quad (8)$$

The Lagrangian then reads

$$L[\phi, \dot{\phi}; \{Y_n, \dot{Y}_n\}] = \frac{C_0}{2} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \dot{\phi}^2 + \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right) (I_c \cos \phi + I \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -D_n Y_n \dot{\phi} + \frac{1}{2} \left[ M_n (Y_n^2 - \omega_n^2 Y_n^2) - \frac{(D_n \dot{\phi})^2}{M_n \omega_n^2} \right] \right\} \quad (9)$$

where we have defined for the EM modes a set of coupling constants and masses  $\{D_n, M_n\}$ ,

$$D_n = 2 \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right) / [L(cL)^{1/2}], \quad M_n = 2/[cL\omega_n^2] \quad (10)$$

This procedure corresponds to an exchange of the coordinate  $\omega_n V_n$  with its conjugate momentum. Lagrangian (9) is a standard particle-plus-environment one frequently used in the context of macroscopic quantum theory. But, in contrast to the usual model for an Ohmic dissipation, the frequencies of the "environment" here are discrete.

## 2.2 Case (B)

A superconducting loop is obtained when we short-circuit the other end of the transmission line, see Fig. 2. It then forms an rf SQUID. The boundary condition at  $x=L$  becomes  $V(L, t) = 0$ . Let us now introduce  $\bar{V}(x, t) = V(x, t) - V(t)(L-x)/L$  which satisfies  $\bar{V}(0, t) = \bar{V}(L, t) = 0$ . We can expand

$$\bar{V}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{V}_n(t) \sin(k_n x), \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (11)$$

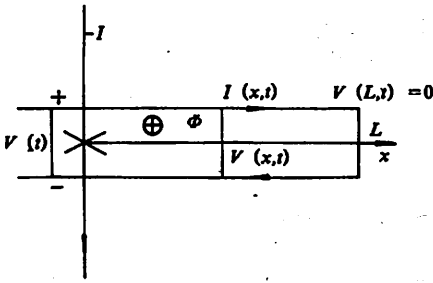


Fig. 2 An rf SQUID geometry in which the line is short-circuited at the other end. Note that the d. c. current  $I$  varies the magnetic flux  $\Phi$  in the loop

$$I(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n x) + I_0(t) \quad (12)$$

Furthermore, we find that

$$I_0(t) = \frac{V(t)}{lL} = \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right) \frac{\dot{\phi}(t)}{lL} = \frac{\dot{\Phi}(t)}{lL} \quad (13)$$

where  $\Phi$  is the total magnetic flux through the ring. The remaining algebra is similar to that in case (A). We obtain an equation of motion for the SQUID,

$$C_0 \ddot{\Phi} + I_c \sin\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c\dot{Y}_n}{k_n} + \frac{(\Phi - \Phi_{ex})}{lL} = I \quad (14)$$

In (14) an external magnetic flux  $\Phi_{ex}$  is also included. The equation for  $V_n$  takes the same form as (6), but the values

of  $k_n$  and  $\omega_n$  are different. The final Lagrangian reads

$$L[\Phi, \dot{\Phi}; \{Y_n, \dot{Y}_n\}] = \frac{C_0}{2} \dot{\Phi}^2 + I_c \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right) \cos\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}\right) + I\Phi - \frac{(\Phi - \Phi_{ex})^2}{2lL} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -D_n Y_n \dot{\Phi} + \frac{1}{2} \left[ M_n (\dot{Y}_n^2 - \omega_n^2 Y_n^2) - \frac{(D_n \Phi)^2}{M_n \omega_n^2} \right] \right\} \quad (15)$$

with now  $D_n = 2/[L(lc)^{1/2}]$ .

### 3 Macroscopic Quantum Tunneling

#### 3.1 The Current-biased Setup

For  $I < I_c$ , the potential of  $\phi$  contains a set of local minima which correspond to zero-voltage states. When the d. c. current  $I$  approaches  $I_c$ , the metastable wells become shallow. The "particle" can then escape out of these wells to some running states with finite voltages. The zero-temperature limit of this problem was first studied by Caldeira and Leggett<sup>[3]</sup>, where an imaginary-time path integral was employed. In their approach, one first finds out the reduced Euclidean action of the particle. This is then used to calculate the imaginary part of the free energy associated with a given well via an instanton technique. It is basically a version of a multi-dimensional WKB approximation. The tunneling rate takes the form,

$$\Gamma = A \exp(-B/\hbar) \sim \omega_j \left[ \frac{S_c}{2\pi\hbar} \right]^{1/2} \exp\left[-\frac{S_c}{\hbar}\right] \quad (16)$$

where  $\omega_j$  is the Josephson frequency near the well and  $S_c$  is a saddle-point action on a "classical path" in the Euclidean space. The trick was later generalized to include finite-temperature effects<sup>[1]</sup>. Both of them have now become well known in this field.

Following Caldeira and Leggett, we evaluate the extra piece of action induced by the transmission line. The result is<sup>[1,3]</sup>

$$\Delta S_E[\phi(\tau)] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_0^{\hbar} d\tau \alpha(\tau - \tau') [\phi(\tau) - \phi(\tau')]^2 \quad (17)$$

where  $\phi(\tau)$  is periodic in  $\beta\hbar$  [ $\beta = (k_B T)^{-1}$  as usual] and  $\alpha(\tau)$  is given by

$$\alpha(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{D_n^2}{4M_n \omega_n} \right] \exp[-\omega_n |\tau - \tau'|] \quad (18)$$

At zero temperature, the extra-action reduces to

$$\begin{aligned} \Delta S_b[\phi] &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left\{ \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 |\phi(\omega)|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\omega^2 / lL}{\omega_n^2 + \omega^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left\{ \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 |\phi(\omega)|^2 \left[ \sqrt{\frac{c}{l}} \omega \tanh(\omega \sqrt{lc} L) \right] \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

where  $\phi(\omega)$  is the Fourier transform of  $\phi(\tau)$ . This recovers the result of Chakravarty and Schmid<sup>[10]</sup>, which is in turn a special case of Leggett's prescription<sup>[8]</sup>.

Given the effective Euclidean action, a detailed calculation of the zero-temperature tunneling rate can always be carried out numerically by virtue of the method described in [13]. It can be used as well for finite-temperature rates<sup>[1]</sup>, though it is likely to be much more involved. However, a useful calculation will need, in general, the detailed knowledge of the experimental situation. In case of weak environmental effects, an undamped "classical solution" can be substituted into (16) to obtain the desired corrections to the tunneling rates, cf. [7].

### 3.2 The rf SQUID Setup

The tunneling problem can be likewise discussed for the rf SQUID setup. The coordinate is now the total magnetic flux trapped in the loop and the "particle" is now confined by a quadratic potential. By varying the d. c. current  $I$  or the external magnetic flux  $\Phi_{ex}$ , this system can also be used for the tunneling measurement. In this case one detects the flux changes in the loop (cf. below). Note that the "heat bath" of the EM modes differs from the previous one. It therefore contributes a different Euclidean action. At zero temperature, we have

$$\begin{aligned} \Delta S_b[\Phi] &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left\{ |\Phi(\omega)|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\omega^2 / lL}{\omega_n^2 + \omega^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left\{ |\Phi(\omega)|^2 \left[ \omega \sqrt{\frac{c}{l}} \coth(\omega \sqrt{lc} L) - \frac{1}{lL} \right] \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

Although this can also be formally obtained from the Leggett's prescription, we emphasize that one would then be unable to distinguish the "heat bath" contribution from the magnetic energy of the loop inductance. The effects of the external flux would also be left out.

### 4 Discussions And Conclusion

The primary goal of the present work is to investigate the macroscopic quantum dynamics in the presence of the resonant EM modes. It is evident that the approach can be generalized to more general cases. The essential point here is to find out the eigenmodes of the resonant EM field and its coupling to the junction's dynamics. There are some advantages of writing down explicit Lagrangians for the

whole system. They can as well be used for real-time analyses. Note that the high frequency limit of (19) and (20) is identical to that of a simple shunt resistor<sup>[3]</sup>, though there is no dissipation in the transmission line. This is not difficult to understand: As the length of the transmission line increases, the energy transfer from the junction to the line cannot come back in time. In the case where the junction's own dissipation can be ignored, the EM modes become the dominant heat bath. This bath, in addition to the pure harmonicity, has the unique advantage that its spectrum is completely known. It therefore provides an ideal test system for macroscopic quantum dynamics. Note that one may need to pay some attention to the discrete spectrum in some real-time analyses. For instance, approach to equilibrium certainly presents a problem (cf. [11] for more discussions). Nevertheless, it does not appear to affect the tunneling behavior of the junction.

We next discuss, in some detail, how this system can be used for more determinate tunneling measurements. With modern techniques of fabrication, there is, in principle, no difficulty in designing a small junction connected to a superconducting transmission line. The line (which in this case is made of two superconducting strips) can be fabricated directly on the thin film used to make an edge junction. Typically in an experiment, one would sweep the external current up toward the classical break point at some sweep frequency, say, 100Hz. Meanwhile, one detects the d. c. voltage signals for the indication of the tunneling. Then one would monitor the distribution of the decay occurrences as a function of the external current. The result can be used to compare with theoretical predictions, see [5] for more details.

Now let us note that the very same junction can also be used in the rf SQUID setup provided one short-circuits the other end of the transmission line. The measurement would go nearly the same as in the first case, except that the junction does not develop finite d. c. voltages after tunnelings. In a traditional experiment (see Schwartz, et al. in [5]), one would install two additional coils near the SQUID. One of them provides the external magnetic flux to vary the potential, while the other is a magnetometer to detect the signal of flux changes. This is, however, not essential in our case. At least the biased d. c. current can play the role of the first coil. Furthermore, rather than directly detecting the flux changes, one could also use a high sensitivity voltmeter to detect the voltage pulses (with a characteristic time of the order  $10^{-11}$  seconds) released from the SQUID when a tunneling takes place. Therefore, switching to the rf SQUID setup causes nearly no change in the whole system of the junction.

The crucial point here is that the resonant EM modes are different in two cases. One therefore conducts the tunneling measurements in two different heat baths in a controlled manner, while leaving the intrinsic parameters of the junction unchanged. In particular, for high quality junctions, the shunt resistance is mainly due to the quasiparticle tunnelings. The resulting dissipation is non-Ohmic and weak at low temperatures. In this limit, one then has two completely known macroscopic objects at the microscopic level for the MQT experiment.

In conclusion, we have derived the Lagrangians for a Josephson junction coupled with a transmission line which, in turn, can be used to study a variety of quantum behaviors. We have also suggested

that the system are ideal for a more determinate test of macroscopic quantum tunneling.

#### References

- [ 1 ] Häggi P, Talkner P and Borkovec M, *Rev. Mod. Phys.*, **62**(1990), 251.
- [ 2 ] Leggett A J, Chakravarty S, Dorsey A T, Fisher M P A, Garg A, and Zwerger W, *Rev. Mod. Phys.*, **59** (1987), 1.
- [ 3 ] Leggett A J, *Progr. Theor. Phys. Suppl.*, **69** (1980), 80.
- [ 4 ] Caldeira A O and Leggett A J, *Ann. Phys.*, (N. Y.) **149** (1983), 347, **153** (1984), 455 (E).
- [ 5 ] (a) Washburn S, Webb R A, Voss R F, and Faris S M, *Phys. Rev. Lett.*, **54** (1985), 2712;  
(b) Devoret M H, Martinis J M and Clarke J, *Phys. Rev. Lett.*, **55** (1985), 1908;  
(c) Schwartz B D, San B, Archie C N, and Lukens J E, *Phys. Rev. Lett.*, **55** (1985), 1547;  
(d) Sharifi F, Gavilano J L, and Van Harlingen D J, *Phys. Rev. Lett.*, **61** (1988), 742.
- [ 6 ] Chen Y C, Fisher M P A and Leggett A J, *J. Appl. Phys.*, **64** (1988), 3119.
- [ 7 ] Chen Y C, *Phys. Rev.*, **B 46** (1992), 9035.
- [ 8 ] Leggett A J, *Phys. Rev.*, **B 30** (1984), 1208.
- [ 9 ] (a) Schön G and Zaikin A D, *Phys. Rept.*, **198** (1990), 237;  
(b) "Special issue on single charge tunneling", *Zeit. Phys.*, **B 85**, December (1991).
- [ 10 ] (a) Chakravarty S and Schmid A, *Phys. Rev.*, **B 33** (1986), 2000;  
(b) Grabert H and Linkwitz S, *Phys. Rev.*, **A 37** (1988), 963;  
(c) Turlot E, Esteve D, Martinis J M, Devoret M H, Linkwitz S, and Grabert H, *Phys. Rev. Lett.*, **62** (1989), 1788.
- [ 11 ] Chen Y C, Lebowitz J L, and Liverani C, *Phys. Rev.*, **B 40** (1989), 4664.
- [ 12 ] Chen Y C and Lebowitz J L: (a) *Phys. Rev.*, **B 46** (1992), 10743, 10751;  
(b) "Nonlinear response of a dissipative Bloch particle in an oscillating field", *Phys. Rev. Lett.*, December 14, 1992.
- [ 13 ] Chang L D and Chakravarty S, *Phys. Rev.*, **B 29** (1984), 130; **30** (1985), 1566 (E).
- [ 14 ] Barone A and Paterno G, *Physics and applications of the Josephson effect* (Wiley, New York, 1982).
- [ 15 ] Caldeira A O and Leggett A J, *Physica*, **121A** (1983), 587.

## 电磁模式与约瑟夫森结的量子运动

陈永聪

(物理系)

### 摘 要

研究存在电磁共振模式耦合时约瑟夫森结中的宏观量子效应. 取典型特例, 小型结与超导传输线耦合作具体研究. 导出了该体系完整的拉格朗日量和欧几里德作用量. 这可用于进一步计算宏观量子隧穿几率. 具体讨论了如何利用该体系的特点进行更有效的宏观量子测量.

**关键词:** 量子运动, 约瑟夫森结

**中图法分类号:** O413.1

**PACS(1992):** 74.50.+r, 03.65.-w, 05.30.-d

祝贺杨振宁教授70寿辰  
In Celebration of Dr. Chen Ning  
Yang's 70th birthday

# 一个生理自调节过程的动力学模型研究

张先蔚

(中国科学技术大学研究生院物理教学部,北京)

## 摘要

在一定的假设下,建立了下丘脑—垂体—肾上腺皮质系统的动力学模型. 研究了模型方程的分岔及混沌特性. 以此模型解释了已有的临床实验结果,并预言了一些新的结论.

关键词: 自调节, 分岔, 混沌.

中图法分类号: O414.22

PACS(1992): 05.45+b, 87.22-q

## 1 引言

在人体的生理活动中,存在各种自调节过程. 下丘脑—垂体—肾上腺皮质系统对促肾上腺皮质激素释放因子(CRF)、促肾上腺皮质激素(ACTH)和可的松(F)等三种激素的分泌和调节就是这样的一个自调节过程. 这三种激素之间存在着正、负反馈关系.

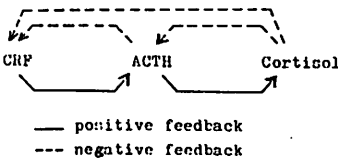


图1 CRF, ACTH 及 F 之间的反馈过程  
Fig. 1 Feedback processes among CRF, ACTH and Cortisol.

下丘脑分泌的 CRF 将促进垂体分泌 ACTH, 而 ACTH 又将促使肾上腺皮质分泌皮质激素. 反之, 当血浆 ACTH 浓度过高; 超过正常值, 将使下丘脑减少 CRF 的分泌, 从而降低血浆中 ACTH 的浓度, 这是 ACTH 与 CRF 之间的负反馈过程; 同样, 在 F 与 ACTH 之间以及 F 与 CRF 之间亦存在着类似的负反馈关系, 如图 1 所示. 其中 F 与

CRF 之间的反馈被称为长反馈, 其余的被称为短反馈.

除上述反馈调节过程外,在这系统中还存在着神经调节过程.各种外部刺激,如外伤、惊吓等因素都将通过神经系统而影响这些激素的分泌.

实验证明,在正常人体中,这三种激素的血浆浓度呈周期性变化,周期长度为 24 小时,在一个周期中上、下午各出现一个高峰,上午的高峰值明显的大于下午的高峰值.尽管对不同的个体,其峰值的大小及出现时间可以不同,但其周期图形都具有相似的形式.临床观察也表明,对患有内分泌系统疾病的人,其周期将发生明显变化,甚至消失,显示混沌状态.

本文的目的是对下丘脑—垂体—肾上腺皮质系统调节和分泌激素的过程建立一个动力学模型;通过对模型方程的分析,解释激素分泌的周期过程及周期变化规律;从方程中亦得到了对内分泌系统疾病的治疗有意义的一些结论;当然,这些结论将有待于临床实验的进一步证实.

## 2 数学模型及其解

由上节所述可知,在这系统中存在着很复杂的反馈过程,为了建立这一自调节过程的数学模型,我们作以下假设:

1. 由于神经调节过程主要由外部的偶然因素所决定,我们只限于讨论系统内部的自调节,故在我们的模型中忽略系统的神经调节过程.

2. 显然,无论是下丘脑或垂体,除了分泌 CRF 和 ACTH 外,还将分泌其他类型的激素.实验证明在这些不同类型的激素之间,不存在明显的相关效应.故我们将这一系统中与分泌这三种激素功能有关的部分,看成是一个相对独立的子系统,称下丘脑—垂体—肾上腺皮质系统.

3. 下丘脑的活动受中枢神经系统的控制,但目前对这一系统如何控制的细节尚不清楚,因而在我们的模型中,将这一控制看成是作用在所讨论子系统的外界作用力.

根据临床实验结果及上述三个假设,我们可以用强迫振子模型来描述这一系统.考虑到系统中反馈过程的复杂性,我们将在模型方程中引进较为复杂的反馈项.

首先定义

$x'$  = 血浆中 CRF 的浓度;

$y'$  = 血浆中 ACTH 的浓度;

$z'$  = 血浆中 F 的浓度.

用  $x_0, y_0$  及  $z_0$  表示上述三个量的日平均值,令:

$$x = \frac{x'}{x_0}; \quad y = \frac{y'}{y_0}; \quad z = \frac{z'}{z_0}$$

描述这一系统的模型方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p_1 e^{a(1-z^2)+b(1-y^2)} - ax + p_4 \cos \omega t \\ \frac{dy}{dt} &= p_2 x e^{b(1-z^2)} - by \\ \frac{dz}{dt} &= p_3 y - cz \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



其中参数  $p_1$ 、 $p_2$  和  $p_3$  表示系统分泌相应激素的能力;方程组(1)中第一式的最后一项  $p_4 \cos \omega t$  表示了外界作用力,亦即中枢神经系统对所讨论体系的控制能力;参数  $\alpha$  及  $\beta$  分别表示长反馈及短反馈的强度;而  $a$ 、 $b$  和  $c$  则表示相应激素在人体中的代谢能力.

对方程组(1)作变换,令

$$u = \cos \omega t; \quad v = \sin \omega t.$$

方程组(1)成为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p_1 e^{\alpha(1-z^2)+\beta(1-y^2)} - ax + p_4 u \\ \frac{dy}{dt} &= p_2 x e^{\beta(1-z^2)} - by \\ \frac{dz}{dt} &= p_3 y - cz \\ \frac{du}{dt} &= -\omega v \\ \frac{dv}{dt} &= \omega u \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

这是一个非线性自治常微分方程组. 根据临床实验结果<sup>[1]</sup>我们选择下列参数值

$$p_1 = 0.4488, \quad p_2 = 0.7478, \quad p_4 = 0.6732, \quad p_3 = 0.8228,$$

$$a = 0.374, \quad b = 0.5086, \quad c = 1.1646,$$

$$\alpha = 7.6, \quad \beta = 0.45, \quad \omega = 1.0472.$$

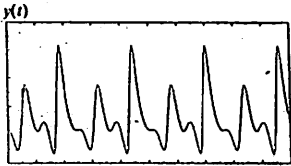


图 2  $y(t)$  的周期解

Fig. 2 periodic solution of  $y(t)$

得到  $x(t)$ 、 $y(t)$  及  $z(t)$  的周期解,周期长度为 24 小时. 图 2 画出了  $y(t)$  曲线. 除周期解外,方程显示了分岔及混沌特性. 为了考察这一性质,参照参数的生理意义,选择  $p_3$  为分岔参数. 数值计算采用 Runge-Kutta-Gill 法,对参数  $p_3$  的每个值,舍掉前 200 个周期,以排除可能存在的不稳定过程. 结果表明当参数  $p_3 < 0.386$  时,系统处在周期 2 的锁模状态,当  $p_3$  增加,出现了倍周期分岔序列. 我们用  $2^p$  表示周期为  $2^p$  的

轨道,下表列出了参数  $p_3$  从  $2p$  到  $64p$  的分岔点.

表 1 参数  $p_3$  的分岔点

$2p \sim 4p$	$4p \sim 8p$	$8p \sim 16p$	$16p \sim 32p$	$32p \sim 64p$
0.386	1.080	1.251	1.292	1.301

从上表可以看出,相邻两个参数值区域之比为  $\Delta f_4 / \Delta f_8 = 4.058$ ,  $\Delta f_8 / \Delta f_{16} = 4.171$ ,  $\Delta f_{16} / \Delta f_{32} = 4.555$ . 显然,这比值趋于 Feigenbaum 普适常数  $\delta = 4.669$ <sup>[2]</sup>. 图 3 画出了从  $2p$  到  $32p$  的轨道在相空间的投影;用 FFT 对相应各轨道作功率谱分析,画在图 4 上.

当  $p_3 > 1.31$  系统处在混沌状态. 图 5(a)是当  $p_3 = 1.57$  时混沌态的功率谱,图 5(b)则是相应的混沌轨道在  $(y, z)$  平面上的投影. 为了确证系统是处在混沌状态,图 5(a)画出的不是系统的噪声,我们用 I. Shimaola 和 T. Nagashima<sup>[3]</sup>的方法,计算了系统的里雅普诺夫指数. 图 6 画出了最大里雅普诺夫指数作为参数  $p_3$  的函数曲线. 时间步长为  $\tau = 0.05$ ,对参数的每个值,除

掉舍去最初的 200 周期外, 迭代 16384 次. 图 7 则显示了指数的收敛性, 从这图上可看出, 指数谱为  $(+, 0, 0, -, -, -)$ , 这是典型的混沌吸引子的指数谱.

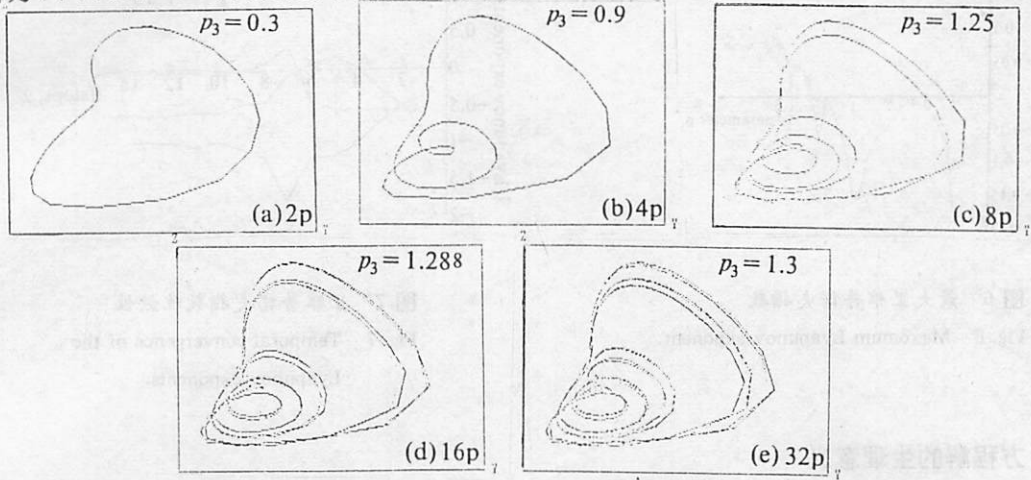


图 3 从  $2p$  到  $32p$  轨道在相空间的投影

Fig. 3 The projection of trajectories in the phase space from  $2p$  to  $32p$ .

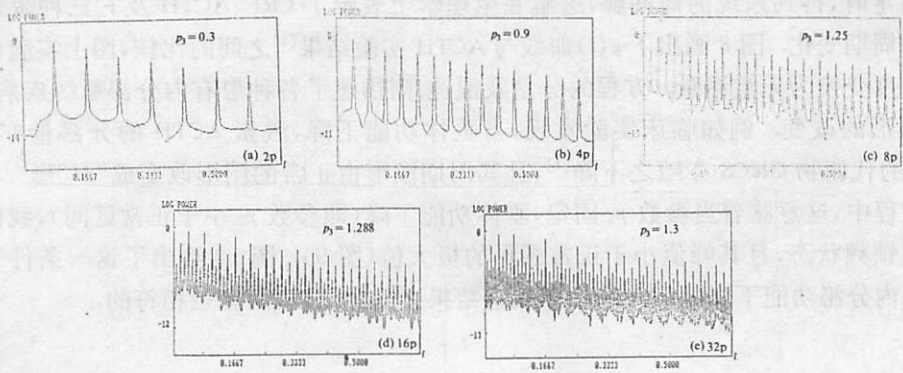


图 4 从  $2p$  到  $32p$  的功率谱

Fig. 4 Power spectra from  $2p$  to  $32p$ .

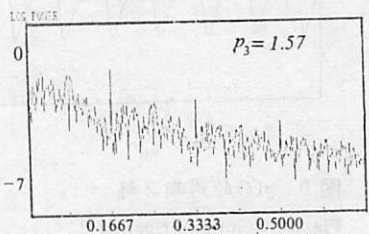


图 5 (a) 混沌态的功率谱

Fig. 5 (a) Power spectrum of the chaotic state.



(b) 混沌轨道

(b) Trajectory of the chaotic state in  $(x, y)$  plane.

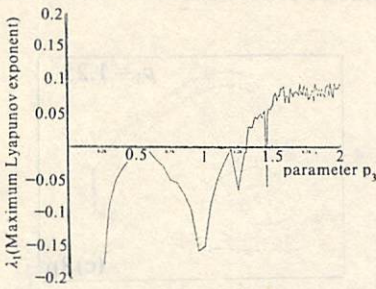


图 6 最大里雅普诺夫指数

Fig. 6 Maxomum Lyapunov exponent.

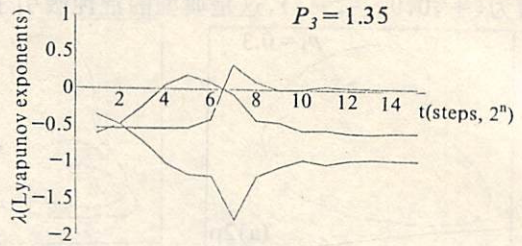


图 7 里雅普诺夫指数收敛性

Fig. 7 Temporal convergence of the Lyapunov exponents.

### 3 方程解的生理意义

从前节对方程的解及其分岔过程的讨论中可以看出,当参数  $p_3$  处于  $0.387 \sim 1.080$ ,其他参数固定时,得到系统的周期解,这解在生理学上表示了 CRF、ACTH 及 F 三种激素在正常人体中的周期变化. 图 8 画出了  $y(t)$  曲线与 ACTH 实验结果<sup>[1]</sup>之间的比较,图上实验值已通过日平均浓度变换为无量纲量. 方程的分岔及混沌 则描述了各种患有内分泌系统疾病的人,激素周期图形的改变. 例如临床实验发现,当垂体功能下降,激素 ACTH 的分泌量亦下降,作为 ACTH 的代谢物 OHCS 亦随之下降<sup>[4]</sup>,且其周期图形由正常的图形改变成“M”形<sup>[5]</sup>. 在我们的模型方程中,这意味着当参数  $p_3$  固定,垂体功能下降(即参数  $p_2$  小于正常区间),我们将得到周期 2 的锁频状态,且其峰值小于正常图形的极大值(图 9). 图 10 给出了这一条件下  $y(t)$  的理论值与内分泌功能下降的病人的临床观察结果之间的比较,两者是相符的.

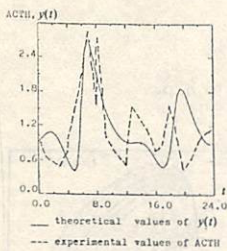


图 8  $y(t)$  的理论值与 ACTH 实验结果的比较

Fig. 8 Comparison between the gheroretical values of  $y(t)$  and experimental values of ACTH.

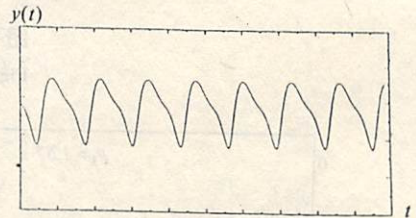


图 9  $y(t)$  的周期 2 解

Fig. 9 Solution of period 2.

临床上还看到,患有活动性 Causing 综合症(内分泌机能亢进)的病人,其激素的分泌显示了一个看起来为随机的图形<sup>[6]</sup>,不存在周期性,ACTH 及 OHCS 的平均值明显的大于正常人体中的平均值. 在我们的模型方程中,内分泌机能亢进意味着方程中的参数值过大,如当  $p_3 > 1.31$  时,系统进入混沌状态,混沌吸引子的图形,描述了这类病人激素分泌状态.

从以上分析可以看出,我们的模型较好地解释了正常与不正常人体中三种激素的分泌与调节过程.

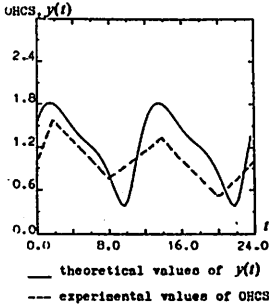


图 10  $y(t)$  的理论值与内分泌功能低下病人实验值之间的比较

Fig. 10 Comparison between the theoretical values of  $y(t)$  and pattern of a patient with adrenal cortex decesse.

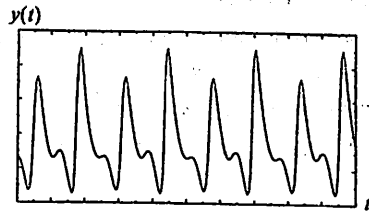


图 11 用增加参数  $p_2$  得到的  $y(t)$  的周期 4 解

Fig. 11 Solution of period 4 obtained by increasing parameter  $p_2$ .

#### 4 讨论

1 在方程组(2)中,参数  $p_1, p_2, p_3$  及  $p_4$  在方程中具有完全相似的作用. 若改变这四个参数中的任意一个,就将得到不同的周期解. 例如,当参数  $p_3 < 0.386$ ,我们会得到周期 2 的解,如果增长  $p_1, p_2$  或  $p_4$  中的任意一个参数,将仍能得到周期 4 的解,此解给出了激素的正常图形. 图 11 是一例. 图中曲线是当  $p_3 < 0.386$  时,增长  $p_2$ ,使  $p_2 = 0.9$  时得到. 由此可得出一个有意义的结论,当人体中因肾上腺皮质功能下降,而使激素分泌处于不正常状态,有可能通过改变下丘脑、垂体或中枢神经系统的功能,而使其恢复正常. 对这一系统中其他部位的异常行为,亦可进行类似的调节. 这意味着我们的模型为临床上治疗内分泌系统疾病提供了一个新的可能途径,自然,这一结论将有待于临床实验的进一步证实.

2 如果在方程组(1)的第一式中删去  $p_1 \cos \omega t$  项,方程的解将是一个类似于正弦波的稳定的周期解,亦不出现分岔序列. 这结果显然不同于人体中的正常周期图形,它预示我们,正常人体中激素分泌的昼夜节律完全来自于中枢神经系统的控制.

3 在临床实验中似乎从未观察到有大于正常周期的高周期图形出现. 我们认为其原因是由于出现高周期的参数区域比正常周期小得多,在人体中很难长时间地将这些参数保持在一个很小的范围内,换言之,内分泌系统的各部分,其机能很难长时间地稳定在一个几乎不变的水平上,因此亦无法观察到高周期图形.

本文的数值计算是在高等科学技术中心(CCAST)的 VAX-8550 机上作出的. 本工作得到中国科学院 LWTZ-1298 经费的资助.

## 参 考 文 献

- [1] Krieger D T, *J. Clin. Endocr.*, 32(1971), 266.
- [2] Feigenbaum M J, *J. Stat. Phys.*, 19(1978), 25.
- [3] Shimada I and Nagashima T, *Prog. Theor. Phys.*, 61(1979), 1605.
- [4] Demura H, *et al.*, *J. Clin. Endocr.*, 26(1966), 1297.
- [5] 施赛珠等, 上海中医药杂志, (1978), No. 1, 21.
- [6] Doe R P, *J. Clin. Endocr.*, 20(1960), 253.

## Research of a Dynamical Model for a Physiological Process

Zhang Xianwei

(Department of Physics, Graduate School of USTC)

### Abstract

Under certain assumptions a dynamical model is set up for the hypothalamus-hypophysis-adrenal cortex system. The bifurcations and chaos of this model are investigated. Taking parameter  $p_3$  in the modeling equations as a bifurcation parameter, trajectories in the phase space and corresponding power spectra from period 2 to period 32 are given. It is found that the ratios of the parameter ranges tend to Feigenbaum universal numbers. When  $p_3 \geq 1.31$ , the system goes into the chaos and the Lyapunov exponents of this system are calculated. These theoretical results explain three clinical observations.

**Key words:** self-regenerative, bifurcation, chaos

**PACS(1992):** 05.45.+b, 87.22.-q

祝贺杨振宁教授70寿辰  
In Celebration of Dr. Chen Ning  
Yang's 70th birthday

## 混沌吸引子的普适转变\*

汪秉宏

(近代物理系)

### 摘 要

二维动力学映射混沌吸引子的片结构将随耗散性的减弱以普适的方式截断,最终趋于哈密顿极限. 不稳定不变流形的异宿相交可以解释混沌吸引子片结构的突变行为, 突变点具有普适的标度, 哈密顿映射对于耗散方向的重正化理论可以给出这一普适标度.

关键词: 哈密顿混沌, 混沌吸引子, 异宿突变, 普适标度, 重正化理论.

中图法分类号: O414.19

PACS (1991): 05.45.+b

### 1 引言

三维相空间中的哈密顿流或二维平面上的保面积映射一般产生三类轨道: 椭圆型或双曲型的周期轨道; 不变环或KAM曲线; 及以KAM曲线为边界的混沌轨道. 哈密顿混沌流在彭加勒截面上的映射特征是: 混沌区是连通的, 也就是说, 对于哈密顿流或保面积映射的一条混沌轨道, 不存在分片结构.

耗散系统则不然. 3维相空间中的耗散流在彭加勒截面上产生2维耗散映射, 其渐近轨道为面积等于零的吸引子. 混沌吸引子具有无限嵌套的自相似几何结构, 其分数维数大于拓扑维数. 混沌吸引子的一个明显的特征是具有分片结构. 在一定的耗散下, 随着不可积性参数的增长, 混沌片可以通过逆倍周期分岔而逐对弥合, 最后发展为连通成一片的混沌. 然而, 数值计算表明: 在弱耗散情形, 这种片弥合的逆分岔树不是完全的, 即从多片(例如片数为 $2^m$ ,  $m$ 是某个比1大的整数)混沌直接弥合为一片混沌. 这种现象称为混沌片的截断.

本文试图讨论这样一些问题:

1992年8月10日收到.

\* 本文得到国家基础性研究攀登计划项目(非线性科学)的资助.

哈密顿系统的三类轨道如何对应于耗散系统的规则吸引子与混沌吸引子？为什么哈密顿混沌中不存在耗散混沌的分片结构？耗散混沌的片截断现象是否存在普适的标度行为？耗散混沌向哈密顿混沌的转变具有哪些普适性质？可否用重正化理论解释混沌吸引子结构的普适转变？

### 2 混沌吸引子的片结构

以如下的一个动力学系统作为研究耗散混沌向哈密顿混沌转变的范型。

一个粒子在无穷多周期势场中作阻尼运动，其运动方程是

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} = qE(x, t) \tag{1}$$

其中

$$E(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \sin(kx - n \cdot \Delta \omega t) \tag{2}$$

积分这一方程，可以化为如下的二维耗散映射<sup>[1]</sup>：

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{e^\gamma - 1}{\gamma} y_{n+1} \\ y_{n+1} = e^{-\gamma} [y_n + A \cdot \sin(2\pi x_n)] \end{cases} \tag{3}$$

对变量和参数作适当的变换，(3)式可以进一步简化为如下的耗散标准映射<sup>[2]</sup>：

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_{n+1} \\ y_{n+1} = By_n + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x_n) \end{cases} \tag{4}$$

式中：参数  $B$  与耗散性有关，参数  $K$  表征系统所受不可积扰动的强度。

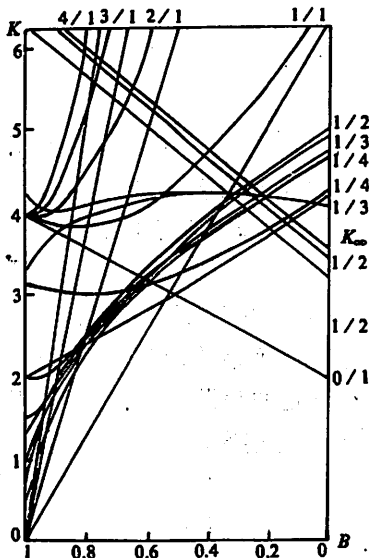


图 1 耗散标准映射周期轨道的稳定性走廊  
Fig. 1 Stability corridor of periodic orbit for dissipative standard map

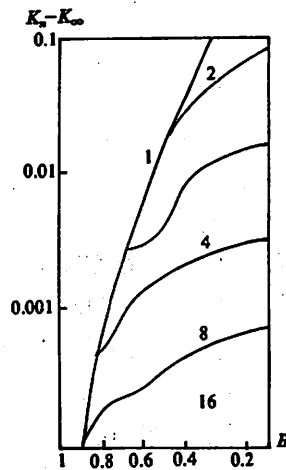


图 2 参数空间中奇怪吸引子片状结构的转变线  
Fig. 2 Critical lines of band structure for strange attractors in parameter space.

耗散标准映射的任何稳定的周期轨道在  $B-K$  双参数平面中占据一定的区域,图 1 显示了参数平面中不同转动数  $p/q$  周期轨道的稳定带的计算结果. 可以发现,任何周期轨道都存在一条可从哈密顿极限( $B=1$ )延伸到强耗散极限( $B=0$ )的稳定带. 随着  $B$  由 1 降为 0,稳定带由宽变窄,而随着周期数  $q$  的增加,稳定带非常快地变窄. KAM 轨道可以看作是无限长周期的轨道,因而任何 KAM 轨道当进入耗散系统时,其稳定带的宽度实际已变为零,这就是说,耗散系统中发现 KAM 轨道(转动数为无理数的准周期轨道)的测度为零.

我们第二个发现是:无穷多个周期轨道的稳定带仍然不能填满整个  $B-K$  参数平面,在稳定带之间留有許多空隙.  $K$  值越大,这些不为稳定带占据的空隙的面积越大. 我们猜测:把  $B-K$  平面中( $0 < B < 1, K > 0$ )所有的稳定周期带挖去所余下的部份即是混沌吸引子所存在的参数区域.

耗散标准映射混沌吸引子片状结构在参数平面中的转变线见图 2. 图中所示的计算结果表明仅有连通成一片的混沌吸引子可以延伸到哈密顿极限. 参数  $B$  是耗散标准映射的雅可比行列式的值. 任何有限  $2^n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 片混沌都只能延伸到一个临界雅可比参数  $B_n$ , 在  $B_n > B > B_{n-1}$  的区域中,  $2^n$  片混沌吸引子可以突变为 1 片混沌吸引子. 这一事实解释了哈密顿混沌为何总是连通的. 当从  $B=0$  过渡到  $B=1$  时,混沌吸引子的逆分岔序列被逐次截断,在  $B > B_n$  的区域,  $2^n$  片 ( $k=1, 2, \dots, n$ ) 的混沌吸引子是不存在的. 当最后到达哈密顿极限  $B=1$  时,所有的逆分岔序列消失,仅有连通成一片的混沌吸引子能够存在.

### 3 临界点 $J_n$ 的普适性

混沌吸引子片状结构的转变行为并非耗散标准映射特有. 图 3 显示了一般的二维耗散迪伏格赖欧 (De Vogelaere) 映射

$$\begin{cases} x_{n+1} = -Jy_n + f(K, x_n) \\ y_{n+1} = x_n - f(K, x_{n+1}) \end{cases} \quad (5)$$

的混沌吸引子的片状结构转变的计算结果. 对于一大类函数  $f(K, x)$ , 例如:

$$f = -Kx + (1 + K)x^2 \quad (6)$$

或者

$$f = K \sin(\pi x) \quad (7)$$

计算结果均表明临界点  $J_n$  的数值遵循如下的标度关系:

$$J_n = \sqrt{J_{n-1}} \quad (8)$$

我们对更多的非线性耗散系统进行了计算,其中有受驱阻尼摆:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\gamma y - \sin x - K \sin t \end{cases} \quad (9)$$

其雅可比参数为  $J = e^{-2\pi\gamma}$

有在驻波场中作阻尼运动的带电粒子或在交变磁场中作阻尼振荡的磁针:

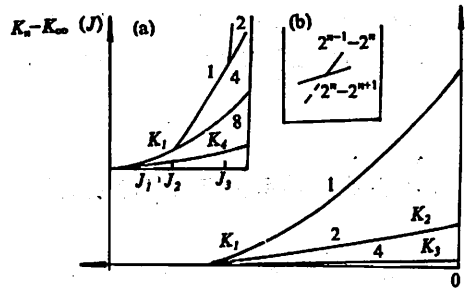


图 3 De Vogelaere 映射奇怪吸引子片状结构的转变线

Fig. 3 Critical lines of band structure for strange attractors of De Vogelaere map



$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\gamma y + K \sin(2\pi t) \cos(2\pi x) \end{cases} \quad (10)$$

其雅可比参数是  $J=e^{-\gamma}$

还有垂直振动桌面上的反跳弹球,这一系统的运动方程可以化为如下的二维映射:

$$\begin{cases} K \cos(\omega x_{n+1}) = K \cos(\omega x_n) + y_n(x_{n+1} - x_n) - \frac{1}{2}g \cdot (x_{n+1} - x_n)^2 \\ y_{n+1} = -(1+b)K \omega \sin(\omega x_{n+1}) + b[g \cdot (x_{n+1} - x_n) - y_n] \end{cases} \quad (11)$$

这一映射的雅可比行列式是非均匀的,但可以通过非线性坐标变换

$$x \rightarrow x + y/g; \quad y \rightarrow y^2/2 + K g \cos(\omega x) \quad (12)$$

而将映射(11)化为均匀雅可比的映射. 变换后的映射的雅可比为:  $J=b^2$

四个耗散系统的混沌吸引子的片结构突变临界点  $J_c$  的计算结果见表 1 所示<sup>[3]</sup>.

表 1 混沌吸引子片结构突变临界点  $J_c$

Table 1 The critical point value of band structure for chaotic attractor

动力学系统	$J_0$	$J_1$	$J_2$
耗散标准映射	0.45~0.46	0.66~0.67	0.81~0.82
受驱阻尼摆	0.45~0.46	0.66~0.67	0.81~0.83
驻波场中的粒子	0.49~0.50	0.66~0.68	0.81~0.82
垂直振动桌面上的反跳弹球	0.475~0.48	0.665~0.67	0.815~0.82

从表 1 中可见,不同耗散系统的临界点  $J_c$  都满足由(8)式表示的标度律. 不仅如此,临界点  $J_c$  的数值本身渐近地也是普适的. 随着  $n$  的增加,不同非线性系统的  $J_c$  值很快敛到相同的数值.

#### 4 从不变流形异宿相交看混沌吸引子片结构的突变

混沌吸引子的片结构转变与不稳定不动点的不变流形的异宿相交有密切的关系,因而从不变形的异宿相交可以理解片结构的突变行为. 周期  $2^{n-1}$ ,  $2^n$  和  $2^{n+1}$  不动点(分别以  $n-1$ ,  $n$  和  $n+1$  表示)和稳定不变流形(以  $S$  表示)与不稳定不变流形(以  $U$  表示)的流向及相交情况的示意图见图 4. 周期  $2^n$  不稳定流形与周期  $2^{n+1}$  稳定流形总是相交的. 但是,周期  $2^n$  不稳定流形是否与周期  $2^{n-1}$  稳定流形相交,则取决于强度参数  $K$  的大小. 仅当  $K$  超过某一阈值,这种异宿相交才能发生,如图 4 中的虚线所示. 异宿相交的起始参数  $K$  称为异宿突变点,可以在  $J-K$  参数平面中画出不变流形的各异宿突变线,如图 5 所示. 相应于图 5 的计算结果,可以画出各不变流形的流向及相交的“开关”示意图,见图 6. 图中的水平方向箭头表示各不动点的稳定流形通过不动点本身与不稳定流形相连,而两个相邻层次之间的斜向箭头则表示不同周期不动点之间的异宿相交. 图 6a 表示对于所有的周期  $2^m$  ( $m < n$ ) 不动点,这类异宿相交尚未发生,而对于所有的周期  $2^m$  ( $m > n$ ) 已实现了异宿相交的情形,这构造出  $2^n$  片混沌吸引子. 当虚线所示的箭头连通时,  $2^n$  片混沌吸引子就弥合为  $2^{n-1}$  片混沌吸引子,这相应于  $K$  值增加而高于图 5 中的不变流形异宿相交线  $h_{n-1}$ , 图 6b 则表示当  $J_{n+1} > J > J_n$  时混沌吸引子会突变为一片混沌的情形. 在这一区域中,异宿突变线  $h_{n+1}$  高于所有其他异宿突变线,因而所有比  $2^{n+1}$  高的周期及

比  $2^n$  低的周期异宿相交都已经发生时, 周期  $2^n$  与  $2^{n+1}$  之间的异宿相交尚可未发生, 一旦  $K$  值高于异宿突变线, 这最后一种异宿相交立即发生, 从而使  $2^{n+1}$  片混沌吸引子立即弥合为 1 片混沌. 这就是在  $J_{n+1} < J < J_n$  的区域中  $2^n$  ( $m=1, 2, \dots, n$ ) 片混沌吸引子不存在的原因. 因此, 当  $J > J_n$ , 逆分岔序列从 2 片到  $2^n$  片的这一段被截去了.

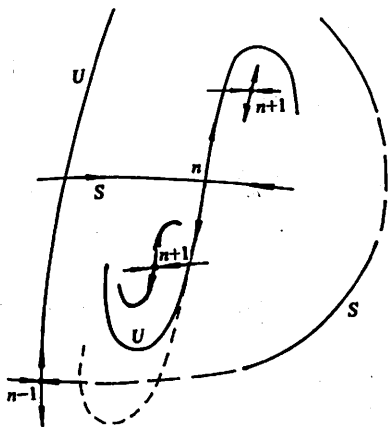


图 4 周期  $2^{n-1}$ ,  $2^n$  和  $2^{n+1}$  不动点的稳定不变流形与不稳定不变流形的流向及相交情况

Fig. 4 Flow and crossing of stable invariant manifolds for period  $2^{n-1}$ ,  $2^n$ , and  $2^{n+1}$  fixed points

### 5 混沌吸引子片结构突变普适标度的重正化理论

混沌吸引子片结构突变的临界点  $J_n$  所遵循的普适标度关系(8)式可以写作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_n - J_{n-1}}{J_{n+1} - J_n} = 2 \quad (13)$$

现在来证明临界点  $J_n$  的这一渐近收敛标度是重正化算符的本征值.

对于保面积映射  $T$  的倍周期分岔序列, 可以引入重正化标符  $R$ :

$$RT = B \cdot T \cdot T \cdot B^{-1} \quad (14)$$

其中

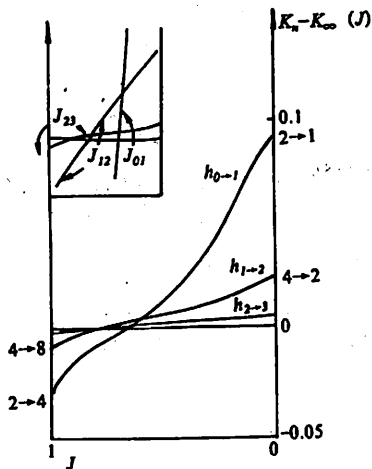


图 5 不变流形的异宿相交突变线  
Fig. 5 Heteroclinic crisis lines of invariant manifolds

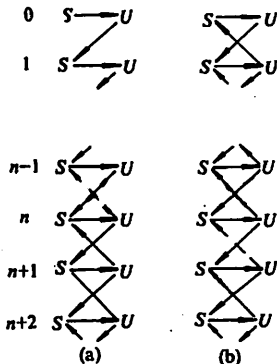


图 6 各不动点不变流形的流向及相交示意图  
Fig. 6 Diagram explaining flows and heteroclinic intersections between invariant manifolds of  $2^k$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$  orbits.

$$B = \begin{bmatrix} a_u & 0 \\ 0 & \beta_u \end{bmatrix} \quad (15)$$

是标度矩阵.  $R$  的不动点映射  $T^* = B \cdot T^* \cdot T^* \cdot B^{-1}$  是一个普适的保面积映射, 其雅可比为

$J(T^*)=1$ , 标度因子为  $\alpha_u = -4.018077\dots$ ,  $\beta_u = 16.363897\dots$ , 在保面积映射的范围内, 不动点  $T^*$  的本征扰动  $\varepsilon T_u$  与相应的本征值  $\lambda_u$  由下列线性化方程确定:

$$R(T^* + \varepsilon T_u) = T^* + \varepsilon \lambda_u T_u \tag{16}$$

相关本征值的大小给出哈密顿系统的倍周期分岔参数  $K$ . 序列的收敛标度:

$$\lambda_u = \delta_u = 8.721097\dots$$

如果不局限于保面积映射范围中的扰动, 而考虑耗散方向的本征扰动, 则重正化算符的本征方程是

$$R(T^* + \varepsilon T_J) = T^* + \varepsilon \lambda_J T_J \tag{17}$$

使用解析语言(如 Reduce 或 MACSYMA)可在计算机上求解这一泛函方程的本征问题. 假设耗散方向的普适本征映射  $T_J$  为

$$T_J(x, y) = \left( \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} x^i y^j, \sum_{i,j=0}^{\infty} b_{ij} x^i y^j \right) \tag{18}$$

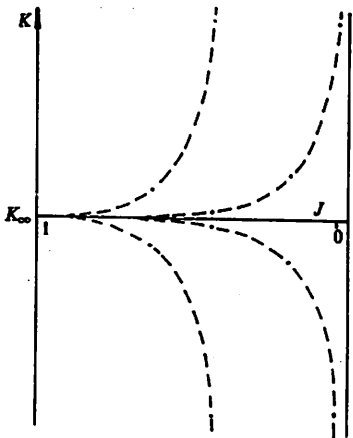
在四位有效数字的精度内求得耗散方向的本征值  $\lambda_J = 2.000$ , 这是混沌吸引子片结构突变普适标度基于重正化理论的证明<sup>[3]</sup>.

因此, 倍增重正化算符  $R$  对于不动点  $T^*$  有两个独立的本征方向. 一般的扰动可以看作是哈密顿方向的本征扰动  $T_u$  与耗散方向本征扰动  $T_J$  联合扰动的结果, 相应的本征方程是

$$R(T^* + \varepsilon_u T_u + \varepsilon_J T_J) = T^* + \delta_u \cdot \varepsilon_u T_u + 2\varepsilon_J T_J \tag{19}$$

在  $J-K$  参数空间中, 由重正化步骤

$$K_{\infty} - K_n \rightarrow \delta_u \cdot (K_{\infty} - K_{n+1}); \quad 1 - J_n \rightarrow 2(1 - J_{n+1}) \tag{20}$$



所得到的一系列临界点  $(J_n, K_n)$  可以连接成扇形的临界曲线, 如图 7 所示<sup>[3]</sup>. 扇形线的方程是  $K_{\infty} - K \sim (1 - J)^{\nu}$ , 其中临界指数  $\nu$  的数值为

$$\nu = \ln \delta_u / \ln 2 = 3.12451\dots$$

这又是一个普适常数. 扇形线可以看作是 2 维非线性映射(包括哈密顿映射和耗散映射)的函数空间中倍增重正化算符不动点的不稳定不变流形, 它描写了混沌吸引子片结构的普适转变. 通过  $K = K_{\infty}$  (倍周期分岔累积点) 的  $J$  轴实际上是一条特殊的扇形临界线, 它的一端是哈密顿映射的重正化不动点  $T^*$ , 另一端则是一维线段迭代(强耗散极限)的重正化不动点:

$$g(x) = \alpha_D g[g(x/\alpha_D)] \equiv R[g(x)] \tag{21}$$

其中  $\alpha_D = -2.50290785\dots$  是耗散系统的标度因子. 一维映射重正化的本征值给出耗散系统倍周期分岔序列参数的收缩标度  $\delta_D = 4.6692016\dots$

图 7 一般二维非线性映射重正化扇形临界曲线

Fig. 7 Renormalization fanlines of general two dimensional nonlinear map.

## 6 结论

我们预期上述混沌吸引子的片结构突变对于一般的非线性系统都是成立的,在实验系统中,混沌吸引子可以通过频谱的观察而确定,单片的混沌除了宽的噪声谱之外只在基频处有一个峰值,而双片的混沌将在半基频处出现次高峰,等等.因此,次谐频的峰数与混沌吸引子的片数直接有关.

随着不可积性参数在实验中的增长,非线性系统将经历一个倍周期分岔序列从有序变为混沌,但混沌吸引子一般是分片的,混沌片数的减少遵从逆的倍分岔序列.本文的研究结果又告诉我们,逆序列将在某个  $2^n$  片吸引子处被截断而突变为单片的混沌, $n$  的大小仅仅取决于雅可比参数  $J$ ,这就是说混沌吸引子的片结构的普适转变完全决定于非线性系统的耗散性.

## 参 考 文 献

- [1] Wang Binghong (汪秉宏), *Commun. Theor. Phys.* 13(1990), 271.  
 [2] Schmidt G and Wang Binghong (汪秉宏), *Phys. Rev.* A32(1985), 2994.  
 [3] Chen C, Gyorgyi G, Schmidt G, *Phys. Rev.* A34(1986), 2568. A35(1987), 2660. A36(1987), 5502.

## Universal Transition of Chaotic Attractors

Wang Binghong

(Department of Modern Physics)

## Abstract

The band structure of chaotic attractors for two dimensional dynamical mapping is truncated in a universal way as the dissipation is reduced so that the system approaches its Hamiltonian limit. The crisis behavior of band structure of chaotic attractors can be explained by heteroclinic crises of unstable invariant manifold. There is a universal scaling law for critical crisis points which can be derived from the dissipative generalization of the Hamiltonian renormalization theory.

**Key words:** Hamiltonian chaos, chaotic attractor, heteroclinic crisis, universal scaling, renormalization theory

PACS(1992): O5.45. +b

祝贺杨振宁教授70寿辰  
In Celebration of Dr. Chen Ning  
Yang's 70th birthday

# Solutions to Zamolodchikov's Tetrahedral Equation Without Spectral Parameters

Zheng Qingrong      Zhang Dehai

(Department of Physics, Graduate School of USTC)

## Abstract

With the help of computer symbolic manipulation [14], spectral parameter-free solutions to Tetrahedral equation, which is a multi-dimensional generalization of Yang-Baxter Equation by Zamolodchikov [4], are obtained.

**Key words:** Yang-Baxter equation, Tetrahedral equation.

**PACS (1992):** 0290+p

It is well known that the integrable models in quantum field theory and in statistical physics are a type of the most important problems in physics. In the case of  $1+1$  dimension integrable models a common feature occurs in triangular or Yang-Baxter Equation (YBE)<sup>[1,2]</sup>, which comes from the commuting condition of transfer matrices in lattice spin systems and from the consistency condition of factorizability of S-matrix in two dimensional quantum field theory. Also YBE has a direct relation to the representation of braid group<sup>[3]</sup> which can give the invariants of three dimensional manifolds. So YBE is a basic equation in both physics and mathematics. Because two, three or multi-dimensional integrable models are the most interesting, it is natural that the multi-dimensional generalization of YBE should be studied.

There are two series of multi-dimensional generalization of YBE:

a) One follows from Zamolodchikov<sup>[1]</sup>, then has been developed by Baxter<sup>[5]</sup>, Bazhanov,

Stroganov<sup>[6]</sup> and Maillard<sup>[7,8]</sup> etc. The tetrahedral equation was named for three dimensional lattice spin system or 2+1 quantum field theory. To our knowledge the only solution with three spectral parameters strictly proved by Baxter is the solution to tetrahedral equation conjectured and proposed by Zamolodchikov. This solution may have negative Boltzman weights and in some sense is a three dimensional free fermion model<sup>[6,13]</sup>.

b) The other follows from Frenkel and Moore<sup>[9]</sup>. This generalization is more similar to YBE and has a relation to arrangements of hyperplanes, higher braid groups<sup>[10]</sup>. The n-simplex equations are named. The only solution without spectral parameters to quantum 3-simplex equation is given by Frenkel and Moore who also proposed many interesting problems in<sup>[9]</sup>.

In<sup>[11]</sup>, we studied the multi-dimensional generalization of YBE by Frenkel and Moore who have define both classical and quantum n-simplex equations. The quantum 3-simplex equation reads

$$R_{123}R_{124}R_{134}R_{234} = R_{234}R_{134}R_{124}R_{123} \tag{1}$$

where  $R \in \text{End}(V \otimes V \otimes V)$  for some vector space  $V$ , and  $R_{123} = R \otimes 1$ ,  $R_{234} = 1 \otimes R$  etc. as in YBE. Three new solutions to quantum 3-simplex equation were given in <sup>[11]</sup>. For example, the following matrix is a solution to eq. (1):

$$R_2^{(3)} = \begin{bmatrix} q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q\left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)^2\right) & 0 & p\left(\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 1\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & q\left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)^2\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{p^2}{q} & 0 & p\left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)^2\right) & q\left(\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 1\right) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{p^2}{q} & p\left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{p^2}{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{p^3}{q^2} \end{bmatrix} \tag{2}$$

In this paper, we focus on the multi-dimensional generalization of YBE by Zamolodchikov. According to <sup>[5]</sup>, The tetrahedral equation can be written out in the form of Boltzman weight

$$\begin{aligned} & \sum_d W(c_1 | a_1 b_1 b_2 | d c_2 c_3 | b_3) W'(a_3 | c_1 c_4 c_6 | b_4 b_2 b_1 | d) W''(c_4 | b_1 a_2 b_4 | c_5 d c_3 | b_3) \\ & W''(c_6 | b_2 a_1 b_4 | c_5 d c_2 | b_3) = \\ & \sum_d W''(a_3 | c_1 d c_4 | a_2 b_1 a_4 | c_3) W''(a_3 | c_1 d c_4 | a_1 b_2 a_4 | c_2) W'(d | a_1 a_2 a_1 | c_5 c_2 c_3 | b_3) \\ & W(a_3 | d c_4 c_6 | b_4 a_1 a_2 | c_5) \end{aligned} \tag{3}$$

Using the following corresponding relation<sup>[7]</sup>

$$W(a | efg | bcd | h) \leftarrow \rightarrow S_{acfd}^{bghd} S_{aeff}^{cbcd} S_{afgh}^{cbcd} \tag{4}$$

we have

$$S_{123}^{456} S_{145}^{236} S_{234}^{156} S_{345}^{126} = S_{234}^{156} S_{245}^{136} S_{145}^{236} S_{123}^{456} \tag{5}$$

and we can cast the Zamolodchikov's solution into the matrix form

$$\begin{bmatrix} S_{\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow} & S_{\pm\pm\pm\pm} & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow} & S_{\pm\pm\pm\downarrow} & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{\uparrow\uparrow\uparrow\pm} & S_{\pm\pm\pm\pm} & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{\uparrow\uparrow\downarrow\pm} & S_{\pm\pm\downarrow\pm} & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & S_{\uparrow\uparrow\pm\pm} & S_{\pm\uparrow\pm\pm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & S_{\uparrow\downarrow\pm\pm} & S_{\pm\downarrow\pm\pm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & S_{\uparrow\pm\pm\pm} & S_{\pm\pm\pm\pm} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & S_{\uparrow\pm\pm\downarrow} & S_{\pm\pm\downarrow\pm} \end{bmatrix} \quad (6)$$

where

$$\begin{aligned} S_{\pm\pm\pm\pm} &= P_0 + Q_0, S_{\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow} = P_0 - Q_0, S_{\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow} = S_{\pm\pm\pm\downarrow} = R_0 \\ S_{\uparrow\uparrow\uparrow\pm} &= S_{\pm\pm\pm\pm} = R_1, S_{\uparrow\uparrow\downarrow\pm} = S_{\pm\uparrow\pm\pm} = R_2, S_{\uparrow\downarrow\pm\pm} = S_{\pm\downarrow\pm\pm} = R_3 \\ S_{\pm\pm\pm\pm} &= \pm(P_1 + Q_1), S_{\pm\pm\pm\downarrow} = \pm(P_2 + Q_2), S_{\pm\uparrow\pm\pm} = \pm(P_3 - Q_3) \\ S_{\uparrow\uparrow\pm\pm} &= \pm(P_3 + Q_3), S_{\uparrow\downarrow\pm\pm} = \pm(P_2, -Q_2), S_{\uparrow\pm\pm\pm} = \pm(P_1 - Q_1) \end{aligned}$$

In the above equations

$$P_0 = 1, \quad P_i = t_j t_k, \quad Q_0 = t_0 t_1 t_2 t_3, \quad Q_i = t_0 t_i$$

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{s_0}{c_1 c_2 c_3}, \quad R_i = \frac{s_i}{c_0 c_j c_k}, \quad t_i = \sqrt{tg \frac{a_i}{2}}, \quad s_i = \sqrt{\sin \frac{a_i}{2}}, \quad c_i = \sqrt{\cos \frac{a_i}{2}} \\ 2\alpha_0 &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \pi, \quad \alpha_i = \theta_i - \alpha_0, \quad \alpha_0 = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \end{aligned} \quad (7)$$

where  $i, j, k$  are a cycle of 1, 2, 3

In the following discussions we will not consider the spectral parameters. Defining

$$R_{ijk} = \sum S_{\beta_1^1 \beta_2^2 \beta_3^3}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} I^{(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_1 \beta_1}^{(i)} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_2 \beta_2}^{(j)} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_3 \beta_3}^{(k)} \otimes \cdots \otimes I^{(6)} \quad (8)$$

where

$$(e_{\alpha\beta})_{i,j} = \delta_{\alpha i} \delta_{\beta j}, \text{ we have}$$

$$R_{123} = \sum S_{\beta_1^1 \beta_2^2 \beta_3^3}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} e_{\alpha_1 \beta_1}^{(1)} \otimes e_{\alpha_2 \beta_2}^{(2)} \otimes e_{\alpha_3 \beta_3}^{(3)} \otimes I^{(4)} \otimes I^{(5)} \otimes I^{(6)}$$

and so on. The tetrahedral equation can be written as

$$R_{123} R_{145} R_{246} R_{356} = R_{356} R_{246} R_{145} R_{123} \quad (9a)$$

or

$$R_{124} R_{135} R_{236} R_{456} = R_{456} R_{236} R_{135} R_{124} \quad (9b)$$

Using symbolic manipulation, it is easy to prove that eq. (9a) and eq. (9b) are equal for the following ansatz

$$\begin{bmatrix}
 R_{11} & R_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 R_{21} & R_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & R_{33} & R_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & R_{43} & R_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & R_{55} & R_{56} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & R_{65} & R_{66} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{77} & R_{78} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{87} & R_{88}
 \end{bmatrix} \tag{10}$$

From eq. (8) it is clear that the tetrahedral equation is totally different from Frenkel and Moore's 3-simplex equation. Considering that eq. (5) is symmetric, we solve eq. (9) with symmetric ansatz of eq. (10). This ansatz leads to a system of equations with 12 variables, and each equation of the fourth order. There are many solutions. We list only the following two interesting ones:

$$R_1 = \begin{bmatrix}
 0 & R_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 R_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & R_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & R_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{34} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & R_{34} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{12} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{12} & 0
 \end{bmatrix} \tag{11}$$

and

$$R_2 = \begin{bmatrix}
 R_{11} & R_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 R_{34} & R_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & R_{11} & R_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & R_{34} & R_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & R_{11} & R_{34} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & R_{34} & R_{11} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{11} & R_{34} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_{34} & R_{44}
 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Some problems to be solved:

- 1) Complete solutions of eq. (9);
- 2) Baxterization [12] of solutions of eq. (9);
- 3) Their relation to the three dimensional lattice models.

**Acknowledgments**

We would like to thank Y. B. Ding, B. H. Zhao, F. C. Pu and B. Y. Hou for discussion and Y. Q. Han for her help in using the computer. This work was partially supported by the Foundation of National Education Committee of China.



## References

- [ 1 ] Jimbo M ed. ,1990, Yang-Baxter Equation in Integrable Systems(Singapore, World Scientific).
- [ 2 ] Baxter R J, 1982, Exactly Solved Models in Statistical Mechanics, (London, Academic Press).
- [ 3 ] Wadati M and Deguchi T, *Phys. Reports*, 180(1989), 247.
- [ 4 ] Zamolochikov A B, *Commun. Math. Phys.*, 79(1984), 489.
- [ 5 ] Baxter R J, *Physica*, D18(1986), 321 and references therein.
- [ 6 ] Bazhanov V V and Stroganov Y G. *Nucl. Phys.*, B230[FS10](1984), 435
- [ 7 ] Bellon M P, Maillard J M and Viallet C, *Phys. Lett.*, B260(1991), 87.
- [ 8 ] Maillet J M, *Phys. Lett.*, A134(1989), 21.
- [ 9 ] Frenkel I and Moore G, *Commun. Math. Phys.*, 138(1991), 259.
- [ 10 ] Yu. I. Manin and V. V. Schechtman, (1989) in Adv. Studies in Pure Math. vol. 17, p. 289.
- [ 11 ] Qing-Rong Zheng and De-Hai Zhang, Solutions of Quantum 3-Simplex Equation Without Spectral parameters, to be published in *Phys. Lett. A* (1992).
- [ 12 ] Jones V F R *Int. J. of Mod. Phys B*4(1990), 701.
- [ 13 ] Baxter R J and Quispel G R W, *J. Statistical Phys.*, 58(1990), 411.
- [ 14 ] Wolfram S, 1988, *Mathematica*, (Addison-Wesley Pub. ).

## Zamolodchikov 的四面体方程的无谱参数解

郑庆荣 章德海

(中国科学技术大学研究生院物理部, 北京)

摘 要

Zamolodchikov 的四面体方程是 Yang-Baxter 方程的一种多维广义化. 我们使用计算机符号运算得到了四面体方程的两个无谱参数解.

关键词: 杨-Baxter 方程, 四面体方程.

中图法分类号: O411 · 1

祝贺杨振宁教授70寿辰  
In Celebration of Dr. Chen Ning  
Yang's 70th birthday

# 混沌动力学和湍流的统计理论

钱 俭

(中国科技大学研究生院物理部,北京)

## 摘 要

湍流是一个非线性复杂大系统,精细地研究其奇异吸引子的几何结构和动力学行为是不可能和不必要的,必须进行统计研究.湍流具有结构这一发现并不否定统计研究的必要性和合理性.混沌动力学为在更高层次上发展湍流统计理论奠定了基础.

关键词:混沌、湍流、奇异吸引子、统计理论

中图法分类号:O357.5

PACS (1992): 47.25-c

湍流研究具有深远的科学意义和重大的实用价值.湍流是一个大量(各种尺度的)自由度充分激发的非线性耗散系统,并且远离“热力学平衡态”,是物理学的有名难题.在某种意义上讲,湍流研究的历史是对湍流难题的复杂性和困难程度逐步认识的历史.长期以来,人们应用各种方法和工具研究湍流难题:经验性的工程方法和流体力学、重整化及非平衡统计力学等理论物理方法,各种实验测量技术和应用超级巨型计算机的直接数值模拟,等等.非线性科学的迅速兴起,特别是非线性动力学系统混沌的研究,不仅使人们对层流-湍流转换机理的认识有了重大的突破性进展,而且为在更高层次上发展湍流统计理论奠定了基础.

## 1 流体力学和非线性动力学描述方法

在流体力学中,采用各种场量(速度场、压强场和温度场等)描述湍流的(瞬时)状态;而运

1992年9月17日收到.

\* 得到国家自然科学基金和国家基础研究项目“非线性科学”的资助

动方程是这些场量满足的偏微分方程:连续方程、Navier-Stokes(N-S)方程和对流-扩散方程. 它们分别是物质守恒、动量守恒和能量守恒这些物理学基本规律的数学表示. 而在非线性动力学中,系统的状态用对应系统相空间中一个点或向量的一组状态参数来描述,运动方程是关于这些状态参数的常微分方程组.

为了应用非线性动力学系统混沌理论研究湍流,最好能把传统的流体力学描述方式转换成等价的非线性动力学描述方式. 为此采用一组独立的模态参数  $X_i (i=1, 2, 3, \dots)$  描述湍流速度场,它实质上是速度场的福氏变换的某种线性组合. 可以证明,在均匀湍流情况下,N-S 方程可化成下列标准的非线性动力学形式

$$\frac{d}{dt} X_i = -\nu_i X_i + \sum_{j,m} A_{ijm} X_j X_m \quad (1)$$

这里  $\nu_i > 0$ ,  $-\nu_i X_i$  项对应 N-S 方程中的粘性项,  $A_{ijm}$  是湍流模态间的非线性相互作用系数,而  $\sum_{j,m} A_{ijm} X_j X_m$  是 N-S 方程中对流项和压强项之和. 关于(1)式的推导,请阅读文献[1]和[2]. 文献[3]给出了把湍流标量场(温度场和浓度场)的对流-扩散方程化为标准的非线性动力学形式的推导过程.

式(1)表明,湍流是一个二次非线性动力学系统. 湍流相空间中每一点或态按(1)式演化,则可以证明,其相体积按下列规律变化,

$$V(t) = V(0)e^{-\lambda t}, \lambda = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \dots > 0 \quad (2)$$

即湍流是一个耗散系统. 因而,长时间演化后,湍流在其相空间中的运动轨道最终被吸引到一个(奇异)吸引子上运动.

## 2 湍流的维数

湍流的维数  $N$  指描述湍流的独立变数  $X_i$  的数目,也就是湍流相空间的维数. 维数  $N$  的大小表示湍流中激发的自由度的多少. 前苏联科学家 Landau 对湍流维数  $N$  作了如下估计<sup>[4]</sup>,

$$N \approx (L/\eta)^3 \approx R_e^{9/4} \quad (3)$$

称为 Landau 维数. 这里  $L$  是容纳湍流的物理空间区域的特征尺度,  $\eta$  是 Kolmogorov 尺度,  $R_e$  是以  $L$  为特征尺度的 Reynolds 数. 对于典型的充分发展湍流, Landau 维数  $N = 10^{10} - 10^{20}$ , 是一个非常大的数. 湍流是一个大系统.

N-S 方程是场量的偏微分方程,严格地讲,湍流是一个无限维动力学系统,湍流的状态空间是一个无限维 Hilbert 空间. Te'mam 等人的工作表明<sup>[5]</sup>,湍流在其无限维 Hilbert 空间中的运动轨道最终被吸引到一个有限维的(奇异)吸引子上,这时湍流可以作为有限维动力学系统进行研究,湍流状态可用有限个参数描述. 这个无限维 Hilbert 空间中的有限维奇异吸引子的维数的上确界为  $R_e^{9/4}$ ,正好与 Landau 的估计(3)式是一致的. 事实上,由于粘性的作用,湍流中尺度小于 Kolmogorov 尺度  $\eta$  的自由度没有激发,激发的自由度数目虽然很大,但仍然是个有限数.

### 3 湍流奇异吸引子的统计研究

目前混沌动力学的主要研究对象是简单的低维动力学系统,如 Lorenz 系统的维数为 3. 简单的低维动力学系统的奇异吸引子已非常复杂,须采用反映奇异吸引子上混沌轨道的统计性质的 Lyapunov 指数、Kolmogorov 熵和分维等进行描述,如前节所述,湍流是个大系统,其维数高达  $10^{10} - 10^{20}$ ; 因此,精细地研究湍流奇异吸引子的几何结构和动力学行为是不可能的,也是不必要的,而需要采用统计方法,进行不同层次的粗粒化,发展相应的统计理论.

湍流是远离热力学平衡态的耗散系统,因而经典的平衡态统计力学不能简单地搬用来研究湍流的统计性质. 经典平衡态统计力学的历遍理论(ergodic theory)研究保守系统常能曲面上运动轨道的统计性质,导致微正则系综这一基本假设. 从混沌动力学观点看,湍流统计理论应是一种非线性耗散大系统的非平衡统计力学,对应的历遍理论研究湍流奇异吸引子上混沌轨道的统计性质.

根据 KAM(Kolmogorov-Arnold-Moser)定理,保守系统常能曲面上的轨道一般不是历遍的(准历遍的). 混沌动力学的研究表明<sup>[6],[7]</sup>,非线性耗散系统奇异吸引子上的混沌轨道一般是历遍的(准历遍的),并且具有“混合”(mixing)的特性. 因而非线性耗散系统(如湍流)奇异吸引子上的轨道的历遍理论比之经典的保守系统常能曲面上轨道的历遍理论具有较合理的动力学基础. 混沌动力学说明<sup>[7]</sup>,湍流的“随机性”(randomness)不是外加的“先验知识”,而是运动规律(N-S 方程)的必然结果. 既然湍流是一种(确定性时间-空间)混沌,就必然具有一定的结构,而不是简单的无结构的噪音型随机场. 混沌动力学为在更高层次上发展湍流统计理论奠定了基础.

### 4. 概率密度函数(PDF)

原则上讲,统计性质可以通过适当的 PDF(probability density function)计算得到. 湍流在其奇异吸引子上的 PDF 是

$$P(X) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \delta(X - Y(t)) dt \quad (4.1)$$

这里  $X \equiv (X_1, X_2, X_3, \dots)$  是湍流相空间的态向量,  $Y(t)$  是湍流奇异吸引子上的运动轨道,  $\delta$  是高维( $N$  维)Dirac  $\delta$ -函数. 数学家可能举出一些例子说明(4.1)式定义的  $P(X)$  是不唯一和不连续的. 真实的物理系统存在热噪音,湍流的热噪音根源于组成流体的微观粒子(分子)的热运动. 这种热噪音使  $P(X)$  粗粒化,从而保证  $P(X)$  的唯一性和光滑性. 因而 Kolmogorov 建议采用下列定义,

$$P(X) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \delta(X - Y(t; \epsilon)) dt \quad (4.2)$$

这里  $Y(t; \epsilon)$  表示附加热噪音随机力后奇异吸引子上的运动轨道,  $\epsilon$  是随机力的幅度.

根据混沌动力学,由(4)式定义的 PDF 满足 Frobenius-Perron 方程,它等价于下列非平衡统计力学的定常(stationary)Liouville 方程,

$$\bar{L}P(X) = 0 \quad (5.1)$$

这里

$$\bar{L} = \sum_i \left[ -\gamma_i \frac{\partial}{\partial X_i} X_i + \sum_{j,m} A_{ijm} X_j X_m \frac{\partial}{\partial X_i} \right] \quad (5.2)$$

是对应运动方程(1)式的 Liouville 算子. Liouville 算子很复杂, 我们无法求解 Liouville 方程(5)式. 采用含有无限个可调参数  $\eta_i (i=1, 2, \dots)$  的 Fokker-Planck 算子  $\bar{L}^{(0)}$  作为 Liouville 算子  $\bar{L}$  的零级近似, 并控制这无限个可调参数  $\eta_i$  使差算子  $\delta\bar{L} \equiv \bar{L} - \bar{L}^{(0)}$  尽量“小”, 即, 使适当定义的距离函数

$$I(\eta_1, \eta_2, \dots) = \|\bar{L} - \bar{L}^{(0)}\| = \|\delta\bar{L}\| \quad (6.1)$$

尽量地小. 因而  $\eta_i$  的最佳值满足下列极值条件,

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i} I(\eta_1, \eta_2, \dots) = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (6.2)$$

按照微扰法, Liouville 方程(5)的解为

$$P(X) = P^{(0)} + P^{(1)} + P^{(2)} + \dots \quad (7.1)$$

$P^{(0)}$ ,  $P^{(1)}$  和  $P^{(2)}$  满足下列方程,

$$\bar{L}^{(0)}P^{(0)} = 0 \quad (7.2)$$

$$\bar{L}^{(0)}P^{(1)} = -\delta\bar{L}P^{(0)} \quad (7.3)$$

$$\bar{L}^{(0)}P^{(2)} = -\delta\bar{L}P^{(1)} \quad (7.4)$$

Fokker-Planck 算子  $\bar{L}^{(0)}$  比 Liouville 算子  $\bar{L}$  简单, 因而可以求解(7.2)–(7.4)式确定  $P^{(0)}$ ,  $P^{(1)}$  和  $P^{(2)}$ , 得到湍流在奇异吸引子上 PDF  $P(X)$  的近似表达式.

一旦  $P(X)$  求得, 就可以计算湍流的统计性质. 例如, 计算表征湍流空间混沌的波数谱(速度场能谱和标量场方差谱), 计算表征湍流小尺度结构的平坦因子, 等等. 关于具体计算实例, 请阅文献[2]、[3]和[8-11].

## 5. 时空混沌、结构和统计

低维非线性耗散动力学系统的混沌仅仅是时间混沌现象, 而湍流是一种复杂的时间-空间混沌现象. 直观定性地讲, 湍流的时间混沌指速度场或标量场随时间的无规变化, 而空间混沌指速度场或标量场随(物理)空间坐标的无规变化. 正如宽带功率谱对应了时间混沌, 宽带波数谱(能谱或方差谱)表征空间混沌. 湍流内激发的自由度数目与波数谱宽度的立方成正比; 空间混沌程度越高, 波数谱越宽, 湍流内激发的各种尺度的自由度数目越大, 反之亦然. 湍流空间混沌的物理本质就是大量的各种尺度自由度的激发, 波数谱就是不同尺度(或不同波数)的自由度的激发程度谱.

湍流场量(速度场或标量场)随时间和空间坐标的变化必须满足流体力学方程, 因而湍流时空混沌的时间混沌和空间混沌两个方面不是独立无关的, 而必然是相互关联的. 这种相关性使我们可能建立表征时间混沌的物理量和表征空间混沌的物理量之间的定量关系. 描述湍流空间混沌的波数谱可以作为一个适当定义的(或重构的)非线性耗散动力学系统奇异吸引子上混沌轨道的统计性质来进行研究<sup>[12]</sup>.

湍流是具有结构的随机场,例如具有大尺度相干结构和小尺度间隙结构.即使最简单的各向同性湍流,也不是无结构的噪音型随机场,而具有结构(即小尺度结构).严格地讲,湍流的结构应是时间-空间混沌的结构.但目前关于湍流小尺度结构的研究主要是关于某些场量(涡量、耗散率和速度导数等)在给定时刻的空间分布的间隙结构研究,因而实质上是一种空间混沌的结构研究.这种把空间混沌的结构特殊地从统一的时空混沌的结构中分离出来研究,是与把空间坐标与时间绝对分开的牛顿力学方法密切联系的,具有符合人们直观思维的特点.

长期以来经典的湍流统计理论没有考虑湍流的结构,但这决不意味着结构与统计研究的对立.湍流具有结构这一发现并不否定湍流统计研究的必要性和合理性.人们可以发展一种关于具有结构的随机场(如湍流)的统计理论.事实上,(确定性)混沌正好是具有结构的随机现象.因而混沌动力学为在更高层次上发展湍流(具有结构的随机场)的统计理论奠定了基础.

#### 参 考 文 献

- [1] Leslie D C, *Developments in the Theory of Turbulence*. Clarendon, 1973.
- [2] Qian J (钱俭), *Phys. Fluids*, 26(1983), 2098.
- [3] Qian J (钱俭), *Phys. Fluids*, 28(1985), 1299.
- [4] Landau L D & Lifshitz E M, *Fluid Mechanics*, Pergamon(1959).
- [5] Temam R, *Infinite-Dimensional Dynamical System in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag(1988).
- [6] Eckmann J P & Ruelle D, *Rev. Mod. Phys.* 57(1985), 617.
- [7] Helleman R H G, *Fundamental Problems in Statistical Mechanics V* (editde by Cohen E G D), North-Holland (1980).
- [8] Qian J(钱俭), *Phys. Fluids* 29(1986), 2165.
- [9] 钱俭,《中国科学》A 辑,1989年第9期,943.
- [10] Qian J (钱俭), *J. Fluid Mech.* 217(1990), 203.
- [11] 钱俭,《中国科学》A 辑,1992年第11期,P. 1169.
- [12] Qian J(钱俭), *Phys. Fluids*, 31(1988), 2865.

## Chaotic Dynamics and Statistical Theory of Turbulence

Qian Jian

*(Department of Physics, Graduate School, USTC)*

### Abstract

A turbulent fluid is a complex nonlinear large system and it is impossible as well as unnecessary to make detailed study of the geometrical structure and dynamical behavior of its strange attractors. Hence a statistical study is indispensable. The existence of structures in turbulence does not negate the necessity and legitimacy of the statistical study of turbulence. The statistical study of turbulence should be based upon the nonequilibrium statistical mechanics of chaotic trajectories along the strange attractors of turbulence.

**Key words:** chaos, turbulence, strange attractor, statistical theory

**PACS (1992):** 47. 25—c

祝贺杨振宁教授70寿辰  
In Celebration of Dr. Chen Ning  
Yang's 70th birthday

# $Q$ -Deformed Gelfand-Dikii Potentials of Quantum Deformation KdV Equation

Zhang Dehai

(Physics Department, Graduate School of USTC)

## Abstract

A reasonable  $q$ -deformed differential is defined. A set of operation rules is constructed for the  $q$ -deformed pseudo differential operators. The complete procedure of constructing the  $q$ -deformed KdV hierarchies is given. As an important example, we obtain the detailed structure and the infinite conservation laws of the simplest (3, 2) system, i. e. the  $q$ -deformed KdV equations.

**Key words:**  $q$ -deformed differential,  $q$ -deformed KdV equation,  $q$ -deformed Gelfand-Dikii  
**PACS(1992):** 02. 90+p, 02. 20. +b

In ref. [1] we introduced the quantum deformation of KdV hierarchies and  $q$ -deformed KdV equation. The  $q$ -deformed differential operator (Lax pair<sup>[2]</sup>) of the  $q$ -deformed KdV equation is

$$L = K = \tilde{D}^2 + V_1 \tilde{D} + V_0 \quad (1)$$

where  $\tilde{D}$  is the  $q$ -deformed differential operator<sup>[3]</sup>

$$\tilde{D} = \frac{1}{(1 - q^{-2})_z} (1 - Q^{-2}) \quad (2)$$

and  $Q$  is an operator

$$Qf(z) = f(zq) \quad (3)$$

The nontrivial densities of conservation laws are supposed to have come from the  $q$ -deformed Gelfand-Dikii potentials,  $R_1$ ,  $S_1$ , which are defined by

$$K^{-\frac{1}{2}} = R_1 \tilde{D}^{-1} + S_1 \tilde{D}^{-2} + \dots \quad (4)$$



We shall determine their recursion formulae. From the obvious identity

$$[K^{-l-\frac{1}{2}}, K] = 0 \quad (5)$$

one gets

$$[K_{+}^{l-\frac{1}{2}}, K] = [K, K_{+}^{l-\frac{1}{2}}]_{+} \quad (6)$$

$$= (R_i^{0,-1} - R_i) \tilde{D} + (q^2[2]R_i^{(1,-2)} + S_i^{(0,-1)} - S_i + V_1 R_i^{(0,2)} - R_i V_1^{(0,2)}) \quad (7)$$

In the above formulas one introduces the following symbol

$$f^{(n,m)}(z) = (\tilde{D}^n Q^m f(z)) \quad (8)$$

On the other hand one has

$$K_{+}^{l+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \{K_{+}^{l-\frac{1}{2}}, K\} + \frac{1}{2} \{K_{-}^{l-\frac{1}{2}}, K\}_{+} \quad (9)$$

Doing

$$[K_{+}^{l+\frac{1}{2}}, K] = \frac{1}{2} \{[K_{+}^{l-\frac{1}{2}}, K], K\} + \frac{1}{2} \{[K_{-}^{l-\frac{1}{2}}, K]_{+}, K\} \quad (10)$$

we obtain

$$\begin{aligned} R_{i+1} &= (Q^{-1} - 1)^{-1} \{ (1 - q^2[2])R_i^{(0,-1)}V_1^{(1,0)} \\ &\quad + R_i^{(0,-1)}V_0^{(0,-2)} - R_i V_0 - R_i^{(2,0)} - R_i^{(1,0)}V_1 \\ &\quad + S_i^{(0,-1)}V_1 - S_i^{(0,-2)}V_1 - q^2[2]S_i^{(1,-2)} \} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} S_{i+1} &= (Q^{-1} - 1)^{-1} \{ -q^2[2]R_{i+1}^{(1,-2)} + R_{i+1}V_1^{(0,2)} - R_{i+1}^{(0,-2)}V_1 \\ &\quad + R_i^{(0,-1)}V_0^{(1,0)} - R_i^{(0,-1)}V_1^{(2,2)} + q^2[2]R_i^{(1,-2)}(V_0 - V_1^{(1,-2)}) \\ &\quad - R_i^{(2,0)}V_1^{(0,2)} + R_i^{(0,-2)}V_1V_0 - R_iV_1^{(0,2)}V_0 - R_i^{(1,0)}V_1^{(0,2)}V_1 \\ &\quad - R_i^{(0,-2)}V_1^{(1,2)}V_1 - S_i^{(2,0)} + S_i^{(0,-1)}V_0 - S_iV_0 - S_i^{(1,0)}V_1 \} \end{aligned} \quad (12)$$

which are just the recursion formulas of  $R_i$  and  $S_i$ .

Letting  $q=1-\varepsilon$ , up to the first order of infinitesimal parameter  $\varepsilon$ , one has

$$\tilde{D}^n Q^n = \mathcal{J}^n + \varepsilon \left( \frac{1}{2} m(m-2n-1) \mathcal{J}^n + (m-n) z \mathcal{J}^{n+1} \right) + O(\varepsilon^2) \quad (13)$$

The ordinary residue of the operator  $L^{r/k} = \sum_{n=-\infty}^r a_{r-n} \tilde{D}^n$  is, up to the first order of  $\varepsilon$ ,

$$\text{res} L^{r/k} = (1+\varepsilon)a_{r+1} - 2\varepsilon z a_{r+2} + O(\varepsilon^2) \quad (14)$$

Therefore the densities of conservation laws<sup>[4]</sup> are

$$H_{i-1/2} = \text{res} L^{i-1/2} = (1+\varepsilon)R_i - 2\varepsilon z S_i + O(\varepsilon^2) \quad (15)$$

Let us expand them in the  $q$ -deformed infinitesimal parameter  $\varepsilon$ . Let

$$R_i = r_i + \varepsilon p_i + O(\varepsilon^2) \quad (16)$$

$$S_i = h_i \varepsilon g_i + O(\varepsilon^2) \quad (17)$$

From the recursion relation (11) of  $R_i$  one has for the zero order of  $\varepsilon$

$$h_i = -\frac{1}{2} r'_i \quad (18)$$

and for the first order

$$g_i = -\frac{1}{2} p'_i - z X_i r_i \quad (19)$$

From the recursion relation (12) of  $S_i$  one has for the zero order

$$r'_{i+1} = \frac{1}{4}r''_i + r'_i X_0 + \frac{1}{2}r_i X'_0 \tag{20}$$

and for the first order

$$p'_{i+1} = \left( -2\alpha r_i X'_0 + p_i X_0 + r_i X_2 + \frac{1}{4}p''_i - r_i X_0 \right) + r_i \left( zX'_0 + \frac{3}{2}X'_0 - \frac{1}{2}X'_2 \right) - \frac{1}{2}p_i X'_0 \tag{21}$$

Taking  $r_0=1, p_0=0$  one gives the first three rank results

$$r_1 = \frac{1}{2}X_0 \tag{22}$$

$$p_1 = -\frac{1}{2}X_0 - zX'_0 + \frac{1}{2}X_2 \tag{23}$$

$$r_2 = \frac{3}{8}X_0^2 + \frac{1}{8}X'_0 \tag{24}$$

$$p_2 = -\frac{3}{2}zX_0 X'_0 + \frac{3}{4}X_0 X_2 - \frac{3}{4}X_0^2 + \frac{1}{8}X_2^2 - \frac{5}{8}X'_0 - \frac{1}{4}zX'_0 \tag{25}$$

$$r_3 = \frac{5}{32}X_0^3 + \frac{5}{16}X_0 X'_0 + \frac{1}{32}X_0'' + \frac{5}{16}X_0^2 \tag{26}$$

$$p_3 = -\frac{15}{8}zX_0^2 X'_0 - \frac{5}{4}zX'_0 X'_0 + \frac{15}{16}X_0^2 X_2 - \frac{15}{16}X_0^3 + \frac{5}{16}X_0 X_2^2 - \frac{15}{8}X_0 X'_0 - \frac{5}{8}zX_0 X_0'' + \frac{5}{16}X_0^2 X_2 - \frac{15}{16}X_0^2 + \frac{5}{16}X_0 X_2^2 + \frac{1}{32}X_2'' - \frac{9}{32}X_0'' - \frac{1}{16}zX_0^{(5)} \tag{27}$$

We see that  $r_i$  is just the ordinary Gelfand-Dikii potentials<sup>[5]</sup>. At the first order approximation,

$$-2\epsilon z S_i = \epsilon z R_i \tag{28}$$

therefore

$$H_{i-1/2} = (1 + \epsilon)R_i + \epsilon z R_i' = R_i + \epsilon(zR_i)' \tag{29}$$

We learn that  $H_{i-1/2}$  differs from  $R_i$  only by a total differential. From (18) we have

$$H_{i-1/2} = r_i + \epsilon(r_i + p_i + \alpha r_i') \tag{30}$$

For the first three ranks we obtain

$$H_{1/2} = \frac{1}{2}V_0 - \frac{1}{2}\epsilon z V_0' + O(\epsilon^2) \tag{31}$$

$$H_{3/2} = \frac{3}{8}V_0^2 + \frac{1}{8}V_0'' - \frac{3}{8}\epsilon V_0^2 - \frac{1}{2}\epsilon V_0'' - \frac{3}{4}\epsilon z V_0 V_0' - \frac{1}{8}\epsilon V_0'' + O(\epsilon^2) \tag{32}$$

$$H_{5/2} = \frac{5}{32}V_0^3 + \frac{5}{16}V_0 V_0'' + \frac{1}{32}V_0'' + \frac{5}{16}V_0^3 - \epsilon \left( \frac{15}{16}z V_0^2 V_0' + \frac{5}{8}z V_0 V_0'' + \frac{5}{8}V_0^3 + \frac{25}{16}V_0 V_0'' + \frac{5}{16}z V_0 V_0'' + \frac{25}{32}V_0^3 + \frac{1}{4}V_0'' + \frac{1}{32}z V_0^{(5)} \right) + O(\epsilon^2) \tag{33}$$

Using the definition of variation

$$\frac{\delta H}{\delta V_0} = \sum_{n=0}^N (-1)^n \left( \frac{\partial H}{\partial V_0^{(n)}} \right)^{(n)} \quad (34)$$

one can directly verify that the first three rank results satisfy the above relation

$$\frac{\delta H_{l+1/2}}{\delta V_0} = \left( l + \frac{1}{2} \right) (H_{l-1/2} + \varepsilon z R'_l) \quad (35)$$

Due to

$$H_{l-1/2} = R_l + \varepsilon (z R_l)'$$

then

$$\frac{\delta H_{l-1/2}}{\delta V_0} = \frac{\delta R_l}{\delta V_0} \quad (36)$$

From (4) one has

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_0}{\partial t} &= 4\varepsilon z S'_2 + (2 - 2\varepsilon)(R'_2 + \varepsilon(2R'_2 + 3zR'_2)) \\ &= 2(1 - 2\varepsilon)((1 + \varepsilon)R_2 + 2\varepsilon z R'_2) \end{aligned} \quad (37)$$

and this motion equation of the  $q$ -deformed KdV can be rewritten as

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} = \left( \frac{\delta}{\delta V_0} \left[ \frac{4}{5} (1 - 2\varepsilon) H_{5/2} \right] \right)' + O(\varepsilon^2) \quad (38)$$

The conservation quantities are

$$C_{l-1/2} = \int dx H_{l-1/2} = \int dx R_l \quad (39)$$

$$C_{1/2} = \int dx \frac{1}{2} (1 + \varepsilon) V_0 \quad (40)$$

The first three ones are

$$C_{3/2} = \int dx \frac{3}{8} V_0^2 \quad (41)$$

$$C_{5/2} = \int dx \frac{5}{32} (-V_0'^2 + 2V_0^2(1 - \varepsilon)) \quad (42)$$

## References

- [1] Zhang Dehai, "Quantum Deformation of The KdV Hierarchies", to be appear in Proceedings of The 21st International Conference of Differential Geometry Methods and Application in Theoretical Physics, 1992, Tianjin.
- [2] Lax P P, *Comm. Pure Appl. Math.*, 21 (1969), 467.
- [3] Jackson F H, *Quart. J. Math.*, 41 (1910), 193.
- [4] Drinfeld V G and Sokolov V V, *Journ. Sov. Math.*, 30 (1985), 1975.
- [5] As a review, see, for example, P. G. Drazin and R. S. Johnson, *Soliton, an Introduction*, Cambridge University Press 1989.

量子变形 KdV 方程的  $Q$  变形 Gelfand-Dikii 势

章德海

(中国科技大学研究生院物理部, 北京)

## 摘 要

本文给出了量子变形 KdV 方程的量子变形 Gelfand-Dikii 势的精确递推公式, 并给出了用无穷小变形参数  $\epsilon$  作一级展开的表达式, 这些势与量子变形 KdV 的无穷多守恒流有关。

关键词:  $q$  变形微分算子,  $q$  变形 KdV 方程,  $q$  变形 Gelfand-Dikii 势

中图法分类号: O411.1

PACS(1992): 02.90+p, 02.20.+b

祝贺杨振宁教授70寿辰  
In Celebration of Dr. Chen Ning  
Yang's 70th birthday

# Integrable Systems as the Periodic Fixed Point of the Backlund Transformation\*

Cheng Yi

(Department of Mathematics)

## Abstract

By imposing the periodic fixed point condition to the Backlund transformations (BTs) of the generalized nonlinear Schrodinger equation, a class of finite dimensional systems are obtained. Their Hamiltonian structures and the integrability can be proved by using the  $r$ -matrix method. An  $R$ -matrix also exists such that the quantum analogue of these systems fit in with the scheme of the quantum inverse scattering method. A particular example of our quantum system is a kind of the inhomogeneous XXX model.

**Key Words:** integrability,  $R$ -matrix, XXX model

**AMS Classification (1991):** 35Q58

**中图法分类号:** O175.29

## 1 Introduction

The Backlund transformation (BT) originated from the study of the differential geometry. Through the research on pseudospherical surfaces (sometimes referred to as surfaces of constant negative curvature), Backlund<sup>[1]</sup> found a transformation theory which leads a surface of constant negative curvature to a surface of the same kind, or a solution to another solution of the equation characterizing the surface.

Over the last two decades the technique of BT has been found to be powerful in solving many soliton equations. If a solution to a certain equation is known then by establishing the BT, another solution to the same equation can be obtained (see [2]). The continued iterative application of the BT gives rise to a chain of solutions.

It is interesting that recently in [3, 4], Weiss has shown that if we consider the  $N$  times iterations of the BT for the Schwarzian Korteweg—de Vries (KdV) equation and ask that the last solution be equal to the started one (i. e. a periodic fix point of the BT), one obtains a finite dimensional system which is completely integrable in the sense of the Liouville theorem. The solution of reduced system provides  $N$  numbers of solutions for the Schwarian KdV equation.

The similar consideration has also been discussed partially in our previous discussion<sup>[5]</sup>, where by the iteration of the Backlund—gauge transformations for the generalized nonlinear Schrodinger (GNLS) equations, we obtained a class of nonlinear differential—difference equations (NDDEs) and their discrete version of the Lax pairs. In particular the gauge transformation connecting the eigenfunctions of the  $n^{\text{th}}$  and  $(n+1)^{\text{th}}$  solutions to the GNLS equation plays the role as the discrete “eigenvalue problem”. By imposing the periodic boundary condition concerning the discrete variable, the resuting NDDEs are obviously finitely dimensional. As we show in this note, however, the remarkable feature for the reduced finitely dimensional systems are as follows. First their Hamiltonian structures and integrability can be proved by using the well-known “ $r$ -matrix” approach. Secondly these classical systems can be quantized and the quantum analogues fit in with the framework of the quantum inverse scattering transform (QIST) method, namely we have the quantum monodromy matrices which satisfy the Yan-Baxter relation with a given  $R$ -matrix. In a particular case, the quantized system of the fixed point of BT represents a new type of inhomogeneous  $XXX$  spin chain.

## 2 The Periodic Fixed Point of BT

Let us first briefly review some of the basic facts concerning the Backlund—gauge transformations for the following GNLS equation

$$iq_t = q_{xx} - 2cq^2r \quad (1a)$$

$$ir_t = -r_{xx} + 2cqr^2 \quad (1b)$$

with  $c$  being a “coupling” constant. When  $r = \pm q^*$ , where the asterisk indicates the complex conjugate, (1) is reduced to the usual NLS equation. Eq. (1) is known as the compatibility condition of

$$\varphi_x = M\varphi \quad \varphi_t = N\varphi \quad (2)$$

where  $M$  and  $N$  are certain  $2 \times 2$  matrix polynomials in the spectral parameter  $\lambda$ , and depend on  $q$ ,  $r$  and their derivatives. The BT is a mapping which maps a solution to (1) to another solution to the same equation. By the continued iterative application of the BT of (1) we obtain a chain of solutions  $(q_1, r_1)$ ,  $(q_2, r_2)$ ,  $\dots$ , the BT connecting them can be constructed as follows.

Consider the gauge transformation

$$\varphi_{n+1} = I_n \varphi_n \quad (3)$$

with a  $2 \times 2$  gauge matrix  $L_n$  such that  $\varphi_n$  satisfies

$$\varphi_{n,x} = M_n \varphi_n, \quad \varphi_{n,t} = N_n \varphi_n \quad (4)$$

where  $M_n$  and  $N_n$  have the same form as the Lax pairs of (1) but are concerned with  $(q_n, r_n)$ . Then the gauge matrix  $L_n$  satisfies

$$L_{n,x} = M_{n+1} T_n - T_n M_n \quad (5)$$

$$L_{n,t} = N_{n+1} T_n - T_n N_n \quad (6)$$

By inserting a polynomial ansatz in  $\lambda$  of  $L_n$  into (5) and (6), one obtains the gauge matrix and further more the  $x$  and  $t$  components of the BT for equation (1). There exist three simple gauge matrices  $L_n^{(i)}$ ,  $i=1, 2, 3$  depending linearly on  $\lambda$ , and three correspondent BTs for (1). The first two of them are similar and the third one originally maps the  $N$ -solitons to the  $(N+1)$ -solitons. We refer to [6] for further information concerning the framework of the Backlund-gauge transformations.

It is noted that (5) and (6) are the discrete versions of the Lax equations with the "eigenvalue problem" in (3) and time evolutions in (4), where  $n$  plays the role of the discrete variable. The correspondent BTs involving  $(q_n, r_n)$  and  $(q_{n+1}, r_{n+1})$  can be considered as the NDDEs. In the following we list them only for  $L_n^{(1)}$  and  $L_n^{(3)}$  since  $L_n^{(2)}$  has no essential difference with  $L_n^{(1)}$ . then we impose the periodic boundary conditions with the fixed, integer period  $M$

$$q_{n+M} = q_n, \quad r_{n+M} = r_n \quad (7)$$

For  $L_n^{(1)}$  we first make the invertible coordinates transformation by

$$\begin{aligned} Q_n &= q_n, \quad R_n = r_{n+1} \\ n &= 1, 2, \dots, (\text{mod } M) \end{aligned} \quad (8)$$

In terms of the coordinates  $(Q_n, R_n)$ ,  $L_n^{(1)}$  takes the form

$$L_n^{(1)}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - k_n + \eta^2 Q_n R_n & \eta Q_n \\ \eta R_n & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

where  $k_n$  is an arbitrary constant and  $\eta^2 = -c/4$  is used for convenience. The correspondent  $x$  and  $t$  components of the BT for  $(Q_n, R_n)$  are

$$iQ_{n,x} = 2Q_{n+1} - 2\eta^2 Q_n^2 R_n + 2k_n Q_n \quad (10a)$$

$$iR_{n,x} = -2R_{n-1} + 2\eta^2 Q_n R_n^2 - 2k_n R_n \quad (10b)$$

and

$$\begin{aligned} iQ_{n,t} = & -4[Q_{n+2} + (k_{n+1} + k_n)Q_{n+1} + k_n^2 Q_n - \eta^2(Q_{n+1}^2 R_{n+1} + 2Q_n Q_{n+1} R_n \\ & + Q_n^2 R_{n-1}) - 2\eta^2 Q_n^2 R_n + 4\eta^2 Q_n^3 R_n^2] \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} iR_{n,t} = & 4[R_{n-2} + (k_{n+1} + k_n)R_{n-1} + k_n^2 R_n - \eta^2(Q_{n+1} R_n^2 + 2Q_n R_n R_{n-1} \\ & + Q_{n-1} R_{n-1}^2) - 2\eta^2 Q_n R_n^2 + 4\eta^2 Q_n^2 R_n^3] \end{aligned} \quad (11b)$$

where  $n=1, 2, \dots, (\text{mod } M)$ . It is noted that the original  $t$  component of the BT contains the terms of  $x$ -derivatives to  $Q_n$ ,  $Q_{n+1}$ ,  $R_n$  and  $R_{n-1}$ . Since we consider the BT iteratively under the periodic boundary condition (8), these terms can be replaced by (10) and we finally reach the equations in (11).

Thus we conclude that the periodic fixed point of BT for (1) is exactly factorizable.

The gauge matrix  $L_n^{(3)}$  is given by

$$L_n^{(3)}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - k_n + \eta a_n & \eta b_n \\ -\eta c_n & -\lambda + k_n + \eta a_n \end{pmatrix} \quad (12)$$

where

$$b_n = q_{n+1} + q_n, \quad c_n = -r_{n+1} - r_n \quad (13)$$

and  $a_n$  satisfies

$$a_n^2 + b_n c_n = \mu_n \quad (14)$$

$n = 1, 2, \dots, (\text{mod } M)$  and  $\mu_n$  is an arbitrary constant. The correspondent  $x$ -component BT of (1) reads

$$i a_{n,x} = 2\eta(q_{n+1} r_{n+1} - q_n r_n) \quad (15a)$$

$$i(q_{n+1} + q_n)_x = 2\eta[k_n(q_{n+1} + q_n) - a_n(q_{n+1} - q_n)] \quad (15b)$$

$$i(r_{n+1} + r_n)_x = 2\eta[-k_n(r_{n+1} + r_n) + a_n(r_{n+1} - r_n)] \quad (15c)$$

In order to write (15) in terms of  $a_n, b_n, c_n$ , the transformation (13) must be invertible. For this reason we have to constrain the period  $M$  to be an odd integer

$$M = 2N + 1 \quad (16)$$

and for later uses we also assume that the constants  $k_n, n = 1, 2, \dots, 2N+1$  in this case satisfy

$$\sum_{n=1}^{2N+1} k_n = 0 \quad (17)$$

Under condition (16), equations in (15) are transformed to

$$i a_{n,x} = -\eta \sum_{j=1}^{2N+1} (b_n \Omega_{n,j} c_j + c_n \Omega_{n,j} b_j) \quad (18a)$$

$$i b_{n,x} = 2\eta(k_n b_n - \sum_{j=1}^{2N+1} a_n \Omega_{n,j} b_j) \quad (18b)$$

$$i c_{n,x} = -2\eta(k_n c_n - \sum_{j=1}^{2N+1} a_n \Omega_{n,j} c_j) \quad (18c)$$

where

$$\Omega = (\Omega_{i,j}) \quad (19)$$

is an anti-symmetric  $(2N+1) \times (2N+1)$  matrix with

$$\Omega_{i,j} = 0, \quad \Omega_{j,j+k} = (-1)^{k+1}, \quad j, k \equiv 0 \pmod{2N+1} \quad (20)$$

This constant matrix was also used in [3, 4] in order to discuss the integrability of the finite dimensional systems that resulted from the periodic fixed point of BT for the schwarzian KdV equation. The flow corresponding to the  $t$ -component BT can also be derived in a similar way as we show in the case of  $L_n^{(1)}$  but is more complicated and so we omit it.

### 3 Classical Integrability

In the following by using the  $r$ -matrix method we show the Hamiltonian structures and the integrability for (10), (11) and (18) respectively.

Define the Poisson bracket

$$\{Q_n, Q_m\} = \{R_n, R_m\} = 0, \quad \{Q_n, R_m\} = -i\eta^{-1} \delta_{n,m} \quad (21)$$



for (10) and (11), and

$$\{a_n, b_n\} = ib_n, \{a_n, c_n\} = -ic_n, \{c_n, b_n\} = -2ia_n \quad (22)$$

and others are zero for (18). It can be checked by direct calculation that the  $L$ -operators  $L_n^{(1)}$  and  $L_n^{(3)}$  satisfy

$$\{L_n^{(j)}(\lambda) \otimes L_m^{(j)}(\lambda')\} = [\tau(\lambda - \lambda'), L_n^{(j)}(\lambda) \otimes L_m^{(j)}(\lambda')] \delta_{n,m} \quad (23)$$

with the Poisson bracket (21) for  $j=1$  and (22) for  $j=3$  respectively. The notion at the left hand side of (23) is obvious and is often used in the  $\tau$ -matrix method. The  $\tau$ -matrix in (23) is a familiar one and is given by

$$\tau(\lambda) = aI + bP = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & a & b & \\ & b & a & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

where

$$b = \frac{i\eta}{\lambda - \lambda'}, \quad a = \frac{\lambda - \lambda' - i\eta}{\lambda - \lambda'} \quad (25)$$

and  $I$  is the  $4 \times 4$  unit matrix,  $P$  is the permutation operator in the natural basis  $\{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}$  of the tensor space  $C^2 \otimes C^2$ .

From (23), we find that the following monodromy matrix

$$T^{(j)} = L_M^{(j)} L_{M-1}^{(j)} \cdots L_1^{(j)}, \quad j = 1, 3 \quad (26)$$

satisfies the similar equation to that in (23)

$$\{T^{(j)}(\lambda) \otimes T^{(j)}(\lambda')\} = [\tau(\lambda - \lambda'), T^{(j)}(\lambda) \otimes T^{(j)}(\lambda')] \quad (27)$$

Taking the trace in both sides of the above equation, we have

$$\{t^{(j)}(\lambda), t^{(j)}(\lambda')\} = 0, \quad t^{(j)}(\lambda) = \text{tr} T^{(j)}(\lambda) \quad (28)$$

For  $j=1$ ,

$$t^{(1)}(\lambda) = \lambda^M + I_1 \lambda^{M-1} + \cdots + I_M \quad (29)$$

while for  $j=3$

$$t^{(3)}(\lambda) = J_1 \lambda^{2N} + J_2 \lambda^{2N-1} + \cdots + J_{2N+1} \quad (30)$$

because  $M=2N+1$  (see (16)). Thus we obtain  $M$  numbers of intergrals  $\{I_1, I_2, \dots, I_M\}$  and  $\{J_1, J_2, \dots, J_M\}$  in involution under the Poisson brackets (21) and (22) respectively.

It can also be shown that for  $j=1$

$$\{\Delta(\lambda), \Delta(\lambda')\} = 0 \quad (31)$$

where

$$\Delta(\lambda) = \ln(\lambda^{-M} t^{(1)}(\lambda)) = H_1 + H_2 \lambda^{-1} + H_3 \lambda^{-3} + \cdots \quad (32)$$

with

$$H_1 = \sum_{n=1}^M Q_n R_n + \text{const.} \quad (33)$$

$$H_2 = \sum_{n=1}^M (Q_{n+1} R_n - \frac{1}{2} \eta^2 Q_n^2 R_n^2 + k_n Q_n R_n) + \text{const.} \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
 H_3 = & \sum_{n=1}^M [Q_{n+1}R_{n-1} + (k_{n+1} + k_n)Q_{n+1}R_n + k_n^2Q_nR_n \\
 & - \eta^2(Q_{n+1}Q_nR_n^2 + Q_n^2R_nR_{n-1}) \\
 & \eta^2k_nQ_n^2R_n^2 + \frac{1}{3}\eta^4Q_n^3R_n^3] + \text{const.}
 \end{aligned} \tag{35}$$

These quantities are in involution because of (31). Each of them can be considered as being Hamiltonian, in particular  $H_2$  in (34) and  $H_3$  in (35) are proportional to the Hamiltonians for the equations in (10) and (11) respectively. Thus we conclude that (10) and (11) are Hamiltonian systems with  $M$  numbers of integrals involution.

For the system (18), we find that

$$J_1 = 2 \sum_{n=1}^{2N+1} a_n \tag{36}$$

$$J_2 = -\eta^{-1}H = \sum_{i,j=1}^{2N+1} b_i \Omega_{i,j} c_j + 2 \sum_{j=1}^{2N+1} k_j a_j \tag{37}$$

which is nothing but the Hamiltonian of (18).

#### 4 Quantum Integrability

We have seen that by using the  $r$ -matrix approach, one can easily construct the Hamiltonians and integrals for the periodic fixed point of the Backlund-gauge transformations for equation (1). Also important is that the approach can be quantized. To make sense we define the following commutation relations:

$$[Q_n, Q_m] = [R_n, R_m] = 0, \quad [Q_n, R_m] = -\eta^{-1} \delta_{n,m} \tag{38}$$

and

$$[a_n, b_n] = b_n, \quad [a_n, c_n] = -c_n, \quad [c_n, b_n] = -2a_n \tag{39}$$

and others are zero, instead of the Poisson brackets (21) and (22) respectively. The fundamental commutation relations for the quantized  $L$ -operators in (9) and (12) can be calculated, as follows

$$R(\lambda - \lambda') L_n^{(j)}(\lambda) \otimes L_n^{(j)}(\lambda') = L_n^{(j)}(\lambda') \otimes L_n^{(j)}(\lambda) R(\lambda - \lambda') \tag{40}$$

where  $j=1$  corresponds to (38) and  $j=3$  to (39) and the  $R$ -matrix is given by

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{-\eta}{\lambda - \eta} & \frac{\lambda}{\lambda - \eta} & \\ & \frac{\lambda}{\lambda - \eta} & \frac{-\eta}{\lambda - \eta} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{41}$$

which is the familiar  $R$ -matrix for several quantum integrable systems and was found by Yang [7]

Equation (40) immediately implies

$$R(\lambda - \lambda') T^{(j)}(\lambda) \otimes T^{(j)}(\lambda') = T^{(j)}(\lambda') \otimes T^{(j)}(\lambda) R(\lambda - \lambda') \tag{42}$$

Taking the trace in the axillary space we have

$$[t^{(j)}(\lambda), t^{(j)}(\mathcal{N})] = 0 \quad (43)$$

and therefore we have  $M$  numbers of the quantum integrals which are from the coefficients of the polynomial  $t^{(j)}(\lambda)$  in  $\lambda$ . the quantum analogue of the Hamiltonians can be calculated in a way similar to that in the classical case. For instance the quantum Hamiltonian corresponding to (34) reads

$$H = \sum_{n=1}^M [Q_{n+1}R_n - \frac{1}{2}\eta^2 Q_n^2 R_n^2 + (k_n + \frac{1}{2}\eta^2) Q_n R_n] + \text{const.} \quad (44)$$

The difference between coefficients of the last terms in (44) and (34) is due to the normal ordering in the quantum case. The Hamiltonian next to  $H$  in (44) can also be calculated but is more complicated, and the quantum analogues of (37) takes the same form as in the classical case.

It is observed that (42) is the basic relation (called the Yang-Baxter relation) in the quantum inverse scattering transform method

Let us now consider the case of  $j=3$ . Notice that the commutation relation (39) coincide with that for the quantum XXX spin chain. Thus we identify

$$a_n = S_n^3, \quad b_n = S_n^-, \quad c_n = S_n^+ \quad (45)$$

where  $S_n^j$ ,  $j=1, 2, 3$  or  $S_n^\pm$ ,  $S_n^\pm = S_n^1 \pm iS_n^2$  belong to the irreducible finite dimensional ( $\dim=2l_n+1$ ) representations of the Lie algebra  $sl(2)$  and satisfy

$$[S_n^3, S_m^\pm] = \pm S_n^\pm \delta_{n,m} \quad (46a)$$

$$[S_n^+, S_m^-] = 2S_n^3 \delta_{n,m} \quad (46b)$$

or

$$[S_n^a, S_n^b] = i \sum_{\gamma=1}^3 \epsilon_{a\beta\gamma} S_n^\gamma, \quad (47)$$

$$(S_n^3)^2 + \frac{1}{2}(S_n^+ S_n^- + S_n^- S_n^+) = l_n(l_n + 1) \quad (48)$$

The constant  $\mu_n$  in (14) is chosen to be  $\mu_n = l_n(l_n + 1)$

By the identification (45), the quantum Hamiltonian (37) reads

$$H = -\eta \left( \sum_{i,j=1}^{2N+1} S_i^+ \Omega_{i,j} S_j^- + 2 \sum_{j=1}^{2N+1} k_j S_j^3 \right) \quad (49)$$

Define a  $L$ -operator as follows

$$L_n = \lambda + \eta \sum_{j=1}^3 S_n^j \sigma_j = \begin{pmatrix} \lambda + \eta S_n^3 & \eta S_n^- \\ \eta S_n^+ & \lambda - \eta S_n^3 \end{pmatrix} \quad (50)$$

which is the  $L$ -operator for the XXX spin chain, where  $\sigma_j$ ,  $j=1, 2, 3$  are the Pauli matrices. The quantized  $L$ -operator  $L_n^{(3)}$  in the form of (12) can then be written as

$$L_n^{(3)}(\lambda) = \sigma_3 L_n(\lambda - k_n) \quad (51)$$

through (45). Thus the monodromy matrix is expressed as

$$T(\lambda) = \sigma_3 \tilde{L}_{2N+1}(\lambda - k_{2N+1}) \sigma_3 L_{2N}(\lambda - k_{2N}) \cdots \sigma_3 L_1(\lambda - k_1) \quad (52)$$

which means that the systems generated by (52) is a kind of inhomogeneous XXX spin chain in the

sense of Sklyanin<sup>[8]</sup>. Therefore one is able to construct the spectrum of the integral generator  $t^{(3)}(\lambda)$ , and the Bethe equation which the spectrum should satisfy, in a similar way to that in [8]

*The author wishes to thank Professor Li Yi-shen for drawing his attention to the problem of the periodic fixed point of the BT. The work was supported by the National Natural Science Fund and the National Basic Research Project for "Nonlinear Science".*

#### References

- [1] Backlund A V, *Math. Ann.*, **9** (1876), 207.
- [2] see articles in *Backlund Transformations*, Lect. Notes in Math. 515 Edited by Miura R M (Springer-Verlag, Berlin 1976).
- [3] Weiss J, *J Math. Phys.*, **27** (1986), 2647.
- [4] Weiss J, *J Math. Phys.*, **28** (1987), 2025.
- [5] Cheng, Y *Ph. D Thesis*, University of Manchester (England), 1987.
- [6] Calogero F and A Degasperis, *Physia D*, **14** (1984), 103.
- [7] Yang C N, *Phys. Rev. Lett.*, **19** (1967), 1312.
- [8] Sklyanin E K, *Quantum Inverse Scattering Method, Selected Topics*, Nankai Lect. Notes in Math. Phys. (World Scientific Singapore 1992).

## 作为 Backlund 变换周期固定点的可积系统

程 艺

(数学系)

摘 要

通过对广义非线性 Schrodinger 方程的 Backlund 变换加上周期固定点条件,得到了一组有限维系统,并用  $r$ -矩阵方法证明了它们的完全可积性和 Hamilton 形式. 同时还指出存在一个  $R$ -矩阵使得这些系统的量子化形式的可积性可由量子反散射方法证明. 在这些量子可积系统中,包含了一种非齐性的 XXX 模型作为特例.

关键词: 可积性,  $R$ -矩阵, XXX 模型

中图法分类号: O175. 29,

祝贺杨振宁教授70寿辰  
In Celebration of Dr. Chen Ning  
Yang's 70th birthday

# Finite-Dimensional Integrable Hamiltonian Systems Obtained from Periodic Fixed Points of Darboux Transformation\*

Zeng Yunbo

(Department of Mathematics)

## Abstract

By means of the periodic fixed points of Darboux transformation, the time-space dependence of  $(1+1)$ -dimensional integrable systems can be factored by two commuting and integrable finite-dimensional Hamiltonian systems. The generating function of the integrals of motion and integrability of these systems can be deduced directly from the integrability of  $(1+1)$ -dimensional systems and the property of Darboux transformation.

**Key words:** periodic fixed points, Darboux transformation, separation of variables

**AMS Classification (1992):** 35Q

Weiss demonstrated<sup>[1]</sup> that the periodic fixed points of Bäcklund transformation without introducing parameters for Schwazian KdV equation are described by an integrable finite-dimensional Hamiltonian system (FDHS). Using some techniques, Weiss found integrals of motion and bi-Hamiltonian structure for the FDHS. In the present paper, by directly starting from the periodic fixed points of Darboux transformations for KdV hierarchy, we will show that the  $x$ - and  $t$ -dependence of each equation in KdV hierarchy can be factored by two commuting and integrable FDHS's with parameters. Also, we will present a systematic method to construct the integrals of motion and to deduce the integra-

Received September 9, 1992.

\* This work supported by the Chinese National Basic Research project "Nonlinear Science."

bility of these FDHS's directly from the one of KdV hierarchy. This provides a method of separation of variables to solve the KdV hierarchy through solving two integrable FDHS's.

Consider the following auxiliary linear system

$$\psi_x = M\psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ q & -\lambda \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\psi_{i_{2n+1}} = N^{(n)}\psi, \quad N^{(n)} = \sum_{j=0}^n \begin{pmatrix} A_j & B_j \\ C_j & -A_j \end{pmatrix} \lambda^{n-j} \quad (2)$$

where  $A_j, B_j$  and  $C_j$  satisfy certain recursion relations (see [2, 3, 4] for details), the compatibility condition of (1) and (2) gives rise to the KdV hierarchy<sup>[2]</sup>

$$q_{i_{2n+1}} = 4DL^2q \quad L = -\frac{1}{4}D^2 - q + \frac{1}{2}D^{-1}q_x, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3a)$$

$$q_{i_3} = -q_{xxx} - 6qq_x, \quad (\text{KdV}) \quad (3b)$$

Where  $D = \frac{\partial}{\partial x}, DD^{-1} = D^{-1}D = 1$ . The Darboux transformation for (1)–(3) is formulated in [3, 4, 5] as follows. Let  $q$  be a solution to (3a),  $\psi$  satisfy (1) and (2),  $\lambda_1$  a constant, define

$$\bar{q} = -q + 4\lambda_1 v_1 - 2v_1^2, \quad v_1 = \frac{\phi_2(\lambda_1)}{\phi_1(\lambda_1)} \quad (4)$$

then  $\bar{q}$  is also a solution to (3a). Let

$$\bar{\psi} = T_1\psi, \quad T_1 = \begin{pmatrix} \lambda + v_1 - \lambda_1 & -1 \\ -v_1^2 + 2\lambda_1 v_1 & -\lambda + v_1 - \lambda_1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

then, it holds that<sup>[3, 4, 5]</sup>

$$\bar{\psi}_x = \bar{M}\bar{\psi}, \quad \bar{\psi}_{i_{2n+1}} = \bar{N}^{(n)}\bar{\psi}, \quad \bar{\psi} = \begin{pmatrix} \bar{\phi}_1 \\ - \\ \bar{\phi}_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

where  $\bar{M}$  and  $\bar{N}^{(n)}$  are the same as  $M$  and  $N^{(n)}$  except that  $q$  is replaced by  $\bar{q}$ . It is found from (1), (2), (5) and (6) that

$$T_{1x} = \bar{M}T_1 - T_1M, \quad T_{1i_{2n+1}} = \bar{N}^{(n)}T_1 - T_1N^{(n)} \quad (7)$$

For an arbitrary constant  $\lambda_2$ , set

$$v_2 = \frac{\bar{\phi}_2(\lambda_2)}{\bar{\phi}_1(\lambda_2)},$$

then (1) and (6) lead to

$$q = v_{1x} - v_1^2 + 2\lambda_1 v_1, \quad \bar{q} = v_{2x} - v_2^2 + 2\lambda_2 v_2 \quad (8)$$

Hence (4) can be rewritten as

$$v_{2x} + v_{1x} = (v_2^2 - 2\lambda_2 v_2) - (v_1^2 - 2\lambda_1 v_1) \quad (9)$$

Obviously, (9) through (8) defines the  $x$ -part of Bäcklund transformation (BT) for (3). For  $N$  distinct  $\lambda_j (\lambda_j \neq 0)$ , set  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)^T$ ,

$$v_k = v_k, \quad k = 1, 2, \dots, \text{mod}(N)$$

Through the successive application of (9), the periodic points of (9) can be obtained as follows

$$v_{k+1,x} + v_{k,x} = (v_{k+1}^2 - 2\lambda_{k+1}v_{k+1}) - (v_k^2 - 2\lambda_k v_k), \quad k = 1, 2, \dots, \text{mod}(N) \quad (10)$$

For odd  $N=2K+1$ , (10) can be written as a FDHS

$$V_x = \Omega V = Q = \Omega \frac{\partial F_3}{\partial V} \tag{11}$$

where  $V \equiv (v_1, \dots, v_N)^T$ ,  $\frac{\partial}{\partial v} \equiv (\frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_N})^T$

$Q \equiv (Q_1, \dots, Q_N)^T$ ,  $U \equiv (u_1, \dots, u_N)^T \equiv (v_1^2 - 2\lambda_1 v_1, \dots, v_N^2 - 2\lambda_N v_N)^T$ ,  $\Omega$  is the  $N \times N$  antisymmetric matrix defined by

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & \dots & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (w_k^3 - 3\lambda_k^2 w_k), \quad w_k = v_k - \lambda_k \tag{12}$$

Since  $\Omega$  is singular, system (11) has a Casimir

$$F_1 = \sum_{k=1}^N w_k \tag{13}$$

Set

$$q_k = v_{k,x} - v_k^2 + 2\lambda_k v_k, \quad k = 1, 2, \dots, \text{mod}(N) \tag{14}$$

It is clear that (11) through (14) continues to define the  $x$ -part of BT for (3), and describes the submanifold of the solutions to (3) which is invariant under the Darboux transformation. In order to guarantee that all  $q_k$  obtained from the solutions to (11) through (14), namely, the set

$$\{q_k = v_{k,x} - v_k^2 + 2\lambda_k v_k, \quad k = 1, 2, \dots, \text{mod}(N)\}$$

are solutions to (3), we have to consider the T-part of BT which can be found by directly demanding  $q_k$  to satisfy (3). Since (14) is a Miura transformation, the demand requires  $v_k$  to satisfy the higher-order MKdV equation<sup>[2]</sup>

$$v_{k,2x+1} = 4\bar{L}^2 v_x, \quad \bar{L} = -\frac{1}{4}D^2 + (v^2 - 2\lambda v) + v_x D^{-1}(v - \lambda) \tag{15}$$

that is

$$v_{k,2x+1} = 4\bar{L}^2 v_x |_{v=v_k, \lambda=\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \dots, \text{mod}(N), \tag{16}$$

$$v_{k,3} = -v_{k,xxx} + 6v_k^2 v_{k,x} - 12\lambda_k v_k v_{k,x} \tag{MKdV}$$

The consistency of (3) and (11) ensures the consistency of (11) and (16). For  $n=1$ , (16) gives

$$V_{1x} = -V_{xxx} + 6 \begin{pmatrix} u_1 v_{1x} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N v_{Nx} \end{pmatrix} \tag{17}$$

By using (11), (17) becomes a FDHS (for  $N=2K+1$ )

$$V_{t_3} = \Omega \frac{\partial F_5}{\partial V} \tag{18}$$

$$F_5 = \sum_{i=1}^N (w_i Q_i^2 + \frac{3}{5} w_i^5 - 2\lambda_i^2 w_i^3 + 3\lambda_i^4 w_i)$$

In general, the consistency of (11) and (16) enables us to transform (16) under (11) into a FDHS

$$V_{t_{2n+1}} = \Omega \frac{\partial F_{2n+3}}{\partial V}, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{19}$$

where  $F_{2n+3}$  can be calculated from the expression of (16) under (11).

In what follows, we will show that (11) and (19) are completely integrable  $K$ -dimensional Hamiltonian systems with  $K$  integrals (and one Casimir) in involution. According to (5), define

$$T_k = \begin{pmatrix} \lambda + w_k & -1 \\ -u_k & -\lambda + w_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, \text{mod}(N)$$

$$T = T_N T_{N-1} \dots T_2 T_1, \quad \bar{\psi} = T\psi$$

Since  $q_{N+1} = q_1$ , it is found from (6) and (7) that

$$\tilde{M} = M, \quad \tilde{N}^{(s)} = N^{(s)}$$

$$T_x = \tilde{M}T - TM = MT - TM \equiv [M, T], \quad T_{t_{2n+1}} = [N^{(s)}, T] \tag{20}$$

so

$$(tr T^2)_x = tr [M, T^2] = 0, \quad (tr T^2)_{t_{2n+1}} = tr [N^{(s)}, T^2] = 0$$

Lemma. Let

$$H = tr T^2 = tr \sum_{i=1}^{2N} T_i \equiv \sum_{j=0}^{2N} H_j \lambda^{2N-j}, \quad (H_0 = 1, T_{N+k} = T_k) \tag{21}$$

then  $H$  is the generating function of the integrals of motion for (11) and (19), namely, if  $v_k(x, t_3, t_5, \dots)$ , then

$$\frac{dH_j(x, t_3, t_5, \dots)}{dx} = 0 \quad j = 1, \dots, 2N \tag{22}$$

if  $v_k(x, t_3, t_5, \dots)$  solves (19), then

$$\frac{dH_j(x, t_3, t_5, \dots, t_{2n+1}, \dots)}{dt_{2n+1}} = 0, \quad j = 1, \dots, 2N \tag{23}$$

Eq. (21) leads to the following formula to calculate  $H_j$  (the integrals of motion)

$$H_j = \frac{1}{(2N-j)!} \left( \frac{d^{2N-j}}{d\lambda^{2N-j}} tr \prod_{i=1}^{2N} T_i \right) \Big|_{\lambda=0}$$

$$= tr \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq 2N} \prod_{l=1}^j E_{i_l}^{(i_1, \dots, i_j)} \tag{24}$$

where

$$E_{i_1, \dots, i_j}^{(i_1, \dots, i_j)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{for } l \neq k_j, i = 1, \dots, j$$

$$E_{i_1, \dots, i_j}^{(i_1, \dots, i_j)} = \begin{pmatrix} w_{k_i} & -1 \\ -u_{k_i} & w_{k_i} \end{pmatrix}, \quad \text{for } l = k_i, i = 1, \dots, j$$



Observe that the form of the expression of  $H_j$  in terms of  $w_k$  and  $\lambda_k$  except for the superscript of the summation are the same for distinct  $N$ . So we can also determine the form of  $H_j$  directly from the expansion of  $trT^2$  by taking  $N$  to be the smallest odd  $\geq [\frac{j}{2}]$ . By means of the above methods for computing  $H_j$ , we obtain ( $\sum$  denotes  $\sum_{k=1}^N$  for simplicity)

$$\begin{aligned}
 H_{2k+1} &= 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\
 H_2 &= 4F_1^2 - 2 \sum \lambda_k^2 \\
 H_4 &= -4F_1F_3 + \frac{4}{3}F_1^4 - 4F_1^2 \sum \lambda_k^2 + \sum_{i \neq j} \lambda_i^2 \lambda_j^2 \\
 H_6 &= \frac{1}{9}F_1^6 + F_3^2 - \frac{2}{3}F_1^3F_3 + \left(2F_1F_3 - \frac{2}{3}F_1^4\right) \sum \lambda_k^2 \\
 &\quad + F_1^2 \left(\sum \lambda_k^2\right)^2 - 2 \sum_{i \neq j \neq k} \lambda_i^2 \lambda_j^2 \lambda_k^2 \\
 H_8 &= -\frac{1}{2}F_3F_5 + \frac{1}{6}F_1^3F_5 + \frac{1}{90}F_1^8 + F_1^2F_3^2 - \frac{11}{30}F_1^5F_3 \\
 &\quad + \text{polynomial of } F_1, F_3, F_5 \text{ and } \lambda
 \end{aligned} \tag{25}$$

.....

From the construction of  $H_j$ , it can be verified that the Casimir  $H_2$  and  $K$  integrals  $H_4, H_8, \dots, H_{4k}$  for  $K$ -dimensional systems (11) and (19) are functionally independent. So the Hamiltonian function  $F_{2n+3}$  of (19) can be expressed as a rational function in terms of  $H_k$  as we can find from (25). This together with (22) and (23) yields

$$\frac{dF_{2m+1}(x, t_3, t_5, \dots)}{dt_{2n+1}} = 0, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, (t_1 = x) \tag{26}$$

For the Poisson bracket defined by

$$\{f, g\} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial V}, \Omega \frac{\partial g}{\partial V} \right\rangle$$

where  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  is the inner product in  $R^N$ , it is easy to find from (11), (19) and (26) that

$$\{F_{2m+1}, F_{2l+1}\} = \frac{dF_{2m+1}}{dt_{2l+1}} = 0, \quad m, l = 0, 1, \dots, (t_1 = x) \tag{27}$$

Since  $H_k$  are polynomials of  $F_{2m+1}$  like (25), one obtains from (27) and the property of Poisson bracket

$$\{H_k, H_l\} = 0, \quad k, l = 1, 2, \dots \tag{28}$$

Thus the Casimir  $H_2$  and integrals  $H_4, \dots, H_{4k}$  are in involution, and we have

**Proposition.** (11) and (19) (in particular, (18)) are commuting and completely integrable  $K$ -dimensional Hamiltonian systems with one Casimir. If  $V$  satisfies (11) and (19) ((18)) simultaneously, then  $q_k, k=1, \dots, N$ , given by (14) are solutions to (3a) ((3b)).

Obviously, the parameters  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  in (11) and (19) are of significance for constructing the solutions with finite parameters for (3). Through solving two integrable FDHS's, we can obtain some kind of solutions for (3). As a special case of (11), when all the the parameters  $\lambda_k=0$ , the system (11) was studied by Weiss<sup>[1]</sup> by using a different method.

Notice that the integrals of motion defined by (21) do not depend upon the odevity of  $N$ . So (21) also provides the generating function of integrals of motion for (10).

#### References

- [1] Weiss J, *J. Math. Phys.*, 27 (1986), 2647-2656.
- [2] Newell A C, *Soliton in Mathematics and Physics*, SIAM, Philadelphia, 1985.
- [3] Gu Chaohao and Hu Heshen, *Lett. Math. Phys.*, 11 (1986), 325-335.
- [4] Li Yishen, Gu Xinshen and Zou Maorong, *Acta Math. Sinica*, New Series, 3 (1987), 143-151.
- [5] Gu Xinshen, *Ann. of Diff. Eqs.*, 3 (1987), 13-37.

## Darboux 变换的周期固定点导出的有限 维可积的 Hamilton 系统

曾云波

(数学系)

### 摘 要

利用 Darboux 变换的周期固定点,  $(1+1)$  维可积系统的时间和空间的依赖性, 可分解为两个可交换的可积的有限维 Hamilton 系统. 本文直接从  $(1+1)$  维系统的可积性和 Darboux 变换性质出发, 导出了这些有限维系统的守恒积分的生成函数和可积性.

关键词: 周期固定点, Darboux 变换, 变量分离.

中图法分类号: O175.29

## 《中国科学技术大学学报》入选为中国自然科学核心期刊

中国自然科学核心期刊研究课题组采用“引文法”最近公布了 100 种期刊为“1990~1991 年中国自然科学核心期刊”。《中国科学技术大学学报》遴选为核心期刊。

这一结果是对 1990 年、1991 年中国出版的 20 种代表性学术期刊发表的学术论文所引用的各种中文自然科学期刊被引用量进行客观统计得到的。目前我国每年出版 3000 多种科技期刊，核心期刊比例仅占 3.33%。

1990—1991 年中国自然科学核心期刊百名表见本刊第 22 卷，第 3 期。

## 《中国科学技术大学学报》入选为中文核心期刊

为了向各级各类图书情报部门提供中文期刊的收集依据和馆藏质量评价标准；为了向社会和读者推荐优秀期刊；为了向国内外各种文摘、索引提供最佳选择参考；并以此促进我国期刊编辑和出版水平的提高；北京地区和部分外省市的 40 余所高等院校图书馆（室）分工合作，研究并编制了《中文核心期刊要目总览》一书。

编制者采用引文分析法、文摘法、载文量法进行三次筛选，将筛选结果进行综合平衡必要的加权处理，再用一到二种其他方法加以验证，获得初步的核心期刊表。之后，以此表为基础，广泛征求有关专业人员的意见，400 多位专家教授分别对各类研究成果进行鉴定。根据专家的意见又作部分调整，获得最后的核心期刊表。

该书分为哲学社会科学、自然科学、医药卫生、农业科学、工程技术五大部分。按《中图法》体系分类排列。各类的核心期刊按序排列于每类之前，并有著录和简介。《中国科学技术大学学报》入选为核心期刊。

# 中国科学技术大学学报编委会

**主 编:** 葛新石

**副主编:** 汪克林 冯克勤 俞书勤

**编 委:** (以姓氏笔划为序)

王 水 方容川 冯克勤 伍小平 孙德敏

寿天德 吴自勤 汪克林 李志超 陈国良

俞书勤 郦 明 钱景仁 葛新石 潘才元

**中国科学技术大学学报**

Zhongguo Kexue Jishu Daxue Xuebao

(季刊, 1965年创刊)

第 23 卷第 1 期 (总第 80 期) 1993 年 3 月出版

**Journal Of China University of**

**Science and Technology**

(Quarterly, Started in 1965)

Vol. 23 No. 1 (Sum. 80) Mar. 1993

编 辑: 《中国科学技术大学学报》编辑部  
安徽省合肥市金寨路 96 号 (邮政编码 230026)

印 刷: 中国科学技术大学印刷厂

国内总发行: 合肥市邮局

订 购 处: 全国各地邮局

国外总发行: 中国国际图书贸易总公司  
(中国国际书店, 北京 399 信箱)

Edited by: Editorial Board of Journal of China  
University of Science and Technology  
96 Jinzhai Rd., Hefei 230026, Anhui, China

Printed by: Printing House of University of Science and  
Technology of China

Distributed by: China International Book Trading Corporation  
(P. O. Box 399 Beijing, China)

国内统一刊号: CN34-1054/N

邮政代号: 26-31

国外代号: Q527

定价: 3.80 元