

ISSN 0253-2778

中国科学技术大学学报

第19卷

第1期

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY
OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Vol.19

No.1

1

1989

中国科学技术大学学报

第 19 卷 第 1 期 (总第 63 期)

目 录

- 一维弹性或粘弹性应力波方程正、反问题的特征线类方法..... 刘儒勋 李百浩 (1)
- 多维近邻密度估计的 L_p 模强相合性..... 吴耀华 (12)
- Misiurwicz 一个定理的简要证明..... 熊金城 (21)
- 有限总体 U -统计量正态逼近的非一致性界限 (I)..... 缪柏其 赵林城 (25)
- 均值定理的若干新应用..... 张明尧 (38)
- 非晶态软磁合金 $(\text{Fe}_{1-y}\text{Co}_y)_{82}\text{Cu}_{0.4}\text{Si}_{4.4}\text{B}_{13.2}$ 的结构弛豫..... 王根苗 陈慧余 (51)
- 旋转流不稳定性数值研究..... 夏南 (58)
- 天然状态下岩石密度的 μ 子测量法..... 周大庄 马福胜 程纯杰 (65)
- 方解石的辐照效应和 ESR 测年法的研究..... 彭子成等 (71)
- 利用时序分析方法识别模态参数的研究..... 李川奇 张培强 杨前进 (80)
- MOSA-II 型多道光谱分析仪的研制..... 郭立 杨周京 方树尧 (92)
- 新型组合电收尘器的结构和机理..... 李浩林 周惠民 黄教民 (99)

研 究 简 报

- 有关不独立和不相关的进一步讨论..... 金振风 黎彦修 (105)
- 关于曲面线性分割的讨论..... 陈效群 (111)
- 一维连续映射的拓扑熵和紊动集..... 武河 (118)
- 镉(II)-对-甲氧基苯氨基重氮偶氮苯-吐温-80显色反应的研究及应用
..... 朱玉瑞 郑俐 金谷 (123)
- Bi-Ca-Sr-Cu-O 体系大尺寸单晶的生长及其超导电性..... 孙敦明等 (128)
- 改善 PIC 丝室边缘电场分布的研究..... 马文淦等 (131)
- 百合组织培养中不同发育途径的激素调节..... 鲁润龙 (137)
- 雾化沉积石墨炉原子吸收法直接测定植物油中微量铁..... 陈树榆 林淑钦 齐文启 (141)

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Vol. 19 No.1 (Sum No.63)

CONTENTS

- The Characteristic Method for Solving Direct and Inverse Problems
of 1D Elastic or Viscoelastic Stress Wave Equations
..... Liu Ruxun, Li Baihao (1)
- Strong L_p -consistency of Multidimensional Nearest Neighbor Density
Estimates Wu Yaohua (12)
- A Simple Proof of a Theorem of Misiurewicz Xiong Jincheng (21)
- Non-uniform Bounds of Normal Approximation for Finite-population
 U -statistics (I) Miao Baiqi, Zhao Lincheng (25)
- Some New Applications of the Mean-Value Theorem
..... Zhang Mingyao (38)
- Structural Relaxation of Soft Magnetic Amorphous Alloys (Fe_{1-x} ,
 Co_x)₂₂ $Cu_{0.4}$ $Si_{4.4}$ $B_{13.2}$ Wang Genmiao, Chen Huiyu (51)
- A Numerical Investigation on the Instability of Swirling Flow
..... Xia Nan (58)
- The Measurement Method of Rock Density in Natural State Through
Muon Intensities
..... Zhou Dazhuang, Ma Fusheng, Cheng Chunjin (65)
- Study on Irradiated Effect and ESR Dating of Calcite
..... Peng Zicheng et al. (71)
- Identification of Modal Parameters by Using Time Series Analysis
..... Li Chuanqi, Zhang Peiqing, Yang Qianjin (80)
- The Development of MOSA-II Multichannel Optical Spectrum Analyzer
..... Guo Li, Yang Zhoujing, Fang Shuyao (92)
- The Construction and Fundamentals of a New Type Combined Electrostatic
Precipitator..... Li Haoling, Zhou Huiming, Huang Jiaoming (99)

Research Notes

- Some Further Discussions on Dependence and Uncorrelateness
..... Jin Zhenfeng, Li Yanxiu (105)
- On Linear Subdivision of the Surfaces.....Chen Xiaoqun (111)
- On Topological Entropy and Chaotic Set of One-dimensional Continuous
Map..... Wu He (118)
- Study on the Colour Reaction of Cd (II) With *p*-Methoxybenzeneamino
diazobenzene—Tween-80 and Its Application
.....Zhu Yurui, Zheng Li, Jin Gu (123)
- The Growth of Bi-Ca-Sr-Cu-O Single Crystal With Large Size
and Its Superconductivity..... Sun Dunming et al. (128)
- The Study of the Electric Field Distribution on the Edge of the PIC
Chamber.....Ma Wengan et al. (131)
- On the Phytohormone Regulation of Different Development Pathways in
Lilium Tissue Culture..... Lu Runlong (137)
- Direct Determination of Micro Iron in Vegetable Oil by Graphite Furnace
Atomic Absorption Spectrometry With IL Fastac Autosampler
.....Chen Shuyu, Lin Shuqin, Qi Wenqi (141)

中国科学技术大学学报编委会

主 编 龚 昇

副主编 (以姓氏笔划排序)

冯克勤 伍小平 刘耀阳

张懋森 郭自强 钱景仁

英文编辑 钱大卫

责任编辑 袁克林 杨延龄

一维弹性或粘弹性应力波方程 正、反问题的特征线类方法

刘儒勋 李百浩

(数学系)

摘 要

本文利用特征线或拟特征线法,对弹性或粘弹性分层均匀介质模型的应力波方程的正、反问题给出了求解方案,并对不同的分层均匀介质阻抗的设定值及不同的粘性系数做了数值试验。结果表明,方法简便、有效、稳定,阻抗的理论设定值与反演近似值非常吻合。

关键词: 正、反问题, 分层介质, 特征线方法。

1 引言

已有多篇文章讨论了波动方程系数的反演方案,特别是利用特征线方法进行分层均匀介质阻抗的反演计算^[1-4],更简便易行,引人注目。

本文是在[2]的基础上的发展,采用更简洁的特征线或拟特征线方法,对弹性和Kelvin粘弹性分层均匀介质模型的阻抗作了反演计算。采取首先给定理论阻抗模型,由正问题求解构成理论合成的地表记录(这是精确的),然后再进行反演计算,求出阻抗的重现值。

计算机实验结果表明,对不同的理论给定和不同的粘性设定,其阻抗的理论给定值与反演的重现值非常吻合。20个分层情况下,前17层都是相差不大于 10^{-2} ,表明我们的方法是简单、有效和稳定的。

2 一维弹性分层均匀介质阻抗反演的特征线方法

2.1 数学模型讨论

考虑弹性介质中的应力波方程

$$\rho v_t = p_x, \quad t > 0, \quad x > 0 \quad (2.1)$$

$$p_t = (\lambda + 2\mu) v_x \quad (2.2)$$

其中 x 表示深度, $x=0$ 为地表; t 为时间; ρ 为密度; v 为质点速度; p 为应力; λ 和 μ 均为 Lamé 系数; ρ 、 λ 、 μ 仅为 x 的函数。

记特征波速为

$$c = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.3)$$

并引入旅行时间坐标 τ 和阻抗 η ,

$$\tau = \int_0^x \frac{ds}{c(s)} \quad (2.4)$$

$$\eta = \rho c \quad (2.5)$$

在 (τ, t) 坐标下方程 (2.1) 和 (2.2) 可化作如下形式

$$V_t + AV_\tau = 0 \quad (2.6)$$

其中

$$V = (v, p)^T, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -\eta^{-1} \\ -\eta & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

系数矩阵 A 有特征值和相应的左特征向量

$$\lambda_{1,2} = \pm 1, \quad W_{1,2} = (\mp \eta, 1) \quad (2.8)$$

于是可将方程 (2.1)、(2.2) 最终化为特征化形式

$$C^+ : dr = dt, \quad W_1 \cdot dV|_{C^+} = 0 \quad (2.9)$$

$$C^- : d\tau = -dt, \quad W_2 \cdot dV|_{C^-} = 0 \quad (2.10)$$

这是沿正、负特征线 C^+ 、 C^- 上的常微分方程组。

对于地震反问题的实际背景, 通常是在某个时刻 ($t > 0$) 在地表上给出输入讯号或脉冲波。由特征线 C^+ 的关系 (2.9), 必有自然边条件

$$V(\tau, t \leq \tau) = \begin{bmatrix} v(\tau, t \leq \tau) \\ p(\tau, t \leq \tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

因而我们的求解域是 (τ, t) 平面上的 1/8 象限, 如图 1 所示。

对 (2.9) + (2.10) + (2.11) 的问题, 根据 Kreiss 定性理论 (参看 AGARD—LS—64, 73), 其有适定的正问题提法。

正问题提法:

$$\begin{cases} (2.9) + (2.10) + (2.11) \\ \eta(\tau) = f(\tau) \text{ 已知}, \tau \geq 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

$$p(0, t) = p_0(t) \quad (2.13)$$

这对应原问题 (2.1) 和 (2.2) 而言, 给出地表的输入信号 (放炮、电脉冲等), 并给出方程的系数。

求解的目标是解域 $D = \{\tau < t, t > 0\}$ 上的未知函数 $V(\tau, t)$, 其中还需求出 $\tau = 0$ 边界上的质点速度 $v(0, t) = v_0(t)$, 或称脉冲响应。而后者作为本文讨论的基本目的——反问题, 又是至关重要的。

我们所以讨论正问题及其解法, 主要是为了通过适当的给定 (2.12) 和 (2.13), 解正问

题合成理论的地表记录, 即 $v_0(t)$ 。然后利用这个理论合成结果, 再来进行逆向求解 $\eta(\tau)$ 。

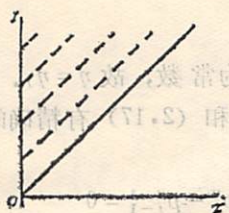


图 1

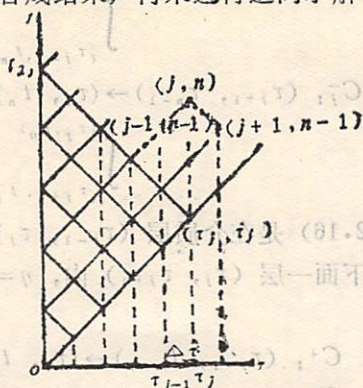


图 2

得到其近似值 $\eta(\tau)$ 。这个逆向求解称为反演问题或解反问题。通过重现值 $\eta(\tau)$ 和原来正解设定值 $\eta(\tau)$ 的比较来检验我们的反问题求解方法的稳定性和有效性。

由此, 我们有如下反问题提法:

$$\begin{cases} (2.9) + (2.10) + (2.11) + (2.13) \\ v(0, t) = v_0(t) \end{cases} \quad (2.14)$$

求解的目标为地表以下各层介质的物性参数——阻抗值 $\eta(\tau)$ 。

2.2 正演问题及特征线方案

现在重写正问题的数学模型

$$\begin{cases} C^+: d\tau = dt, \quad -\eta dv + dp = 0 & (2.9) \\ C^-: d\tau = -dt, \quad \eta dv + dp = 0 & (2.10) \\ v, p(\tau, t \leq \tau_i) = 0, \quad i < j, n > m & (2.11)^* \\ \eta(\tau) = \eta_j, \quad \tau \in [x_{j-1}, x_j] & (2.12)^* \\ p(0, t) = p_0(t) & (2.13) \end{cases}$$

其中 (2.12)* 给出了分层均匀介质的分段常数阻抗条件。这里 $\tau = \tau_i$ 是介质层的界线。所谓等“时”层, 就是 $\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1} \equiv \Delta$ 为常数。

(1) 特征化形式下的离散化格式

如图 2 所示的等“时”层分割, $\Delta_i \equiv \Delta$ 。由分割点 $\tau_j (j=1, 2, \dots, k, \dots, J)$ 引 $\tau = \tau_j$ 与 $t = \tau$ 交于 (τ_j, t_j) 。其实 $t = \tau$ 也是正特征线之一 C_0^+ 。其交点 $t_j = \tau_j$, 故可由 (τ_j, τ_j) 表示。由该点引出的特征线记为 C_j^- , 它又与地表 ($\tau = 0$) 交于 $(0, t_{2j})$ 。显然

$$t_{2j} = 2j\Delta \quad (2.15)$$

如此, 在解域 D 内构成了离散化特征线网。

在这种离散域上, 我们求解正问题, 自然是求格点 (τ_j, t_n) 上的 v_j^n, p_j^n , 特别是求出左边界——地表上离散格点 $(0, t_{2j})$ 上的 v_0^{2j} 。

为此首先须建立控制方程的离散化形式。

若 (2.9) 式取在正特征线段 C^+ : $(\tau_{j-1}, t_{n-1}) \rightarrow (\tau_j, t_n)$ 上, 则有

$$\int_{(\tau_{j-1}, t_{n-1})}^{(\tau_j, t_n)} -\eta dv + dp = 0 \quad (2.16)$$

同样对 $C_j^-: (\tau_{j+1}, \tau_{n-1}) \rightarrow (\tau_j, t_n)$ 也有

$$\int_{(\tau_{j+1}, t_{n-1})}^{(\tau_j, t_n)} \eta dv + dp = 0 \quad (2.17)$$

由于 (2.16) 是在介质层 (τ_{j-1}, τ_j) 内, 而层内阻抗值视为常数, 故 $\eta = \eta_j$. 而 (2.17) 式是在下面一层 (τ_j, τ_{j+1}) 内, $\eta = \eta_{j+1}$. 从而由 (2.16) 和 (2.17) 有精确的离散化格式

$$C^+: (\tau_{j-1}, t_{n-1}) \rightarrow (\tau_j, t_n), -\eta_j(v_j^n - v_{j-1}^{n-1}) + p_j^n - p_{j-1}^{n-1} = 0 \quad (2.18)$$

$$C^-: (\tau_{j+1}, t_{n-1}) \rightarrow (\tau_j, t_n), \eta_{j+1}(v_j^n - v_{j+1}^{n-1}) + p_j^n - p_{j+1}^{n-1} = 0 \quad (2.19)$$

对于相邻格点间的特征线段, 都可以按相应的 (2.9) 或 (2.10) 式建立其离散化格式. 这些将是特征线方法求解等时层分层均匀介质的基本格式.

(2) 特征线正演方案的具体步骤

(a) 计算 v_0^2 :

在 (2.19) 中令 $n=2, j=0$, 并根据 (2.11)* 有

$$v_j^1 = p_j^1 = 0, \quad j=1, 2, \dots, J \quad (2.11)**$$

代入 (2.19), 可得

$$v_0^2 = -p_0^2/\eta_1 \quad (2.20)$$

(b) 设已解出特征线 C_k^- 上的各格点值, 即

$$(v, p)_{k \pm l}^n, \quad l=0, 1, 2, \dots, k \quad (2.21)$$

现在来求 C_k^- 特征线上各点的值.

进而假定在 C_k^- 特征线上业已计算出 (τ_j, t_n) 左下方各点的值

$$(v, p)_{m, i}^n, \quad m < n, \quad i > j, \quad (m+j)/2 = k+1 \quad (2.22)$$

现在按图 3 所示的“人”字形上 C^+ , 即 $(j-1, n-1) \rightarrow (j, n)$ 及 $C^-(j+1, n-1) \rightarrow (j, n)$ 线, 套用离散格式 (2.18)、(2.19), 可联立求得

$$v_i^n = \frac{1}{\eta_i + \eta_{i+1}} (p_{i+1}^{n-1} - p_{i-1}^{n-1} + \eta_{i+1} v_{i+1}^{n-1} + \eta_i v_{i-1}^{n-1}) \quad (2.23)$$

$$p_i^n = p_{i-1}^{n-1} + \eta_i (v_i^n - v_{i-1}^{n-1}), \quad j = k+1, k, \dots, J \quad (2.24)$$

(c) 计算 v_0^k .

采用 (2.23) 及 (2.24) 并考虑到 (2.22) 的上下标的约束关系 $\frac{n+j}{2} = k+1$, 可直接

算到地表的前一点 (τ_1, t_{2k}) . 下面利用 $C^-: (\tau_1, t_{2k}) \rightarrow (\tau_0, t^{2k+2})$ 的关系 (相当于 (2.19) 式 $j=0, n=2k+2$), 应用 (2.13) $p_0^{2k+2} = p(0, t_{2k-2})$ 代入之可得

$$v_0^{2k+2} = (p_1^{2k+2} - p_0^{2k+2} + \eta_1 v_1^{2k+1})/\eta_1 \quad (2.25)$$

至此已算完 C_{k+1}^- 线. 继之再类似地计算后面各线 C_{j+2}^-, \dots, C_7^- , 逐次把正演计算完成.

2.3 反演问题及特征线方案

特征线反演方案目的在于反解 η_i 的阻抗近似值, 一般也可以依正演方法按逆向进行来完成。但为了与 §3 的粘弹性反演问题方法一致, 这里也采用按 t 方向逐点计算的方案。为此, 重写反问题:

$$\begin{cases} C^+ : d\tau = dt, & -\eta dv + dp = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} C^- : d\tau = -dt, & \eta dv + dp = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$v_j^0 = p_j^0 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (2.11)$$

$$p_0^k, v_0^k, \quad k = 1, 2, \dots, J \quad (2.26)$$

其中 v_0^k 就是正演计算得到的结果 (2.25)。

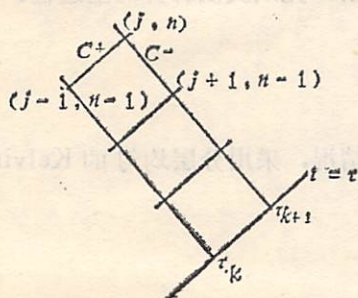


图 3

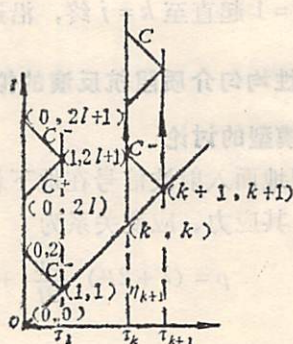


图 4

求解的是

$$\eta(\tau) = \eta_i, \quad \tau \in (\tau_{i-1}, \tau_i)$$

$$v_j^n, p_j^n, \quad \frac{j+n}{2} = k, \quad k = 1, 2, \dots, J$$

其特征线方案与具体步骤是:

(1) 计算 η_1 : 如图 4, 由 (τ_1, t_1) 、 (τ_0, t_0) 和 (τ_0, t_2) 三点组成的特征关系有离散化格式

$$\begin{cases} C^+ : -\eta_1 (v_1^1 - v_0^0) + (p_1^1 - p_0^0) = 0 \\ C^- : \eta_1 (v_1^1 - v_0^2) + (p_1^1 - p_0^2) = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

根据 (2.11), 上式可解出

$$\eta_1 = -p_0^2 / v_0^2 \quad (2.28)$$

(2) 计算直线 $\tau = \tau_1$ 上各格点值。

$$\begin{cases} v_1^n = \frac{1}{2\eta_1} [p_0^{n+1} - p_0^{n-1} + \eta_1 (v_0^{n+1} + v_0^{n-1})] \\ p_1^n = p_0^{n-1} + \eta_1 (v_1^n - v_0^{n-1}), \quad n = 3, 5, \dots, 2J-1 \end{cases} \quad (2.29)$$

(3) 假设 $\tau = \tau^k$ 直线上各点值已算出, 即已知 $(v, p)_k^{k+2l}$, $l = 1, 2, \dots, J-k$ 。现欲求 η_{k+1} 。类似地, 由图 4 中的三点 (k, k) , $(k+1, k+1)$ 和 $(k, k+2)$ 特征关系离散化得

$$\begin{cases} C^+: \eta_{k+1}(v_{k+1}^{k+1} - v_k^k) + p_{k+1}^k - p_k^k = 0 \\ C^-: \eta_{k+1}(v_{k+1}^{k+1} - v_k^{k+2}) + p_{k+1}^{k+1} - p_k^{k+2} = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

及 (2.11) 可得

$$0 = \eta_{k+1} v_k^{k+2} - p_k^{k+2} \quad (2.31)$$

一般地, 其上各格点 (τ_{k+1}, t_k) 上的未知 v, p 有

$$\begin{cases} v_{k+1}^n = \frac{1}{2\eta_{k+1}} [p_{k+1}^{n+1} - p_k^{n-1} + \eta_{k+1}(v_{k+1}^{n+1} + v_k^{n-1})] \\ p_{k+1}^n = p_k^{n-1} + \eta_{k+1}(v_{k+1}^n - v_k^{n-1}), \quad n = k+3, k+5, \dots, 2J - (k+1) \end{cases} \quad (2.32)$$

以上过程由 $k=1$ 起直至 $k=j$ 终, 沿逐条直线 $\tau = \tau_k$ 求解, 完成反演计算的全过程。

3 一维粘弹性均匀介质阻抗反演的拟特征线方法

3.1 数学模型的讨论

为了体现地面入射波信号在地下耗散、衰减的实际情况, 采用分层均匀的 Kelvin 粘弹性固体模型, 其应力、应变关系为

$$p = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial t} + (\lambda' + 2\mu') \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \quad (3.1)$$

或

$$p = (\lambda + 2\mu)v + f \frac{\partial v}{\partial t}, \quad f = \lambda' + 2\mu' \quad (3.2)$$

则有不同于 (2.2) 的方程, 认为 f 为小常数, (2.1) 和 (2.2) 在粘弹性介质中就变为

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial x} + f \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (3.4)$$

其中 $x, t, \rho, v, p, \lambda, \mu$ 均如 §2 所述。

类似地引入“旅行时间” τ 和阻抗 η , 方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + A \frac{\partial V}{\partial \tau} = H(V) \\ V = \begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & -\eta^{-1} \\ -\eta & 0 \end{bmatrix}, H(v) = \begin{bmatrix} 0 \\ \epsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \tau} \end{bmatrix}, \epsilon = \frac{\lambda' + 2\mu'}{c} \end{cases} \quad (3.5)$$

仿照 §2, 记 $C^\pm: \frac{d\tau}{dt} = \pm 1$, 称为拟特征线, 则上式也有所谓“拟”特征化形式

$$\begin{cases} C^+: d\tau = dt, \quad -\eta dv + dp = \epsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \tau} dt \\ C^-: d\tau = -dt, \quad \eta dv + dp = \epsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \tau} dt \end{cases} \quad (3.5)^*$$

类似地也有正问题和反问题的提法。

正问题:

$$\begin{cases} (3.5)^* + \varepsilon & (3.6) \\ v(\tau, 0) = (v(\tau, 0), p(\tau, 0)) \tau = (0, 0) \tau & (3.7) \\ \eta(\tau) = \eta_i; \tau \in [\tau_{i+1}, \tau_i] & (3.7) \\ p(0, t) = p_0(t) & (3.8) \end{cases}$$

欲求 $v_0^k, (v, p)_i^j, (j+n)/2 = 1, 2, \dots, J$

反问题: 已知

$$\begin{cases} (3.5)^* + (3.6) + (3.8) + \varepsilon \\ v_0^k, k=1, 2, \dots, J \end{cases} \quad (3.4)$$

欲求 η_i 的近似值 η_i 及 v_i^j, p_i^j .

3.2 拟特征线离散化格式

由于粘性的原因, 这时的解域已不是 $\tau < t$ 的 1/8 象限, 而是 $t > 0, x > 0$ 的第一象限. 尽管如此, 我们所关心的仍然是各层的阻抗近似值的反演及 $t > \tau$ 上各特征网格点上的 v 和 p 的近似值.

(1) 考虑图 3, 在两个介质层中, 沿 C^+ 和 C^- 分别积分 (3.5)* 式, 即

$$\int_{(\tau_{i-1}, t_{n-1})}^{(\tau_j, t_n)} -\eta dv + dp = \int_{(\tau_{i-1}, t_{n-1})}^{(\tau_j, t_n)} \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial t} d\tau \quad (3.10)$$

$$\int_{(\tau_{i+1}, t_{n-1})}^{(\tau_j, t_n)} \eta dv + dp = \int_{(\tau_{i+1}, t_{n-1})}^{(\tau_j, t_n)} \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial t} dt$$

取梯形积分近似, 右端导数取积分中的中心差商逼近, 可分别得到

$$-\eta_i (v_j^n - v_{j-1}^n) + (p_j^n - p_{j-1}^n) = \frac{\varepsilon}{\Delta \tau} (v_j^n + v_{j-1}^n - v_{j-1}^{n-1} - v_{j-1}^n) \quad (3.11)$$

$$\eta_{i+1} (v_j^n - v_{j+1}^n) + (p_j^n - p_{j+1}^n) = -\frac{\varepsilon}{\Delta \tau} (v_j^n + v_{j+1}^n - v_{j+1}^{n-1} - v_{j+1}^n)$$

解之, 可得

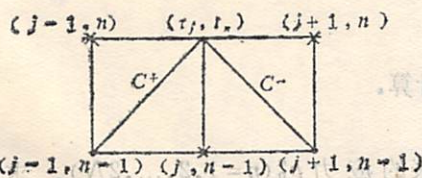


图 5

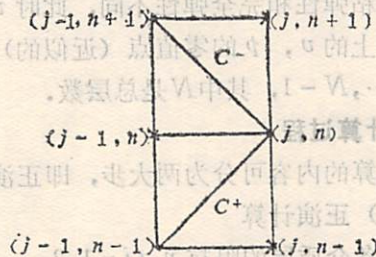


图 6

$$v_j^n = - \left[p_{j-1}^{n-1} - p_{j+1}^{n-1} - \eta_j v_{j-1}^{n-1} - \eta_{j+1} v_{j+1}^{n-1} + \frac{\epsilon}{\Delta\tau} (v_{j-1}^{n-1} + v_{j+1}^{n-1} - v_{j-1}^n - v_{j+1}^n - 2v_j^{n-1}) \right] / \left(\eta_j + \eta_{j+1} + 2\frac{\epsilon}{\Delta\tau} \right) \quad (3.12)$$

$$p_j^n = p_{j-1}^{n-1} + \frac{\epsilon}{\Delta\tau} (v_j^n + v_{j-1}^{n-1} - v_{j-1}^n - v_j^{n-1}) + \eta_j (v_j^n - v_{j-1}^{n-1})$$

(3.12) 式用于正问题的计算, 将从初始线开始, 按时间层次, 由低到高向上计算。图 5 中标有“*”的点 $(j, n-1)$, $(j-1, n)$, $(j+1, n)$ 处的函数值, 开始采用内外插值给出。

(2) 考虑图 6, 在同一个介质层内沿 C^+ 和 C^- 分别积分 (3.5)* 两式, 即

$$\int_{(\tau_{j-1}, t_{n-1})}^{(\tau_j, t_n)} -\eta dv + dp = \int_{(\tau_{j-1}, t_{n-1})}^{(\tau_j, t_n)} \epsilon \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial t} dt \quad (3.13)$$

$$\int_{(\tau_{j-1}, t_{n+1})}^{(\tau_j, t_n)} \eta dv + dp = \int_{(\tau_{j-1}, t_{n+1})}^{(\tau_j, t_n)} \epsilon \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial t} dt$$

同样地也分别有离散化格式

$$-\eta_j (v_j^n - v_{j-1}^{n-1}) + p_j^n - p_{j-1}^{n-1} = \frac{\epsilon}{\Delta\tau} (v_j^n + v_{j-1}^{n-1} - v_j^{n-1} - v_{j-1}^n) \quad (3.14)$$

$$\eta_j (v_j^n - v_{j+1}^{n+1}) + p_j^n - p_{j+1}^{n+1} = \frac{\epsilon}{\Delta\tau} (v_j^n + v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1} - v_{j+1}^n)$$

解之可得

$$v_j^n = [p_{j-1}^{n-1} - p_{j+1}^{n+1} + \eta_j (v_{j-1}^{n-1} - v_{j+1}^{n+1}) + \frac{\epsilon}{\Delta\tau} (v_{j-1}^{n-1} + v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n-1} - v_{j+1}^n)] / 2\eta_j$$

$$p_j^n = p_{j-1}^{n-1} + \eta_j (v_j^n - v_{j-1}^{n-1}) + \frac{\epsilon}{\Delta\tau} (v_j^n + v_{j-1}^{n-1} - v_j^{n-1} - v_{j-1}^n) \quad (3.15)$$

(3.15) 式用于反问题的计算。计算顺序是先按介质层内由下而上, 再由左向右逐层介质进行阻抗反演计算, 其中“*”点最初由内外插值给出, 然后进行校正。

(3) η_j 的反演

由于粘弹性和完全弹性不同, 此时 $\tau = t$ 已不可能是 v , p 的零值线, 所以首先找出每个 $\tau = t_j$ 上的 v , p 的零值点 (近似的), 然后按类似于弹性情况的反演公式, 计算出 η_j , $j = 1, 2, \dots, N-1$, 其中 N 是总层数。

3.3 计算过程

按计算的内容可分为两大步, 即正演计算和反演计算。

(1) 正演计算

已知各介质层的阻抗 η_j ($j = 1, 2, \dots, N-1$) 和地表的应力 p_0^n ($n = 1, 2, \dots, 2N$)。求地表的位移速度 v_0^n ($n = 1, 2, \dots, 2N$)。

(a) 预估

对于 $n=1, 2, \dots, 2N$, 依次求出 v_j^n 和 $p_j^n, j=1, 2, \dots, J$, 计算公式用 (3.12) 式, 其中取 $\epsilon=0$.

(b) 校正

与前面的计算顺序相同, 仍取 (3.12) 式进行计算, 只是取 $\epsilon \neq 0$. 且校正计算要进行多次. 本文例中校正计算反复了 5 次. 计算顺序见图 7 所示.

(2) 反演计算

已知地表各网格点的应力 p_0^n 和位移速度 $v_0^n (n=1, 2, \dots, 2N)$, 求各介质层的阻抗 η_1 .

(a) 预估

对于 $j=1, 2, \dots, N$, 首先求出阻抗的预估值

$$\eta_{j-1} = (p_{j-1}^{\tilde{n}} - p_j^{\tilde{n}-1}) / (v_j^{\tilde{n}-1} - v_{j-1}^{\tilde{n}}) \quad (3.16)$$

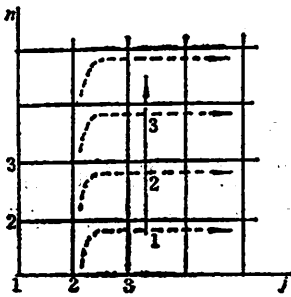


图 7

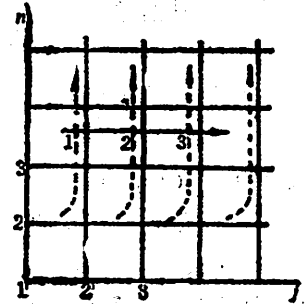


图 8

这里的 \tilde{n} 介于 1 和 $2N$ 之间, 它是按第 j 层界面上 p 和 v 的零值条件决定的.

然后按 (3.15) 式, 依次求出 v_j^n 和 $p_j^n (n=1, 2, \dots, 2N)$, 其中的 ϵ 取为零.

(b) 校正

取 $\epsilon \neq 0$. 计算顺序与上面相同. 但因 $\epsilon \neq 0$, 则阻抗的校正值为

$$\eta_{j-1} = (p_{j-1}^{\tilde{n}} - p_j^{\tilde{n}-1}) / (v_j^{\tilde{n}-1} - v_{j-1}^{\tilde{n}}) + \frac{\epsilon}{\Delta \tau} (v_{j-1}^{\tilde{n}} + v_j^{\tilde{n}-1} - v_j^{\tilde{n}} - v_{j-1}^{\tilde{n}-1}) \quad (3.17)$$

然后按 (3.15) 式, 依次求出 v_j^n 和 $p_j^n, n=2, 3, \dots, 2N$. 同样, 校正计算也要进行多次. 本文算例中进行了 5 次, 计算顺序见图 8 中所示.

4 算例和数值结果

4.1 弹性等时层均匀介质的数值试验

为了检验弹性等时层均匀介质特征线方法的效果和稳定性, 我们做了两种理论模型的数值试验. 一是给阻抗以解析形式:

$$\eta(\tau) = 1.1 + \sin(2\pi\tau/25) \quad (4.1)$$

并取层内左端的函数值作为层的常值, 即取 $\eta_j = \eta(\tau_j), j=0, 1, 2, \dots, 49$. 而地表输入值也以解析形式给出

$$p_0(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-t^2/4\alpha^2} \quad (4.2)$$

其中 α 是选择参数, $\alpha < 1$.

由正演算出 v_i^k ($k=1, 2, \dots, 101$), 再进行反演计算, 算出 η_i 的重现值 $\tilde{\eta}_i$ 由图 9 可见是

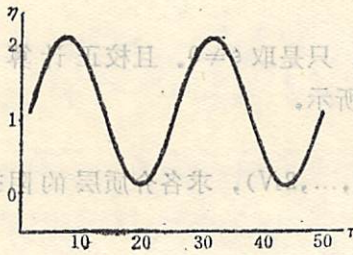


图 9

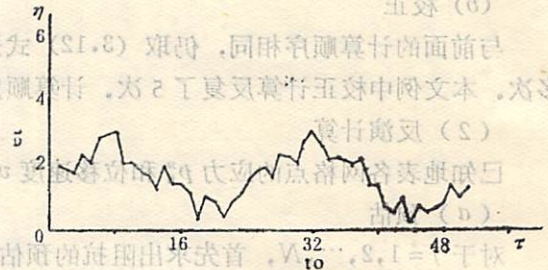


图 10

十分吻合的. 其误差

$$\Delta\eta = \max_{1 \leq i \leq 30} |\tilde{\eta}_i - \eta_i| < 10^{-3} \quad (4.3)$$

另一种是给出阻抗形式:

$$\eta(\tau) = 1.1 + \sin(2\pi\tau/25) + \text{RND} \quad (4.4)$$

这里 RND 是 (0, 1) 上的随机数, 其他条件同上. 这样做的目的是让阻抗值有所跳跃 (反映噪音), 以便检验算法的有效性和稳定性, 结果由图所示. 阻抗的设定值 η 和反演重现值之间十分吻合, 其误差满足 (4.3) 式.

4.2 粘弹性等时层均匀介质的数值试验

根据粘弹性应力波方程, 相应于不同介质层的阻抗, 其粘性系数也不同. 但无论是定性的还是定量的分析和结论都无从查到, 甚至大致范围也不了解, 有关粘弹性反演问题, 国内、外尚未见有所结果报导, 故只能对一串 ϵ 值做了试验: $\epsilon/\Delta\tau = 0.01, 0.005$.

阻抗的给定形式是 (4.1) 和 (4.2), 试验结果见图 11 所示. 总计有 20 层介质, 阻抗的设定值 η_i 和反演值在前 17 层内满足

$$\Delta\eta = \max_{1 \leq i \leq 17} |\tilde{\eta}_i - \eta_i| < 0.008 \quad (4.5)$$

在 17 层以后, 由于节点不足, 加上误差的积累, 影响了精度, 也使预估校正难以有效, 结果出入较大.

另一种阻抗的给定形式是给出一组任意离散值, 列于下表中, 为了检验本算法的可靠性和有效性, 故意让相邻的两个介质层的阻抗值相差几倍.

层次	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
阻抗值	2	5.5	1.5	5.5	2.5	6.0	4.5	2.0	5.5	1.8	3.0	2.5	6.5	1.5	3.7	1.25	4.75	2.5	5.75	2.5

当取 $\epsilon/\Delta\tau = 0$ 时, 前 20 层的阻抗设定值 η_i 和重现值 $\tilde{\eta}_i$ 十分接近, 其误差满足 (4.5) 式, 当取 $\epsilon/\Delta = 0.005$ 时, 则前 17 层的 η_i 和 $\tilde{\eta}_i$ 都很接近, 准确到小数后两位.

参 考 文 献

- [1] Bube, K.B., Burrige, R., *SIAM Review*, 4 (1983).
- [2] Santosa, F., Schwetlick, H., *Wave Motion*, 4 (1982).
- [3] 刘儒勋、薛鑫恒，“地震勘探中非波动方程的数值解法”，石油部研究报告，1985年。
- [4] 刘儒勋、薛鑫恒，“一维介质阻抗反演的特征线法”，地震反问题研究报告之二，1985年。
- [5] Liu Ruxun, Li Baihao and Chou Taihua, *Journal of China University of Science and Technology*, 16 (1986), 123—129.

要 献

The Characteristic Method for Solving

Direct and Inverse Problems of 1D Elastic or Viscoelastic Stress Wave Equations

Liu (Ruxun) Li (Baihao)

(Department of Mathematics)

Abstract

In the paper, the direct and inverse problems of stress wave equations for uniform horizontal layered elastic or viscoelastic media are solved by characteristics or quasi-characteristics.

With different layered impedances and viscosity given, the numerical computation tests are made. The numerical results show the inverse approximate values are very close with the given values for the layered impedances, and the method is simple, efficient and stable.

Key words, characteristics, direct and inverse problems, layered media.

(1)

多维近邻密度估计的 L_p 模强相合性

吴耀华

(数学系)

摘 要

设 X_1, \dots, X_n 是 i.i.d. 的具有密度 $f(x)$ 的 d 维随机变量. 设 $S_{x, a(x)}$ 是中心在 x 且至少包含 X_1, \dots, X_n 中 k_n 个点的最小的球, 则 $f_n(x) = \frac{k_n}{n|S_{x, a(x)}|}$ 是 $f(x)$ 一个近邻估计. 我们证明了: 假如 $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n/n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n/\log n = \infty$ 以及 $f \log^+ f$ 在任何有界 Borel 集上可积 (或 $\int f^p(x) dx < \infty, p > 1$), 则对任何有界 Borel 集 A 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A |f_n(x) - f(x)| dx \stackrel{a.s.}{=} 0$ (或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n(x) - f(x)|^p dx \stackrel{a.s.}{=} 0, p > 1$). 反之, 如 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n(x) - f(x)|^p dx \stackrel{a.s.}{=} 0$, 则有 $\int f^p(x) dx < \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} k_n/n = 0$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty$.

关键词: 多维密度, 近邻估计, L_p 相合性.

1 引 言

设 X 为 d 维随机变量, 具有分布 F , 密度 f . X_1, \dots, X_n 为 X 的 i.i.d. 观测值. 我们要依据 X_1, \dots, X_n 去估计 f 在点 $x \in R^d$ 的值 $f(x)$. 给定自然数 $k_n \leq n$, 找一最小的 $a_n(x) \hat{=} a_n(x, X_1, \dots, X_n)$, 使得以 x 为中心, $a_n(x)$ 为半径的球 $|S_{x, a_n(x)}|$ 至少包含 X_1, \dots, X_n 中的 k_n 个. 定义

$$f_n(x) \hat{=} f_n(x, X_1, \dots, X_n) \hat{=} k_n/n |S_{x, a_n(x)}| \quad (1)$$

其中 $|S|$ 表示 Borel 集 $S \subset R^d$ 的 L 测度, 这就是通常所说的 $f(x)$ 的近邻估计.

在本文中, $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) \in R^d$ 的模 $\|x\|$ 定义为

1987年12月28日收到.

* 国家自然科学基金资助课题.

$$\|x\| \triangleq \max_{1 \leq i \leq d} |x^{(i)}| \quad (2)$$

不难证明对任何固定的 X_1, \dots, X_n , 总有

$$\int f_n dx = \infty \quad (3)$$

因而通常所讨论的“ L_1 模收敛准则”就不适用于近邻估计 f_n . L_1 模收敛问题, 是指在某种条件、在某种收敛意义下, f 的某种估计 $\tilde{f}_n(x) \triangleq \tilde{f}_n(x; X_1, \dots, X_n)$ 成立,

$$\int |\tilde{f}_n - f| dx \rightarrow 0 \quad \text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时} \quad (4)$$

对于窗宽为常数的核估计, L. Devroye 在文 [3] 中已彻底给予解决. 在文中他证明了 (4) 式各种收敛性与 $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} nh_n^d = \infty$ 的等价性; 并建立了 L_1 模的指数收敛速度.

由于 (3) 式的缘故, 对于近邻密度估计只能讨论 $L_p (p > 1)$ 模与有界集上 L_1 模的相合性. 赵悦在文 [1] 中比较彻底地解决了此问题在 $d=1$ 的情形. 文中所用的一个关键引理是基于经验过程的强逼近, 对多维的情形目前还没有如此精确的结果. 因而对多维的情形要另辟途径处理. 我们的研究表明, 对多维的情形, 文 [1] 的结论仍成立. 从而比较彻底地解决了此问题, 具体地说就是得到了下面两个定理:

定理 1 (L_p 模强相合性) 假设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n/n = 0 \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n/\log n = \infty \quad (6)$$

$$\int f^p dx < \infty \quad (7)$$

则有

$$\int |f_n - f|^p dx \rightarrow 0 \quad \text{a. s.} \quad \text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时} \quad (8)$$

反之, 若 (8) 式成立, 则 (5)、(7) 必成立, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty \quad (9)$$

定理 2 (有界长方体 L_1 模强相合性) 假设

1° 条件 (5)、(6) 成立;

2° $f \log^+ f$ 在任何有界长方体上 L 可积.

则有

$$\int_{[a, b]} |f_n - f| dx \rightarrow 0 \quad \text{a. s.} \quad \text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时} \quad (10)$$

对任给 $[a, b] = \prod_{i=1}^d [a^{(i)}, b^{(i)}] \subset R^d$ 成立. 反之, 若此结论成立, 则 (5)、(9) 必成

立.

2 若干引理

为了证明定理的需要, 我们在此节引入一些引理.

引理 1 在 R^d 上定义函数 f^* 如下:

$$f^*(x) \hat{=} \sup_{r>0} \left\{ \int_{S_{x,r}} f(y) dy / |S_{x,r}| \right\}$$

有

1) 若对某个 $p>1$, (7) 式成立, 则 $\int f^{*p} dx < \infty$;

2) 若 $f \log^+ f$ 在 R^d 的任何有界集上可积, 则 f^* 亦然.

证明 注意到文 [5] 中的引理 3.1 对多维情形仍成立, 利用文 [1] 中引理 1 的证法不难证明此结论.

引理 2 设 f 为 R^d 上的 L 可积函数, 则

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{S_{x,r}} |f(y) - f(x)| dy / |S_{x,r}| = 0 \quad \text{对 a. e. } x(L) \quad (12)$$

在此, 特别要指出的是, 此引理对本文所定义的模是成立的 (可参看文 [6] 的 p191, example 20).

引理 3 (J. Kiefer,) 设 X_1, X_2, \dots 为一串 d 维 i. i. d. 随机变量, X_1 的分布为 F . 以 F_n 记 X_1, \dots, X_n 的经验分布, 则存在绝对常数 $C>0$, 使得对任给 $\epsilon>0$ 有

$$P\{\sup_x |F_n(x) - F(x)| > \epsilon\} \leq C e^{-n\epsilon^2}, \quad n=1, 2, \dots \quad (13)$$

证明 见文 [4].

注 1 记 $\mathcal{A} = \{S_{x,r}, x \in R^d, r > 0\}$, 则由 $S_{x,r}$ 的结构与 $F(x)$ 的定义和 $\sup_{A \in \mathcal{A}} |F_n(A) - F(A)| \leq 2^d \sup_{x \in R^d} |F_n(x) - F(x)|$, 由此结合 (13) 式, 知存在绝对常数 $C_0, C_1 > 0$, 使得对一

切 n 与任给的 $\epsilon > 0$, 有

$$P\{\sup_{A \in \mathcal{A}} |F_n(A) - F(A)| > \epsilon\} \leq C_0 \exp(-C_1 n \epsilon^2) \quad (14)$$

引理 4 设 \mathcal{C} 为 R^d 中 Borel 集类的子类, 满足

$$\sup_{A \in \mathcal{C}} F(A) \leq b \leq 1/4$$

则对任给 $\epsilon > 0$, 当 $n \geq 8b/\epsilon^2$ 时,

$$P\{\sup_{A \in \mathcal{A}} |F_n(A) - F(A)| \geq \epsilon\} \leq 4s(\mathcal{C}, 2n) \exp(-n\epsilon^2/(64b+4\epsilon)) + 2P\{\sup_{A \in \mathcal{A}} F_{2n}(A) \geq 2b\} \quad (15)$$

其中 $s(\mathcal{C}, 2n) = \max_{(x_1, \dots, x_n)} N(x_1, \dots, x_n, \mathcal{C})$, $N(x_1, \dots, x_n, \mathcal{C})$ 定义为 $\{(x_1, \dots, x_n) \cap A; A \in \mathcal{C}\}$

中集合的个数.

证明 见文 [2] 中的引理 1.

引理 5 设条件 (5)、(6) 成立, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{a. s. 对 a. e. } x(L) \text{ 成立} \quad (16)$$

且以概率 1, 当 n 充分大时对一切 x 同时有

$$f_n(x) \leq 2f^*(x) \quad (17)$$

证明 给定 $\eta \in (0, 1)$, 定义 $a_i \hat{=} a_i(n, x)$ 如下:

$$F(S_{r, \dots, r}) = (1 - \eta)K_n/n, \quad F(S_{r, \dots, r}) = (1 + \eta)K_n/n$$

又定义

$$G_n \hat{=} \{\text{当 } n \text{ 充分大时, 对一切 } x \text{ 同时有 } a_1 \leq a_n(x) \leq a_2\}$$

$$G_n \hat{=} \{\text{对一切 } x \text{ 同时有 } a_1 \leq a_n(x) \leq a_2\}$$

则当 G_n^c 发生时, 必存在 x , 使得对 $i=1$ 或 $i=2$ 时, 成立 $|F_n(S_{r, \dots, r}) - F(S_{r, \dots, r})| > \eta k_n/n$. 现在记

$$\mathcal{A}_n = \{S_{r, \dots, r}: x \in R^d, r > 0, \text{ 且有 } F(S_{r, \dots, r}) \leq 2k_n/n\}$$

则有

$$\begin{aligned} P(G_n^c) &\leq P\{\sup_x \max_{i=1,2} |F_n(S_{r, \dots, r}) - F(S_{r, \dots, r})| \geq \eta k_n/n\} \\ &\leq P\{\sup_{A \in \mathcal{A}_n} |F_n(A) - F(A)| \geq \eta k_n/n\} \end{aligned} \quad (18)$$

且 $s(\mathcal{A}_n, m) \leq m^{2d}$

现在定义 $b_t = 2(k_n/n)^{1-t/n}$, $t = 0, \dots, [\frac{n}{2}] + 1$. 其中 $[\frac{n}{2}]$ 表示不超过 $\frac{n}{2}$ 的最大整数, 则我

们有 $\sup_{A \in \mathcal{A}_n} F(A) \leq b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_{[\frac{n}{2}]+1} \leq 1/4$, 当 n 充分大时成立. 现利用引理 4 与注 1 得

得

$$\begin{aligned} P(G_n^c) &\leq 4(2n)^{2d} \exp(-n(\eta k_n/n)^2 / (64b_1 + 4\eta k_n/n)) \\ &\quad + 2P\{\sup_{A \in \mathcal{A}_n} F_{2n}(A) > 2b_1\} \\ &\leq 4(2n)^{2d} \exp(-Cnb_0^2/b_1) + 2P\{\sup_{A \in \mathcal{A}_n} |F_{2n}(A) - F(A)| > b_1\} \\ &\leq \dots \\ &\leq 4(2n)^{2d} \exp(Cnb_0^2/b_1) + 2^{[\frac{n}{2}]+1} P\{\sup_{A \in \mathcal{A}_n} F_{2^{[\frac{n}{2}]+1}}(A) \geq 2b_{[\frac{n}{2}]+1}\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]} 4 \cdot 2^i (2^{i+1}n)^{2d} \exp(-C2^i nb_i^2/b_{i+1}) \\ &\hat{=} I_{1,n} + I_{2,n} + I_{3,n} \end{aligned} \quad (19)$$

其中 C 为一绝对常数, 且大于零.

现分别计算:

$$\begin{aligned} I_{1,n} &= 4(2n)^{2d} \exp(-2Cn(k_n/n)^2 / (k_n/n)^{1-1/n}) \\ &= 4(2n)^{2d} \exp(-2Ck_n(k_n/n)^{\frac{1}{n}}) \end{aligned}$$

由微积分的知识可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (k_n/n)^{1/n} = 1$$

因而由 (6) 式知, 当 n 充分大时

$$I_{1n} \leq C/n \quad (20)$$

$$\begin{aligned} I_{2n} &= 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} P\left\{ \sup_{A \in \mathcal{A}_n} |F_2^{\lfloor n/2 \rfloor + 1}(A) - F(A)| > b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \right\} \\ &\leq C_0 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \exp(-C_1 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} n b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^2) \\ &\leq C_0 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \exp(-C_1 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} k_n) \\ &\leq C_0 \exp(-C_1 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} + \ln 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}) \cdot \exp(-C_1 (k_n - 1)) \\ &\leq C_0 \exp\left(-\frac{C_1}{2} k_n\right) \quad \text{当 } n \text{ 充分大时,} \end{aligned}$$

因而由 (6) 式, 对充分大 n 有

$$I_{2n} \leq C/n^2 \quad (21)$$

最后计算 I_{3n} . 定义

$$I_{3n} \triangleq \sum_{t=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} J_{t,n}$$

则有

$$\begin{aligned} J_{t,n} &= 2^{t+2} (2^{t+1} n)^{2d} \exp(-C 2^t n b_{t+1}^2) \\ &\leq 4 (2^t)^{2d+1} \cdot 2^{2d} n^{2d} \exp(-C 2^t k_n) \\ &\leq 4 (2n)^{2d} \exp(-C 2^t + (2d+1) \ln 2^t) \exp(-C (k_n - 1)) \end{aligned}$$

现选定 t_0 , 使得当 $t > t_0$ 时有

$$C 2^t \geq (2d+1) \ln 2^t$$

则有

$$\begin{aligned} I_{3n} &= \sum_{t=1}^{t_0} J_{t,n} + \sum_{t=t_0+1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} J_{t,n} \\ &\leq 4 t_0 (2^{t_0})^{2d+1} (2n)^{2d} \exp(-C k_n) + 4n (2n)^{2d} \exp(-C (k_n - 1)) \end{aligned}$$

因而由 (6) 式, 当 n 充分大时有

$$I_{3n} \leq C/n^2 \quad (22)$$

综合 (19)、(20)、(21) 与 (22) 式, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(G_n^c) < \infty$$

由 Borel-Cantelli 引理知 $P(G) = 1$.

取 $\eta = \frac{1}{2}$, 则知: 以概率 1, 当 n 充分大时, 对一切 x 同时有

$$\begin{aligned} f_n(x) = k_n/n |S_{x, a_n(x)}| &\leq k_n/n |S_{x, a_1}| = 2F(S_{x, a_1})/|S_{x, a_1}| \\ &\leq 2 \sup_{r>0} F(S_{x, r})/|S_{x, r}| = 2f^*(x) \end{aligned}$$

引理的后一结论证毕。

又由引理 2 知存在一个 L 零测子集 E_1 , 使得当 $x \notin E_1$ 时有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(S_{n,r}) / |S_{n,r}| = f(x) \quad (23)$$

以 B 记 F 的支撑, 设 $x \in B - E_1$, 则对任给 $r > 0$, 有 $F(S_{n,r}) > 0$. 由强大数定理与 (5) 式知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) = 0$. a.s. 依据 (23) 式, 知以概率 1, 当 n 充分大时,

$$F(S_{n,a_n(x)}) = |S_{n,a_n(x)}| (f(x) + o(a_n(x))) \quad (24)$$

由此及 $P(G) = 1$ 知以概率 1, 当 n 充分大时

$$(1 - \eta) k_n / n \leq |S_{n,a_n(x)}| (f(x) + o(a_n(x))) \leq (1 + \eta) k_n / n$$

这等价于以概率 1, 当 n 充分大时

$$(1 - \eta) f_n(x) \leq f(x) + o(a_n(x)) \leq (1 + \eta) f_n(x) \quad (25)$$

因 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) = 0$ a.s., 知以概率 1, 当 n 充分大时, $f_n(x) \leq (f(x) + 1) / (1 - \eta)$. 由此式及

(25) 式, 知以概率 1, 当 n 充分大时,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq o(a_n(x)) + \eta f_n(x) \leq o(a_n(x)) + (1 - \eta)^{-1} \eta (f(x) + 1)$$

令 $n \rightarrow \infty$, 再令 $\eta \rightarrow 0$, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ a.s.

又存在 L 零测集 E_2 , 使得当 $x \in B^c - E_2$ 时, 有 $f(x) = 0$. 且存在 $a(x) > 0$, 使 $F(S_{n,a(x)}) = 0$. 取定 $x \in B^c - E_2$, 则 $a_n(x) \geq a(x)$. a.s., 因而 $f_n(x) \leq k_n / n |S_{n,a(x)}| \rightarrow 0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时. 因此, 当 $x \in E_1 \cup E_2$ 时, 总有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ a.s. 这就证明了此引理.

引理 6 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} |f_n - f| dx = 0 \text{ a.s.} \quad (26)$$

对任何有界集 $[a, b]$ 成立. 则存在 R^d 的 L 零测子集 E , 使得当 $x \notin E$ 时存在自然数子序列 $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ (与 x 有关), 有

$$f_{n_m}(x) \xrightarrow{P} f(x) \quad \text{当 } m \rightarrow \infty \text{ 时} \quad (27)$$

证明 取定一个常数 $M > 0$, 在空间 $[-M, M]^d \times \{R^d\}^\infty$ 上引进测度 $\nu = L \times R^\infty$, 由 (26) 知, 以概率 1 有

$$f_n(x; X_1, \dots, X_n) \xrightarrow{L} f(x), \text{ 于 } x \in [-M, M]^d \quad (28)$$

由此及控制收敛定理易知, 对任给 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\{(x; x_1, x_2, \dots) : |f_n(x; x_1, \dots, x_n) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0 \quad (29)$$

取定 $\eta > 0$, 根据上式, 对任何自然数 m 可找到自然数 n_m , 使得当 $n > n_m$ 时, 有

$$\nu(\{(x; x_1, x_2, \dots) : |f_n(x; x_1, \dots, x_n) - f(x)| \geq m^{-1}\}) \leq \eta^2 2^{-m} \quad (30)$$

把上式左边的集合记为 B_{n_m} . 其在点 x ($\|x\| < M$) 处的截面, 即 $\{(x_1, x_2, \dots); (x; x_1, x_2, \dots) \in B_{n_m}(x)\}$, 记为由 (30) 式知

$$|\{x; F^\infty(B_{n_m}(x)) \geq \eta 2^{-m}\}| \leq \eta 2^{-m}, \text{ 当 } n > n_m \text{ 时} \quad (31)$$

记 $B = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x; F^\infty(B_{n_m}(x)) \geq \eta 2^{-m}\}$, 则 $|B| \leq \eta$. 且由 (31) 式易知, 当 $x \in [-M, M]^d - B$

时, 有 (27) 式成立. 由于 M 和 η 都是任意的正数, 这就完成了引理的证明.

3 定理的证明

以下只给出定理 2 的证明, 因为定理 1 的证明是类似的. 先证明充分性的部分.

根据引理 5 的第一个结论, 利用 Fubini 定理, 知以概率 1 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{对 } x \in [a, b], \text{ a.e. } (L) \text{ 成立} \quad (32)$$

利用 (17) 式可得

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2f^*(x) + f(x)$$

由条件 2° 与引理 1 知上式左边在 $[a, b]$ 上 L 可积. 由此结合 (32) 式得知以概率 1 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} |f_n - f| dx = 0$$

这就证明了充分性.

现证明条件 (9) 的必要性. 设 (9) 式不成立. 不失一般性, 可设 $k_n = k$ 与 n 无关. 以 $\#(A)$ 记集合 A 中元素的个数. 根据引理 6, 存在这样的点 x_0 , 它不属于引理 6 的例外集, 且 $\frac{\partial^d F(x_0)}{\partial x^{(1)} \dots \partial x^{(d)}} = \lambda$ 存在非零有限. 记 $b_{n_i} = F(S_{x_0, (t/n), 1/\alpha})$, 依 $a_n(x)$ 的定义有

$$P(a_n^d(x) > t) = P(\#(\{X_1, \dots, X_n\}) \cap S_{x_0, (t/n), 1/\alpha} < k)$$

故有

$$\begin{aligned} P(na_n^d(x_0) > t) &= P(\#(\{X_1, \dots, X_n\}) \cap S_{x_0, (t/n), 1/\alpha} < k) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} C_n^i b_{n_i} (1 - b_{n_i})^{n-i} \end{aligned}$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} n b_{n_i} = 2^d \lambda t$, 依二项分布的 Poisson 逼近有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(na_n^d(x_0) > t) = \sum_{i=0}^{k-1} e^{-2^d \lambda t} (2^d \lambda t)^i / i! \quad (33)$$

由于 $0 < \lambda < \infty$, 对任何 $t > 0$, 上式右边的值在 $(0, 1)$ 区间内. 但依引理 6, 存在自然数

子序列 $\{n_m\}$, 使得 $f_{n_m}(x_0) \Rightarrow f(x_0)$. 注意到 f_n 的定义式 (1) 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n_m a_{n_m}^d(x_0) > t) = \begin{cases} 0 & \text{当 } t > k/2^d f(x_0) \\ 1 & \text{当 } 0 < t < k/2^d f(x_0) \end{cases}$$

这显然与 (33) 式矛盾, 这就完成了 (9) 式必要性的证明, 最后证明 (5) 式的必要性.

设 (5) 式不成立, 不失一般性. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n/n = \alpha$ 存在且大于零, 现分两种情况讨论:

1° $0 < \alpha < 1$, 取 $\beta \in (\alpha, 1)$, 及 R 充分大, 使得 $F(S_{0,R}) > \beta$. 由强大数律知: 以概率 1, 当 n 充分大时,

$$\#(\{X_i, 1 \leq i \leq n, X_i \in S_{0,R}\}) > \beta_n > k_n$$

因此, 由 $a_n(x)$ 的定义, 知以概率 1, 当 n 充分大时, 对一切 $x \in S_{0,R}$, 同时有 $a_n(x) \leq R + \|x\|$. 因而

$$f_n(x) \geq k_n / 2^d n (R + \|x\|)^d \geq \alpha / 2^{d+1} (R + \|x\|)^d \text{ 对 } \|x\| > R \text{ 成立} \quad (34)$$

根据引理 6 及 (34) 式, 易知, 除去一个 L 零测集外, 对 $\|x\| > R$, 将有 $f(x) \geq \alpha / 2^{d+1} (R + \|x\|)^d \geq \alpha / \|x\|^{d+2^{d+1}}$, 这显然是不成立的. 因 f 为密度, 而 $\int_{\|x\| > R} \|x\|^{-d} dx = \infty$.

2° $\alpha = 1$.

若 F 的支撑有界, 证明与 1° 类似; 若 F 的支撑无界, 则由强大数律易得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) = \infty, \quad \text{a.s. 对所有 } x \in R^d$$

于是由 f_n 的定义知: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \text{ a.s.}$ 此与引理 6 结合, 则有 $f(x) = 0, \text{ a.e. } x(L)$,

这与 f 是密度相矛盾.

至此, 定理 2 全部证毕.

感谢赵林城教授的精心指导.

参 考 文 献

- [1] 赵悦, 应用概率统计, 2 (1986), 161-166.
- [2] Devroye, L. P. and Wagner, T.J., Multivariate Analysis—V (ed., P. R. Krishnaiah, North-Holland Publishing Company, New York, 1980, p59-77.
- [3] Devroye, L. P., *Ann. Statist.*, 11 (1983), 896-904.
- [4] Kiefer, J., *Pacific J. Math.*, 11 (1961), 649-661.
- [5] Devroye, L. P., *Ann. Statist.*, 9 (1981), 1310-1319.
- [6] Weedn, R. L. and Zygmund, A., *Measure and Integral*, Marcel Dekker, New York, 1977, p185-191.

Strong L_p -consistency of Multidimensional Nearest Neighbor Density Estimates

Wu Yaohua

(Department of Mathematics)

Abstract

Suppose that X_1, \dots, X_n are i. i. d. R^d -valued random variables with a density $f(x)$. If $S_{n,n}(x)$ is the smallest sphere centered at x and containing at least k_n points of X_1, \dots, X_n , then $f_n(x) = \frac{k_n}{n |S_{n,n}(x)|}$ is nearest neighbor

density estimate of $f(x)$. We proved that if $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n/n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} k_n/\log n = \infty$ and $f \log^+ f$ is L -integrable on any bounded Borel set (or $\int f^p(x) dx < \infty, p > 1$), then $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A |f_n(x) - f(x)| dx \stackrel{a.s.}{=} 0$ for any bounded Borel set A (or $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n(x) - f(x)|^p dx \stackrel{a.s.}{=} 0, p > 1$). Conversely, if $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n(x) - f(x)|^p dx \stackrel{a.s.}{=} 0$, then $\int f^p(x) dx < \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} k_n/n = 0$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty$.

Key words: multidimensional density, nearest neighbor estimate, L -consistency.

Misiurewicz 一个定理的简要证明*

熊金城

(数学系)

摘 要

Misiurewicz 指出若线段映射周期点的周期均为 2 的方幂, 则此映射的拓扑熵为 0。本文为这一定理提供了一个十分简明的证明。

关键词: 拓扑熵, 周期点, 连续映射。

1 引言

1965年文献[1]中首次提出了拓扑熵的概念, 从而引起了众多的作者对其进行估算。然而即令对于线段映射而言, 其拓扑熵的计算也绝非易事, 因此给出这类映射拓扑熵为 0 的判据便成了首当其冲的问题。根据 1976 年 Bowen 和 Franks 在文献[2]中的结果可知, 线段映射如果有一个周期点以非 2 的方幂为周期, 则其拓扑熵必大于 0。人们自然要问: 上述结论的逆命题是否为真? Block 于 1978 年在文献[3]中表明了他对这一问题的关心。Misiurewicz 于 1979 年在文献[4]中对上述问题给出了肯定的回答(文献[4]中只提供了证明的节略, 但我们在他的一个预印本*)上可读到证明的全文。)。Block 于 1982 年在文献[5]中宣布了一个定理, 并称前述逆命题是它的推论。Block 肯定有失慎之处, 因为该定理本身即包含着严重错误(参见文献[6]。)。周作领为上述逆命题撰写了另一个详细的证明。鉴于这一较有意义的结果已有的证明均相当烦难, 我们觉得为之提供一个明快的新证并同时发展某种证明技巧仍有必要。

本文使用的记号和术语的意义均如通常, 不另解释(有关拓扑熵的, 参见文献[1]; 有关线段映射的, 参见文献[8]。)

1988年2月22日收到。

* 国家自然科学基金支持项目。

*) Misiurewicz M., Horseshoe for continuous mappings of an interval, Warsaw Univ. Preprint, 1978.

2 若干技术性的预备

设 X 为紧致空间, $T: X \rightarrow X$ 为连续映射. 对于 X 的任一开覆盖 α 和任一正整数 k , 定义的 X 另一开覆盖 $k\alpha = \{\cup_{i=1}^k A_i \mid A_i \in \alpha\}$. 我们有 (1) $N(\alpha) \leq kN(k\alpha)$, (2) $T^{-1}(k\alpha) = kT^{-1}(\alpha)$, 以及 (3) 若 $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ 均是 X 的开覆盖, 则 $\bigvee_{i=0}^{n-1} k\alpha_i$ 是 $k^n \bigvee_{i=0}^{n-1} \alpha_i$ 的一个子覆盖.

引理 1 设 X, T, α, k 等如前, 若 $\tilde{\alpha}$ 是 $k\alpha$ 的一个子覆盖, 则 $h(T, \tilde{\alpha}) \geq h(T, \alpha) - \log k$.

证明 明显地只需证 $h(T, k\alpha) \geq h(T, \alpha) - \log k$, 而这是因为

$$\begin{aligned} h(T, k\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(k\alpha)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\bigvee_{i=0}^{n-1} (kT^{-i}(\alpha))) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(k^n \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\alpha)) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(k^n N(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\alpha))) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\alpha)) - \log k = h(T, \alpha) - \log k \end{aligned}$$

引理 2 设 $I = [0, 1]$, $f: I \rightarrow I$ 为连续映射. 又设 f 的周期点的周期都是 2 的方幂. 若 p, q 是 f 的不动点或者 I 的端点, $p < q$, 则对于任意整数 $n \geq 0$, $\bar{f}^{-2^n}(C \cap \overline{P(f)}) \supset C \cap \overline{P(f)}$. 其中, $\bar{f} = f|_{\overline{P(f)}}$, $C = [p, q] - (\{p, q\} \cap F(f))$ ($F(f)$ 为 f 的不动点集.).

证明 注意 $f^2(\overline{P(f)}) = \overline{P(f)}$. 根据文献[8]中引理 4, 对于 $x \in C \cap \overline{P(f)}$, x 与 $f^{2^n}(x)$ 之间没有 f 的不动点, 因此 $\bar{f}^{-2^n}(x)$ 中任意一点与 x 之间没有 f 的不动点, 这蕴含着 $\bar{f}^{-2^n}(x) \subset C \cap \overline{P(f)}$. 因此, $\bar{f}^{-2^n}(C \cap \overline{P(f)}) \supset C \cap \overline{P(f)}$.

注 事实上可以证明 $\bar{f}^{-2^n}(C \cap \overline{P(f)}) = C \cap \overline{P(f)}$, 但我们无需这一结论.

3 Misiurewicz 定理的陈述和证明

定理 (Misiurewicz) 设 $I = [0, 1]$, $f: I \rightarrow I$ 为连续映射. 若 f 的周期点的周期都是 2 的方幂, 则 f 的拓扑熵 $h(f)$ 为 0 (参见文献[4]).

证明 记 $\bar{f} = f|_{\overline{P(f)}}$. 将 $\overline{P(f)}$ 中的点分成三类. 第一类点为周期点, 周期点集 $P(f)$ 的双边聚点, 以及 $\{0, 1\} \cap \overline{P(f)}$; 第一类点的集合记作 Q . 设 $x \in \overline{P(f)}$ 不是第一类点, 这时 x 是 $P(f)$ 的单边聚点, 且必不为 I 的端点 0 和 1. 令 C 为 $I - P(f)$ 的连通分支, 使得 $x \in C$. C 必有两个不同的端点, 记 C 的除 x 之外的另一端点为 y . 若 $y \in P(f)$ 或者 y 是 I 的端点, 则称 x 为第二类点; 若 $y \notin P(f)$ 也不是 I 的端点 (这时 y 也是 $P(f)$ 的单边聚点), 则称 x 为第三类点. 第二类点和第三类点构成的集合分别记作 S 和 T .

给定 $\epsilon > 0$. 我们将分别情形对于 $\overline{P(f)}$ 中的点给定它在 $\overline{P(f)}$ 中一个适当的开邻域和一个适当的正整数如下:

第一种情形 设 $x \in Q$. (a) 若 x 是 $P(f)$ 的孤立点, 令 $U_x = \{x\}$, $n_x = 2m_x$, 其中 m_x 为 x 的周期. (b) 若 x 是 $P(f)$ 的双边聚点, 任取 $y_1, y_2 \in P(f)$, 使得 $y_1 < x < y_2$ 以及 $y_2 - y_1 < \epsilon$. 令 $U_x = (y_1, y_2) \cap \overline{P(f)}$, $n_x = 2m_x$, 其中 m_x 是 y_1 和 y_2 的周期中较大的一个. (c) 设 x

不是 $P(f)$ 的双边聚点但却是 $P(f)$ 的左聚点 (或右聚点) (这时 x 或者是周期点或者是 0 或 1)。任取 $y \in P(f)$ 使得 $y < x$ ($x < y$) 以及 $x - y < \varepsilon$ ($y - x < \varepsilon$)。令 $U_x = (y, x] \cap \overline{P(f)}$ ($U_x = [x, y) \cap \overline{P(f)}$)， $n_x = 2m_x$ ，其中，当 x 为周期点时， m_x 为 x, y 的周期中较大的一个；当 x 不是周期点而是 0 与 1 中之一时， m_x 为 y 的周期。按照以上所作，我们对于每一个 $x \in Q$ 给定了 x 在 $\overline{P(f)}$ 中的直径小于 ε 的一个开邻域 U_x ，以及 2 的一个方幂 n_x 。将引理 2 应用于 $f^{n_x/2}$ 可见：对于任意 $m \geq 0$ ， $\bar{f}^{-n_x m}(U_x) \supset U_x$ 。

第二种情形 设 $x \in S$ 。令 C 为 $I - P(f)$ 的连通分支使得 $x \in C$ ，并设 z 是 C 的除 x 外的另一个端点。若 x 为 $P(f)$ 的左聚点 (或右聚点)，任取 $y \in P(f)$ 使得 $y < x$ ($x < y$) 以及 $x - y < \varepsilon$ ($y - x < \varepsilon$)。令 $U_x = (y, x] \cap \overline{P(f)}$ ($U_x = [x, y) \cap \overline{P(f)}$)。易见 U_x 为 x 在 $\overline{P(f)}$ 中直径小于 ε 的一个开邻域。当 $z \in P(f)$ 时，令 m_x 为 y 和 z 的周期中较大的一个；当 $z \notin P(f)$ 时，令 m_x 为 y 的周期。令 $n_x = 2m_x$ ，它是 2 的方幂。将引理 2 应用于 $f^{n_x/2}$ 可见：对于任意 $m \geq 0$ ， $\bar{f}^{-n_x m}(U_x) \supset U_x$ 。

第三种情形 分别令 T_1, T_2 为 T 中 $P(f)$ 的左, 右聚点的集合。设 $u \in T_1$ ，并记 u' 为 $I - P(f)$ 的包含着 u 的连通分支的不为 u 的那个端点。这时 $u' \in T_2$ ，(注意，对于任何 $w \in T_2$ ，存在着 $u \in T_1$ 使得 $u' = w$)。任取 $y, y' \in P(f)$ 使得满足条件： $y < u, u' < y', u - y < \varepsilon$ ，以及 $y' - u' < \varepsilon$ 。令 $V_u = (y, y') \cap \overline{P(f)}$ ，它是 u 和 u' 在 $\overline{P(f)}$ 中的一个开邻域。令 $n_u = 2m_u$ ，其中 m_u 是 y 和 y' 的周期中较大的一个。 n_u 是 2 的方幂。将引理 2 应用于 $f^{n_u/2}$ 可见 $\bar{f}^{-n_u m}(V_u) \supset V_u$ 。对于一切整数 $m \geq 0$ 成立。令 $W_u = (y, u) \cap \overline{P(f)}$ 以及 $W_{u'} = [u', y') \cap \overline{P(f)}$ ，它们分别是 u 和 u' 在 $\overline{P(f)}$ 中的开邻域，直径均小于 ε 。此外， $V_u = W_u \cup W_{u'}$ 。

根据以上所作可见

$$\gamma = \{U_x | x \in Q \cup S\} \cup \{W_u | u \in T_1\} \cup \{W_{u'} | u \in T_1\}$$

为 $\overline{P(f)}$ 的一个开覆盖。设

$$\beta = \{U_{x_1}, \dots, U_{x_K}; W_{u_1}, \dots, W_{u_M}; W_{u'_1}, \dots, W_{u'_M}\}$$

为 γ 的任一有限子覆盖。 β 的每一元素直径均小于 ε 。令

$$\alpha = \{U_{x_1}, \dots, U_{x_K}; V_{u_1}, \dots, V_{u_M}\}$$

它也是 $\overline{P(f)}$ 的一个开覆盖。由于 $V_{u_j} = W_{u_j} \cup W_{u'_j}$ ， α 还是 2β 的一个子覆盖。令

$$N = \max\{n_{x_1}, \dots, n_{x_K}; n_{u_1}, \dots, n_{u_M}\}$$

由于诸 n_{x_i} 以及诸 n_{u_j} 均是 2 的方幂，故 N 是它们的倍数，因此 $\bar{f}^{-N}(U_{x_i}) \supset U_{x_i}$ 以及 $\bar{f}^{-N}(V_{u_j}) \supset V_{u_j}$ 。由此可见，对于任意 $q > 0$ ， $\bar{f}^{-q}(\alpha)$ 是 $\bar{f}^{-(N+q)}(\alpha)$ 的加细，因此 $\bigvee_{i=0}^q \bar{f}^{-i}(\alpha)$ 是 $\bar{f}^{-N}(\bigvee_{i=0}^{q-N} \bar{f}^{-i}(\alpha))$ 的加细。于是对于任意 $n > 0$ ， $\bigvee_{i=0}^n \bar{f}^{-i}(\alpha)$ 是 $\bigvee_{i=0}^{n-1} (f^{-iN}(\bigvee_{j=0}^{n-1-i} \bar{f}^{-j}(\alpha)))$ 的一个加细。从而

$$h(\bar{f}, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\bigvee_{i=0}^{n-1} \bar{f}^{-i}(\alpha)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nN} H(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-iN}(\bigvee_{j=0}^{n-1-i} \bar{f}^{-j}(\alpha)))$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nN} H(\bigvee_{j=0}^{n-1} (f^{-j}, h(\bigvee_{i=0}^{N-1} \bar{f}^{-i}(\alpha)))) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nN} H(\bigvee_{i=0}^{N-1} f^{-i}(\alpha)) = 0$$

根据引理 1, $0 = h(\bar{f}, \alpha) \geq h(\bar{f}, \beta) - \log 2$. 因此 $h(\bar{f}, \beta) \leq \log 2$. 由于 β 的每一个元素的直径均小于任意给定的 $\epsilon > 0$, 故 $h(\bar{f}) \leq \log 2$. 根据已知的结论 $h(f) = h(\bar{f})$ (参见文献 [9] 或 [10]), 我们得到 $h(f) \leq \log 2$. 由于这一结论对于周期点的周期都是 2 的方幂的任何线段连续自映射 f 成立, 因而可将其应用于 f^n . 于是 $h(f^n) = nh(f) \leq \log 2$ 对于任何 $n \geq 0$ 成立, 这蕴含着 $h(f) = 0$. 定理证毕.

参 考 文 献

- [1] Adler, R. L., Konheim, A. G. and McAndrew, M. H., *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114 (1965), 309—319.
- [2] Bowen, R. and Franks, J., *Topology*, 15 (1976), 337-342.
- [3] Block, L., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 72(1978), 576-580.
- [4] Misiurewicz, M., *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 27(1979), 167-169.
- [5] Blokh, A. M., *Uspehi Mat. Nauk*, 37 (1982), No. 1, 137-138.
- [6] Chu, H. and Xiong, J., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 97 (1986), 361-366.
- [7] 周作领, 中国科学, A 辑, 10 (1985), 883—889.
- [8] Xiong, J., *Acta Math. Sinica, New Series* 2 (1986), 73-77.
- [9] Sarkovskii, A. N., *Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR Ser. A*, 865-868.
- [10] 熊金城, 科学通报, 27 (1982), 513-514.

A Simple Proof of a Theorem of Misiurewicz

Xiong Jincheng

(Department of Mathematics)

Abstract

In this paper the author presents a considerably simple proof for a theorem of Misiurewicz which shows that if the periods of periodic points of an interval map are powers of 2 then this map has topological entropy 0.

Key words: topological entropy, periodic points, continuous map.

Non-uniform Bounds of Normal Approximation for Finite-population U -statistics (I)*

Miao Baiqi Zhao Lincheng**

(Department of Mathematics)

Abstract

In this paper, we establish the non-uniform bounds of normal approximation for finite-population U -statistics. This paper is divided into two parts. In this part (part I), as a preliminary theorem, we establish a similar result for the partial sum in the case of sampling from a finite population. In part II, which will appear in the next issue, we will complete the proof of the theorem for finite-population U -statistics.

Key words: finite population, normal approximation, sampling, U -statistic.

1 Introduction

Statistical inference based on data resampling has drawn a great deal of attention in recent years. The study of the remainder term estimate for some important statistics of a finite population obtains new application in this aspect (see Wu, 1987). In this paper, we study the non-uniform bounds of normal approximation for finite-population U -statistics.

Let A_N be a population of N balls bearing real numbers a_{N1}, \dots, a_{NN} . Draw n balls from A_N randomly without replacement, and denote the numbers appearing on these n balls by x_1, \dots, x_n . Suppose that $\phi(x, y) = \phi_N(x, y)$ is a two-variable Borel-measurable function which is symmetric in x and y . Call

Received March 4, 1988.

* The Project Supported by National Natural Science Foundation of China.

** This author is also supported in part by the Air Force Office of Scientific Research under Contract F49620-85-C-0008 in the United States.

$$U_n = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq j < k \leq n} \phi(x_j, x_k) \quad (1)$$

the finite-population U -statistic with the kernel ϕ . For simplicity and without losing generality, we can assume that $E\phi(x_1, x_2) = 0$. Define $g(x_1) = E(\phi(x_1, x_2) | x_1)$ and suppose that $\sigma_g^2 = Eg^2(x_1) > 0$.

Nandi and Sen (1963) researched the asymptotic normality of U_n . Zhao Lincheng and Chen Xiru (1985, 1987) established the ideal Berry-Esseen bounds of U_n under weaker conditions. They proved that if

$$0 < \lambda_1 \leq n/N \triangleq p \leq \lambda_2 < 1 \quad (2)$$

for some constants λ_1 and λ_2 , then there exists an absolute constant C (depending only upon λ_1 and λ_2) such that

$$\sup_x |P\left(\frac{\sqrt{n}U_n}{2\sigma_g\sqrt{1-p}} \leq x\right) - \Phi(x)| \leq C(Np(1-p))^{-1/2} \{\sigma_g^{-2} E\phi^2(x_1, x_2) + \sigma_g^{-3} E|g(x_1)|^3\} \quad (3)$$

where $\Phi(x)$ is the standard normal distribution function. By more elaborate analysis, we can assert that in order that (3) is true, the condition (2) can be weakened as

$$0 < n/N \triangleq p \leq \lambda_2 < 1 \quad (2')$$

and C depends only upon λ_2 .

Considering the profound results about non-uniform convergence rates of U -statistic, established by Zhao Lincheng and Chen Xiru (1983), it is natural to raise such a problem: whether the analogue is true for finite-population U -statistics. But this problem will be more difficult when x_1, \dots, x_n are not independent.

Recently we studied this problem and have established the following main result:

Theorem 1 If the condition (2) holds, then there exists an absolute constant C depending only upon λ_1 and λ_2 such that

$$|P\left(\frac{\sqrt{n}U_n}{2\sigma_g\sqrt{1-p}} \leq x\right) - \Phi(x)| \leq Cn^{-1/2}\sigma_g^{-3}\nu_3(1+|x|)^{-3} \quad (4)$$

for every x and n , where $\nu_3 = E|\phi(x_1, x_2)|^3$.

As a preliminary theorem, in section 2 we will establish a similar result for the partial sum in the case of sampling from a finite population. In section 3, which will appear in the next issue, we will complete the proof of the theorem 1.

2 The Case of Partial Sum for Sampling From a Finite Population

To prove Theorem 1 we should establish some preliminary results. Obviously, we need only to prove the inequality (4) for large n and all real x . For convenience, we often omit the index N and the phrase "for large n ". Besides, without losing generality, we can suppose that $\sigma_s = 1$. Let $I(A)$ denote the indicator of set A , $\#(A)$ denote the number of different elements in set A , and the letter i denote $\sqrt{-1}$ especially. Lastly, for simplicity in presentation, we make the following conventions.

In this paper, "absolute constant" means the positive constant depending only upon λ_1 and λ_2 , which is independent of n, N, A_n and ϕ , and can assume different values on each of its appearance even within the same formula. Throughout this paper, we will use $C, C^*, C', C'', \lambda, \mu, \varepsilon, \varepsilon^*$, etc. for some absolute constants, use $Q_1(|t|), Q_2(|\phi|)$ and $Q_3(|\phi|, |t|)$ for some polynomials with absolute constant coefficients. Further, these polynomials can also take different forms at each of their appearance.

Set

$$b_i = g(\alpha_{N_i}) / \sqrt{N}, \quad L_n = \sum_{i=1}^N |b_i|^2,$$

$$p = n/N, \quad q = 1 - p,$$

$$\eta_i = g(x_i) / \sqrt{N}, \quad \xi_i = g(x_i) / \sqrt{Npq}, \quad S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i,$$

$$S'_n = \sum_{i=1}^J \xi_i, \quad S''_n = S_n - S'_n$$

where $J < n$ is to be defined.

It is obvious that

$$\sum_{i=1}^N b_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N b_i^2 = 1, \quad E\eta_i^2 = 1/N$$

$$1/N \leq L_n = \frac{1}{\sqrt{N}} E|g(x_i)|^2 \leq v_s / \sqrt{N}$$

$$ES_n = 0, \quad \text{Var}(S_n) = N/(N-1)$$

In this section we prove the following theorem:

Theorem 2. Let $\sum_{i=1}^N b_i = 0$, $\sum_{i=1}^N b_i^2 = 1$ and (2) hold. Then for all n and x we have

$$|P(S_n \leq x) - \Phi(x)| \leq CL_n(1 + |x|)^{-3} \quad (5)$$

We need the following lemmas:

Lemma 1 For any $\alpha > 0$ any and $n \leq N$, we have

$$E|S_n|^\alpha \leq C^\alpha = C(\alpha)$$

Proof. We only prove Lemma 1 for every even natural number $2k$, that is $E|S_n|^{2k} \leq C(k)$. we have

$$E\left(\sum_{i=1}^n \eta_i\right)^{2k} = \sum_{m=1}^{2k} \sum' \frac{(2k)!}{r_1! \dots r_m!} \binom{n}{m} E(\eta_1^{r_1} \dots \eta_m^{r_m})$$

where the summation \sum' is carried out over all integers r_1, \dots, r_m satisfying $r_1 + \dots + r_m = 2k$ and $r_1 \geq 1, \dots, r_m \geq 1$. If some $r_i = 1$, for example $r_m = 1$, then we have

$$\binom{n}{m} E(\eta_1^{r_1} \dots \eta_m^{r_m}) = -\frac{1}{N-m+1} \binom{n}{m} \sum_{j=1}^{m-1} E(\eta_j \eta_1^{r_1} \dots \eta_{m-1}^{r_{m-1}})$$

from $E(\eta_m | \eta_1, \dots, \eta_{m-1}) = -\frac{1}{N-m+1} \sum_{j=1}^{m-1} \eta_j$. So the contribution of this term

to $E\left(\sum_{i=1}^n \eta_i\right)^{2k}$ can be merged into some summands with the forms

$\binom{n}{m-1} E(\eta_1^{r_1} \dots \eta_{m-1}^{r_{m-1}})$ and does not change the orders of magnitude of these sum-

mands. Hence in the expansion of $E\left(\sum_{i=1}^n \eta_i\right)^{2k}$ the terms with some $r_i = 1$ can be omitted, and we get

$$E\left(\sum_{i=1}^n \eta_i\right)^{2k} \leq \sum_{m=1}^k \sum'' C(k) \binom{n}{m} |E(\eta_1^{r_1} \dots \eta_m^{r_m})|$$

where the summation \sum'' is carried out over all integers r_1, \dots, r_m satis-

fying $r_1 + \dots + r_m = 2k$ and $r_1 \geq 2, \dots, r_m \geq 2$. In this case $\binom{n}{m} E|\eta_1^{r_1} \dots \eta_m^{r_m}| \leq C(k)$ so

$E\left(\sum_{i=1}^n \eta_i\right)^{2k} \leq C(k)$, and the lemma is proved from (2).

Lemma 2 Let ε and ε^* be any fixed positive numbers, and $J \leq n$. set

$$A_J = \{(x_1, \dots, x_J) : \sum_{i=1}^J \eta_i^2 \geq J/N + \varepsilon\} \quad (6)$$

$$B_J = \{(x_1, \dots, x_J) : |\sum_{i=1}^J \eta_i| \geq \varepsilon^* L_N^{1/2}\} \quad (7)$$

then under the condition of the Theorem 1, the following estimate is valid:

$$P(A_J \cup B_J) \leq CL_N^2$$

The proof of this lemma is almost the same as Lemma 1 in the paper [6].

Suppose $J \geq 0$, $\mu_1 N^{1-\alpha} \leq I_n^\Delta - J \leq \mu_2 N^{1-\alpha}$, $\mu_1, \mu_2 > 0$, $\alpha \in [0, 1/2]$.

Set $\tilde{N} = N - J$, $\tilde{p} = J/\tilde{N}$, $\tilde{q} = 1 - \tilde{p}$. It is obvious that

$$\tilde{p} = (n - J)/(N - J) \leq n/N \leq \lambda_2 < 1$$

Let $C^* > 1$, C' , $C'' > 0$ and $\{j_1, \dots, j_l\} \subset \{1, \dots, N\}$. Define

$$D_N = \{j: 1 \leq j \leq N, |b_j| > C^* L_N\} \quad (8)$$

$$G_l = \{1, \dots, N\} - \{j_1, \dots, j_l\} \quad (9)$$

$$\tilde{\xi}_k = \tilde{N}^{-1/2} \psi + t b_k, \quad \tilde{\omega}_k = \tilde{\xi}_k / \sqrt{\tilde{p}\tilde{q}}, \quad \delta_k = \delta_k(\psi, t) = \tilde{q} + \tilde{p} e^{i\tilde{\omega}_k} \quad (10)$$

$$\xi_k = N^{-1/2} \psi + t b_k, \quad \omega_k = \xi_k / \sqrt{p q}, \quad \rho_k = \rho_k(\psi, t) = q e^{-i\omega_k} + p e^{i\omega_k} \quad (11)$$

$$\tilde{\Gamma}_1 = \{(\psi, t) : |\psi| \leq 2C' \sqrt{\tilde{N}\tilde{p}\tilde{q}}, |t| \leq C'' \sqrt{\tilde{p}\tilde{q} b_*^{-1}}, b_* = \max_{1 \leq k \leq n} |b_k|\}$$

$$\tilde{\Gamma}_2 = \{(\psi, t) : 2C' \sqrt{\tilde{N}\tilde{p}\tilde{q}} \leq |\psi| \leq \pi \sqrt{\tilde{N}\tilde{p}\tilde{q}}, |t| \leq C'' \sqrt{\tilde{p}\tilde{q} b_*^{-1}}\}$$

$$\tilde{\Gamma}_3 = \{(\psi, t) : |\psi| \leq 2C' \sqrt{\tilde{N}\tilde{p}\tilde{q}}, C'' \sqrt{\tilde{p}\tilde{q} b_*^{-1}} \leq |t| \leq C'' \sqrt{\tilde{p}\tilde{q} L_N^{-1}}\}$$

$$\tilde{\Gamma}_4 = \{(\psi, t) : 2C' \sqrt{\tilde{N}\tilde{p}\tilde{q}} \leq |\psi| \leq \pi \sqrt{\tilde{N}\tilde{p}\tilde{q}}, C'' \sqrt{\tilde{p}\tilde{q} b_*^{-1}} \leq |t| \leq C'' \sqrt{\tilde{p}\tilde{q} L_N^{-1}}\}$$

In the definition of $\tilde{\Gamma}_1, \dots, \tilde{\Gamma}_4$, taking off all the " \sim " we get new sets of (ψ, t) and denote these sets by $\Gamma_1, \dots, \Gamma_4$.

Suppose

$$\sum_{i=1}^l b_{j_i}^2 \leq J/N + \varepsilon, \quad \left| \sum_{i=1}^l b_{j_i} \right| \leq \varepsilon^* L_N^{-1}, \quad \text{for } \varepsilon, \varepsilon^* > 0 \quad (12)$$

Lemma 3 Let positives ε and ε^* be small and C^* be large, C' , C'' be small enough, and $C' \geq C'' C^*$. Then, when (12) is valid and $(\psi, t) \in \tilde{\Gamma}_1 \cup \tilde{\Gamma}_2 \cup \tilde{\Gamma}_3 \cup \tilde{\Gamma}_4$, there exist absolute constants C and μ such that

$$\left| \prod_{k \in G_l - D_N} \delta_k(\psi, t) \right| \leq C \exp\{-\mu(\psi^2 + t^2)\} \quad (13)$$

$$\left| \prod_{k \in G_l - D_N - A} \delta_k(\psi, t) \right| \leq \begin{cases} C N^{-3} \exp\{-\mu(\psi^2 + t^2)\}, & \text{when } (\psi, t) \in \tilde{\Gamma}_2 \cup \tilde{\Gamma}_4 \\ C L_N^6 \exp\{-\mu(\psi^2 + t^2)\}, & \text{when } (\psi, t) \in \tilde{\Gamma}_1 \end{cases} \quad (14)$$

for N large enough, where set $A = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ is any subset of $\{1, \dots, N\}$.

Proof The proof of (13) can be found in Lemma 2 in the paper [6].

From (13) the estimate (14) can also be deduced. Now suppose that $(\psi, t) \in \tilde{\Gamma}_3$, using (13), we get

$$\left| \prod_{k \in G_l - D_N} \delta_k(\psi, t) \right| \leq C L_N^6 \exp\{-\mu(\psi^2 + t^2)\} \quad (16)$$

If some element m of A does not belong to D_N , then

$$|\tilde{\omega}_m| \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{p}\tilde{q}}} (|\psi \tilde{N}^{-1/2}| + |t b_m|) \leq (2C' \sqrt{\tilde{N}\tilde{p}\tilde{q}} \tilde{N}^{-1/2} + C'' \sqrt{\tilde{p}\tilde{q}} L_N^{-1} C^* L_N) / \sqrt{\tilde{p}\tilde{q}} \\ \leq 2C' + C'' C^* \triangleq \tilde{C}$$

Taking \tilde{C} small enough, from the inequality $1 - \cos \tilde{\omega}_m \leq 1 - \cos \tilde{C} \leq \tilde{C}^2/2$, we have

$$|\rho_m(\psi, t)|^2 = 1 - 2\tilde{p}\tilde{q}(1 - \cos \tilde{\omega}_m) > 1 - \tilde{C}^2 \tilde{p}\tilde{q} > 1 - \tilde{C}^2 > 0$$

Using this inequality and (16) we obtain (15).

Lemma 4 Suppose (2) is valid and $0 < \mu, N^{-\alpha} \leq (N - J)/N \leq \mu, N^{-\alpha}$ for $\alpha \in [0, 1/2]$ and select ε and ε^* appropriately, then there exist λ and μ such that

$$\begin{aligned} (17) \quad & |E\{(S'_n)^r \exp(itS'_n) | x_1, \dots, x_J\}| \leq CN^{-r\alpha/2} (1 + |S'_n|^r + N^{-r\alpha/2} |t|^r) \\ & \cdot \exp\{-\mu N^{-\alpha} t^2\}, \text{ for } r = 0, 1, 2, \\ (18) \quad & |E\{(S'_n)^3 \exp(itS'_n) | x_1, \dots, x_J\}| \leq CN^{-3\alpha/2} (1 + N^{\alpha/2} L_N + |S'_n|^3 + N^{-3\alpha/2} |t|^3) \\ & \cdot \exp\{-\mu N^{-\alpha} t^2\} \end{aligned}$$

provided $|t| \leq \lambda L_N^{-1} \sqrt{\tilde{p}\tilde{q}}$ and $(x_1, \dots, x_J) \in A_j^c \cap B_j^c$.

Proof The case when $r = 0$ in (17) can be proved by Lemma 2 in the paper

[6]. In other cases, Let $x_l = a_{Nl}$, $l = 1, \dots, J$, and write $\tilde{S}'_n = (\tilde{p}\tilde{q})^{-1/2} \sum_{i \in G_j} \eta_i$.

Because of the relationship between S'_n and \tilde{S}'_n , we only need to prove that

$$M_1 \triangleq |E\{\tilde{S}'_n \exp(it\tilde{S}'_n) | x_1, \dots, x_J\}| \leq C(1 + |S'_n| + |t|) \exp\{-\mu t^2\} \quad (19)$$

$$M_2 \triangleq |E\{(\tilde{S}'_n)^2 \exp(it\tilde{S}'_n) | x_1, \dots, x_J\}| \leq C(1 + |S'_n|^2 + t^2) \exp\{-\mu t^2\} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} M_3 \triangleq & |E\{(\tilde{S}'_n)^3 \exp(it\tilde{S}'_n) | x_1, \dots, x_J\}| \\ & \leq C(1 + N^{\alpha/2} L_N + |S'_n|^3 + |t|^3) \exp\{-\mu t^2\}, \end{aligned} \quad (21)$$

where $|t| \leq \lambda \sqrt{\tilde{p}\tilde{q}} L_N^{-1}$.

Define $B_r(\tilde{p}) = \sqrt{2\pi} \binom{N}{J} \tilde{p}^J \tilde{q}^{N-J}$. It is not difficult to see that

$$\begin{aligned} & E\{\exp(it\tilde{S}'_n) | x_1, \dots, x_J\} \\ & = \frac{1}{B_r(\tilde{p})} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|\theta| < \pi} \prod_{k \in G_j} (\tilde{q} + \tilde{p} \exp\{i(tb_k / \sqrt{\tilde{p}\tilde{q}} + \theta)\}) \exp(-iI\theta) d\theta \\ & = \frac{1}{\sqrt{N\tilde{p}\tilde{q}} B_r(\tilde{p})} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|\psi| < \sqrt{N\tilde{p}\tilde{q}}} \left\{ \prod_{k \in G_j} \delta_k(\psi, t) \right\} \exp\{-iI\psi / \sqrt{N\tilde{p}\tilde{q}}\} d\psi \end{aligned} \quad (22)$$

from the equality

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{for integer } k=0, \\ 0 & \text{for integer } k \neq 0. \end{cases}$$

Differentiating both sides of (22), we obtain

$$M_1 \leq C \int_{|\psi| < \sqrt{N\tilde{p}\tilde{q}}} T, d\psi \triangleq C \int_{|\psi| < \sqrt{N\tilde{p}\tilde{q}}} \left| \sum_{k \in G_j} \frac{\tilde{p}}{\sqrt{\tilde{p}\tilde{q}}} b_k \exp(i\tilde{\omega}_k) \prod_{\substack{i \in G_j \\ i \neq k}} \delta_i \right| d\psi \quad (23)$$

Here we have already used Stirling's formula to get the following estimate:

$$\sqrt{N\tilde{p}\tilde{q}} B_r(\tilde{p}) = 1 + O(N^{-(1-\alpha)}), \text{ for } \alpha \in [0, 1/2] \quad (24)$$

Take C' and C'' small enough such that $|\tilde{\omega}_k| < 1/8$ for $(\psi, t) \in \tilde{\Gamma}_1$, and $k \in G_j$. In this case, we have

$$\exp(i\tilde{\omega}_k)/\delta_k = 1 + \theta_k \tilde{\omega}_k$$

Here and after, θ_k can be assumed to have different values and $|\theta_k| \leq C$. We have

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k \in G_j} \frac{\tilde{p}b_k}{\sqrt{\tilde{p}\tilde{q}}\delta_k} \exp(i\tilde{\omega}_k) \right| = \left| \sum_{k \in G_j} \frac{\tilde{p}b_k}{\sqrt{\tilde{p}\tilde{q}}} \left(1 + \frac{\theta_k \tilde{\xi}_k}{\sqrt{\tilde{p}\tilde{q}}} \right) \right| \\ & \leq C \left| \sum_{k \in G_j} b_k \right| + C \sum_{k \in G_j} |b_k \tilde{\xi}_k| \leq C \left| \sum_{l=1}^j b_{l,1} \right| + C|\psi|N^{-1/2} \sum_{k \in G_j} |b_k| + C|t| \\ & \leq C \left\{ \left| \sum_{l=1}^j b_{l,1} \right| + (|\psi| + |t|) \right\} \end{aligned}$$

Thus, it is inferred by (23) and Lemma 3 that

$$T_1 \leq C \left\{ \left| \sum_{l=1}^j b_{l,1} \right| + |\psi| + |t| \right\} \exp\{-\mu(\psi^2 + t^2)\}, \text{ for } (\psi, t) \in \tilde{\Gamma}_1. \quad (25)$$

$$\begin{aligned} T_1 & \leq C \sum_k |b_k| \prod_{l \in G_j, l \neq k} |\delta_l(\psi, t)| \leq C \sum_k |b_k| \cdot CN^{-1} \exp\{-\mu(\psi^2 + t^2)\} \\ & \leq C \exp\{-\mu(\psi^2 + t^2)\}, \text{ for } (\psi, t) \in \tilde{\Gamma}_2 \cup \tilde{\Gamma}_3. \end{aligned} \quad (26)$$

Now consider the case $(\psi, t) \in \tilde{\Gamma}_3$. From $\sum_{l=1}^N b_l = 0$, we have

$$\left| \sum_{l \in G_j - D_N} b_l \right| \leq \left| \sum_{l=1}^j b_{l,1} \right| + \sum_{l \in D_N} |b_l| \quad (27)$$

$$\sum_{l \in D_N} |b_l| \leq C^* L_N^{-1} \sum_{l \in D_N} b_l^2 \leq (C^* L_N)^{-1} \quad (28)$$

Take C'' and C''' appropriately small such that $|\tilde{\omega}_k| < 1/8$, where $k \in G_j - D_N$, then $e^{i\tilde{\omega}_k}/\delta_k = 1 + \theta_k |\tilde{\xi}_k|/\sqrt{\tilde{p}\tilde{q}}$. Using (15), (27) and (28), we get

$$\begin{aligned} (29) \quad T_1 & \leq \left| \sum_{k \in G_j - D_N} \frac{\tilde{p}b_k}{\sqrt{\tilde{p}\tilde{q}}\delta_k} \exp(i\tilde{\omega}_k) \prod_{l \in G_j} \delta_l \right| + C \sum_{k \in D_N} |b_k| \prod_{l \in G_j, l \neq k} |\delta_l| \\ & \leq C \left| \sum_{k \in G_j - D_N} b_k \right| \prod_{l \in G_j} |\delta_l| + C \sum_{k \in G_j - D_N} |b_k \tilde{\xi}_k| \prod_{l \in G_j} |\delta_l| + C \sum_{k \in D_N} |b_k| \prod_{l \in G_j, l \neq k} |\delta_l| \\ & \leq C \left\{ \left(\left| \sum_{l=1}^j b_{l,1} \right| + (C^* L_N)^{-1} \right) + C(|\psi| + |t|) + (C^* L_N)^{-1} \right\} \cdot L_N \exp\{-\mu(\psi^2 + t^2)\} \\ & \leq C \left(\left| \sum_{l=1}^j b_{l,1} \right| + 1 + |\psi| + |t| \right) \exp\{-\mu(\psi^2 + t^2)\} \end{aligned} \quad (29)$$

(30) So (19) can be inferred by (23), (25), (26) and (29). It is similar to get (20). In order to prove (21), differentiating three times in the both sides of

(22), we have

$$M_3 \leq C \int_{|\psi| \leq \pi \sqrt{N \tilde{p} \tilde{q}}} T_3 d\psi$$

where $T_3 = T_3' + T_3'' + T_3'''$, and

$$T_3' = \tilde{p}(\tilde{p}\tilde{q})^{-3/2} \left| \sum_{k \in G_j} b_k^3 \exp(it\tilde{\omega}_k) \delta_k^{-1} \prod_{m \in G_j} \delta_m \right|$$

$$T_3'' = 3\tilde{p}^2(\tilde{p}\tilde{q})^{-3/2} \left| \sum_{\substack{k, j \in G_j \\ k \neq j}} b_k^2 b_j \exp\{i(\tilde{\omega}_k + \tilde{\omega}_j)\} \prod_{\substack{m \in G_j \\ m \neq k, j}} \delta_m \right|$$

$$T_3''' = \tilde{p}^3(\tilde{p}\tilde{q})^{-3/2} \left| \sum_{\substack{k, j, l \in G_j \\ k \neq j \neq l \neq k}} b_k b_j b_l \exp\{i(\tilde{\omega}_k + \tilde{\omega}_j + \tilde{\omega}_l)\} \prod_{\substack{m \in G_j \\ m \neq k, j, l}} \delta_m \right|$$

The estimate of each term is similar to (17), but the term $CN^{n/2}L_n \exp(-\mu t^2)$ appears in the right side of (21). The reason is that if C' and C'' are small enough, we obtain by Lemma 5 that

$$T_3' \leq CN^{n/2} \sum_{k \in G_j} |b_k|^3 \prod_{m \in G_j} |\delta_m| \leq CN^{n/2} L_n \exp\{-\mu(\psi^2 + \Gamma^2)\}$$

The other estimates are omitted. Lemma 4 is proved.

Lemma 5 Under the condition of Theorem 1, there exists $\lambda > 0$ such that

$$\int_{|t| < \lambda L_N^{-1}} |t|^{-1} |i^3 ES_n^3 \exp(itS_n) - \psi_n(t)| dt \leq CL_N$$

where $\psi_n(t) = (i^3 ES_n^3 + 3t - t^3) \exp(-t^2/2)$.

Proof Define $\rho_k = f_k(\psi, t)$ by (11) and set

$$u_k = \{-\exp(-ip\omega_k) + \exp(iq\omega_k)\} / \rho_k \hat{=} \hat{u}_k / \rho_k$$

$$v_k = \{p\exp(-ip\omega_k) + q\exp(iq\omega_k)\} / \rho_k \hat{=} \hat{v}_k / \rho_k$$

$$w_k = \{-p^2\exp(-ip\omega_k) + q^2\exp(iq\omega_k)\} / \rho_k \hat{=} \hat{w}_k / \rho_k$$

$$B_n(p) = \sqrt{2\pi} \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$$

From the equality

$$E \exp(itS_n) = \frac{1}{\sqrt{Npq} B_n(p)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|\psi| < \pi \sqrt{Npq}} \prod_{k=1}^N \rho_k(\psi, t) d\psi \quad (30)$$

we have

$$\{E \exp(itS_n)\}'''' = \frac{1}{\sqrt{Npq} B_n(p)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|\psi| < \pi \sqrt{Npq}} (T_1 + T_2 + T_3) \cdot \prod_{k=1}^N f_k(\psi, t) d\psi \quad (31)$$

Here

$$T_1 = -\frac{i}{\sqrt{pq}} \sum_{k=1}^N b_k^3 w_k \quad (32)$$

$$T_2 = -3i\sqrt{pq} \sum_{1 \leq k \neq j \leq N} b_k^2 v_k b_j u_j \quad (33)$$

$$T_3 = -i(pq)^{3/2} \sum_{\substack{1 \leq k, i, l \leq N \\ k \neq i \neq l \neq k}} b_k b_i b_l u_k u_i u_l \quad (34)$$

Take C' and C'' small enough to satisfy $|\omega_k| < 1/10$ for $(\psi, t) \in \Gamma_1$. In this case, there exists θ_k with $|\theta_k| \leq C$ such that

$$u_k = i\omega_k \left[1 + \frac{1}{2} i(q-p)\omega_k + \theta_k \xi_k^2 \right] \quad (35)$$

$$v_k = 1 + i(q-p)\omega_k + \theta_k \xi_k^2 \quad (36)$$

$$\omega_k = (q-p) + \theta_k |\xi_k| \quad (37)$$

Substituting (37) into (32), we obtain that, when $(\psi, t) \in \Gamma_1$,

$$\begin{aligned} \left| T_1 - \frac{i(p-q)}{\sqrt{pq}} \sum_{k=1}^N b_k^2 \right| &\leq C \sum_{k=1}^N |b_k^2 \xi_k| \leq C \sum_k |b_k|^3 (N^{-1/2} |\psi| + |tb_k|) \\ &\leq CL_N (N^{-1/2} |\psi| + |t|). \end{aligned} \quad (38)$$

Further, substituting (35) and (36) into (38), we get

$$\begin{aligned} T_2 = 3 \sum_{1 \leq k \neq j \leq N} b_k^2 b_j \xi_k + 3 \sum_{1 \leq k \neq j \leq N} b_k^2 b_j \xi_j \left[\frac{i(q-p)}{2\sqrt{pq}} (2\xi_k + \xi_j) \right. \\ \left. + \theta_k \theta_j (\xi_k^2 + \xi_j^2) \right] \triangleq T'_2 + T'_2' \end{aligned}$$

where

$$T'_2 = 3 \sum_{1 \leq k \neq j \leq N} b_k^2 b_j (N^{-1/2} \psi + tb_j) = 3t \sum_{k=1}^N b_k^2 (1 - b_k^2) - 3N^{-1/2} \psi \sum_{k=1}^N b_k^2$$

$$\begin{aligned} |T'_2'| &\leq C \left| \sum_{1 \leq k \neq j \leq N} b_k^2 b_j \xi_k \xi_j \right| + C \left| \sum_{k=1}^N b_k^2 \sum_{j=1, j \neq k}^N b_j \xi_j^2 \right| \\ &\quad + C \sum_{1 \leq k \neq j \leq N} (b_k^2 \xi_k^2 |b_j \xi_j| + b_k^2 |b_j \xi_j^2|). \end{aligned}$$

Using this estimates, we can easily get

$$|T_2 - 3t| \leq CL_N^2 Q_2(|\psi|) + CL_N |t| Q_3(|\psi|, |t|) \quad (39)$$

provided $(\psi, t) \in \Gamma_1$.

Substituting (35) into (34), we have

$$\begin{aligned} T_3 = - \sum_{k \neq i \neq l \neq k} b_k b_i b_l \xi_k \xi_i \xi_l \left(1 + \frac{i(q-p)}{2\sqrt{pq}} \xi_k + \theta_k \xi_k^2 \right) \\ \cdot \left(1 + \frac{i(q-p)}{2\sqrt{pq}} \xi_i + \theta_i \xi_i^2 \right) \left(1 + \frac{i(q-p)}{2\sqrt{pq}} \xi_l + \theta_l \xi_l^2 \right) \end{aligned}$$

Using an argument similar to the above, we get

$$|T_3 - t^3| \leq CL_N^2 Q_2(|\psi|) + CL_N |t| Q_3(|\psi|, |t|), \text{ for } (\psi, t) \in \Gamma_1 \quad (40)$$

when $(\psi, t) \in \Gamma_1$, from (39) in the paper [6], there exists θ such that $|\theta| \leq C$ and

$$\prod_{k=1}^N \rho_k(\psi, t) = \exp\{-\mu(\psi^2 + t^2)/2\} + \theta L_N (|\psi|^3 + |t|^3) \exp\{-\mu(\psi^2 + t^2)/4\} \quad (41)$$

Noticing $i^3 ES_n^3 = \frac{i(p-q)}{\sqrt{pq}} \sum_{k=1}^N b_k^3 \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right)$ and using above estimates, we

get

$$(T_1 + T_2 + T_3) \sum_{k=1}^N \rho_k(\psi, t) = (i^3 ES_n^3 + 3t - t^3) \exp\{-\mu(\psi^2 + t^2)/2\} + \theta [L_N^2 Q_2(|\psi|) + L_N |t| Q_3(|\psi|, |t|)] \exp\{-\mu(\psi^2 + t^2)/4\}, \text{ for } (\psi, t) \in \Gamma_1 \quad (42)$$

When $(\psi, t) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4$, from (14), we have

$$\begin{aligned} \left| (T_1 + T_2 + T_3) \sum_{k=1}^N \rho_k \right| &\leq C \sum_{k=1}^N |b_k|^3 \prod_{m=1, m \neq k}^N |\rho_m| + C \sum_{1 \leq k \neq j \leq N} b_k^2 |b_j| \prod_{m=1, m \neq k, j}^N |\rho_m| \\ &\quad + C \sum_{1 \leq k \neq j \neq l \leq N} |b_k b_j b_l| \sum_{m=1, m \neq k, j, l}^N |\rho_m| \\ &\leq C(L_N + N^{1/2} + N^{3/2}) N^{-3} \exp\{-\mu(\psi^2 + t^2)\} \end{aligned}$$

Noticing that $(\psi, t) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4$ implies $|\psi| \geq 2C' \sqrt{Npq}$, we have

$$\begin{aligned} &|(i^3 ES_n^3 + 3t - t^3) \exp\{-\mu(\psi^2 + t^2)/2\}| \\ &\leq C\{L_N^2 + (|t| + |t|^3) L_N\} \exp\{-\mu(\psi^2 + t^2)\} \end{aligned}$$

so the estimate (42) is also valid for $(\psi, t) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4$.

When $(\psi, t) \in \Gamma_3$, the case is more complicated. Set $H_N = \{1, 2, \dots, N\} - D_N$. It is obvious that $|\omega_k| \leq 2C' + C''C^*$ for $k \in H_N$. After fixing C^* , we can take C' and C'' small enough such that $|u_k| \leq C|\xi_k|$ for $k \in H_N$ (see (35)).

Noticing $\left| \sum_{j \in D_N} b_j \right| \leq 1/C^* L_N$ and using (15), we have

$$\begin{aligned} \left| T_1 \prod_{k=1}^N \rho_k \right| &\leq C \left| \sum_{k=1}^N b_k^3 \hat{\omega}_k \prod_{m=1, m \neq k}^N \rho_m \right| \leq C L_N^2 \exp\{-\mu(\psi^2 + t^2)\} \\ \left| T_2 \prod_{k=1}^N \rho_k \right| &\leq C \sum_{k=1}^N b_k^2 |\hat{v}_k| \left| \sum_{j \neq k, j \in H_N} b_j \hat{u}_j \prod_{m \neq k}^N |\rho_m| \right| + \\ &\quad + C \sum_{k=1}^N b_k^2 |\hat{v}_k| \sum_{j \in D_N, j \neq k} |b_j \hat{u}_j| \prod_{m=1, m \neq k, j}^N |\rho_m| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (31) \quad & \leq C \sum_{k=1}^N b_k^2 \sum_{i \neq k, j \in H_N} |b_j \xi_i| \prod_{m \neq k} |\rho_m| + C \sum_k b_k^2 \sum_{j \in D_N} |b_j| \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k, j}}^N |\rho_m| \\
 (32) \quad & \leq CL_N^3 (C^{*-1} L_N^{-1} + |\psi| + |t|) \exp\{-\mu(\psi^2 + t^2)\} \\
 & \leq CL_N^2 (1 + |t| + |\psi|) \exp\{-\mu(\psi^2 + t^2)\}
 \end{aligned}$$

By the similar method the following estimate also can be inferred:

$$|T_3 \prod_{k=1}^N \rho_k(\psi, t)| \leq C \{L_N^2 Q_2(|\psi|) + L_N Q_3(|\psi|, |t|)\} \exp\{-\mu(\psi^2 + t^2)\}$$

Note that the above estimate is also valid for $(i^3 ES_n^3 + 3t - t^3) \exp\{-\frac{1}{2}(\psi^2 + t^2)\}$ when $|t| \geq C' \sqrt{pq} b_*^{-1}$, so (42) holds for $(\psi, t) \in \Gamma_3$. Hence, when $|t| \leq C' \sqrt{pq} L_N^{-1}$, we have

$$\begin{aligned}
 (34) \quad & \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |\psi| < \pi \sqrt{Npq} \left[(T_1 + T_2 + T_3) \prod_{k=1}^N \rho_k(\psi, t) - (i^3 ES_n^3 + 3t - t^3) \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot \exp\{-(\psi^2 + t^2)/2\} \right] d\psi \right| \leq C (L_N^2 + L_N |t| Q_1(|t|) \exp\{-\mu t^2\}
 \end{aligned}$$

By (31) and the equality $\sqrt{Npq} B_n(p) = 1 + O(N^{-1})$, it holds that

$$i^3 E\{S_n^3 \exp(it S_n)\} - \phi_n(t) \leq C (L_N^2 + L_N |t| Q_1(|t|) \exp\{-\mu t^2\}) \quad (43)$$

for $|t| \leq C' \sqrt{pq} L_N^{-1}$.

When $|t| \leq CL_N$, from Lemma 1, we get

$$\begin{aligned}
 & |t|^{-1} |i^3 E\{S_n^3 \exp(it S_n)\} - (i^3 ES_n^3 + 3t - t^3) \exp(-t^2/2)| \\
 & \leq |t|^{-1} \{ |ES_n^3[\exp(it S_n) - 1]| + |ES_n^3[1 - \exp(-t^2/2)]| + \\
 & + (3|t| + |t|^3) \exp(-t^2/2) \} \leq ES_n^4 + \frac{1}{2} |t| E|S_n^3| \\
 & + 3|t| + |t|^3 \leq Q_1(|t|) \quad (44)
 \end{aligned}$$

With (43) and (44) we obtain

$$\begin{aligned}
 & \int_{|t| \leq C' \sqrt{pq} L_N^{-1}} |t|^{-1} |i^3 ES_n^3 \exp(it S_n) - \phi_n(t)| dt = \int_{|t| \leq CL_N} + \\
 & + \int_{CL_N \leq |t| \leq C' \sqrt{pq} L_N^{-1}} \left\{ |t|^{-1} |i^3 ES_n^3 \exp(it S_n) - \phi_n(t)| \right\} dt \leq CL_N
 \end{aligned}$$

Up to now the Lemma is proved.

Lemma 6 Suppose that $\phi(t)$ have continuous third-order derivative $\phi^{(3)}(t)$ in $|t| \leq T$, and $\phi^{(j)}(0) = 0$ for $j = 0, 1, 2$. Then

$$\int_{-r}^r |t|^{-j} |\phi^{(j)}(t)| dt \leq \int_{-r}^r |t|^{-1} |\phi^{(3)}(t)| dt, \text{ for } j = 0, 1, 2.$$

The proof can be found in Lemma 2 in the paper [4].

The Proof of Theorem 2

Set $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = ES_n^2 - 1, \alpha_3 = ES_n^3$. Obviously, $|\alpha_j| \leq CL_N$ is valid for $j = 1, 2, 3$. Define

$$h_n(t) = \sum_{k=0}^3 \alpha_k (it)^k \exp(-t^2/2) / k! \quad (45)$$

$$g_n(t) = E \exp(itS_n) \quad (26)$$

Obviously,

$$|h_n(t) - e^{-t^2/2}| \leq CL_N(t^2 + |t|^5) \exp(-t^2/2)$$

and

$$|h_n^{(3)}(t) - \psi_n(t)| \leq CL_N(|t| + t^6) \exp(-t^2/2)$$

where the definition of $\psi_n(t)$ is found in Lemma 5. With Lemma 3 in [6] and Lemma 5 in this paper, there exists $\lambda > 0$ such that

$$\int_{|t| \leq \lambda L_N^{-1}} |t|^{-1} |g_n(t) - h_n(t)| dt \leq CL_N \quad (47)$$

$$\int_{|t| \leq \lambda L_N^{-1}} |t|^{-1} |g_n^{(3)}(t) - h_n^{(3)}(t)| dt \leq CL_N \quad (48)$$

Noticing $g_n^{(j)}(0) = h_n^{(j)}(0)$ for $j=0,1,2$, with lemma 6 and (48), we get

$$\int_{|t| \leq \lambda L_N^{-1}} |t|^{-4} |g_n^{(j)}(t) - h_n^{(j)}(t)| dt \leq CL_N, \text{ for } j=0,1,2,3. \quad (49)$$

Define

$$G_n(x) = P(S_n \leq x), \quad H_n(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{(-1)^k}{k!} \alpha_k \Phi^{(k)}(x) \quad (50)$$

It is easy to see that $G_n(x)$ is non-decreasing, $H_n(x)$ is differential and has bounded variation on R^1 , and $G_n(+\infty) = H_n(+\infty)$, $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 |d(G_n(x) - H_n(x))| < \infty$, $|H'_n(x)| \leq C(1+|x|)^{-3}$. So G_n and H_n satisfy the conditions of Lemma 8 in chapter 6 in [2]. Checking the proof of the lemma again, we see that this lemma also holds when $T \geq \lambda$, here λ is an absolute constant.

Set

$$\delta_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d(x^3(G_n(t) - H_n(x)))$$

then

$$\begin{aligned} |G_n(x) - H_n(x)| &\leq C(1+|x|)^{-3} \left\{ \int_{|t| \leq \lambda L_N^{-1}} |t|^{-1} |g_n(t) - h_n(t)| dt + \right. \\ &\left. + \int_{|t| \leq \lambda L_N^{-1}} |t|^{-1} |\delta_n(t)| dt + CL_N \right\} \quad (50) \end{aligned}$$

From Lemma 7 in Chapter 6 in [2], and noticing (47), (49) and (51), we get

$$\begin{aligned} |G_n(x) - H_n(x)| &\leq C(1+|x|)^{-3} \left\{ \int_{|t| \leq \lambda L_N^{-1}} |t|^{-1} |g_n(t) - h_n(t)| dt \right. \\ &\left. + \sum_{j=0}^3 \int_{|t| \leq \lambda L_N^{-1}} |t|^{-4} |g_n^{(j)}(t) - h_n^{(j)}(t)| dt + CL_N \right\} \leq CL_N(1+|x|)^{-3} \end{aligned}$$

But

$$|H_n(x) - \Phi(x)| \leq CL_N(1+|x|)^{-1}$$

so Theorem 2 is obtained from (52) .

References

[1] Nandi, H. K. and Sen, P. K., *Calcutta Statistical Association Bulletin* 12 (1963) , 125—143.

[2] Petrov, V. V., *Sums of Independent Random Variables*, Springer-Verlag, New York, (1975) , Chapter 6.

[3] Wu, C. F. J., *On the Asymptotic Properties of the Jackknife Histograms*, Technical Report, Univ. of Wisconsin, Madison, (1987).

[4] Zhao Lincheng and Chen Xiru, *Scientia Sinica*, Series A, 25(1982), 1042-1055.

[5] Zhao Lincheng and Chen Xiru, *Scientia Sinica*, Series A, 26 (1983), 795-810.

[6] Zhao Lincheng and Chen Xiru, *Scientia Sinica*, Series A, 1985, No. 2, 123-135 (in Chinese), Vol. XXX (1987), No. 2, 113-127 (in English).

有限总体 U-统计量正态逼近的非一致性界限 (I)

缪柏其 赵林城

(数学系)

摘 要

本文建立了有限总体 U -统计量正态逼近的非一致性界限，分成两部分。在这一部分，即部分 (I)，作为一个预备定理，我们对有限总体抽样的部分和建立了一个类似的结果。在下期出版的部分 (II)，我们将完成关于有限总体 U -统计量的这一定理的证明。

关键词：有限总体，正态逼近，抽样， U -统计量。

均值定理的若干新应用

张明尧

(数学系)

摘 要

在本文中,我们应用一个简单方法并结合运用均值定理,给出对于更一般的 Goldbach 问题的一些应用,得到了有关解的上、下界的某些新结果。对于相当广泛的一类涉及殆素数分布的筛法问题,我们的方法仍然适用。比如,我们的方法可以对加权筛法的一般性的经典结果作类似的推广。

关键词: 筛法, Goldbach 猜想, 殆素数, 均值定理。

在 [1.] 中, R. J. Miesch 讨论了一个推广的 Goldbach 型方程

$$N = q_1 \cdots q_r + p_1 \cdots p_r, \quad q_i, p_i > \exp(\ln N)^\epsilon \quad (1)$$

的解数问题,其中 N 为一个充分大的偶数, $\epsilon \in (0, 1)$ 为一给定的实数, 诸 q_i, p_i 皆为奇素数。

假设广义 Riemann 猜想成立, Miesch 得到 (1) 的解数的一个渐近公式, 但是他的公式仍不能对所有充分大的 N 成立。

在 [2.] 中, 我们对方程

$$N = q + p_1 \cdots p_r, \quad q, p_i > N^\epsilon \quad (2)$$

解数的下界给出一个逼近结果, 这是陈景润关于 Goldbach 猜想的著名结果 (见 [3]) 的一个推广。这里附带要指出的是, 我们在 [2.] 中所得结果的阶与 [1.] 中的阶略有不同, 这是由于我们在 (2) 中附加了比 (1) 更多的限制。如果仍用 [2.] 中的方法, 而对 q 及诸 p_i 改用 (1) 中较宽的限制条件, 或等价地说限制成

$$q, p_i > N^{1/(\ln N)^\epsilon}, \quad 0 < \epsilon < 1 \quad (3)$$

则 (2) 中主要定理可改述成以下形式: 方程

$$N = q + p_1 \cdots p_r$$

或方程

$$N = q + p_1 \cdots p_r p_{r+1}$$

的解数为

$$\gg C_N N (\ln N)^{-2} (\ln \ln N)^{s+r-2} \quad (4)$$

($r \geq 2$), 而 $r=1$ 的结果由 [3] 给出为

$$\gg C_N N (\ln N)^{-2} \quad (5)$$

其中

$$C_N = \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{2 < p | N} \frac{p-1}{p-2} \quad (6)$$

为了获得 (4), 只需将 [2] 中之素数集 (p_2, \dots, p_{r-1}) 改成如下定义即可:

$$N^{1/(\ln N)^\alpha} < p_2 \leq N^{1/(\ln N)^{\alpha/2}} < \dots < N^{1/(\ln N)^{\alpha/2^{r-3}}} < p_{r-1} \leq N^{1/(\ln N)^{\alpha/2^{r-2}}}$$

其中 $r \geq 3, \alpha \in (0, \epsilon)$.

在本文中, 我们要讨论 (1) 型方程解数的下界与上界, 还要简要叙述一下我们的方法对其它问题的应用.

本文中引用的标准记号, 均见 [4] 或 [5].

1 下界问题

关于 (1) 型方程的解数下界, 我们有以下的逼近结果:

定理 1 方程

$$N = q_1 \cdots q_s + p_1 \cdots p_r$$

或方程

$$N = q_1 \cdots q_s + p_1 \cdots p_r + 1$$

的适合条件

$$q_i > e^{(\ln N)^\epsilon}, \quad 0 < \epsilon < 1$$

的解数为

$$\gg C_N N (\ln N)^{-2} (\ln \ln N)^{s+r-2}$$

($s \geq 1, r \geq 1, s+r \geq 3$).

此外, 关于 [2], [6] 中的配对问题, 有如下推广的结果:

定理 2 对任给的正整数 s 及 $r, s+r \geq 3$, 当 N 充分大时, 必存在

$$\gg (N (\ln N)^{-2} (\ln \ln N)^{s+r-2})^2$$

组奇素数 $q_1^{(1)}, \dots, q_s^{(1)}; q_1^{(2)}, \dots, q_s^{(2)}; q_{i_1}^{(j_1)} \neq q_{i_2}^{(j_2)}$ (当 $i_1 = i_2$ 和 $j_1 = j_2$ 不同时成立时), $q_1^{(j)} \cdots q_s^{(j)} < N, j=1, 2$, 使得恰有

$$(q_1^{(1)} \cdots q_s^{(1)} + 2)(q_1^{(2)} \cdots q_s^{(2)} + 2) = p_1 p_2 \cdots p_{r+1}$$

对于定理 1 中给定的 $\epsilon, 0 < \epsilon < 1$, 容易看出必可找到至少一对正整数 m_0, n_0 适合

$$\frac{m_0}{n_0} \epsilon < 1, \quad m_0 > n_0, \quad (m_0, n_0) = 1 \quad (7)$$

取定一组 m_0, n_0 , 定义实数 ($r \geq 3, s \geq 2$ 为整数)

$$\alpha = \frac{(m_0 - n_0)\epsilon}{n_0(r-2)}, \quad \beta = \frac{(m_0 - n_0)\epsilon}{n_0^2(s-1)} \quad (8)$$

则我们有如下的结论成立:

引理 1 设 $r \geq 3$ 及 $s \geq 2$ 为两个给定的整数, 定义

$$C(r) = \sum_{(p_2, \dots, p_{r-1})} \frac{1}{p_2 \cdots p_{r-1}}$$

$$C(s) = \sum_{(q_1, \dots, q_{s-1})} \frac{1}{q_1 \cdots q_{s-1}}$$

其中记号 (p_2, \dots, p_{r-1}) 与 (q_1, \dots, q_{s-1}) 分别表示满足下述条件的素数集:

$$e^{(\ln N)^\alpha} < p_2 \leq e^{(\ln N)^{\alpha+\alpha}} < \dots \leq e^{(\ln N)^{\alpha+(r-3)\alpha}} < p_{r-1} \leq e^{(\ln N)^{\alpha+(r-2)\alpha}} \quad (9)$$

$$e^{(\ln N)^\alpha} < q_1 \leq e^{(\ln N)^{\alpha+\beta}} < \dots \leq e^{(\ln N)^{\alpha+(s-2)\beta}} < q_{s-1} \leq e^{(\ln N)^{\alpha+(s-1)\beta}} \quad (10)$$

α, β 由 (8) 定义, 则对充分大的 N 有

$$C(r) = (\alpha \ln \ln N)^{r-2} + O_{r,s} \left(\frac{(\ln \ln N)^{r-3}}{(\ln N)^{\alpha}} \right)$$

$$C(s) = (\beta \ln \ln N)^{s-1} + O_{r,s} \left(\frac{(\ln \ln N)^{s-2}}{(\ln N)^\beta} \right)$$

证明 熟知, 当 $y \geq 2$ 时有

$$\sum_{p < y} \frac{1}{p} = \ln \ln y + C_0 + O\left(\frac{1}{\ln y}\right)$$

(C_0 为一常数), 由此即得证.

定理 1 的证明 先来证明 $r \geq 3$ 及 $s \geq 2$ 的结论. 定义

$$\mathcal{A}^{(1)} = \{N - bq; bq < N, b \in \mathcal{E}_1\}$$

$$\mathcal{E}_1 = \{b: b = q_1 \cdots q_{s-1}, (q_1, \dots, q_{s-1}), (b, N) = 1\}$$

$$\mathcal{P}_1 = \{p: p \nmid Nq_1 \cdots q_{s-1}\}$$

$$\mathcal{P}_1(u_1, \dots, u_k) = \{p: p \in \mathcal{P}_1, p \nmid u_1 \cdots u_k\}$$

其中 u_1, \dots, u_k 为 k 个任给的正整数, 条件 (q_1, \dots, q_{s-1}) 由 (10) 式给出.

于是, 利用 [3]、[6]、[2] 中的思想易知, 必有常数 $\delta, 0 < \delta < 1$, 使方程

$$N = q'_1 \cdots q'_s + p'_1 \cdots p'_r$$

或

$$N = q'_1 \cdots q'_s + p'_1 \cdots p'_r p'_{r+1}$$

的适合

$$q'_i, p'_i > e^{(\ln N)^\delta}$$

的解数

$$\geq S_1 - \frac{1}{2} S_2 - \frac{1}{2} S_3 + O(N^{1-\delta}) \quad (11)$$

这里

$$S_i = \sum_{\substack{1/N^{101} < p_1 < N^{1/30} \\ (p_2, \dots, p_{r-1})}} \sum S(\mathcal{A}_{p_1 \cdots p_{r-1}}^{(1)}; \mathcal{P}_1(p_1, \dots, p_{r-1}), N^{\frac{1}{2}})$$

$$S_2 = \sum_{\substack{N^{1/101} < p_1 < N^{1/103} \\ \dots, p_{r-1}, p_r, N^{1/12}}} \sum_{(p_2, \dots, p_{r-1})} \sum_{\substack{N^{1/12} < p_r < (N / (p_1 \dots p_{r-1}))^{1/8} \\ \dots, p_{r-1}, p_r, N^{1/12}}} S(\mathcal{A}_{p_1 \dots p_{r-1}, p_r}^{(1)}, \mathcal{P}_1(p_1, \dots, p_{r-1}, p_r, N^{1/12}))$$

$$S_3 = \sum_{\substack{N^{1/101} < p_1 < N^{1/103} \\ \dots, p_{r-1}, p_r, N^{1/12}}} \sum_{(p_2, \dots, p_{r-1})} \sum_{\substack{N^{1/12} < p_r < (N / (p_1 \dots p_{r-1}))^{1/8} \\ \dots, p_{r-1}, p_r, N^{1/12}}} \sum_{\substack{N^{1/12} < p_{r+1} < (N / (p_1 \dots p_{r-1} p_r))^{1/2} \\ \dots, p_{r-1}, p_r, p_{r+1}, N^{1/12}}} S(\mathcal{A}_{p_1 \dots p_{r-1}, p_r, p_{r+1}}^{(1)}, \mathcal{P}_1(p_1, \dots, p_{r-1}, p_r, p_{r+1}, N^{1/12}))$$

诸 $p_i \leq N$, $1 \leq i \leq r+2$.

定义

$$X(\mathcal{A}^{(1)}) = \sum_{b \in \mathcal{E}_1} \text{li} \left(\frac{N}{b} \right) \quad (12)$$

易有

$$X(\mathcal{A}^{(1)}) = (1 + o(1)) N \sum_{b \in \mathcal{E}_1} \frac{1}{b \ln(N/b)} \quad (13)$$

注意到 N 充分大时对每个 $b \in \mathcal{E}_1$ 有

$$1 < b < N^{1/100} \quad (14)$$

故由引理 1 易有

$$X(\mathcal{A}^{(1)}) < (1 + \varepsilon_1) \left(\frac{1000}{999} \right) (\beta \ln \ln N)^{\beta-1} \frac{N}{\ln N} \quad (15)$$

$$X(\mathcal{A}^{(1)}) > (1 - \varepsilon_1) (\beta \ln \ln N)^{\beta-1} \frac{N}{\ln N} \quad (16)$$

现在应用 [5] 定理 8.3 (4.2) 式来估计 S_1 的下界, 在该式中取

$$q = p_1 \dots p_{r-1}, \quad X = X(\mathcal{A}^{(1)}), \quad z = N^{1/12}$$

$$\omega(p) = \frac{p}{p-1} (p \in \mathcal{P}_1(p_1, \dots, p_{r-1})), \quad \xi^2 = N^{1/2} / (p_1 \dots p_{r-1} \ln^c N)$$

这里 $c_1 > 0$ 为一待定常数. 由此所得余项易见为

$$R \leq R_1 + R_2 \quad (17)$$

其中

$$R_1 = \sum_{\substack{l < N^{1/2} / \ln^{c_1} N \\ (l, N) = 1}} \mu^2(l) 3^{\nu(l)} \left| \sum_{\substack{b \in \mathcal{E}_1 \\ (b, l) = 1}} \left(\sum_{\substack{bq < N \\ bq \equiv N(l)}} 1 - \frac{1}{\varphi(l)} \text{li} \left(\frac{N}{b} \right) \right) \right|$$

$$R_2 = \sum_{\substack{l < N^{1/2} / \ln^{c_1} N \\ (l, N) > 1}} \frac{\mu^2(l) 3^{\nu(l)}}{\varphi(l)} \sum_{\substack{b \in \mathcal{E}_1 \\ (b, l) > 1}} \text{li} \left(\frac{N}{b} \right)$$

对 R_1 应用潘承洞—丁夏娃^[4]的推广均值定理并适当选取 c_1 易有

$$R_1 \ll N / (\ln N)^2 \quad (18)$$

对 R_2 易有:

$$\begin{aligned}
 R_2 &\leq \sum_{l < N^{\frac{1}{2}}} \frac{\mu^2(l) 3^{\nu(l)}}{\varphi(l)} \sum_{\substack{a < N^{1000} \\ (a, l) > \exp((\ln N)^\varepsilon)}} \text{li} \left(\frac{N}{a} \right) \\
 &\leq N \sum_{l < N^{\frac{1}{2}}} \frac{\mu^2(l) 3^{\nu(l)}}{\varphi(l)} \sum_{k|l} \sum_{\substack{a < N^{1000} \\ (a, l) = k}} \frac{1}{a} \\
 &\ll N \ln N \left(\sum_{h < N^{\frac{1}{2}}} \frac{\mu^2(h) 3^{\nu(h)}}{\varphi(h)} \right) \left(\sum_{k > \exp((\ln N)^\varepsilon)} \frac{\mu^2(k) 3^{\nu(k)}}{\varphi(k)k} \right) \quad (19)
 \end{aligned}$$

由熟知的估计式

$$\frac{1}{\varphi(h)} \ll \frac{\ln \ln h}{h} \quad (20)$$

及 [5] 中 p115 (6.7) 式有

$$\sum_{h < N^{\frac{1}{2}}} \frac{\mu^2(h) 3^{\nu(h)}}{\varphi(h)} \ll \ln \ln N (\ln N)^3 \quad (21)$$

又由不等式

$$\mu^2(k) 3^{\nu(k)} \leq d^2(k) \ll k^{\varepsilon_2}$$

易有

$$\begin{aligned}
 \sum_{k > \exp((\ln N)^\varepsilon)} \frac{\mu^2(k) 3^{\nu(k)}}{\varphi(k)k} &\ll \sum_{k > \exp((\ln N)^\varepsilon)} \frac{1}{k^{2(1-\varepsilon_2)}} \\
 &\ll \exp\{-(1-\varepsilon_2)(\ln N)^\varepsilon\} \ll (\ln N)^{-8} \quad (22)
 \end{aligned}$$

由是即得

$$R_2 \ll N / (\ln N)^3 \quad (23)$$

于是我们得到 (注意 N 充分大时有 $p_2 < \dots < p_{r-1} < p_1$, 故 $\mu^2(p_1 \dots p_{r-1}) = 1$)

$$\begin{aligned}
 S_1 &\geq (1-\varepsilon_1) (\beta \ln \ln N)^{\alpha-1} (24) e^{-\gamma} C_N \frac{N}{\ln^2 N} \sum_{\substack{N^{\frac{1}{101}} < p_1 < N^{\frac{1}{100}} \\ (p_2, \dots, p_{r-1})}} \sum_{p_1 \dots p_{r-1}} \frac{f\left(6 - \frac{12 \ln p_1 \dots p_{r-1}}{\ln N}\right)}{p_1 \dots p_{r-1}} \\
 &\geq (1-\varepsilon_1) (24) \beta^{\alpha-1} \alpha^{\alpha-2} e^{-\gamma} C_N N (\ln N)^{-2} \\
 &\quad \cdot (\ln \ln N)^{\alpha-1} \sum_{\substack{N^{\frac{1}{101}} < p_1 < N^{\frac{1}{100}}} \\ p_1} \frac{f\left(5.988 - \frac{12 \ln p_1}{\ln N}\right)}{p_1} \quad (24)
 \end{aligned}$$

直接计算易得

$$\sum_{\substack{N^{\frac{1}{101}} < p_1 < N^{\frac{1}{100}} \\ p_1}} \frac{f\left(5.988 - \frac{12 \ln p_1}{\ln N}\right)}{p_1} = \int_{1.00}^{1.01} f\left(5.988 - \frac{12}{y}\right) \frac{dy}{y} + O\left(\frac{1}{\ln N}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= 2e^\gamma \int_{100}^{101} \frac{\ln\left(4.988 - \frac{12}{y}\right)}{y\left(5.988 - \frac{12}{y}\right)} dy \\
&+ \int_{100}^{101} \frac{dy}{y\left(5.988 - \frac{12}{y}\right)} \int_{\frac{4.988 - \frac{12}{y}}{3}}^{\frac{4.988 - \frac{12}{y}}{2}} \frac{dt}{t} \int_2^{t-1} \frac{\ln(x-1)}{x} dx \left\{ + O\left(\frac{1}{\ln N}\right) \right. \\
&\geq \frac{2e^\gamma}{5.988} \ln\left(\frac{(5.988)(101) - 12}{(5.988)(100) - 12}\right) \left\{ \ln 4.868 + \int_3^{4.868} \frac{dt}{t} \int_2^{t-1} \frac{\ln(x-1)}{x} dx \right\} \\
&+ O\left(\frac{1}{\ln N}\right) \tag{25}
\end{aligned}$$

交换积分次序易得

$$\int_3^{4.868} \frac{dt}{t} \int_2^{t-1} \frac{\ln(x-1)}{x} dx = \int_2^{4.868} \frac{\ln(x-1) \ln\left(\frac{4.868}{x+1}\right)}{x} dx > 0.064384 \tag{26}$$

由 (24)、(25)、(26) 易得

$$S_1 > (0.1340466) \alpha^{\gamma-2} \beta^{\gamma-1} C_N \frac{N(\ln \ln N)^{\gamma-2}}{(\ln N)^2} \tag{27}$$

完全类似地由 [5] 中定理 8.3 的 (4.1) 式可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} S_2 &\leq (1 + \epsilon_1) \left(\frac{1000}{999}\right) (12) e^{-\gamma} \alpha^{\gamma-2} \beta^{\gamma-1} C_N N (\ln N)^{-2} (\ln \ln N)^{\gamma-2} \\
&\cdot \sum_{\frac{1}{N^{101}} < p_1 < \frac{1}{N^{100}}} \sum_{\frac{1}{N^{12}} < p_r < \frac{1}{(N/p_1)^3}} \frac{F\left(5.988 - \frac{12 \ln p_1 p_r}{\ln N}\right)}{p_1 p_r} \tag{28}
\end{aligned}$$

计算给出

$$\begin{aligned}
&\sum_{\frac{1}{N^{101}} < p_1 < \frac{1}{N^{100}}} \sum_{\frac{1}{N^{12}} < p_r < \frac{1}{(N/p_1)^3}} \frac{F\left(5.988 - \frac{12 \ln p_1 p_r}{\ln N}\right)}{p_1 p_r} \\
&\leq (1 + \epsilon_2) \int_{100}^{101} \frac{du}{u} \int_{3/(1-\frac{1}{u})}^{12} F\left(5.988 - \frac{12}{u} - \frac{12}{t}\right) \frac{dt}{t} \\
&= (1 + \epsilon_2) 2e^\gamma \left\{ \int_{100}^{101} \frac{du}{u} \int_{3/(1-\frac{1}{u})}^{12} \frac{dt}{t} \frac{F\left(5.988 - \frac{12}{u} - \frac{12}{t}\right)}{t} \right. \\
&+ \int_{100}^{101} \frac{du}{u} \int_{12/(5.988-12/u)}^{12} \frac{dt}{t} \frac{F\left(5.988 - \frac{12}{u} - \frac{12}{t}\right)}{t} \\
&\left. \cdot \int_2^{t-1} \frac{\ln(x-1)}{x} dx \right\} \tag{29}
\end{aligned}$$

易有

$$\int_{100}^{101} \frac{du}{u} \int_{3/(1-\frac{1}{u})}^{12} \frac{dt}{t(5.988 - \frac{12}{u} - \frac{12}{t})} < (\ln 1.01) \int_{3/(1-\frac{1}{11})}^{12} \frac{dt}{t(5.868 - \frac{12}{t})} < 0.00392245 \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \int_{100}^{101} \frac{du}{u} \int_{12/(2.988 - \frac{12}{u})}^{12} \frac{dt}{t(5.988 - \frac{12}{u} - \frac{12}{t})} \int_2^{4.988 - \frac{12}{u} - \frac{12}{t}} \frac{\ln(x-1)}{x} dx \\ & < (\ln 1.01) \int_{12/(2.988 - \frac{12}{11})}^{12} \frac{dt}{5.868t - 12} \int_2^{4.988 - \frac{12}{11} - \frac{12}{t}} \frac{\ln(x-1)}{x} dx \\ & = \frac{(\ln 1.01)}{5.868} \int_2^{3.988 - \frac{12}{101}} \ln(x-1) \ln \left(\frac{4.868(4.988 - \frac{12}{101} - x)}{0.88 + \frac{12}{101} + x} \right) \frac{dx}{x} \\ & < 0.00043736 \quad (31) \end{aligned}$$

由 (28) ~ (31) 得

$$\frac{1}{2} S_2 < (0.1047402) a^{r-2} \beta^{s-1} C_N \frac{N (\ln \ln N)^{r+s-3}}{(\ln N)^2} \quad (32)$$

下面来估计 S_3 的上界。

定义

$$\mathcal{L}_1 = \{l : l = N - bp, b \in \mathcal{B}_1, bp < N\}$$

这里

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 = \{ & b : b = p_1 p_2 \cdots p_{r+1}, (b, N) = 1, N^{\frac{1}{101}} \leq p_1 < N^{\frac{1}{100}} \\ & (p_2, \dots, p_{r-1}), N^{\frac{1}{12}} \leq p_r < (N/(p_1 \cdots p_{r-1}))^{\frac{1}{3}} \\ & (N/(p_1 \cdots p_{r-1}))^{\frac{1}{3}} \leq p_{r+1} < (N/(p_1 \cdots p_r))^{\frac{1}{2}} \} \end{aligned}$$

则不难证明

$$\frac{1}{2} S_3 \leq \frac{1}{2} \sum_{(q_1, \dots, q_{s-1})} S(\mathcal{L}_{q_1, \dots, q_{s-1}}, \mathcal{D}_1, N^{\frac{1}{2} - \epsilon_1}) + O(\sqrt{N}) \quad (33)$$

其中 \mathcal{D}_1 定义如前。取 $\eta = \frac{1}{1000}$ 并令

$$X(\mathcal{L}_1) = \sum_{b \in \mathcal{B}_1} \text{li}(N/b)$$

则类似上面的方法可得

$$\begin{aligned} X(\mathcal{L}_1) = & (1 + o(1)) N \sum_{N^{\frac{1}{101}} < p_1 < N^{\frac{1}{100}}} \sum_{(p_2, \dots, p_{r-1})} \\ & \sum_{N^{\frac{1}{12}} < p_r < (N/(p_1 \cdots p_{r-1}))^{\frac{1}{3}}} \sum_{(p_1 \cdots p_{r+1})} \frac{1}{p_1 \cdots p_{r+1} \ln \left(\frac{N}{p_1 \cdots p_{r+1}} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq (1 + \varepsilon_2) \alpha^{r-2} \frac{N (\ln \ln N)^{r-2}}{\ln N} \int_{\frac{1}{101}}^{\frac{1}{10}} \frac{dx}{x} \int_{\frac{1}{12}}^{\frac{1}{3}} \frac{dy}{y} \int_{\frac{1}{3}(1-x-y)}^{\frac{1}{3}(1-x)} \frac{dz}{z(1-\eta-x-y-z)} \\ &\leq (1 + \varepsilon_2) (\ln 1.01) \alpha^{r-2} \frac{N (\ln \ln N)^{r-2}}{\ln N} \int_{\frac{1}{12}}^{\frac{101}{303}} \frac{\ln g(y)}{y \left(\frac{989}{1000} - y \right)} dy \\ &< (0.00602088) \alpha^{r-2} \frac{N (\ln \ln N)^{r-2}}{\ln N} \end{aligned} \quad (34)$$

其中

$$g(y) = \frac{\left(\frac{100}{101} - y \right) \left(\frac{999}{500} - \frac{2}{101} - 3y \right)}{\left(\frac{989}{1000} \right) \left(\frac{494}{500} - y \right)}$$

对 (33) 式仍用 [5] 定理 8.3 中的 (4.1) 式估计之, 现在取 $q = q_1 \cdots q_{s-1}$,

$$X = X(\mathcal{L}_1), \quad z = N^{\frac{1}{4} - \varepsilon_1},$$

$$\omega(p) = \frac{p}{p-1} \quad (p \in \mathcal{P}_1), \quad \xi^2 = N^{\frac{1}{2}} / (q_1 \cdots q_{s-1} \ln^{c'} N)$$

($c' > 0$ 为一待定常数), 注意到

$$F\left(2 - \frac{4 \ln q_1 \cdots q_{s-1}}{\ln N}\right) \leq F(1.996) = \frac{2e^r}{1.996} \quad (35)$$

$$W(N^{\frac{1}{4} - \varepsilon_1}) = (1 + o(1)) 8e^{-r} \frac{C_N}{\ln N} \quad (36)$$

我们容易得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S_s &< (1 + \varepsilon_3) 8 \left(\frac{0.00602088}{1.996} \right) \alpha^{r-2} \beta^{s-1} C_N \frac{N (\ln \ln N)^{r+s-3}}{(\ln N)^2} \\ &< (0.0241318) \alpha^{r-2} \beta^{s-1} C_N \frac{N (\ln \ln N)^{r+s-3}}{(\ln N)^2} \end{aligned} \quad (37)$$

由 (11)、(27)、(32)、(37) 式即得所求下界为

$$> (0.005) \alpha^{r-2} \beta^{s-1} C_N \frac{N (\ln \ln N)^{r+s-3}}{(\ln N)^2}$$

这证明了 $r \geq 3, s \geq 2$ 的情形, $r=1$ 或 $2, s=2$ 的情形同法可证, 而 $s=1$ 的情形 [2] 中已经证明. 这就完成了定理 1 的证明.

关于孪生素数问题可有与定理 1 平行的结论, 由此即推出定理 2.

2 上界问题

现在讨论方程

$$N = q_1 \cdots q_s + p_1 \cdots p_r,$$

的解数上界问题, 对 $r=s=1$, 有熟知的经典结果 (例如见 [5]). 对 $s=1$ 且 $r \geq 1$ 的情形, 我们可以得到一个类似的结果, 而对其余情形, 由于余项估计中的困难, 需要加上限制

条件

$$q_i > \exp((\ln N)^\epsilon)$$

主要结果如下:

定理 3 方程

$$N = q_1 \cdots q_s + p_1 \cdots p_r, \quad 2 \mid N$$

的满足条件

$$q_i > \exp((\ln N)^\epsilon), \quad 1 \leq i \leq s, \quad 0 < \epsilon < 1$$

的解数为 $\ll C_N N (\ln N)^{-2} (\ln \ln N)^{r+s-2}$, 若 $s=1$, 则限制条件 $q > \exp((\ln N)^\epsilon)$ 可以去掉.

先来叙述若干引理.

引理 2 设方程

$$\left. \begin{aligned} N &= q_1 \cdots q_s + p_1 \cdots p_r, \\ q_i &> \exp((\ln N)^\epsilon), \quad 0 < \epsilon < 1 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

的解数为 $M(s, r)$, 则

$$M(s, r) \leq s! r! (M_1(s, r) + M_2(s, r) + M_3(s, r)) \quad (39)$$

其中 $M_1(s, r)$ 为方程

$$\left. \begin{aligned} N &= q_1 \cdots q_s + p_1 \cdots p_r, \\ q_i &> \exp((\ln N)^\epsilon) \\ q_1 \cdots q_s &\leq N^{9/20}, \quad p_1 \cdots p_r > N^{9/20} \\ q_1 &\leq \cdots \leq q_s, \quad p_1 \leq \cdots \leq p_r \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

的解数, $M_2(s, r)$ 为方程

$$\left. \begin{aligned} N &= q_1 \cdots q_s + p_1 \cdots p_r, \\ q_i &> \exp((\ln N)^\epsilon) \\ q_1 \cdots q_s &> N^{9/20}, \quad p_1 \cdots p_r > N^{9/20} \\ q_1 &\leq \cdots \leq q_s, \quad p_1 \leq \cdots \leq p_r \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

的解数, $M_3(s, r)$ 为方程

$$\left. \begin{aligned} N &= q_1 \cdots q_s + p_1 \cdots p_r, \\ q_i &> \exp((\ln N)^\epsilon) \\ q_1 \cdots q_s &> N^{9/20}, \quad p_1 \cdots p_r \leq N^{9/20} \\ q_1 &\leq \cdots \leq q_s, \quad p_1 \leq \cdots \leq p_r \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

的解数. 且在此三种情形皆有常数 $\delta \in (0, 1)$ 使

$$q_1 \cdots q_{s-1} \leq N^{1-\delta}$$

证明 N 充分大时前一结论显然成立. 在情形 (40) 易见可取 $\delta = 11/20$. 在情形 (41) 与 (42) 中, 易见可取 $\delta = 9/(20s)$.

引理 3 设 \mathcal{A} 为一给定序列, \mathcal{P} 为一素数组成的筛集, $m \geq 1$ 的无平方因子整数, $(m, \mathcal{P}) = 1$. 则有

$$\sum_{\substack{p \geq z \\ p \in \mathcal{P}}} S(\mathcal{A}_{i_m}; \mathcal{P}, p) \leq S(\mathcal{A}_m; \mathcal{P}, z)$$

证 这是 Бухштаб 恒等式的简单推论.

定义

$$\mathcal{A}^{(1)} = \{a = N - bq : a > N^{9/20}, b \in \mathcal{E}^{(1)}\}$$

$$\mathcal{E}^{(1)} = \{b = q_1 \cdots q_{r-1} : q_1 \leq \cdots \leq q_{r-1}, b \leq N^{9/20} \text{ 且 } q_i > \exp((\ln N)^{\epsilon})\}$$

$$\mathcal{A}^{(2)} = \{a = N - bq : a > N^{9/20}, b \in \mathcal{E}^{(2)}\}$$

$$\mathcal{E}^{(2)} = \{b = q_1 \cdots q_{r-1} : q_1 \leq \cdots \leq q_{r-1}, b \leq N^{1-9/(20\epsilon)}, q_i > \exp((\ln N)^{\epsilon})\}$$

$$\mathcal{A}^{(3)} = \{a = N - bq : a \leq N^{9/20}, b \in \mathcal{E}^{(2)}\}$$

$$\mathcal{P}_N = \{p : p \nmid N\}, \mathcal{P}_N(r_1, \dots, r_s) = \{p : p \in \mathcal{P}_N, p \nmid r_1 \cdots r_s\}$$

又对 $j=1, 2, 3$ 及 $k=1, \dots, r$ 定义,

$$\sum^{(j)}(k) = |\{a : a \in \mathcal{A}^{(j)}, a = p_1 \cdots p_k, p_1 < \cdots < p_k, (a, N) = 1\}|$$

$$\sum^{(j)} = |\{a : a \in \mathcal{A}^{(j)}, a = p_1 \cdots p_r, \mu(a) = 0, p_i \leq \cdots \leq p_r, (a, N) = 1\}|$$

引理 4 对 $1 \leq j \leq 3$ 及 $1 \leq k \leq r$ 有

$$\sum^{(j)}(k) \ll C_N N (\ln N)^{-2} (\ln \ln N)^{k+r-2}$$

证明 仅对 $j=1$ 给出证明, 其余类似可证.

$k=1$ 时直接由引理 3 有

$$\begin{aligned} \sum^{(1)}(1) &\leq \sum_{p_1 > N^{9/20}} S(\mathcal{A}_{p_1}^{(1)}; \mathcal{P}_N(p_1), p_1) \leq S(\mathcal{A}^{(1)}; \mathcal{P}_N, N^{9/20}) \\ &\leq S(\mathcal{A}^{(1)}; \mathcal{P}_N, N^{\frac{1}{2}-\epsilon}) \end{aligned} \quad (43)$$

注意到

$$\begin{aligned} X(\mathcal{A}^{(1)}) &= \sum_{b \in \mathcal{E}^{(1)}} \chi(N/b) \ll \frac{N}{\ln N} \left(\sum_{q < N^{9/20}} \frac{1}{q} \right)^{\epsilon-1} \\ &\ll N (\ln N)^{-1} (\ln \ln N)^{(\epsilon-1)(\epsilon-1)} \end{aligned} \quad (44)$$

由 Selberg 上界筛法立得 $k=1$ 时结论成立.

$k \geq 2$ 时易有

$$\begin{aligned} \sum^{(1)}(k) &\leq \sum_{\substack{p_1 < \cdots < p_k \\ p_1 \cdots p_k > N^{9/20} \\ p_1 \cdots p_{k-1} < N^{9/20}}} S(\mathcal{A}_{p_1 \cdots p_k}^{(1)}; \mathcal{P}_N(p_1, \dots, p_k), p_k) \\ &\leq \sum^{(1)}(k) + \sum^{(2)}(k) \end{aligned} \quad (45)$$

其中

$$\sum^{(1)}(k) = \sum_{\substack{p_1 < \cdots < p_{k-1} \\ p_1 \cdots p_{k-1} < N^{9/20}}} S(\mathcal{A}_{p_1 \cdots p_{k-1}}^{(1)}; \mathcal{P}_N(p_1, \dots, p_{k-1}), N^{9/(20k)})$$

$$\sum_{i_2^{(1)}} (k) = \sum_{\substack{p_1 < \dots < p_{k-1} < (N / (p_1 \dots p_{k-2}))^{\frac{1}{2}} \\ p_1 \dots p_{k-1} > N^{9/20}}} S(\mathcal{A}_{p_1 \dots p_{k-1}}^{(1)}; \mathcal{P}_N(p_1, \dots, p_{k-1}), p_{k-1})$$

这里用到引理 3, 又在转化为 $\sum_{i_1^{(1)}} (k)$ 中用到条件

$$p_k^k > p_1 \dots p_k > N^{9/20}$$

在转化为 $\sum_{i_2^{(1)}} (k)$ 时用到条件

$$p_1 \dots p_{k-1}^2 < p_1 \dots p_k < N$$

若 $k=2$, 则分解结束, 若 $k \geq 3$, 则可如上对 $\sum_{i_2^{(1)}} (k)$ 续行分解. 于是经 $k-1$ 步后即得

$$\sum_{i_1^{(1)}} (k) \leq \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{m_1^{(1)}} (k) + \sum_{k-1,2}^{(1)} (k) \quad (46)$$

这里

$$\sum_{m_1^{(1)}} (k) = \sum_{\substack{p_1 < \dots < p_{k-m} \\ p_1 \dots p_{k-m} < N^{9/20}}} S(\mathcal{A}_{p_1 \dots p_{k-m}}^{(1)}; \mathcal{P}_N(p_1, \dots, p_{k-m}), N^{9/(20(k-m+1))})$$

$$\sum_{k-1,2}^{(1)} (k) = \sum_{N^{9/20} < p_1 < N^{1/k}} S(\mathcal{A}_{p_1}^{(1)}; \mathcal{P}_N(p_1), p_1)$$

先来估计 $\sum_{k-1,2}^{(1)} (k)$. 当 $k \geq 3$ 时易见 $\sum_{k-1,2}^{(1)} (k) = 0$. 对 $k=2$ 有 (见 $\sum_{i_1^{(1)}} (1)$ 的估计)

$$\begin{aligned} \sum_{i_2^{(1)}} (2) &= \sum_{N^{9/20} < p < N^{\frac{1}{2}}} S(\mathcal{A}_p^{(1)}; \mathcal{P}_N(p), p) \leq S(\mathcal{A}^{(1)}; \mathcal{P}_N, N^{9/20}) \\ &\ll C_N N (\ln N)^{-2} (\ln \ln N)^{\epsilon-1} \end{aligned} \quad (47)$$

现在对 $1 \leq m \leq k-1$ 应用 [5] 定理 8.3 的 (4.1) 式来估计 $\sum_{m_1^{(1)}} (k)$, 在该定理中取

$$q = p_1 \dots p_{k-m}, \quad \omega(p) = \frac{p}{p-1} (p \in \mathcal{P}_N(p_1, \dots, p_{k-m}, q_1, \dots, q_{l-1}))$$

$$X = X(\mathcal{A}^{(1)}), \quad z = N^{9/(20(k-m+1))}, \quad \xi^2 = N^{\frac{1}{2}} / (p_1 \dots p_{k-m} \ln^c N)$$

$c > 0$ 对一待定常数. 所得余项可分为两部分, 第一部分与 §1 中估计 S_1 余项中的 R_1 相似, 适当选取 $c > 0$ 并用潘一丁推广的均值定理即可给出需要的估计. 第二部分与 §1 估计 R_2 方法类似可得合适的上界. 而

$$W(x) \ll C_N / \ln N$$

$$F(\ln \xi^2 / \ln z) \leq F(\ln N^{\frac{1}{2} - \frac{\epsilon'}{20}} / \ln N^{9/(20(k-m+1))}) \ll 1$$

(其中 $\epsilon' > 0$ 是一个充分小的实数). 于是即得

$$\sum_{m_1^{(1)}} (k) \ll C_N N (\ln N)^{-2} (\ln \ln N)^{\epsilon-1} \sum_{p_1 \dots p_{k-m} < N^{9/20}} \frac{1}{(p_1-1) \dots (p_{k-m}-1)}$$

$$\ll C_N N (\ln N)^{-2} (\ln \ln N)^{r+k-n-1} \quad (48)$$

将以上所得代入 (46) 式即得

$$\sum_{k=1}^{r-1} (1) \ll C_N N (\ln N)^{-2} (\ln \ln N)^{r+k-2}$$

为了估计 $\sum (1)$, 可以将其中的 a 按照不同素因子个数同为 k ($1 \leq k \leq r-1$) 的归为一组, 对每一组应用上一引理的方法的进行估计, 不难得到

引理 5 对 $1 \leq j \leq 3$ 有

$$\sum (1) \ll C_N N (\ln N)^{-2} (\ln \ln N)^{r+j-3}$$

由引理 4、引理 5 易见对 $j=1, 2, 3$ 有

$$M_j(s, r) \ll C_N N (\ln N)^{-2} (\ln \ln N)^{r+j-2}$$

于是 $M_j(s, r)$ 也有同样估计, 定理 3 得证。

这里要说明的是, 从证明中容易看出, 仅当 $s \geq 2$ 时, 估计 $\sum (1)(k)$ 及 $\sum (1)$ 的余项中形如

$$R_2^{(j)} = \sum_{\substack{l < N^{\frac{1}{2}} \\ (l, N) = 1}} \frac{\mu^2(l) 3^{v(l)}}{\varphi(l)} \sum_{\substack{b \in E^{(j)} \\ (b, l) > 1}} \text{li}(N/b) \quad (49)$$

的和时才要用到 $q_l > \exp((\ln N)^s)$ 这一限制条件, 而当 $s=1$ 时, (49) 式右方过 b 的和并不出现, 因而不需要 $q_l > \exp((\ln N)^s)$ 这一限制. 从而 $s=1$ 时定理 3 可以改述如下:

定理 3* 方程

$$N = q + p_1 \cdots p_r \quad (r \geq 1)$$

的解数

$$\ll C_N N (\ln N)^{-2} (\ln \ln N)^{r-1}$$

3 其它应用举例

解析数论中一个重要问题是所谓殆素数的分布问题. 以 P_r 表示至多有 r 个素因子组成的殆素数, \mathcal{A} 表一有限序列, 我们常要估计集合

$$\{a: a \in \mathcal{A}, a = P_r\}$$

中元素个数的下界或上界. 例如多项式表殆素数问题就是一个重要的问题, 在 [5] 中曾用两章篇幅详细讨论了用加权筛法给出下界估计的问题.

我们定义 $P_{r_1}^{r_2}$ ($1 \leq r_1 < r_2$) 为适合 $r_1 \leq v(P_{r_1}^{r_2}) \leq r_2$ 的一个殆素数, 当 $r_1=1$ 时 $P_{r_1}^{r_2}$ 即为上述形式的殆素数 P_{r_2} , 于是讨论形如 $P_{r_1}^{r_2}$ 的殆素数在各种序列中的分布, 乃是一个自然的推广, 显然, 这种问题皆可用本文所述的方法加以研究. 例如 [5] 中关于线性或非线性加权筛的结果均可给出相应的推广. 限于篇幅, 这里不再详述我们的结果.

注: 数值积分均是在 TI-59 计算器上完成的.

参 考 文 献

- [1] Misch, R. J., *J. Reine Ang. Math.*, 233 (1968), 1—27.
- [2] Zhang Mingyao, *Kexue Tongbao*, 33 (1988), 1238—1240.
- [3] Chen Jingrun, *Sien. Sinica*, 16 (1973), 157—176.
- [4] 潘承洞、潘承彪, 哥德巴赫猜想, 科学出版社, 1981, 第九章.
- [5] Halberstam, H. & Richert, H.-E., *Sieve Methods*, Academic Press, London, 1974, Chap. 8—11.
- [6] Ng Eugene K.-S., *Arch. Math.*, 42 (1984), 430—438.

Some New Applications of the Mean-Value Theorem

Zhang Mingyao

(Department of Mathematics)

Abstract

In this paper, applying an elementary device and the well-known mean-value theorems to a more general Goldbach problem, the author obtain some new results on the number of the solutions of an equation of Goldbach type. For various sieve problems about the distribution of almost-primes our method is still available. For example, our method could lead to a similar generalization of the classical results on weighted sieve.

Key words: sieve method, Goldbach Conjecture, almost-prime, mean-value theorem.

非晶态软磁合金 $(\text{Fe}_{1-y}\text{Co}_y)_{82}\text{Cu}_{0.4}\text{Si}_{4.4}\text{B}_{13.2}$ 的结构弛豫

王根苗 陈慧余

(物理系)

摘 要

通过减落和电阻率的测量, 研究非晶态合金 $(\text{Fe}_{1-y}\text{Co}_y)_{82}\text{Cu}_{0.4}\text{Si}_{4.4}\text{B}_{13.2}$ ($y=0, 0.01, 0.02, 0.05, 0.10$) 的结构弛豫。在 $25\sim 350^\circ\text{C}$ 温区内, 所有合金淬态和经退火处理后的弛豫谱都有两个峰。第一和第二峰的峰位温度或最可几激活能值 Q_m 对Co含量(y)有不同的依赖关系。在弛豫谱第二峰出现的温区内, 电阻率与温度的关系偏离线性, 对 $y<0.05$ 的合金还有小峰出现。

关键词: 非晶态, 减落, 磁阻率, 结构弛豫。

1 引言

在非晶态物理和磁性材料领域内, 非晶态磁性合金的结构弛豫是理论以及应用研究的重要课题。非晶态样品在低于晶化温度的温度下退火处理后, 利用X射线衍射技术观测其径向分布函数的变化, 可以直接获取结构弛豫的信息^[1-2]。除此之外, 通过测量电阻率、磁化率和居里点等结构灵敏量的变化, 也可间接地得到有关信息^[3-6]。其中, 对磁性非晶态材料的结构弛豫研究, 日益增多地采用磁后效观测^[7-9]。

本工作通过测量减落 (disaccommodation), 一种磁后效 (指退磁后, 起始磁化率随时间减小的效应) 以及电阻率与温度的依赖关系, 并参照穆斯堡尔谱测试结果, 分析了具有优良软磁性能的非晶合金 $(\text{Fe}_{1-y}\text{Co}_y)_{82}\text{Cu}_{0.4}\text{Si}_{4.4}\text{B}_{13.2}$ ($y=0, 0.01, 0.02, 0.05, 0.10$) 的结构弛豫机制。

2 实验

实验中所用的样品为宽 $1\sim 2\text{mm}$ 、厚 $30\sim 35\mu\text{m}$ 的薄带, 采用单轧辊急冷法制备。X射

线衍射结果证实它们是非晶态材料。用自制的减落自动测试仪^[1]记录等温减落曲线。等幅交变磁化场的工作频率为670Hz，减幅退磁场持续时间1秒，重复周期200秒。减落幅度定义为

$$D(t_2, T) = [\chi(t_1, T) - \chi(t_2, T)] / \chi(t_1, T) \quad (1)$$

其中， $t_1 = 1$ 秒， t_2 表示退磁后的时间， T 表示温度， χ 为起始磁化率。根据多个实验记录的等温减落曲线，易求得等时弛豫谱，即常用的 $\Delta r/r - T$ 曲线，它特别适合于分离多时间弛豫过程。上面提到的 r 为磁阻率，是起始磁化率 χ 的倒数， $r = 1/\chi$ ，因此

$$\Delta r/r = [r(t_2, T) - r(t_1, T)] / r(t_1, T) \quad (2)$$

本文中给出的弛豫谱全是等时弛豫谱。

用四端引线法测量不同温度下样品的相对电阻率 $\Delta\rho/\rho_0$ ， $\Delta\rho = \rho(T) - \rho_0$ ， ρ_0 为室温电阻率。温度变化范围：室温到580℃升温速率约为3℃/min，电阻率的测量精度优于0.1%。

3 实验结果

非晶态合金 $(\text{Fe}_{1-y}\text{Co}_y)_{82}\text{Cu}_{0.5}\text{Si}_{1.5}\text{B}_{1.5}$ 的等时弛豫谱示于图1。从图中可以看

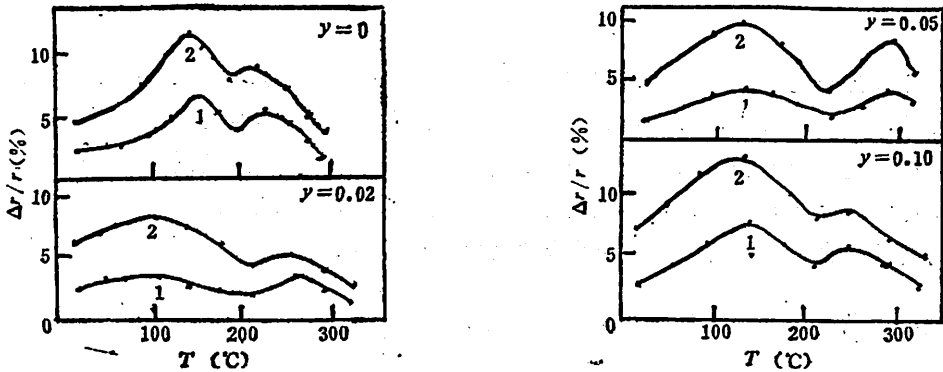


图1 非晶态 $(\text{Fe}_{1-y}\text{Co}_y)_{82}\text{Cu}_{0.5}\text{Si}_{1.5}\text{B}_{1.5}$ 的等时弛豫谱
1 $t_2 = 12$ 秒，2 $t_2 = 200$ 秒，($t_1 = 1$ 秒)

出：合钴量不同的各个样品 ($y = 0, 0.02, 0.05, 0.10$)，在室温到350℃的温度区间内都有两个弛豫峰。除 $y = 0.02$ 的合金外，第一峰峰位对应的温度 T_{D1} 与 y 的关系不十分明显。对样品成分相同但 t_2 不同的弛豫谱而言， $(T_{D1})_{200s} < (T_{D1})_{12s}$ 。至于第二峰峰位对应的温度 T_{D2} ，其基本上不随 t_2 变化，但与钴含量的多少密切相关。 y 从0增加到0.05时， T_{D2} 从215℃增大到290℃，当 y 进一步增加到0.10时 T_{D2} 却下降到234℃。

实验发现，样品经真空退火处理后，其等时弛豫谱发生变化。 y 为0.05和0.10两种合金的测试结果示于图2。退火温度分别为130℃和230℃，等温退火时间为2.5小时。经较低的130℃退火后，弛豫幅度 $\Delta r/r$ 明显下降，但峰位基本不变。提高退火温度到230℃，第一峰峰位向高温方向移动。对 $y = 0.05$ 的合金， T_{D1} 从145℃升高到169℃，而 $y = 0.10$ 的合金则升高到更高的178℃。退火处理对第二峰峰位的影响没有第一峰显著， T_{D2} 仅略有增高，但该峰的幅度明显下降。就弛豫幅度 $\Delta r/r$ 而言，我们从图2中还可以看出：当测量温度低于淬态样品的 T_{D1} 时，130℃退火处理后的弛豫幅度 $(\Delta r/r)_{130^\circ\text{C}}$ 不小于230℃退火处理后的弛豫幅度 $(\Delta r/r)_{230^\circ\text{C}}$ ，即 $(\Delta r/r)_{130^\circ\text{C}} \geq (\Delta r/r)_{230^\circ\text{C}}$ ；但当测试温度高于淬态样品的 T_{D1} 时，

情况刚好相反, $(\Delta r/r)_{130^\circ\text{C}} < (\Delta r/r)_{230^\circ\text{C}}$ 。

图3给出了上述非晶态合金的电阻率随温度变化曲线。温度高于400°C时,电阻率曲线有两处明显下降,这对应着晶化过程的两个阶段。有关晶化过程和晶化产物的详细分析已经报导^[1,2]。引起兴趣的是,在远低于晶化温度的温区,主要指等时弛豫谱的第二峰出现的温区,电阻率与温度关系偏离线性。对 $y < 0.05$ 的合金,还有可分辨的小峰出现,峰位温度随钴含量增加逐渐降低。

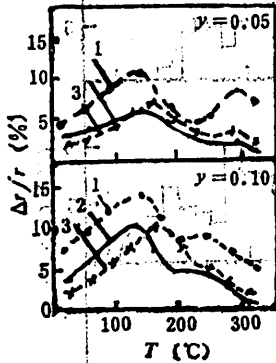


图2 $(\text{Fe}_{1-y}\text{Co}_y)_{82}\text{Cu}_{0.4}\text{Si}_{1.4}\text{B}_{1.4}$ 的等时弛豫谱
1 淬态; 2 130°C退火处理;
3 230°C退火处理。
($t_1 = 1$ 秒, $t_2 = 200$ 秒)

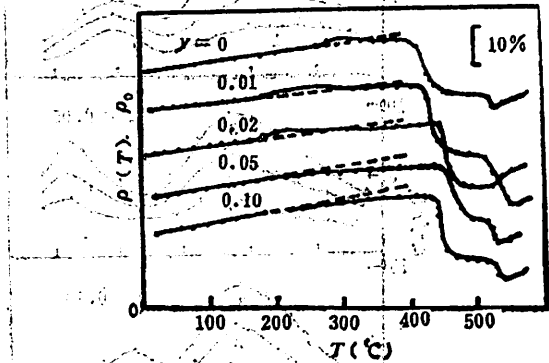


图3 非晶合金 $(\text{Fe}_{1-y}\text{Co}_y)_{82}\text{Cu}_{0.4}\text{Bi}_{1.4}\text{B}_{1.4}$ 相对电阻率随温度变化曲线
(ρ_0 为室温电阻率)

4. 弛豫谱的拟合和分析

被测非晶态软磁合金, 具有较大的磁致伸缩系数($\lambda_s > 3 \times 10^{-5}$), 磁弹性能对磁畴结构有决定性影响, 以 180° 畴为主。起始磁化过程也以 180° 壁移过程为主。磁阻率 r 标志壁移阻力。样品经退磁后, r 为温度和时间函数^[1,3]:

$$r(t, T) = r_0 + r_n [1 - \exp(-t/\tau)] \quad (3)$$

其中, 弛豫时间 $\tau = \tau_0 \exp(Q/kT)$, Q 为激活能, k 为波尔兹曼常数, τ_0 为一常数。

实验测得的弛豫谱(图1, 图2)对应多弛豫时间过程。我们参照 Kronmüller^[9] 等采用的方法拟合实验谱。弛豫时间的分布函数 $P(\tau)$ 近似由 n 个箱型的激活能分布函数表示。第 i 箱的激活能上, 下限分别为 Q_{i+1} 和 Q_i , 箱宽 ΔQ 为 Q_{i+1} 和 Q_i 的差值。磁阻率和退磁后经历时间的关系为

$$r(t, T) = r(\infty) + \sum_{i=1}^n \Delta r_i \frac{E_i(t/\tau_{i,2}) - E_i(-t/\tau_{i,1})}{\ln(\tau_{i,2}/\tau_{i,1})} \quad (4)$$

其中, $\tau_{i,1} = \tau_0 \exp(Q_i/kT)$, $\tau_{i,2} = \tau_0 \exp(Q_{i+1}/kT)$, Δr_i 为相应于第 i 箱的弛豫幅度。假设对 n 个箱, τ_0 的取值相等, 则

$$E_i(-t/\tau) = - \int_{t/\tau}^{\infty} e^{-u} / u du \quad (5)$$

激活能分布函数为

$$P(Q) = \Delta r_i / \sum_{i=1}^n \Delta r_i \quad (6)$$

本文取 $n = 15$ ，并假设 n 个箱等宽，而且任一箱对应的等时弛豫谱都具有洛伦兹线型。

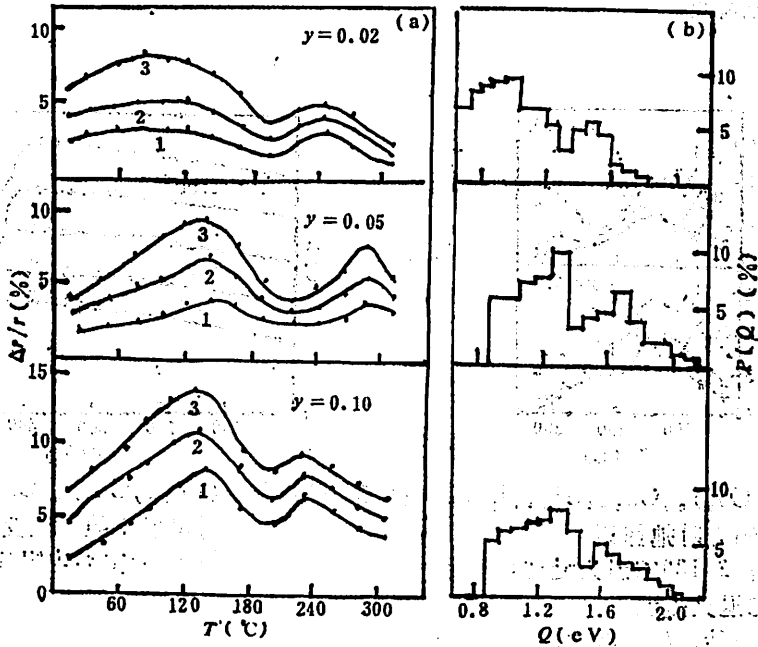


图 4 非晶合金 $(\text{Fe}_{1-y}\text{Co}_y)_{22}\text{Cu}_{0.5}\text{Si}_{1.5}\text{B}_{1.5}$ 等时弛豫谱的拟合
 (a) · 实验点，— 计算谱；1 $t_2 = 12$ 秒，2 $t_2 = 60$ 秒，3 $t_2 = 200$ 秒。
 (b) 激活能谱。

拟合结果示于图 4。 τ_0 值，箱宽 ΔQ ，以及最可几激活能值 Q_m ，列于表 1。

表 1 拟合计算得到的有关参数

y	τ_0 (s)	ΔQ (eV)	Q_m (eV)
0.02	7.7×10^{-14}	0.075	1.06 1.51
0.05	7.7×10^{-14}	0.087	1.32 1.67
0.10	7.7×10^{-14}	0.075	1.33 1.55

5. 结果分析

非晶态合金的电阻理论^[14]指出：当样品温度远高于德拜温度 θ_D 时，电阻率可用下式描述：

$$\rho(T) = b + dT/\theta_D \quad (7)$$

其中， b ， d 为常数。也就是说，高温阶段，电阻率与温度成正比。显然，我们的实验结果与

这一理论不完全相符。究其原因，我们认为这是由于结构弛豫造成的。实际上，从第二弛豫峰出现的温区内，电阻率与温度的关系偏离线性这一事实出发，再参照对本系列非晶合金的穆斯堡尔谱分析结果^[12]，我们可以对在此温区内发生的结构弛豫做如下解释：

伴随着间隙B原子的再分布，非晶合金的短程有序态发生变化，逐渐出现富Fe、Co和富Fe、B的微区，孕育着晶化产物： α -(Fe,Co)、 Fe_3B 和 Fe_2B 相的形成。本系列非晶合金淬态和经350℃退火2小时处理后，在室温测得的穆斯堡尔谱可为上面的论述提供佐证。拟合穆斯堡尔谱所得到的超精细磁场分布函数示于图5。淬态样品的超精细磁场接近高斯型分布，而经350℃退火后，单一的高斯型分布分解，最可几状态对应的超精细磁场值向晶态相 α -(Fe,Co)、 Fe_3B 和 Fe_2B 趋近。

根据以上分析，可对在第二弛豫峰出现的温区内，电阻率与温度关系偏离线性作如下说

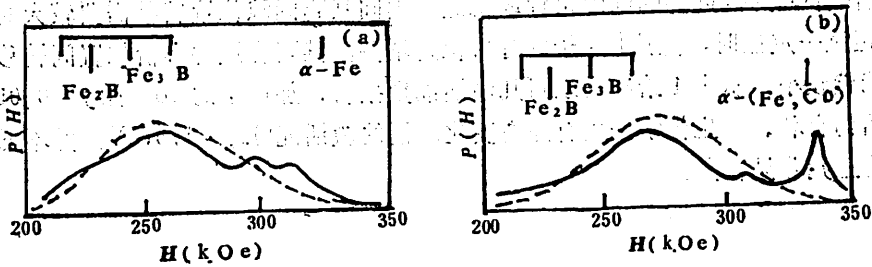


图5 非晶合金 $(Fe_{1-y},Co)_yCu_{0.4}Si_{0.2}B_{1.2}$ 的超精细磁场分布函数
(a) $y=0$; (b) $y=0.10$, 虚线表示淬态, 实线为350℃退火2小时。

明：在非晶合金内出现弥散的富Fe、Co或富Fe、B的微区，这些微区使电阻率增大，而微区的长大或连通又导致电阻率减小。在非晶合金中发生这样的化学短程有序态的变化，其结构和成分的不均匀度增加，使电阻率有反常增值。随着温度的升高，电阻率的温度系数增大，可归之于上述微区数目的增多。当温度超过一个临界值后，电阻率的温度系数又随温度的升高而减少，甚至可能从正值变到负值。这是因为上述微区长大或连通，使合金的亚微观均匀度提高，导致平均电阻率下降。总之，上述非晶合金的电阻率与温度关系偏离线性，与结构弛豫紧密相关。

本文所研究的非晶态合金，虽然含Fe、Co、Cu三种过渡金属以及Si和B两种类金属元素，是一种多元合金，然而其弛豫特性与其它简单的二元、三元非晶合金相似^[11]，尤其是等时弛豫谱的第一峰，其线型、峰宽和峰位温度都很接近。在非晶态合金中，结构弛豫现象可用两种机制解释：(i) 结构缺陷的崩塌；(ii) 类金属B原子在不等价间隙位置的再分布。前者具有不可逆的退火效应，即某一种结构缺陷的崩塌一旦发生，与之相应的弛豫现象将基本消失，后者则有可逆和不可逆两种过程。图2给出的结果： $(\Delta r/r)_{\text{淬态}} > (\Delta r/r)_{130^\circ\text{C退火}} > (\Delta r/r)_{230^\circ\text{C退火}} (T < T_{D1})$ ，即弛豫幅度随退火处理温度升高而减小，这一现象可用缺陷崩塌的机制解释。同样，由于在退火中，发生了缺陷崩塌或其它不可逆的弛豫过程，使合金的结构稳定度提高，需要较大的激活能才能进行最可几的原子再分布过程，导致第一峰峰位温度随退火温度升高向高温方向移动。值得注意的是在 $T > T_{D1}$ 的温区内，弛豫谱的退火效应与 $T < T_{D1}$ 时不同： $(\Delta r/r)_{130^\circ\text{C退火}} < (\Delta r/r)_{230^\circ\text{C退火}}$ ，这显然不能用缺陷崩塌机制说明。从图2易见，上述“反常”在 $y=0.10$ 的合金中表现得比 $y=0.05$ 的合金更为明显。由此我

们认为：合金经 230°C 退火处理，由于类金属B原子在不等价的间隙位置再分布，产生较大的感生各向异性，含Co量多的合金，其感生各向异性也相应地增大，这就使其有较大的弛豫幅度。

在室温— 350°C 间，并非任何成分的非晶合金都有第二弛豫峰。本系列合金不但有，而且其峰的形状和位置受Co含量影响较明显，峰位温度和最可几激活能 Q_m （详见表1）与Co含量虽然无单调的变化关系，但少量加Co，第二峰峰位温度随Co含量增加而升高的趋势是清楚的，当Co含量超过一定值时，峰位温度又下降。最可几激活能 Q_m 随 y 的变化趋势与峰位温度相同。对上述现象可作如下解释：在被测非晶合金中，B原子可以在Fe-Fe，Fe-Co，Co-Co，Fe-Cu等原子对之间，也可以在一种或几种过渡金属围成的多边形或多面体的间隙内。B原子在上述不等价间隙位置的再分布方式有多种多样。Co含量少的合金中，若B原子处在有Co为最近邻的间隙位置最稳定，则向其它间隙位置转移需要较大的激活能。当Co含量超过一定值时，上述B原子的等价位置增多，其可在近邻等价位置间转移，这样所需的激活能就较小。从表1给出的最可几激活能数据看，加适量的Co，如 $y=0.05$ ，对稳定非晶合金结构有利。发生化学短程有序态变化所需的激活能 $Q_m=1.67\text{eV}$ ，并不低于常见的其它成分的三元非晶合金。

6 结论

$(\text{Fe}_{1-y}\text{Co}_y)_{82}\text{Cu}_{0.4}\text{Si}_{1.4}\text{B}_{1.2}$ 系非晶态合金在室温到 350°C 之间，都有两个弛豫峰。第一弛豫峰宽大，对成分不敏感，以缺陷崩塌和B原子再分布引起的拓朴短程有序变化为主。经退火处理，可降低弛豫幅度和提高最可几激活能。第二弛豫峰对应B原子在不等价间隙位置再分布所引起的化学短程有序态变化，这种过程所需的激活能对成分敏感，加适量的Co对稳定合金的非晶态结构有利。上述化学短程有序态的变化，导致电阻率与温度的关系偏离线性。

参 考 文 献

- [1] Egami, T. and Ihikwa, T., *Mater. Sci. Eng.*, 32(1978), 293.
- [2] Laridjani, M., Sadoc, J.F. and Krishnan, R., *J. of Non-Cryst. Solid*, 61 & 62(1984), 367.
- [3] Katayama, T., Nishihara, Y., Miyazaki, M. and Ogawa, S., *J. M. M. M.*, 31-34(1983), 1561.
- [4] Chen H.S., Coleman, E., *Appl. Phys. Lett.*, 28(1976), 245.
- [5] Liebermann, H. H., Graham, C. D. et al., *IEEE Trans. on Mag.*, MAG-13(1977), 1541.
- [6] Stubicar, M., *J. Mater. Sci.*, 14(1979), 1245.
- [7] Allia, P., Mazzetti, P. and Vinai, F., *J.M.M.M.*, 19(1980), 281.
- [8] Miyazaki, T., Takahashi, M. and Hisatake, K., *J.M.M.M.*, 31-34(1983), 1583.
- [9] Kronmuller, H., Moser, N. and Rettenmeier, F., *IEEE Trans. on Mag.*,

MAG-20(1984), 1388.

[10] 陈慧余、王根苗, 全国第二届磁测量仪器学术交流会论文集, 1986年, 牡丹江, 59.

[11] Moser, N. and Kronmuller, H., *J.M.M.M.*, 19(1980), 275.

[12] 陈慧余、张道元等, 金属学报, **B**(1988), 17.

[13] 戴礼智, 金属磁性材料, 上海人民出版社, 1973年, p304.

[14] Nagel, S.R., *Phys. Rev. B.*, 16(1977), 1694.

Structural Relaxation of Soft Magnetic Amorphous Alloys



Wang Genmiao Chen Huiyu

(Department of Physics)

Abstract

Structural relaxation of $(\text{Fe}_{1-y}\text{Co}_y)_{82}\text{Cu}_{0.4}\text{Si}_{4.4}\text{B}_{13.2}$ amorphous alloys ($y=0, 0.01, 0.02, 0.05, 0.1$) is studied by measuring disaccommodation and resistivity. There are two peaks of relaxation spectra for all alloys when they are quenched and after annealing treatment in the temperature range $25^\circ\text{C} - 350^\circ\text{C}$. The Co constituent y dependence of peak temperature or the most probable value for the activation energy Q_m , is different at the first and the second peaks. The deviation of linear temperature dependence of the resistivity and a little peak (for $y < 0.05$ alloys) take place in the same temperature range with the second peak of the structural relaxation spectrum.

Key words: amorphous, disaccommodation, relaxation, structural relaxation.

旋转流不稳定性的一个数值研究

夏 南

(近代力学系)

摘 要

本文研究了在两个同心圆管间具有轴向流动的无粘不可压旋转流的稳定性问题。分析了 Ludwig 在窄缝条件下导出的稳定性判据;采用有限差分数值方法计算了在各种条件下的时间增长率;验证了 Ludwig 的稳定性判据,并指出:当将结果推广到宽缝和不同的速度剖面时,判据将会产生某些误差。

关键词: 稳定性, 湍流, 旋涡。

1 引言

流动稳定性是流体力学中一个很重要的理论性问题,长期以来受到很多理论研究者关注。最近二十年来很多人研究旋转流的稳定性,并且取得了不少有用的结果,尤其是给出了一些判别流动不稳定性的判据,旋转流稳定的研究不仅有着理论上的意义,在应用上也有着很强的背景。例如喷气飞机发动机燃烧室内流态的分析,飞机尾涡运动和破碎机理的研究都与其有关。

早在 1916 年 Rayleigh^[1]就给出了旋转流的第一个不稳定性判据。他用物理和力学的分析研究了无轴向流的不可压无粘旋转流的轴对称扰动的不稳定性,给出了判别不稳定性的充分和必要条件。在 1962 年 Howard 和 Gupta^[2]给出了带有轴向流动的旋转流非轴对称扰动的稳定性的一个充分条件,但这一条件不是必要的。Ludwig^[3-5]也研究这一问题。他假设流动是在两个同心圆管之间,在窄缝条件下,首先导出对特殊扰动方向即 $\gamma' = 0$ 时的稳定性判据;稍后,又给出对任意 γ 时流动稳定性的一个充分必要条件。虽然结果是在窄缝条件下导出的,他和 Schlichting^[6]都认为这一结果可以推广到宽缝。Leibovich^[7]关于飞机尾涡流场稳定性的判据本质上与上述判据是一样的。

Lessen^[8]和 Duck^[9]用不同的数值方法分别研究了飞机尾涡的稳定性问题,但它们仅给出了时间增长率随各参数的变化情况。

在本文中,我们用有限差分数值方法来研究有轴向流动的无粘不可压流的稳定性问题,分别在窄缝、宽缝和不同速度剖面情况下来检验 Ludwig 的稳定性判据。

2 基本方程和稳定性判据

我们考虑在两个同心圆管间无粘不可压旋转流；轴向和旋转速度分量分别为 $U(r)$ 和 $W(r)$ 。在圆柱坐标系 (x, r, θ) 下的扰动速度分量和扰动压力分别写为

$$u = F(r) e^{i(\alpha x + n\theta - \beta t)} \quad (1a)$$

$$v = iG(r) e^{i(\alpha x + n\theta - \beta t)} \quad (1b)$$

$$w = H(r) e^{i(\alpha x + n\theta - \beta t)} \quad (1c)$$

$$p = P(r) e^{i(\alpha x + n\theta - \beta t)} \quad (1d)$$

将各扰动量代入无粘不可压流的基本方程，我们可以得到线性化扰动方程为

$$\gamma F + U'G + \frac{\alpha}{\rho} P = 0 \quad (2a)$$

$$\gamma G + \frac{2W}{r} H - \frac{1}{\rho} P' = 0 \quad (2b)$$

$$\gamma H + \left(W' + \frac{W}{r}\right) G + \frac{n}{\rho r} P = 0 \quad (2c)$$

$$\alpha F + G' + \frac{G}{r} + \frac{n}{r} H = 0 \quad (2d)$$

这里上标“'”表示对 r 的微商，并且有

$$\gamma = \alpha U - \beta + \frac{nW}{r} \quad (3)$$

从方程组 (2) 中消去 F 、 H 和 P 可以得到一个对 G 的二阶常微分方程

$$\gamma^2 (SG^*)'' - \left\{ \gamma^2 + \gamma r \left[S \left(\frac{\gamma'}{r} + \frac{2nW}{\gamma^2} \right) \right]' - \frac{2\alpha W S}{r^2} (\alpha r W' - nU') \right\} G = 0 \quad (4)$$

边界条件为

$$G(r_1) = G(r_2) = 0 \quad r_1 \leq r \leq r_2 \quad (5)$$

在上述式中

$$G^* = G' + \frac{G}{r}, \quad W^* = W' + \frac{W}{r} \quad (6)$$

$$S = \frac{r^2}{n^2 + \alpha^2 r^2}$$

假设两圆管之间的距离很窄，即 $D_r/r_0 \ll 1$ ，这里 $r_0 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ ， $D_r = r_2 - r_1$ 。因此速度分布可以近似地认为是线性的，即

$$U = U_0 + C_s(r - r_0) \quad (7a)$$

$$W = W_0 + C_\theta(r - r_0) \quad (7b)$$

因此，在式 (2) 中各项系数可近似地认为是常数，并且在连续方程中与其它项量级相比可以忽略 $\frac{G}{r}$ 项。在消去 F 、 H 和 P 后，可以得到

$$G'' - \alpha^2 \left\{ 1 + \left(\frac{n}{\alpha r_0} \right)^2 - \frac{2W_0^2/r_0^2}{\gamma^2} \left(\bar{C}_\theta + 1 - \frac{n}{\alpha r_0} \bar{C}_s \right) \right\} G = 0 \quad (8)$$

这里 \bar{C}_s 、 \bar{C}_θ 分别为无量纲的速度梯度 $\bar{C}_s = \frac{r_0}{W_0} C_s$ ， $\bar{C}_\theta = \frac{r_0}{W_0} C_\theta$ 。将上方方程连同齐次边界

条件一起求解。可以看出，在 $\gamma' = 0$ 的条件下，即在条件

$$\frac{n}{\alpha r_0} = \frac{\bar{C}_s}{1 - \bar{C}_\theta} \quad (9)$$

方程 (8) 连同齐次边界条件若有非零解，即为正弦形式解，必须满足小括号内为正。由此得到稳定条件为

$$(\bar{C}_\theta - 1)(\bar{C}_s^2 + \bar{C}_\theta^2 - 1) \geq 0 \quad (10)$$

对于任意 γ 情况，Ludwig 导出稳定条件为

$$(\bar{C}_\theta - 1)(\bar{C}_s^2 + \bar{C}_\theta^2 - 1) - \frac{2}{3}\bar{C}_s^2 \geq 0 \quad (11)$$

Ludwig 认为虽然结果是在窄缝条件下导出，对于宽缝，只要将其分成许多窄缝，将判据中的量都换成当地值，对每一窄缝利用判据，同样可以使用。若都满足稳定关系式，则整个流场稳定。只要有一个窄缝不满足，则认为整个流场不稳定。

对于第一个判据中 $\gamma' = 0$ 的条件，如果我们将坐标系取为随轴向波的相速度一起运动，基本流速度向量可以写为

$$\mathbf{q} = \left(U - \frac{\beta r}{\alpha} \right) \mathbf{e}_s + W \mathbf{e}_\theta \quad (12)$$

波速向量

$$\mathbf{k} = \nabla \phi = \alpha \mathbf{e}_s + \frac{n}{r} \mathbf{e}_\theta \quad (13)$$

这里 $\phi = \alpha x + n\theta - \beta t$ 。 $\gamma' = 0$ 的条件正是在此坐标系下扰动波传播方向垂直于基本流速度向量的情况。如果在此情况下沿用 Rayleigh 关于无轴向流的轴对称扰动（即扰动波方向垂直于旋转平面）的判据，则正好可以得出 Ludwig 的第一个判据。

3 数值方法

我们采用有限差分法来求解这一问题。首先式 (4) 可以展开为

$$G'' + \left(\frac{1}{r} + \frac{S'}{S} \right) G' + \left[\left(\frac{1}{r} - \frac{\gamma''}{\gamma} - \frac{2nW}{\gamma r^2} \right) \left(\frac{S'}{S} - \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{S} - \frac{\gamma''}{\gamma} - \frac{2nW'}{\gamma r^2} + \frac{4nW}{\gamma r^3} + \frac{2\alpha W}{\gamma^2 r} \left(\alpha W' + \frac{\alpha W}{r} - \frac{n}{r} U' \right) \right] G = 0 \quad (14)$$

上式可以简写为

$$G'' + BG' + CG = 0 \quad (15)$$

边界条件为齐次边界条件

$$G(r_1) = G(r_2) = 0 \quad (16)$$

对式 (15) 采用差分近似可以得到

$$a_{1,i} G_{i+1} + a_{2,i} G_i + a_{3,i} G_{i-1} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, I$$

这里有

$$\begin{aligned} a_{1,i} &= 1 + \frac{B_i}{2} \Delta r \\ a_{2,i} &= -2 + C_i \Delta r^2 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\alpha_{3i} = -\frac{B_i \Delta r}{2} \quad (18)$$

Δr 为径向差分步长, 由此可得到一组齐次的线性代数方程组。若要这一方程组有非平凡解, 必须系数行列式为零。由此我们就可以得到一个连系波数 α, n 和频率 β 的关系式:

$$f(\alpha, \beta, n) = 0 \quad (19)$$

这就将问题化成为微分方程的特征值问题。若给定整数 n 和实数 α , 求解频率 β , 这就是时间稳定性问题。 β 的虚部 β_i 称为时间增长率。若 $\beta_i = 0$, 流动是稳定的; $\beta_i \neq 0$, 流动则是不稳定的。反之给定实数 β 求 α 称为空间稳定性问题。在求解方程 (19) 的过程中, 我们采用二次的 Muller 求根法来求解, 因为这样可以收敛的更快些。

4 结果和讨论

首先计算了窄缝情况。取 $r_1 = 0.995, r_2 = 1.005$, 图 1 表明在 $C_\theta = 0$ 时, 时间增长率 β_i 随波数 α 的变化情况。图中取速度分布为线性速度分布如式 (7)。 $C_\theta = 0, n = 2$, 对

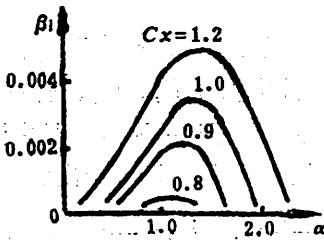


图 1 时间增长率 β_i 随波数的变化

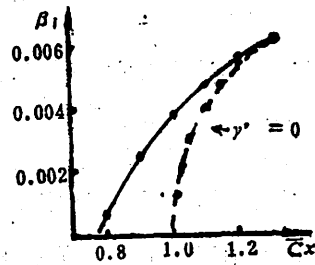


图 2 最大时间增长率随速度梯度的变化

应于不同的 C_x 进行计算得出曲线。由图中可以找出对应于每个 C_x 的最大增长率, 将其对 C_x 画成曲线见图 2。在图中也给出了对应于 $\gamma' = 0$ 情况下的时间增长率。曲线与 $\beta_i = 0$ 线的交点分别为 $C_x = 1.0$ 和 $C_x = 0.775$ 。这两点即为稳定边界, 正与 Ludwig 的二个稳定性判据的边界相符。图 3 给出了对任意 γ 时数值结果与 Ludwig 数据的比较, 图中实线为任意 γ 时的判据, + 为不稳定结果, 口为稳定结果, 图中也用虚线给出 $\gamma' = 0$ 时的判据。由图中可见 Ludwig 的结果与数值结果符合的很好。在数值计算中取 $U_0 = 1, W_0 = 1, n = 2$ 。此外我们还对不同的旋转模式 n 进行了计算, 发现若将结果被 n 除后, 则对于所有不同 n 的曲线几乎是重合的, 即 $\frac{\beta_i}{n}, \frac{\beta_r}{n}$ 对 $\frac{\alpha}{n}$ 的曲线重合。由此可见稳定性

判并不受旋转模式 n 的影响。在计算中还可看出频率的实部为

$$\beta_r = \alpha U_0 + \frac{nW_0}{r_0} \quad (20)$$

或在 $r = r_0$ 处

$$\gamma_r = q \cdot k = 0 \quad (21)$$

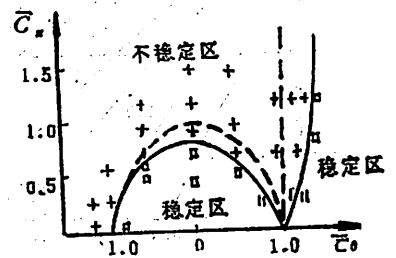


图 3 数值结果与 Ludwig 第二个判据比较

Ludwig 和 Schlichtig^[6]认为虽然判据是对窄缝导出, 我们可将宽缝看成无数窄缝组成, 对每一窄缝运用判据, 其中的量取当地量, 即 $\bar{c}_s = \frac{r}{W} C_s$, $\bar{c}_\theta = \frac{r}{W} C_\theta$. 只要最不稳定的窄缝产生不稳定情况, 就认为整个流场不稳定, 否则就认为稳定. 我们认为如果 Ludwig 的判据是原始微分方程 (4) 的精确解, 从物理上的分析, 这一结果是严格成立的, 即这一判据可以精确地应用于宽缝情况. 但实际上判据的得出是由窄缝情况下的近似方程 (8) 来的因此就产生了一个问题, 无数窄缝的叠加是会使近似方程的误差产生值得重视的影响, 由此我们利用精确方程 (4) 对宽缝进行计算来验证这一情况. 取很宽的缝, $r_1 = 0.5$, $r_2 = 1.5$, 速度分布仍为式 (7). 令 $\bar{c}_s = \frac{r}{W} C_s$, $\bar{c}_\theta = \frac{r}{W} C_\theta$, 并设

$$(\bar{c}_\theta - 1)(\bar{c}_s^2 + \bar{c}_\theta^2 - 1) - \frac{2}{3}\bar{c}_s^2 = C(r) \quad (22)$$

根据 Ludwig 的判据, 若流动稳定必须是

$$C_{\min}(r) \geq 0 \quad (23)$$

可以看出对于线性速度分布的情况, 外管壁面为最不稳定的情况, 即 $C_{\min}(r) = C_{\text{外壁}}$. 图 4 给出稳定性判据随 r 的变化. 在数值计算中我们只能对给定的速度梯度 C_s 、 C_θ , 计算其对不同波数 α 和模式 n 的时间增长率 β_i . 若 $\beta_i \neq 0$, 流动不稳定. 至于这一不稳定是由流场中那一层流体引起的, 是不能确定的, 只能说整个流场的增长率为 β_i . 图 5 给出数值结果与判据的比较, 图中无量纲速度梯度都取外壁面值, 即 $\bar{c}_s = \frac{r_2}{W_2} C_s$, $\bar{c}_\theta = \frac{r_2}{W_2} C_\theta$, $n=2$,

$U_0 = 1$, $W_0 = 1$. 由图中可见两者有一定误差, 但基本形状还是相符的, 可见作为初步判别还是可用的.

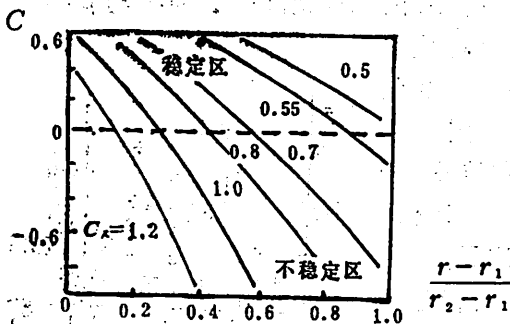


图 4 稳定性判据随 r 的变化

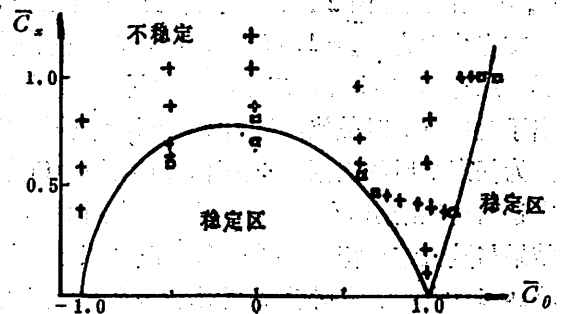


图 5 宽缝情况数值结果与判据的比较

为了分析不同速度分布对稳定性的影响, 我们选取了双曲正切速度剖面. 这种情况相当于有两层不同速度的流动形成的强剪切层. 速度分布如下

$$U = 3 + \tanh\left(\frac{r-r_0}{0.1}\right) \quad (24a)$$

$$W = Ar^n \quad (24b)$$

同样我们需要知道在这种速度分布下最不稳定的 r 位置. 图 6 为稳定性判据随 r 的变化, 由

图中可见中间层位置流动最不稳定。图 7 即为数值结果与判据的比较，实线为稳定性判据，虚线为数值结果分界线，由图中可见此时两者产生了较大误差。虽然中性曲线形状相同，但不稳定区域显然大大增加。

本文中我们用有限差分法计算了两个同心管之间无粘不可压旋转流的稳定性问题，给出

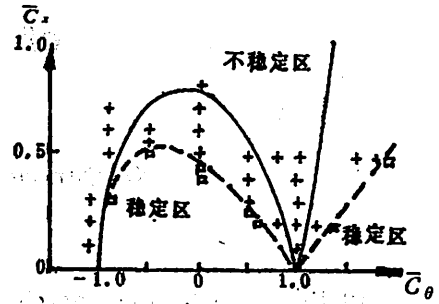
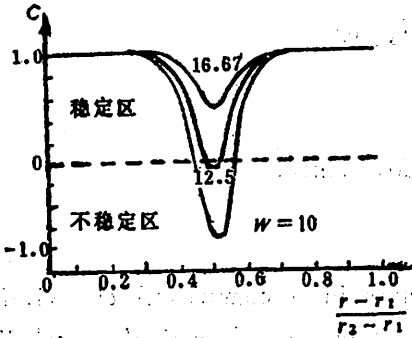


图 6 双曲正切速度分布的当地稳定性 图 7 双曲正切速度数值结果与判据的比较

了不同宽度和速度分布时的情况，计算了每种情况下的时间增长率，并且检验了 Ludwig 的稳定性判据。从数值结果可以看出，Ludwig 的判据在窄缝情况下是精确的，随着缝隙的加宽将产生一定的误差，尤其是对速度激烈变化的剪切流。但在 $C_s - C_\theta$ 图上，曲线的形状是相似的，说明判据可以大体分析出稳定的范围和不稳定的范围。

参 考 文 献

[1] Rayleigh, L., *Rroc. Roy. Soc. London (A)*, 93 (1916), S 148-154.
 [2] Howard, L. N., Gupta, A. S., *J. Fluid Mech.*, 14 (1962), 463-476.
 [3] Ludwig, H., *Z. Flugwiss*, 8(1960), 135-140.
 [4] Ludwig, H., *Z. Flugwiss*, 9 (1961), 359-361.
 [5] Ludwig, H., *Z. Flugwiss*, 12(1964), 304-309.
 [6] Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, 7th ed., McGraw-Hill, New York, 1976, p529.
 [7] Leibovich, S., Stewartson, K., *J. Fluid Mech.*, 126(1983), 335.
 [8] Lessen, M., Paillet, F., *J. Fluid Mech.*, 63(1974), 753-763.
 [9] Duck, P. W., Foster, M.R., *ZAMP.*, 31(1980), 532-524.

A Numerical Investigation on the Instability of Swirling Flow

Xia Nan

(Department of Modern Mechanics)

Abstract

In this paper, the instability of the inviscid incompressible swirling flow between two concentric cylinders is investigated, Ludwig's stability criterion derived under the condition of narrow gap is analysed, and the temporal growth rate in the different conditions is calculated by a finite difference numerical method. A check on Ludwig's stability criterion indicates that some errors will occur when this criterion is extended to the cases of the wide gap and different velocity profiles.

Key words, stability, turbulence, vortex.

天然状态下岩石密度的 μ 子测量法*

周大庄 马福胜 程纯杰

(地球与空间科学系)

摘 要

地下 μ 子强度随岩石深度的增加减弱,利用地下 μ 子的强度-深度关系能够测量天然状态岩石密度。此法可测 μ 子望远镜上方任意方向的岩石平均密度。

关键词: 地下宇宙线, μ 子强度, 岩石密度, 地质应用。

1 引言

天然状态岩石平均密度的测量是岩石物性研究的一项重要工作。常用的测量方法是 γ - γ 法和重力法。但由于天然和人工放射源的 γ 射线能量仅为1MeV量级,其穿透能力有限,故 γ - γ 法仅适用于小尺度岩石密度测量。与此相反,重力法仅适合于作大尺度岩石密度测量,小尺度测量时误差较大。

利用地下 μ 子的强度也可以测量岩石密度。这种方法的优点是既可作小尺度测量又可作大尺度测量,既可作竖直方向测量又可作其它方向测量,并且具有比较高的测量精度。

本文简单介绍岩石密度 μ 子测量法并报告实验结果。

2 方法

有关岩石密度 μ 子测量法的基本原理和方法详见文献[1]。穿透力极强的地面 μ 子可深入到地下数千米深处,它们在岩石中通过电离、激发、辐射和电子对产生等过程损失能量,逐渐被岩石吸收。地下 μ 子强度随 μ 子运动路径上的岩石厚度的增加而减弱,相应的变化规律在文献[2]中有详尽论述。

由双重符合粒子探测器组成的粒子望远镜可用于观测 μ 子通量。将望远镜置于地下坑道或矿井中,测量 μ 子的方向强度,通过理论公式或 μ 子强度深度实验定标曲线得到观测点上方某方向上的岩石柱密度 m , (g/cm^2) (单位面积柱体中的岩石质量),由 m ,和该方向上的岩

1987年10月26日收到。

* 国家305项目和国家自然科学基金联合资助的课题。

石厚度 s 可得岩石平均密度

$$\rho = \frac{m_r}{s} \quad (1)$$

做竖直方向测量时, s 是岩石的高度。

3 地下 μ 子强度深度定标曲线

地下 μ 子的强度深度关系可用文献[2]中的有关公式进行计算, 但理论公式涉及的参数较多, 既与 μ 子能量以及高能 μ 子与物质的相互作用机制有关, 又与岩石的组成和性质有关。故当能量较低时, 计算结果与实验观测值吻合较好, 而当能量较高时, 计算值与观测值相差较远, 能量越高差别越大。因此, 为准确起见, 应当使用高精度地下 μ 子强度-深度观测曲线作为定标线。

在过去所做的许多地下 μ 子观测实验中, Wilson^[3] 的结果最佳, 最适于做定标线。表 1 是从原始观测数据整理得到的竖直方向地下 μ 子强度-深度关系, 表中的深度在海平面处为 10m 等效水深 (MWE)。我们将以此做为竖直方向 μ 子测量定标线。

海平面上天顶角为 θ (竖直方向与观测方向间的夹角) 的方向上, μ 子强度为

$$I(\theta) = I_{\perp} \cos^2 \theta \quad (2)$$

其中的 I_{\perp} 是竖直方向的 μ 子强度。上式对 $\theta \leq 80^\circ$ 近似成立, 故可通过此式以及[2]中的有关公式得到 θ 方向的 μ 子强度深度定标线。

表 1 μ 子强度—深度关系

深度(MWE)	强度 ($\text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1}$)	深度(MWE)	强度 ($\text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1}$)
10.0	$(8.300 \pm 0.068) \times 10^{-3}$	314.5	$(3.764 \pm 0.123) \times 10^{-5}$
21.3	$(4.843 \pm 0.055) \times 10^{-3}$	333.3	$(2.938 \pm 0.123) \times 10^{-5}$
27.0	$(3.096 \pm 0.049) \times 10^{-3}$	408.7	$(2.047 \pm 0.096) \times 10^{-5}$
35.4	$(1.894 \pm 0.014) \times 10^{-3}$	507.2	$(1.169 \pm 0.055) \times 10^{-5}$
60.5	$(8.597 \pm 0.096) \times 10^{-4}$	611.8	$(7.514 \pm 0.410) \times 10^{-6}$
82.7	$(4.814 \pm 0.068) \times 10^{-4}$	758.3	$(4.340 \pm 0.273) \times 10^{-6}$
99.1	$(3.387 \pm 0.068) \times 10^{-4}$	850.0	$(3.421 \pm 0.273) \times 10^{-6}$
148.7	$(1.693 \pm 0.041) \times 10^{-4}$	950.2	$(2.668 \pm 0.273) \times 10^{-6}$
196.4	$(9.962 \pm 0.205) \times 10^{-5}$	1044.5	$(1.664 \pm 0.191) \times 10^{-6}$
255.4	$(5.653 \pm 0.191) \times 10^{-5}$	1116.7	$(1.432 \pm 0.178) \times 10^{-6}$

地面 μ 子强度随观测地点的高度、纬度变化，在中纬度地区，高度的影响较大，因此为准确起见，应当对上述定标线进行高度和纬度修正。图 1 是 μ 子垂直强度随高度的变化规律。图 2 是 μ 子微分动量谱随高度的变化规律，曲线 A, B, C 分别对应于海拔 3200m、垂直方向，海平面、垂直方向，海平面、 $\theta = 68^\circ$ 方向三种情况。

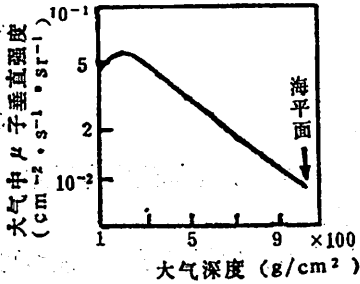


图 1 μ 子垂直强度随大气深度的变化

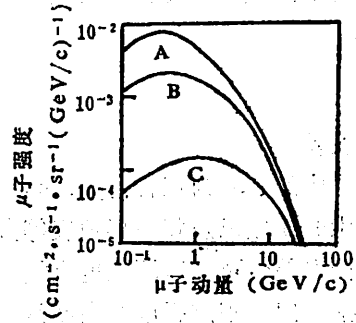


图 2 μ 子微分谱随高度的变化

由图 2 可知，当 μ 子能量 $\geq 10\text{GeV}$ 时，不同高度微分能谱基本重合，这意味着能量高于 10GeV 时的积分能谱基本重合，几乎不随高度变化，因此应当具有和海平面地下观测基本相同的强度—深度关系。这就大大简化了因观测地点高度不同所产生的强度变化问题。

在竖井中作测量时，仪器顶部没有岩石，将使 μ 子通量比顶部有岩石时略高。但一般情况下，竖井的口径远小于井深，望远镜对井口所张的角度很小，如在井口口径为 20cm ，井深 5m 时，仪器张角约为 2° 。由仪器粒子接收方向图（见图 3）可知，在此小角度内沿垂直方向进入望远镜的 μ 子计数可以忽略不计。因此当望远镜离井口较远时，可以不考虑因仪器正上方无岩石复盖而引起的计数误差。当望远镜离井口较近时，可通过理论计算对计数值进行修正。

由于望远镜观测到的是仪器张角 2β 内从各个方向进入的 μ 子，故所谓 μ 子强度实质上是通过顶角为 2β ，高为岩石厚度的倒立锥体的 μ 子平均强度，这也是定标线中强度和深度的真正含义。因定标线是在平坦地面条件下测得的，因此当观测点的上地表平坦时，可直接引用，而当地面不平坦时，应当用等效平坦地表去代替它并作出相应的强度修正，具体方法如下：一般情况下，地表呈坡形，令 α 是坡面与水平面间的夹角， h_0 是垂直方向上望远镜中心到地面的距离，则从望远镜中心到地面的最小和最大距离分别为

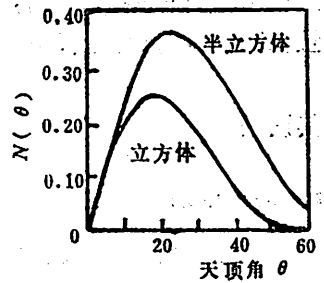


图 3 μ 子望远镜方向图

$$s_1 \approx \frac{h_0}{\cos \beta + \sin \beta \tan \alpha} \quad (3a)$$

$$s_2 \approx \left(\tan \alpha \tan \beta + \frac{1}{\cos \beta} \right) h_0 \quad (3b)$$

地面 μ 子通过母线为 s_1 和 s_2 ，顶角为 2β 的斜底倒立锥体进入望远镜。在新疆实验地点， $\alpha \approx 30^\circ$ ， $\beta \approx 14^\circ$ ，按斜底锥体和等效平底锥体体积相等得到等效锥体高度 $h_e \approx 1.03h_0$ ，容

易证明通过实际斜底锥体和通过等效平底锥体的 μ 子通量近似相等。

4 岩石密度测量误差

具体使用定标线时，或者用插值法通过观测强度 I 求深度 m ，或者将定标线数据作分段拟合，得到强度—深度关系公式

$$I = am^{-b} \quad (4a)$$

或

$$m = a^{\frac{1}{b}} I^{-\frac{1}{b}} \quad (4b)$$

故深度误差

$$\sigma_m = a^{\frac{1}{b}} b^{-1} I^{-\left(\frac{1}{b}+1\right)} \sigma_I \quad (4c)$$

上面各式中的 a, b 为拟合常数， σ_I 是强度误差，其中包括观测误差、定标线本身误差、高度修正产生的误差以及将坡形地表等效为平坦地表产生的误差。

观测误差 σ_I 可从观测强度直接得到，延长观测时间可减小 σ_I 。定标线强度误差 σ_2 可从定标线数据查出。观测强度的高度修正在数米量级的浅层地下比较重要，在较深处可以忽略不计。由于新疆实验点均在 10m 深以下，强度修正值很小，相应的误差 σ_3 比 σ_1 小得多。坡形地面等效为平坦地面时，等效高度 h_0 的误差 $\leq 0.01h_0$ ，由此可计算相应的强度误差 σ_4 。对平均密度为 2.6g/cm^3 的岩石，计算表明对应于 σ_4 的相对误差约为 1-2%。

将上述各种因素引起的强度误差加起来就是公式 (4c) 中的 σ_I ，于是可将观测结果表示如下。

岩石平均密度

$$\rho = \frac{m_r}{h} \quad (5a)$$

其误差

$$\sigma_\rho = \sqrt{\sigma_{m_r}^2 + \left(\frac{m_r}{h}\right)^2 \sigma_h^2} / h \quad (5b)$$

上面两式中的 $h \approx 1.03h_0$ ， h_0 是望远镜垂直方向的岩石厚度， σ_h 是其标准误差， m_r 是岩石质量柱密度，它和公式 (4b) 中的深度 m 的关系为

$$m_r = (m - 10) \times 102.5 (\text{g/cm}^2) \quad (6a)$$

其误差

$$\sigma_{m_r} = \sigma_m \times 102.5 (\text{g/cm}^2) \quad (6b)$$

5 实验结果

为配合我校在新疆的科学考察，我们参加了矿点岩石物性测量工作。实验地点为正在普查的某钨矿点，其海拔高度约为 1770m，纬度为北纬 45° ，与本文引用的 Wilson 定标线实验地点纬度相近。上地表是坡度约为 30° 的板岩，坑道离地面的最大高度约为 30m。

观测所用的仪器装置如图 4 所示，以国产高效率大面积塑料闪烁体 ST411 为探头，采用双重符合，多道记录，同时观测 μ 子微分能谱和积分强度。

本仪器是兼顾基础研究和应用研究而设计的，故部件较多，体积较大，如果只测量总强度，可以大大简化。

不同观测地点的观测条件及观测结果汇于表 2。实验所选的观测方向均为竖直方向。表中的 μ 子强度已经是修正后的值，其误差包括了各种修正误差。

从公式(4b)和(6a)可得观测点的深度 m 和岩石质量柱密度 m_r ，其误差 σ_m ，可通过公式(4c)和(6b)算出，最后利用公式(5)得出岩石密度及误差。这些物理量也汇于表2。

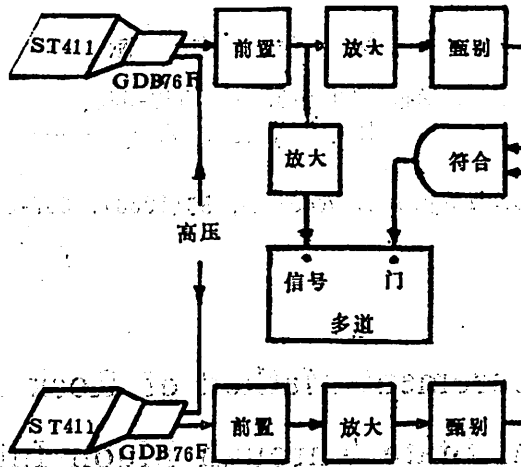


图4 地下 μ 子通量测量仪器装置图

表2 观测条件及实验结果

观测条件				实验结果		
仪器几何因子 $G(\text{cm}^2 \cdot \text{sr})$	观测时间 $t(\text{s})$	岩石厚度 $h_r(\text{m})$	μ 子强度 $\times 10^3$ $(\text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1})$	岩石柱密度 $m_r(\text{g}/\text{cm}^2)$	岩石平均密度 $\rho(\text{g}/\text{cm}^3)$	
实验1	79.9	11160	10.18 ± 0.31	1.820 ± 0.055	2704 ± 84	2.58 ± 0.11
实验2	95.0	17400	17.16 ± 0.51	1.023 ± 0.029	4486 ± 106	2.54 ± 0.10
实验3	70.9	37478	26.15 ± 0.78	0.532 ± 0.017	7007 ± 138	2.60 ± 0.09

实验坑道的上方是板岩，地表有一层很薄的风化碎石，坑道和地表之间没有空洞，夹在岩石中间的黑钨矿矿脉也很薄，因此坑道上方岩石平均密度接近于 $2.6\text{g}/\text{cm}^3$ ，而测量值为 $2.54\text{—}2.60\text{g}/\text{cm}^3$ ，与实际情况基本相符。三个观测点的岩石密度相对误差分别为4.3%、3.9%和3.5%。

6 结论

本工作成功地利用地下 μ 子强度—深度关系测量了天然状态下的岩石平均密度。实验表明，这一方法给出的岩石密度相对误差 $\leq 5\%$ 。岩石密度的 μ 子测量法可对千米量级的岩石厚度向上进行比较准确的方向密度测量，从这一角度来讲比重力法和 $\gamma\text{-}\gamma$ 法优越。但 μ 子法不能从实验点向下测量，往往需要坑道、矿井，这又不如重力法。

本文所述实验曾得到科大赴新疆 305 科考队的大力支持, 参加实验的还有李义宝同志, 徐蓓蓓同志为本文绘制了插图, 在此一并表示衷心感谢。

参 考 文 献

- [1] 周大庄等, 地球物理学报, 30 (1987), 542-548.
- [2] Hayakawa, S., Cosmic Ray Physics, Wiley-Interscience, New York, 1969 390-401.
- [3] Wilson, V. C., *Physical Review*, 53(1938), 337-343.

The Measurement Method of Rock Density in Natural State Through Muon Intensities

Zhou Dazhuang Ma Fusheng Cheng Chunjie

(Dept. of Earth and Space Science)

Abstract

The intensity of underground cosmic-ray muons decreases when the rock depth increases. The rock density in natural state can be measured through intensity-depth relations of underground muons. This method can precisely measure the average densities of rocks with any thickness up to the order of 1000 meter in any direction above the muon telescope.

Key words, underground cosmic rays, muon intensity, rock density, Applications in geologies.

方解石的辐照效应和 ESR 测年法的研究

彭子成 徐玉平

金嗣焰 梁任又

(地球和空间科学系)

(结构成分分析中心)

全裕才

黄培华

(应用化学系)

(地球和空间科学系)

摘 要

本文研究了人工合成方解石和天然石笋样品的 ESR 谱及在 α 、 β 、 γ 射线辐照下的效应。由实验测出的 TD 和 D 值, 计算出周口店第四地点石笋平均年龄为 $(6.0 \pm 0.8) \times 10^4$ 年, 此值与轴系法测得的平均年龄 $(6.5 \pm 0.4) \times 10^4$ 年一致。

关键词: 方解石, 总辐照剂量, 年剂量, ESR 年龄。

1 前言

近 10 年来在国外, 一种新的第四纪年代测试技术——ESR 年龄测定法^[1-4]得到了迅速发展, 引起了地学界、古生物界、考古界、水利和电力工程界的兴趣。我国从 1985 年也开始从事这方面的研究。

ESR 年龄测定法的基本原理是: 样品中的结晶矿物在接受放射性元素 (如 U、Th、K) 的 α 、 β 、 γ 射线辐照后, 产生了顺磁性的电子或空穴, 又称为顺磁缺陷, 这些缺陷会随辐照时间的延续而逐渐地增多, 并可用 ESR 波谱仪测量出来。应用人工附加辐照和线性外延的方法^[2], 可得出该样品所受的天然总辐照剂量 (TD)。另外, 在测得样品接受的年辐照剂量 (D) 后, 即可计算出样品的年龄 $T(\text{ka}) = TD(\text{Gy})/D(\text{mGy/a})$ 。式中, Gy 和 mGy 为剂量单位, ka 和 a 表示千年和年单位。

目前, 国外对碳酸盐和磷灰石 (骨) 中顺磁缺陷平均寿命和饱和度的研究表明, ESR 测年法的下限可达几百万年。由目前仪器的灵敏度和分辨率来估算, 该法上限年龄为数百年。因而 ESR 测年法复盖了整个第四纪年代的研究范畴。此外, ESR 测年法可在室温或低温

(如 77°K) 下对样品进行重复测量, 为检验数据提供了方便, 同时还能测定不同的化石样品^[2,7]。

ESR 测年法的误差由两部分组成: 来自天然总辐照剂量 (TD) 的测量误差, 通常可少于 $\pm 5\%$; 来自年平均剂量 (D) 的误差可达 $\pm 10\%$ 。所以整个 ESR 年龄的误差为 $\pm 15\%$ 左右^[2]。

1985 年以来, 我们一直在探索 ESR 测年法的测试技术, 并做了部分的基础研究^[7]。本文将着重介绍我们对方解石的 ESR 谱及其辐照效应的特性研究, 并对所用的石笋样品进行了 ESR 年代的测定。

2 实验条件

2.1 样品来源

①分析纯的无水碳酸钙粉末, 经 X 衍射鉴定为方解石晶体, 属人工合成方解石样品。

②石笋样品, 编号为 BZF, 由陈跃提供。该样品取自北京周口店第四地点。经过薄片鉴定¹⁾, 主要成分是方解石, 并含少量 Mn、Fe、Mg 杂质。按离石笋生长层中心不同的距离取了三个样品, 代号依次为 BZF-1、BZF-5、BZF-9。它们分别距离中心的部位为 0 (即中心取样), 8 和 16cm。BZF 样品的粒度为 40-80 目。

2.2 辐照条件

① $^{60}\text{Co}-\gamma$ 源, 源强为 60kCi (加拿大原子能公司产品), 辐照靶位为 625 号, 剂量率为 4.46Gy/min。

② $^{90}\text{Sr}-^{90}\text{Y}-\beta$ 源, 源强为 40mCi (英国哈麦夏放射化学中心产品), 辐照剂量率为 4.01Gy/min。

③6个 $^{241}\text{Am}-\alpha$ 组成板源(英国哈麦夏放射化学中心产品), 辐照剂量率为 3.69Gy/min。

2.3 ESR 谱的测试条件

使用 ER-200D-SRC 型 ESR 谱仪 (西德 Bruker 公司产品) 在室温下测试样品。样品装在 $\phi 3\text{mm}$ 的样品管内, 每个用量 150mg。测试选用 X 波段, 2mW 微波功率, 100kc 调制频率, 0.5—2.5GPP 调制幅度。

3 实验结果和讨论

3.1 ESR 谱和辐照效应

图 1 显示了人工合成方解石的 ESR 谱图。图 1a 是未经辐照样品的, 在 $g=2.00$ 附近不存在任何顺磁缺陷的信号。图 1b 表示样品在经过 $^{60}\text{Co}-\gamma$ 源照射后所产生的 ESR 谱。最强的四个峰 g 值依次为 2.006、2.0262、1.9867 和 2.0023。其中 $g=2.006$ 和 $g=2.0023$ 的谱与文献 [2] 报导洞穴沉积碳酸盐样品 (编号为 HEGY, YCP-16) 以及泉华样品 (编号为 CSSR6, CSSR13) 中的有关 ESR 谱相同。

取一组合成方解石的样品, 按不同的剂量, 如表 2 所示, 进行辐照, 然后用所得的 ESR 谱强度与辐照剂量作图, 如图 2。

(1) 陈跃, 中国东部某些地区的石笋同位素温度, 中国科学技术大学硕士论文。以下同。

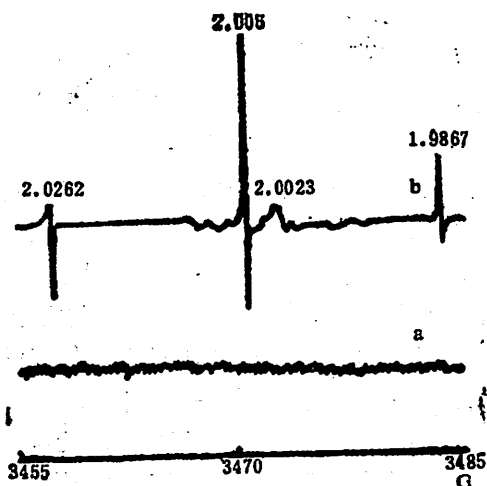


图 1 人工合成方解石 ESR 谱图
a 未经人工照射的样品
b 经 ^{60}Co 源照射 (约 558Gy) 样品

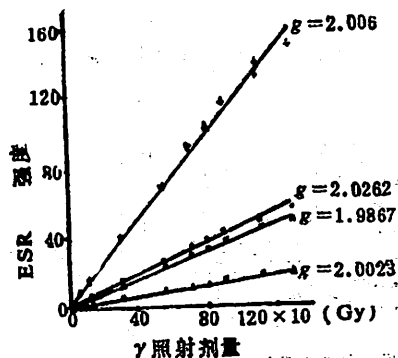


图 2 人工合成方解石 ESR 谱的增长线

表 2 人工合成方解石经辐照后的 ESR 谱强度

ESR 谱位置	γ 辐照剂量 (Gy)											r^*	b^{**}
	0	55.8	112	299	558	701	799	901	1090	1120	1300		
$g=2.006$	0	8.30	15.7	39.1	78.5	90.0	99.6	114	130	137	146	0.996	0.116
$g=2.026$	0	2.90	5.60	14.4	29.3	33.1	36.6	42.0	48.0	50.1	53.3	0.995	4.28×10^{-2}
$g=1.987$	0	2.40	5.10	12.2	25.3	28.5	32.0	36.7	41.7	43.8	46.2	0.995	3.73×10^{-2}
$g=2.002$	0	1.20	2.00	4.60	9.00	9.30	11.2	13.1	15.0	15.8	16.6	0.995	1.32×10^{-2}

注: r^* 为回归直线的相关系数, 下文相同。

b^{**} 为回归直线的斜率, 又称为辐照效应灵敏度, 单位为 a.u./Gy, 下文相同。

从图 2 看出, 不同 g 值的谱其辐照效应是不同的。 $g=2.006$ 相应的灵敏度 b 为 0.116 a.u./Gy, 而 $g=2.0023$ 为 1.32×10^{-2} a.u./Gy, 两者相比为 8.8 倍。但是四条 ESR 谱的增长线的线性都很好, 相关系数 r^* 为 0.995—0.996。前三组直线的最后一个实验点离回归线有一些距离 (见图 2), 这可能是在高辐照剂量下 (1.3kGy) 出现的饱和倾向, 但并不明显。

从上述的实验结果来看, 未经辐照的样品其 ESR 谱的强度为零。在经不同剂量辐照后能得到一条线性良好的增长线。这些现象为 ESR 测年法确立了计年的依据: 对于次生的碳酸盐 (如石笋, 钟乳石, 泉华等) 地质样品, 在它们形成的时刻, 并不存在由辐照产生的顺磁缺陷, 但随着时间的延续, 样品受到累积的辐照剂量也增多, 造成顺磁缺陷成比例地增加,

ESR 谱的强度也相应地增高,并能产生一条十分理想的增长线。这样,ESR 的“时钟”也就一直转动到我们处理这些样品时为止。

3.2 天然总辐照剂量 (TD) 的确定

分别取 BZF—1, BZF—5 和 BZF—9 样品各 5 个,以不同的剂量进行辐照,并得到典型的 ESR 谱图。由于三组样品的谱图相同,所以我们只画出了 BZF—9 样品的谱图(图 3)。从图 3a 看出, BZF 样品只在 $g=2.004$ 处出现了一个微波吸收峰。随人工辐照剂量的

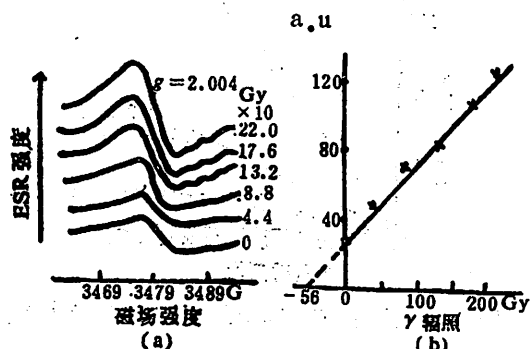


图 3 BZF—9 样品的 ESR 谱和增长线
a BZF—9 样品在 γ 射线辐照前后的 ESR 谱
b BZF—9 样品 ESR 谱的增长线

增大,其峰一峰值也线性地增加(图 3b)。但该峰比较宽, $\Delta H \cong 6$, 明显地受到了少量腐植质的干扰^[2]。BZF 的 ESR 谱与文献 [12] 报导的 B.L. 谱 ($g=2.004$, $\Delta H \cong 7$) 相应。该谱的平均寿命为 10^6-10^7 年。

根据上述合成方解石和石笋的辐照效应呈线性的特点,我们可以引出下列计算地质样品 TD 值的公式:

$$R/R_0 = (TD + Q)/TD \quad (1)$$

式中 Q 为人工辐照剂量, R_0 及 R 分别为天然总辐照剂量产生的 ESR 谱强度和人工辐照剂量加上天然总辐照剂量产生的 ESR 强度。

$$\text{变换 (1) 式, } TD = R_0 Q / (R - R_0) \quad (2)$$

$$\text{当 } R = 0, \quad TD = -Q \quad (3)$$

为此,以实验数据中 ESR 强度 (R) 为纵坐标,人工辐照剂量 (Q) 为横坐标作图(图 3b),并求其回归直线方程。当直线外延与横坐标相交时即可得出 $TD = -Q$ 值(取绝对值)。表 3 列出了 BZF—1, 5, 9 样品的实验数据和计算得到的有关参数。

表 3 BZF 样品经辐照后的 ESR 谱强度及其它参数

样品	ESR 谱位置	γ 辐照剂量 (Gy)						线性回归方程	r^*	TD (Gy)
		0	44	88	132	176	220			
BZF—1	$g=2.004$	16.0	38.5	64.0	74.5	98.5	113	$R=0.439Q+19.2$	0.995	43.7
BZF—5	$g=2.004$	18.5	42.0	68.0	84.5	112	125	$R=0.492Q+20.8$	0.997	42.3
BZF—9	$g=2.004$	21.7	43.9	70.5	82.5	103	121	$R=0.445Q+24.9$	0.997	56.0

从表 3 的数据看出,不同生长层的石笋样品都能得到一条理想的 ($r^* \cong 0.995-0.997$) 回归直线方程,且三条直线的斜率或 γ 辐照效应的灵敏度都十分接近 ($0.44-0.49 a.u./Gy$)。这反映 BZF 样品的 ESR 谱 ($g=2.004$) 对辐照效应的性能是稳定的。另外, BZF—1, 5, 9 样品的平均辐照灵敏度为 $0.47 a.u./Gy$ 。此值比合成方解石相应的最大值 $0.12 a.u./Gy$ (表 2) 大了三倍。这说明含有杂质的 BZF 样品比纯化学合成的样品有较高的辐照效应灵敏度。

表 4 方解石样品经辐照后的 ESR 谱强度及其它数据

方法	样品	ESR 位置	α 辐照 (Gy)					β 辐照 (Gy)				灵 敏 度					
			0	222	665	1030	1110	1550	0	40.1	120	160	b_a	b_β	b_γ	K_{α,β^+}	$K_{\alpha,\gamma^{++}}$
	BZF—5	$g=2.004$	18.5			67.7*							4.78×10^{-2}		0.492		0.097
ESR	BZF—9	$g=2.004$	23.0			65.9*							4.17×10^{-2}		0.445		0.094
法	合 成 方 解 石	$g=2.006$	0	0.88	1.35		2.88						2.40×10^{-3}		0.116		0.021
TL	BZF—9	370°C 峰	14	27	46		74	15	28	57	77		3.75×10^{-2}	0.386			0.097

* 该数据经粒度和样重的校正, 说明见正文;

+ $K_{\alpha,\beta} = b_\alpha/b_\beta$; ++ $K_{\alpha,\gamma} = b_\alpha/b_\gamma$, b_γ 见表 2 和表 3.

3.3 年平均剂量 (D) 的确定

地质样品所受到的年平均剂量

$$D = D_i + D_e \quad (4)$$

D_i 为样品内部放射性元素 (U、Th、K) 产生的年平均剂量; D_e 为样品的外部 (即环境) 存在的年平均剂量。由于放射性元素可以产生 α 、 β 和 γ 射线的辐照, 而 α 对比 β 和 γ 的效率是不同的。所以 (4) 式可引伸为

$$D = K' D_{i\alpha} + D_{i\beta} + D_{i\gamma} + D_e \quad (5)$$

式中, $D_{i\alpha}$ 、 $D_{i\beta}$ 、 $D_{i\gamma}$ 相应为 α 、 β 、 γ 射线辐照的年平均剂量, K' 为 α 辐照效率, β 和 γ 的辐照效率可取为 1。

K' 值测定: 从 α 射线的性质可知, 在 α 粒子 (He^{2+}) 运动的过程中很大一部分能量消耗在它和周围晶格原子的相互作用中。此外, 它诱发出的自由电子也会沿着它的运动经迹产生高速率的复合。这样使 α 射线与 β 和 γ 相比产生顺磁缺陷的效率低得多。文献 [2] 报导对碳酸盐样品, K' 值一般在 0.1—0.6 范围内。

我们曾用热释光法 (TL) 和 ESR 法分别测出了 $K_{\alpha,\beta}$ 和 $K_{\alpha,\gamma}$ 值, 数据列于表 4 中。 $K_{\alpha,\beta}$ 表示 α 射线相对于 β 等效辐照效率, 而 $K_{\alpha,\gamma}$ 表示 α 射线相对于 γ 等效辐照效率。

在用 ESR 法测定 $K_{\alpha,\gamma}$ 时, 要用 BZF 粉末样品去接受 α 的辐照。因为粉末样品的 ESR 谱的强度比用 40—80 目的样品来得低。由我们的实验测得校正系数为 1.34。此外, 在一定范围内 (样品体积不超过 ESR 仪的谐振腔) 样品用量少时, 产生 ESR 强度也低。在 α 辐照时因受原区范围的限制, 又考虑到节省照射时间, 我们对每个样品用量为 115mg。这比未经 α 辐照或用 γ 辐照的样品用量 150mg 来得少。实验结果, 这两者之间的校正系数为 1.12。

从表 4 的结果看出合成方解石的 $K_{\alpha,\gamma}$ 值最低, 只有 0.021。这与它们是纯的化合物有关。BZF—5 和 BZF—9 的 $K_{\alpha,\gamma}$ 分别为 0.097 和 0.094, 彼此十分接近。这表明不同生长层位的石笋样品受 α 对 γ 的等效辐照效应是稳定的。同时, 我们还用 TL 法得出了 BZF—9 的 $K_{\alpha,\beta}$ 值为 0.097, 它与平均值 $K_{\alpha,\gamma} = 0.096$ 一致。这样, 从我们的实验结果证实了 α 对 β 和 γ 的等效辐照效应是一样的。由于 TL 法比 ESR 法更简便, 所以国外的学者常把 $K_{\alpha,\beta}$ 代替 $K_{\alpha,\gamma}$ 使用。

根据公式 (5) 和单位含量的放射性元素年剂量表^[10,11], 我们可以计算得到表 5 的结果。

应该指出, 由于可能存在的环境地质条件的差异, 造成不同洞穴内部环境剂量 (D_e) 的不同。所以表 5 中用了周口店莲花洞的数据是有随意性的。但从下文可见, 用此数据计算的 BZF 石笋的 ESR 年龄和 U 系年龄都在几万年范围内, 而 TD 值的误差又 $< \pm 5\%$ 。为此可以推断周口店第四地点洞穴和周口店莲花洞穴内的环境年剂量在数量级上应是相同的。

3.4 BZF 石笋 ESR 地质年龄的探讨

根据 ESR 测年法的计算公式, $T = TD/D$ (见前言), 并结合表 4 和表 5 的有关数据, 即可得出 BZF 石笋的 ESR 年龄 (表 6)。

表 5 BZF 石笋样品的年平均剂量 (10^{-2} mGy/a)

样品	放射性元素含量(ppm)*	$K'D_{i\alpha}$ **	$D_{i\beta}$	$D_{i\gamma}$	D_i	D_c^+	D
BZF—1	U=0.13	3.53	1.91	1.54	6.98	70	77.0
	Th,K \approx 0	0	0	0			
BZF—5	U=0.24	6.51	3.52	2.83	12.9	70	82.9
	Th,K \approx 0	0	0	0			
BZF—9	U=0.17	4.61	2.49	2.01	9.11	70	79.1
	Th,K \approx 0	0	0	0			

* U, Th 数据来自 (1); K 由原子吸收光谱法测定。

** K' 为 0.997。

+ 取周口店莲花洞的数据, 由李虎候提供。

表 6 BZF 石笋样品的 ESR 年龄和 U 系年龄的比较

样品	从生长层 取样部位	TD (Gy)	D (10^{-2} mGy/a)	ESR 年龄 ($\times 10^4$ a)	平均 ESR 年龄 ($\times 10^4$ a)	U 系年龄* ($\times 10^4$ a)	平均 U 系 年龄 ($\times 10^4$ a)
BZF—1	中心部位	43.7	77.0	5.7		7.6 ± 0.4	
BZF—5	离中心 8cm	42.3	82.9	5.1	6.0 ± 0.8	6.5 ± 0.4	6.5 ± 0.4
BZF—9	离中心 16cm	56.0	79.1	7.1		5.5 ± 0.4	

* U 系年龄引自 (1)。

从表 6 看出石笋整体的 ESR 平均年龄为 $(6.0 \pm 0.8) \times 10^4$ 年, 此与 U 系的平均年龄 $(6.5 \pm 0.4) \times 10^4$ 年一致。这表明 ESR 测年法给出 BZF 石笋的平均年龄是可信的。但是在分层的 ESR 年龄上出现了倒置的结果, 即外层年龄大于内层年龄, 这是违背石笋的生长规律的。这种现象在国外的文献报道中也有出现, 它揭示了石笋生长过程中影响 ESR 年龄的因素在变化。

目前从国外研究洞穴沉积物的资料来看^[5,9], 天然总辐照剂量 TD 值与离样品生长层表面距离的关系有两类, 如图 4 所示。图 4a 中钟乳石样品来自日本的古人类洞穴 Akiyoshi, 它的 TD 值离生长层表面的距离增大呈线性地增加。当估算 (或测量) 出年平均剂量 D 后, 即可得出合乎正常规律的生长年龄: 内层 ESR 年龄大于外层的年龄。在图 4b 和 4c 中样品

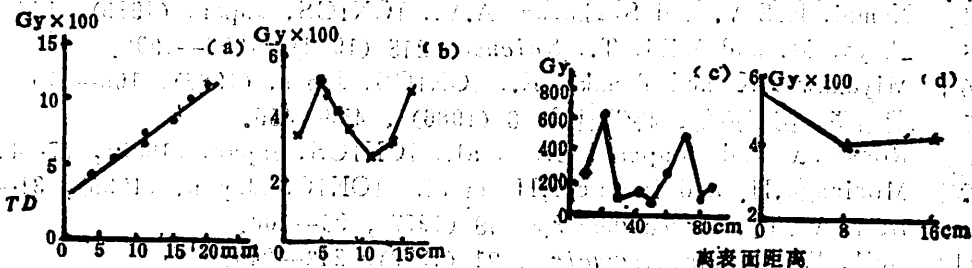


图 4 TD 与离表面或顶端距离的相 图

来自日本 Komori 和 Ryuga 两个洞穴的石笋, 它们的 TD 值即成齿状变化。我们的 BZF 样品 (图 4d) 也是类似于这种情况。如果按这种情况的 TD 值来计算 ESR 年龄, 就会出现上述的倒置结果。

解释这种结果的原因可归纳为四点: ①石笋内部 U、Th、K 的分布不均匀; ②石笋的生长速度有变化。当外层的生长速度较慢时接受的辐照剂量可以高些; ③在整个石笋生长过程中环境剂量不稳定; ④在石笋内不均匀地分布了有机和/或磁性杂质, 它们的 ESR 谱可能会叠加在样品谱上。

从表 5 看 BZF 样品各层的铀分布是有一些不均匀, 但是含量都很低, 对总辐照剂量和年剂量的贡献不大。又根据表 6 铀系的年龄数据, 可以估算从第一层到第五层的生长速率为 0.72cm/ka , 而第五层到第九层的生长速率为 0.80cm/ka 。这两者也相差不大。所以, 从这些分析来推测, BZF 石笋样品出现了年龄倒置的现象很可能是环境剂量的变化和或杂质 (如腐植质——见前述) 的影响所造成的。

4. 结语

本文研究了人工合成方解石和天然石笋样品的 ESR 谱和 α 、 β 、 γ 射线辐照效应的特性。同时由实验测出了反映这些特性的 r^* 、 b 、 $K_{a,\beta}$ 、 $K_{a,\gamma}$ 等参数值。另外, 还根据 ESR 测年法的原理, 由实验得出了 TD 和 D 值, 从而估算了北京周口店第四地点石笋的年龄, 并讨论了有关年龄的倒置问题。

从目前来看, ESR 测年法正处在不断地发展和完善之中, 其中不少问题, 如年剂量的测定, 各项参数的校正, 开放体系的年龄模式等还有待进一步探索, 以求对这个新的测年方法有深入的了解, 并更广泛地为第四纪物质的年代学研究服务。

社会科学院考古所李虎侯老师对本工作提出了宝贵建议, 陈跃同志提供了石笋样品, 高敏同志做了很多辅助性的工作, 作者在此表示诚挚的感谢。

参 考 文 献

- [1] Zeller, E.J., *Thermoluminescence of Geological Material*, Academic Press, London, (1968), 271—279.
- [2] Henning, G.J. and Grun, R., *Quaternary Science Reviews*, 2 (1984), 157—238.
- [3] Ikeya, M., *Anthropos*, 4 (1977), 152—168.
- [4] Nambi, K.S.V. and Sankaran, A.V., *IONICS*, Japan, (1985), 175—180.
- [5] Ikeya, M. and Miki, T., *Science*, 215 (1982), 1392—1393.
- [6] Miyakawa, K. and Tanaka, K., *IONICS*, Japan, (1985), 165—174.
- [7] 黄培华, 彭子成等, *科学通报*, 6 (1986), 453—455.
- [8] Rossi, A. and Poupeau, G., et al., *IONICS*, Japan, (1985), 77—85.
- [9] Morinaga, H. and Inokuchi, H., et al., *IONICS*, Japan, (1985), 31—37.
- [10] Bell, W.T., *Archaeometry*, 19 (1977), 99—100.
- [11] Bell, W.T., *Archaeometry*, 21 (1979), 243—245.
- [12] Yokoyama, K., et al., *Nucl. Track*, 10 (1985), 929—936.

Study on Irradiated Effect and ESR Dating of Calcite

Peng Zicheng Xu Yuping

(Dept. of Earth and Space Science)

Jin Sizhao Liang Renyou

(Center of Structure and Element Analysis)

Quan Yucai Huang Peihua

(Dept. of Applied Chemistry)

Abstract

The ESR spectra of sythetic calcite and natural stalagmite and the effect irradiated by α , β , γ rays have been studied in this paper.

The average ESR age of the stalagmite at the Fourth Place, Choukoutien cave, is $(6.0 \pm 0.8) \times 10^4$ a, calculated by means of the parameters of TD and D . This result is concordant with the average age of $(6.5 \pm 0.4) \times 10^4$ a by U-series method.

Key words: calcite, total dose, annual dose, ESR age.

利用时序分析方法识别模态参数的研究

李川奇 张培强 杨前进

(精密机械和精密仪器系)

摘 要

本文对时间序列分析方法识别模态参数进行了研究。重点介绍了ARMA和ARMAV模型识别模态参数的原理,并用大量模拟实验检验了两种模型在分离模态、不同信噪比、大阻尼、密集模态等复杂情况下识别模态参数的能力,从结果可以看出ARMAV模型是一种有效的识别方法。

关键词: 时间序列分析, 模态参数识别。

1 前 言

时间序列分析是一种现代的数字信号处理技术。这种技术首先将均匀采样的数字信号拟合出一个参数模型,再利用这个模型对信号及产生信号的系统进行分析、研究与处理,从而得到信号本身的规律和系统的特性。与其他分析技术比较,时序分析对信号所作的假设较少,当信号是一个平稳的、正态分布的、零均值的时间序列时,就能准确地反映信号本身的规律和系统的特性;时序模型是一个动态模型,具有外延性,适合于短暂信号的分析 and 处理;另外时序模型也是一个参数模型,通过模型参数可以得到连续的自功率谱和传递函数,分辨率高。由于时序分析这些特点,在振动分析和结构模态参数识别中得到越来越广泛的应用。

时间序列分析应用于振动分析和模态参数识别主要采用了以下三种模型:AR、ARMA和ARMAV模型。利用AR和ARMA模型识别模态参数要与曲线拟合技术结合起来使用,首先利用AR和ARMA模型得到结构的固有频率和阻尼比,然后根据所得到的固有频率和阻尼比对结构的自由响应进行拟合,得到结构的振型。用ARMAV模型进行结构模态参数的识别,不仅考虑了结构的响应,也考虑了激励力,它能直接识别出所有的模态参数。

应用时序法进行模态参数的识别已在许多方面得到了应用^[1],不过国内外大部分学者只是根据ARMA模型(包括AR模型)的特点,识别出了结构的固有频率和阻尼比,文献[2]还应用AR模型对几种复杂情况下的固有频率和阻尼比进行了识别,并在识别两个实

1988年3月24日收到。

际振动系统的固有频率和阻尼比上取得了比较满意的结果。文献[3]应用 AR 和 ARMA 模型识别了全部的模态参数(包括振型),并用计算机模拟的一个三自由度振动系统进行了验证。由于利用 ARMAV 模型能够直接识别出所有的模态参数,所以近来也越来越受到人们的重视^[4-6]。文献[5]利用 ARMAV 模型识别出一实际机床结构的前几阶模态参数,文献[6,7]还将这种方法与有限元法结合,对识别机械结合部的物理参数进行了研究。但是利用时序法识别结构模态参数的能力如何?上述研究都没有给出回答。

随着近代科学技术的发展,模态参数识别技术越来越多,评价一种模态识别方法的好坏主要由以下指标决定:①识别密集模态及重根的能力;②识别大阻尼情况的能力;③识别精度;④抗噪声能力;⑤计算所需时间。

本文采用了一个两自由度振动系统,通过改变其部分参数,用计算机模拟出大阻尼振动、密集模态等复杂情况;另外在响应中加入白噪声,模拟了实际测量中不同信噪比情形。通过对这些复杂情况下模态参数的识别,定量地分析了 ARMA 模型和 ARMAV 模型识别模态参数的能力,并对两种模型的识别精度进行了比较。

2 利用 ARMA 模型识别模态参数的原理

2.1 固有频率和阻尼比的求解

一个具有 n 阶自由度的结构,当输入为白噪声时,其响应可用一个 ARMA $(2n, 2n-1)$ 模型来表示;当输入为其他时,响应也可用一个 ARMA $(2n+q, 2n+q-1)$ 来表示^[9]。

假设 x_t 是一个 n 阶自由度结构的随机响应,用 ARMA $(2n, 2n-1)$ 模型表示为:

$$x_t - \phi_1 x_{t-1} - \dots - \phi_{2n} x_{t-2n} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_{2n-1} a_{t-2n+1} \quad (1)$$

其中模型的自回归参数 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{2n}$ 反映了结构本身的特性,其引进后推算子 B 的多项式 $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_{2n} B^{2n}$ 的特征根 $\lambda_k, \lambda_k^* (k=1, 2, \dots, n)$ 与结构动力学方程的特征根 $\mu_k, \mu_k^* (k=1, 2, \dots, n)$ 有如下关系:

$$\lambda_k = e^{\mu_k \Delta} \quad (2)$$

其中 Δ 是采样时间间隔。

由此可求得结构的固有频率和阻尼比:

$$\omega_{n,k} = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\ln \lambda_k \ln \lambda_k^*} \quad (3)$$

$$\xi_k = -\frac{\ln |\lambda_k|}{\sqrt{\ln \lambda_k \ln \lambda_k^*}} \quad (4)$$

$\omega_{n,k}$ 是第 k 阶固有频率, ξ_k 是第 k 阶阻尼比。

对于一个非白噪声激励的响应或有噪声干扰的响应,可用一个 ARMA $(2n+q, 2n+q-1)$ 模型来表示。尽管模型带入了 $q/2$ 阶虚拟模态,但是不会丢掉结构的 n 阶固有模态^[10]。

这样对于一个结构的响应,拟合出一个 ARMA 模型,求出自回归参数和特征根,根据 (3), (4) 式就可以得到结构的固有频率和阻尼比。

2.2 自由响应的获得

一般获得结果的自由响应函数有如下几种途径：a. 用单位脉冲信号激励结构，直接测量得到；b. 测量结构的传递函数，作逆 FFT 计算；c. 利用随机减量法。

由于一般结构在实际工作状况下，受到的都近似是随机激励，所以直接测量方法在一般实际测量中是不可能的，一般采用的是方法 (b), (c)。方法 (b) 中的传递函数的测量，可以采用多次平均技术来消除随机噪声的影响，获得光滑的传递函数，具有比较高的精度，只是需要一些复杂的测量仪器。随机减量技术是由 A. Henry, Jr. Cole, 在 1971 年提出的^[12]，这种方法将随机响应进行适当地累加运算消除响应中的随机部分和噪声，得到结构的自由响应。这种方法虽有一定的误差，但是简单可行，本文中的模拟实验采用了这种方法。

2.3 通过曲线拟合求解振型

如果一个 n 自由度的结构是可解耦的，则其自由响应可以写成：

$$x_k(t) = \sum_{r=1}^n (b_r \psi_k e^{\mu_r t} + b_r^* \psi_k^* e^{\mu_r^* t}) \quad (5)$$

其中 ψ_k 是结构第 r 阶模态的第 k 阶分量， μ_r 是结构的第 r 阶特征根， b_r 是常数，由初始条件决定。

将 (5) 式离散化，令 $x_i = x_k(t \Delta)$ ，根据 (5) 式得

$$x_i = \sum_{r=1}^n [b_r \psi_k \lambda_r^i + b_r^* \psi_k^* (\lambda_r^*)^i] \quad (6)$$

由前二节所介绍的内容，可以知道 x_i 和 λ_r 是已知的，根据线性最小二乘法原理，从

(6) 式可以求得 $b_r \psi_k$ ：

$$\{Q\} = [[\lambda]^\top [\lambda]]^{-1} [\lambda]^\top \{x_i\} \quad (7)$$

其中

$$\{Q\} = \begin{pmatrix} b_1 \psi_{k1} \\ b_1^* \psi_{k1}^* \\ \vdots \\ b_n \psi_{kn} \\ b_n^* \psi_{kn}^* \end{pmatrix}, \quad \{x_i\} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_L \end{pmatrix}, \quad [\lambda] = \begin{pmatrix} \lambda_1, \lambda_1^*, \dots, \lambda_n, \lambda_n^* \\ \lambda_1^2, (\lambda_1^*)^2, \dots, \lambda_n^2, (\lambda_n^*)^2 \\ \dots \\ \lambda_1^L, (\lambda_1^*)^L, \dots, \lambda_n^L, (\lambda_n^*)^L \end{pmatrix}$$

L 是数据长度。

当 k 取不同的值时，我们可以得到不同点 $b_r \psi_{k,r}$ 的值；由于初始条件是一样的，所以 b_r 对于不同的 k 值是相同的，即

$$b_r \psi_{1,r}, b_r \psi_{2,r}, \dots, b_r \psi_{n,r} = \psi_{1,r}, \psi_{2,r}, \dots, \psi_{n,r} \quad (8)$$

这是结构的第 r 阶振型。

这样，结构的全部模态参数便识别出来了。

3 利用 ARMAV 模型识别模态参数的原理

对于一个结构, 假设其第 j 点的输入是 $f_j(t)$, 第 i 点的理论输出是 $y_i(t)$, 实际输出是 $x_i(t)$, 测量过程中的干扰噪声是 $n(t)$, 则结构一般可用方框图表示如下:

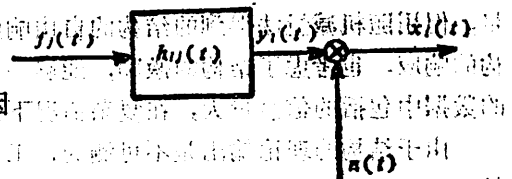


图 1 结构传递函数方框图

其中 $h_{ij}(t)$ 是结构的传递函数。

将 $h_{ij}(t)$ 进行 Laplace 变换, 并化成部分因式, 得

$$H_{ij}(s) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{A_{ik}}{s - \mu_k} + \frac{A_{ik}^*}{s - \mu_k^*} \right) \quad (9)$$

式中的 A_{ik} 称为模态留数, 可以表示成:

$$A_{ik} = \frac{\psi_{ik} \phi_{ik}}{a_k}$$

固定频率模态函数 (10)

其中 ψ_{ik} 和 ϕ_{ik} 是分别表示第 k 阶振型的第 i 阶和第 j 阶分量。

如果将 $x_i(t)$ 和 $f_j(t)$ 离散化后, 即令

$$x_i = x_i(t\Delta)$$

$$f_j = f_j(t\Delta)$$

则 x_i, f_j 之间的关系可以用一个二维的 ARMAV 模型表示:

$$\begin{bmatrix} 1 & \phi_{1,2,0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ f_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1,1,1} & \phi_{1,1,2} \\ \phi_{2,1,1} & \phi_{2,1,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ f_{i-1} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \phi_{1,1,p} & \phi_{1,1,2p} \\ \phi_{2,1,p} & \phi_{2,1,2p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i-p} \\ f_{i-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{2,i} \\ a_{1,i} \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} \theta_{1,1,1} & 0 \\ 0 & \theta_{2,2,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2,i-1} \\ a_{1,i-1} \end{bmatrix} - \dots - \begin{bmatrix} \theta_{1,1,p} & 0 \\ 0 & \theta_{2,2,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2,i-p} \\ a_{1,i-p} \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中 $p = 2 \times n$.

考虑 (11) 式中的第一个方程, 并两边做 z 变换:

$$x(z) = H_{ij}(z)F(z) + N(z)A(z) \quad (12)$$

其中

$$H_{ij}(z) = \frac{-\phi_{1,2,0} + \phi_{1,2,1}z^{-1} + \dots + \phi_{1,2,p}z^{-p}}{1 - \phi_{1,1,1}z^{-1} - \dots - \phi_{1,1,p}z^{-p}}$$

对线性系统有 $\phi_{1,2,p} = 0$, 这时将 $H_{ij}(z)$ 化成部分因式, 可得:

$$H_{ij}(z) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{g_{ik}}{1 - \lambda_k z^{-1}} + \frac{g_{ik}^*}{1 - \lambda_k^* z^{-1}} \right) \quad (13)$$

$H_{ij}(z)$ 实际上就是结构传递函数 $H_{ij}(s)$ 的离散表示, 为了从 $H_{ij}(z)$ 中得到结构的特性, 就必须将离散的 $H_{ij}(z)$ 转化成连续的 $H_{ij}(s)$.

脉冲响应函数是结构的一个重要特性。假设在离散化的过程中, 它保持不变。根据这一假设, 可得

$$\lambda_k = e^{\mu_k \Delta} \quad (14)$$

$$g_{ik} = A_{ik} \Delta \quad (15)$$

从 (14) 式可以得到结构的固有频率和阻尼比 (3 式, 4 式)。对不同的 k 值, 建立各

自的 ARMAV 模型, 求出 λ_i 和 $g_{i,k}$, 从 (15) 式可以得到:

$$g_{1,k}:g_{2,k}:\dots:g_{n,k} = A_{1,k}:A_{2,k}:\dots:A_{n,k} = \psi_{1,k}:\psi_{2,k}:\dots:\psi_{n,k} \quad (16)$$

这就是结构的第 k 阶振形, 这样就识别出结构的所有模态参数。

从以上的理论分析可以看出: ARMA 模型只考虑了结构的响应, 便于实际工作中的测量, 但用随机减量法得到的结构的自由响应有一定的误差。用 ARMAV 模型不仅考虑了结构的响应, 也考虑了结构的激励, 能够一次识别出结构的所有的模态参数, 同时由于所处理的数据中包括的信息量大, 在复杂情况下识别精度高。

由于结构的理论输出是不可测的, 工程上一般将含有噪声的实际输出当作理论输出进行处理, 从式 (12) 可以看出, ARMAV 模型将结构的输出分成两部分, 一部分是由激励力引起的, 另一部分是由噪声引起的, 由于考虑了噪声的影响, 所以 ARMAV 模型比 ARMA 模型有更高的抗干扰能力, 并且 ARMAV 不容易引入大量的虚假模态。

4 模拟实验的实例

因为实验过程中外部干扰因素比较多, 为了消除这些干扰因素的影响, 正确评价时间序列分析方法识别模态参数的能力, 采用模拟仿真技术是一种简单并能获得精确实验结果的方法, 并便于进行比较。对如图所示的一个二自由度的结构,

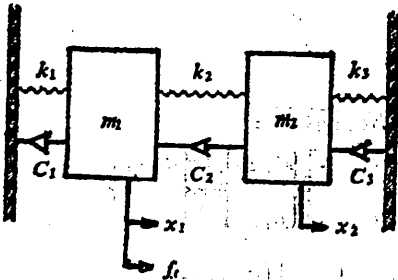


图 2 二自由度的振动系统

我们用计算机模拟了它的振动情况。结构中的 m, k, c 参数是可变的, 通过改变这些参数, 就可以得到大阻尼振动情形和密集模态与分离模态振动情形。

假设激励点在 m_1 上, 用计算机产生一组正态分布的随机序列, 模拟实际上的随机激励力 f_1 , 设

其方差 $\text{Var}(f_1) = 100$ 。然后用 Wilson- θ 积分法求出 m_1 和 m_2 的响应^[13], 每个响应序列取 2048 个数据, 并用随机减量法求得结构的自由响应, 建立 ARMA 和 ARMAV 模型时使用前 512 个数据。

4.1 分离模态情形

令 $m_1 = m_2 = 10, k_1 = k_2 = k_3 = 100, c_1 = 0.03, c_2 = 0.02, c_3 = 0.01$, 这时结构的二阶振动固有频率分得很开, 从传递函数上看, 两阶之间的耦合比较小, 这就是所谓的分离模态情形。

4.2 不同信噪比情形

令 $m_1 = m_2 = 10, k_1 = k_2 = k_3 = 100, c_1 = 0.3, c_2 = 0.2, c_3 = 0.1$, 用计算机产生另一组白噪声序列 a_1 , 加到 m_1, m_2 的响应中去, 改变 a_1 的方差, 就可以得到不同信噪比的振动情况。表 2 列举的是用顺序法在不同信噪比下的识别结果

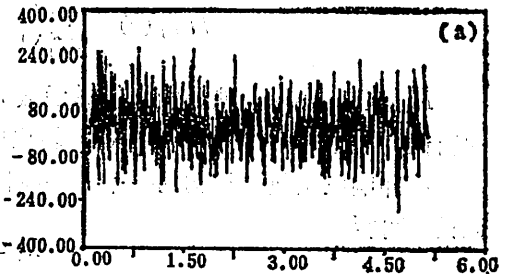


图 3 模拟的激励力和响应
(a) 随机激励力

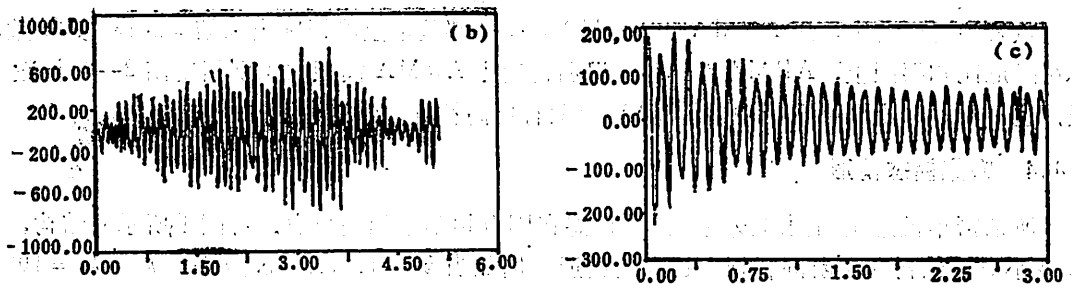


图 3 模拟的激励力和响应

(b) m_1 的响应

(c) 用随机减量法得到的 m_1 自由响应

从表中可以看出当 SNR 逐渐减少时, 用 ARMA 模型识别的精度也 逐渐降低, 直到 SNR = 8.5 时, 都识别不出结构的模态, 其中固有频率 (特别是第一阶固有频率) 识别的精度最高, 一般在 10% 以内, 这在工程上是允许的。相比之下, 用 ARMAV 模型识别的结果, 精度基本上不变, 这说明 ARMAV 模型有十分高的抗干扰能力, 这与以上的理论分析结果一致。

4.3 大阻尼情形

增大 c 值, 就可以增加结构各阶振动的阻尼比。表 3 列举是用时序法在各种不同的大阻尼下识别的结果。

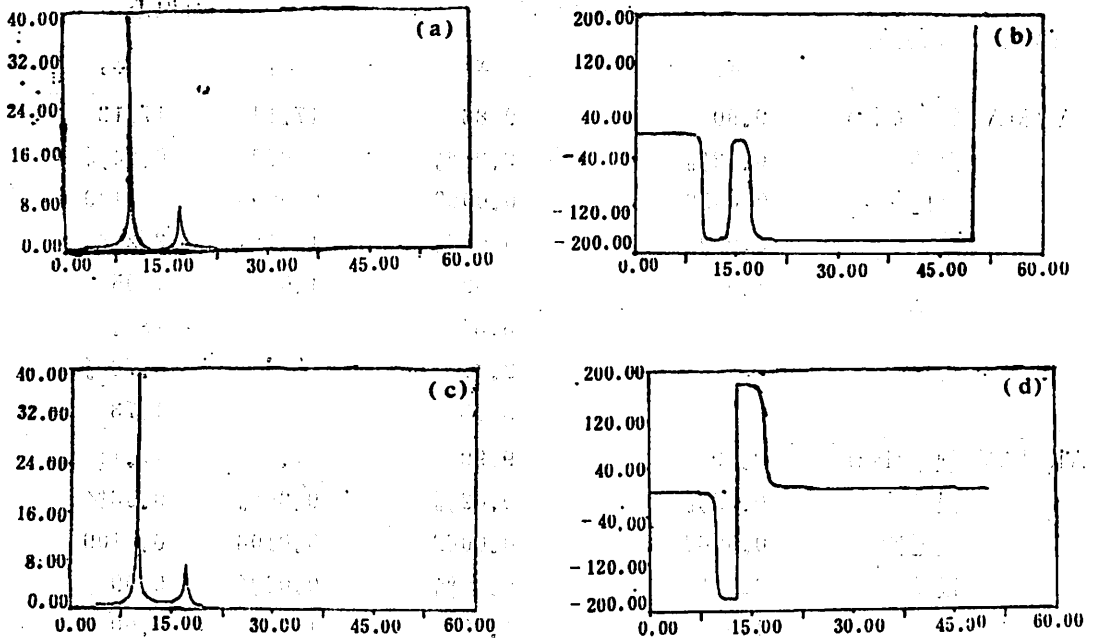


图 4 ARMAV模型得到的传递函数

(a) $H_{11}(f)$ 的增益,

(b) $H_{11}(f)$ 的相位

(c) $H_{21}(f)$ 的增益,

(d) $H_{21}(f)$ 的相位

从表中可以看出,用 ARMA 和 ARMAV 模型都基本上能识别出来结构的模态参数,但在阻尼比和振型上,ARMAV 模型的识别精度比 ARMA 模型的识别精度高 2—3 个数级,这证明了以上理论分析中 ARMAV 模型有更高精度的结论。

4.4 密集模态情形

所谓密集模态是指两阶或更多阶的模态在固有频率上相差很少。对图 1 所示的结构,当 k_2 变小时,结构的二阶固有频率越来越接近,例如当 $k_2=1$, $m_1=m_2=10$, $k_1=k_3=100$, $c_1=0.3$, $c_2=0.2$, $c_3=0.1$, 时,二阶频率分别为 9.8859 Hz, 9.9843 Hz, 只相差 0.1 Hz, 这表明结构的二阶模态已形成所谓的密集模态。表 4 是当 $k_2=50, 10, 1$ 时,用时序法识别的结果。

从表中可以看出 ARMA 和 ARMAV 模型都能正确地识别出结构的固有频率。但 ARMA 模型误别阻尼比和振型的误差十分大,当 $k_2=1$ 时,甚至没有识别出结构的振型。ARMAV 模型的识别精度十分高,当 k_2 逐渐变小时,识别精度基本上没变,这也证明了在复杂情况下,ARMAV 模型有更高的识别精度。

表 1 是用 ARMA 和 ARMAV 模型识别的结果,从表中可以看出,两种模型的识别精度都十分高。下图给出的是用 ARMAV 模型识别出的传递函数。

表 1 在分离模态情况下两种模型的识别值
($m_1=m_2=10$, $k_1=k_2=k_3=100$, $c_1=0.03$, $c_2=0.02$, $c_3=0.01$)

模 型	识别项	第一阶模态		第二阶模态	
		x_1	x_2	x_1	x_2
ARMA	频率(Hz)	9.90	9.88	17.14	17.13
	误差	0.12%	9.95%	0.08%	0.04%
	阻尼比	0.0059	0.0062	0.0096	0.0109
	误差	5.97%	0.06%	11.1%	2.21%
	振型	1.0	1.02	1.0	1.05
	误差		$<6.34^\circ$		$<182.4^\circ$
ARMAV	频率(Hz)	9.99	9.99	17.11	17.11
	误差	0.02%	0.02%	0.06%	0.06%
	阻尼比	0.0062	0.0062	0.0108	0.0109
	误差	0.00%	0.00%	0.09%	0.09%
	振型	1.0	1.00	1.0	1.00
	误差		$<0.37^\circ$		$<180.6^\circ$
		0.06%		0.06%	
		$<0.01^\circ$		$<0.03^\circ$	

表 2 在不同信噪比下两种模型的识别值

($m_1 = m_2 = 10, k_1 = k_2 = k_3 = 100, \theta_1 = 0.3, c_2 = 0.2, c_3 = 0.1$)

模型	识别项	SNR = 28.5dB		SNR = 18.5dB		SNR = 8.5dB	
		第一阶模态	第二阶模态	第一阶模态	第二阶模态	第一阶模态	第二阶模态
ARMA	频率 (Hz)	9.91	17.04	9.87	16.67	9.82	15.64
	误差	0.13%	0.57%	0.26%	1.02%	0.78%	8.64%
	阻尼比	0.047	0.118	0.049	0.056	0.069	0.182
	误差	25.1%	9.25%	21.4%	10.6%	11.1%	70.0%
	振型	1.0	1.25	1.0	1.01	*	*
	误差	<7.75°	<201.8°	<7.29°	<187.2°		
	误差	14.2%	25.5%	1.08%	61.9%		
ARMAV	频率 (Hz)	9.89	17.10	9.89	17.10	9.90	17.11
	误差	0.03%	0.05%	0.03%	0.03%	0.06%	0.06%
	阻尼比	0.062	0.108	0.063	0.063	0.064	0.108
	误差	0.14%	0.21%	0.71%	0.71%	2.40%	2.40%
	振型	1.0	1.00	1.0	1.00	1.0	1.00
	误差	<3.54°	<186.4°	<3.51°	<186.8°	<3.36°	<187.9°
	误差	0.02%	1.02%	0.04%	1.25%	0.23%	2.59%
	<0.02°	<0.26°	<0.04°	<0.53°	<0.20°	<1.71°	

表 3 在各种大阻尼情况下两种模型的识别值

($m_1 = m_2 = 10, k_1 = k_2 = 100$)

模型	识别值	$c_1 = 0.6, c_2 = 0.4, c_3 = 0.2$				$c_1 = 0.9, c_2 = 0.7, c_3 = 0.5$				$c_1 = 0.9, c_2 = 0.8, c_3 = 0.7$			
		第一阶模态		第二阶模态		第一阶模态		第二阶模态		第一阶模态		第二阶模态	
		x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
ARMA	频率 (Hz)	9.78	9.81	18.31	16.86	9.60	9.69	18.01	17.00	9.56	9.63	17.38	17.23
	误差	1.08%	0.72%	5.84%	1.52%	2.94%	1.96%	5.16%	0.73%	3.31%	2.62%	1.50%	0.64%
	阻尼比	0.088	0.103	0.184	0.195	0.163	0.167	0.302	0.278	0.182	0.188	0.349	0.294
	误差	29.2%	16.9%	14.3%	9.45%	24.9%	23.0%	20.0%	26.2%	26.5%	24.3%	18.9%	31.7%
	振型	1.0	1.22	1.0	1.37	1.0	1.07	1.0	0.84	1.0	1.10	1.0	0.64
	误差		<0.36°		<248.8°		<3.76°		<262.6°		<4.43°		<252.0°
			20.0%		43.0%		4.27%		8.86%		8.12%		33.4%
			<6.74°		<56.0°		<3.18°		<71.1°		<0.98°		<60.5°
ARMAV	频率 (Hz)	9.92	9.92	17.05	17.05	9.92	9.92	17.05	17.05	9.86	9.89	16.87	17.09
	误差	0.36%	0.36%	0.44%	0.44%	0.36%	0.36%	0.44%	0.44%	0.24%	0.05%	1.32%	0.21%
	阻尼比	0.124	0.124	0.216	0.217	0.217	0.217	0.378	0.378	0.245	0.248	0.441	0.431
	误差	0.41%	0.41%	0.29%	0.29%	0.41%	0.41%	0.29%	0.31%	1.22%	0.05%	2.45%	0.05%
	振型	1.0	1.02	1.0	0.95	1.0	1.03	1.0	0.92	1.0	1.04	1.0	0.91
	误差		<7.10°		<192.1°		<6.9°		<191.5°		<3.46°		<185.1°
			0.00%		0.00%		0.02%		0.01%		2.64%		4.56%
			<0.01°		<0.20°		<0.07°		<0.05°		<0.00°		<0.47°

5 结论

ARMA模型只利用了结构的随机响应,因此能方便地用于现场的“在线”测量,并能在各种复杂的情况下识别出结构的固有频率,但由于只利用响应中的信息,所以不能完全分析出产生信号的结构特性,特别是在振型的识别过程中,必须利用结构的自由响应,所以用ARMA模型识别结构的阻尼比和振型时精度比较低,在复杂的情况下,甚至都识别不出来,这是利用ARMA模型的缺陷。

ARMA模型不仅考虑了结构的响应,还考虑了结构的激励,所以能在低信噪比、大阻尼和密集模态等各种复杂场合下正确地认识出结构的所有模态参数。从本文中可以看出:利用ARMAV模型识别模态参数的方法是一种抗干扰能力强,识别大阻尼和密集模态能力强,并有高识别精度的识别方法。

但是,用ARMA和ARMAV模型识别模态参数,所需时间比较长,这主要是由于建模过程中采用了非线性最小二乘法的缘故。尽管可用高阶的AR模型代替ARMA模型,并采用快速和精确的marple算法,但麻烦的是AR模型阶次太高,产生大量的虚拟模态,必须由人们根据经验加以剔除,所以发展快速的建模方法是将时序方法识别模态参数推向实际应用的关键。

参 考 文 献

- [1] 杨叔子等,机械工程(增刊),1984年,p1—17.
- [2] 顾金福等,时序分析在机械工程中的应用论文集(第二集),机械工程出版社,1987年,p74—79.
- [3] 何松岭,“用时序法识别结构模态参数的探讨”,中国振动工程学会成立大会论文,南京,1987年5月.
- [4] 唐秀近等,机械工程(增刊),1984年,p107—114.
- [5] Kim, K.J., Eman, K.F., Wu, S.M., “Modal Analysis of Mechanical Structures by Time Series Approach”, Proceedings of the 10th Annual NAMBC, 1982, p417—421.
- [6] 高济众,机械工程(增刊),1984年,p139—146.
- [7] Yuan, J.X. & Wu, S.M., *Journal of Engineering*, 1985, No.9, p64—69.
- [8] 傅志方等,第三届全国振动理论及应用学术会议论文集,1987年8月, p. 1273—1280.
- [9] 张景绘等,振动与冲击,1983, p3—11.
- [10] 杨叔子等,华中工学院学报,1983年10月, p9—14.
- [11] Pandit, S.M., Wu, S.M. *Time Series and System Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1983.
- [12] 陈德成等,振动与冲击,1984年4月, p31—39.
- [13] Bathe, K.J. and Wilson, E. L. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1 (1973), 283~290.

Identification of Modal Parameters by Using Time Series Analysis

Li Chuangqi

(Dept. of Precision Machinery and Instrumentation)

Zhang Peiqing

(Dept. of Modern Mechanics)

Yang Qianjin

(Dept. of Precision Machinery and Instrumentation)

Abstract

The identification of modal parameters by using time series analysis is studied in this paper. The principle of identification of modal parameters by ARMA and ARMAV models is introduced, the abilities identifying modal parameters in separate modes, different SNR, high damping, close modes by using simulated experiments are checked, the conclusion is that the ARMAV model is an efficient method identifying modal parameters.

Key words: time series analysis, identification of modal parameters.

关键词

本文研究了用时间序列分析进行模态参数识别的原理。介绍了用ARMA和ARMAV模型识别模态参数的原理，并通过模拟实验检查了在不同信噪比、高阻尼、接近模态等条件下识别模态参数的能力。结论是ARMAV模型是一种识别模态参数的有效方法。

关键词：时间序列分析，模态参数识别。

MOSA—II 型多道光谱分析仪的研制

郭立 杨周京 方树尧

(电工电子学教研室)

摘 要

MOSA—II (Multichannel Optical Spectrum Analyzer) 型多道光谱分析仪是一个快速光谱数据采集、分析和图形处理系统。它由微光摄象机、数据采集与定时控制电路、摄象管几何畸变失真和信号非均匀失真校正电路、IBMPC/XT 和绘图仪组成。该系统具有光谱的单次采集、连续采集、噪声处理、谱线的代数运算和几何变换、谱线的实时显示、连续谱线族的三维显示等功能。该仪器灵敏度高 ($18\text{Photons}/\text{sec}\cdot\text{mm}^2$)、分析速度快 ($64\mu\text{s}/\text{per channel}$)、频响范围宽 (1800\AA — 8000\AA)，经校正后摄象管的几何畸变失真 $<2\%$ ，幅度误差 $<5\%$ 。是一种可供实际使用，性能较好的光谱分析系统。

关键词：多道光谱分析仪，谱线的实时显示，连续谱线族的三维显示，摄象管失真的校正。

1 前言

多道光谱分析仪是以微型计算机为采集和处理数据核心的光谱分析仪。这种光谱分析仪采用摄象管代替光谱底板，克服了传统方法的复杂步骤，可一次性地记录、显示光谱强度的变化，有效地提高信噪比。可广泛地应用于光谱分析的各个领域。

由于多道光谱分析仪测试精度高、分析速度快、功能齐全，美国、西德近几年大力开展了对它的研制，先后推出了各种多道光谱分析仪，但因其价格昂贵，在我国难以普及、推广。

我们研制的 MOSA—II 型多道光谱分析仪采用国产摄象管，配以我们研制的接口部件与软件，实现了多道光谱分析仪的国产化，从而打破了这种高技术仪器依赖进口的局面。

MOSA—II 型多道光谱分析仪具有以下主要功能：

①可在 512 个通道中同时采集、综合信号，信噪比改善了 $\sqrt{512}=23$ 倍，测量时间减少了 512 倍^[1]。

1988 年 4 月 5 日收到。

- ②具有光谱的单次采集（一次只采集一根谱线）、连续采集（一次采集十根谱线）功能。
- ③可由外部光源提供同步触发脉冲，进行外同步采集，用于捕捉如闪光灯、爆炸实验等瞬态光源的光谱信号。
- ④可任选所采集的谱线，并在屏幕上对谱线进行高分辨率或中分辨率彩色二种模式显示。
- ⑤可将连续采集的谱线族同时在屏幕上进行三维显示，用于对时变光信号进行动态测试，研究光谱的变化趋势。
- ⑥具有噪声处理功能，可消除光谱的背景噪声，该仪器的感光灵敏度可高达 $18 \text{ Photons/sec} \cdot \text{mm}^2$ 。
- ⑦可用三次多项式和二次多项式对摄象管进行几何畸变失真和信号非均匀失真进行校正，校正后，摄象管的几何畸变失真 $< 2\%$ ，信号非均匀失真 $< 5\%$ 。
- ⑧可对谱线的任意区间实施积分运算，积分上下限由左右光标确定，并在屏幕上显示功率谱。可对光谱曲线实施几何变换和代数运算，并将运算处理后的谱线显示出来。
- ⑨可将谱线存盘形成文件，并可从磁盘中回放曲线，并在屏幕上显示。
- ⑩光谱曲线可通过绘图仪绘出，光谱数据可由打印机输出。

2. 系统的基本结构

图 1 是系统原理图，光源被聚焦在光学系统的输入狭缝上，经色散元件后，按不同波长形成一系列强弱不等的谱线，同时输入至微光摄象机。经系统扫描，模数转换后，信号变为数据贮存在计算机内存里，再经运算处理后，在 CRT 上显示谱图，由绘图仪绘制谱图，并将谱图数据打印输出。

2.1 微光摄象机

采用国产 SF-34 增强型硅靶摄象管，靶增益为 1500；光谱响应为 $1800 \text{ \AA} \sim 8000 \text{ \AA}$ ，暗电流小于 $25 \mu\text{A}$ 。

在 $12.8 \times 9.6 \text{ mm}^2$ 的靶面上，电子枪沿 y 方向由下至上进行行扫描，帧扫描则是沿 x 轴方向加有 512 个台阶的阶梯波，每一帧由 512 行逐行扫描组成，如图 2 所示。

经过视频放大后的每帧 512 行信号对应着靶面上的 512 道光路。当光源经光学系统色散而形成一条垂直亮线落在硅靶靶面上，亮线位置所对应的视频信号就会出现尖峰。不同波长的光源色散后落在靶面上不同位置，我们根据视频信号尖峰位置和幅度就可以确定光源光谱的波长和相对强度。视频信号与靶面光谱谱线的对应关系如图 3 所示。

2.2 数据采集与定时控制电路

为了提高光谱测试速度与精度，采用了 12 位 A/D 转换器 AD574（转换速度为 $25 \mu\text{s}$ ），系

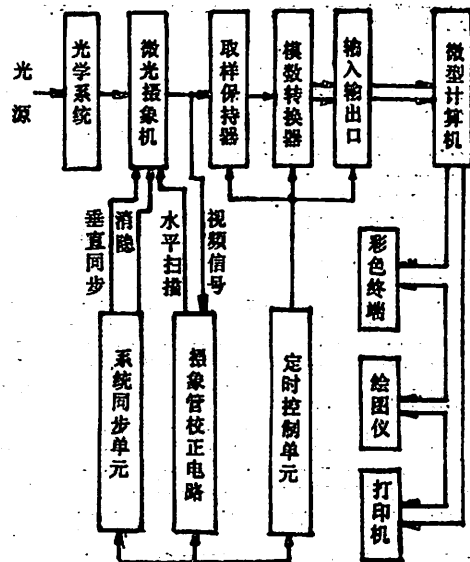


图 1 系统原理框图

统用晶振输出作为时间基准,经过 8253 定时器编程后作为定时脉冲。定时脉冲的前沿触发单

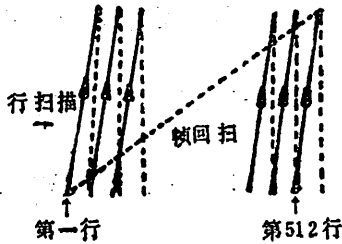


图 2 摄像管扫描原理图

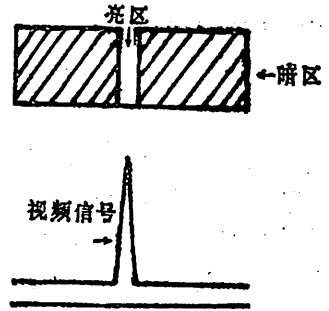


图 3 视频信号与靶面谱线对应关系

稳态电路,获得 $6\mu\text{s}$ 的负脉冲作为取样保持电路 AD582 的片选信号, $6\mu\text{s}$ 取样结束后,由单稳态电路可得到宽度大于 $25\mu\text{s}$ 的负脉冲加到 AD574 的控制端,启动模数转换器 AD574 开始转换^[1],这时 AD574 的状态线 STS 变为高电平开始转换,经过 $25\mu\text{s}$ 转换结束,STS 变为低电平。每次 STS 跳变触发单稳态电路得到 $6\mu\text{s}$ 的正脉冲作为中断请求信号,调用中断服务程序,通过并行口 8255 将 12 位数据送入计算机内存。

2.3 微型计算机接口部分

微型计算机采用 IBMPC/XT,要求配置有彩色终端、彩色多笔绘图仪与打印机,使用了 2 片 74LS138 用于产生 8253 和 8255 的口地址。

2.4 摄像管的校正电路

为了消除摄像管的几何畸变失真和信号非均匀失真,本仪器采用了非线性阶梯波发生器对摄像管 x 方向扫描;用可变增益数控放大器对视频信号按 x 方向进行不同程度的衰减,有效地克服了这二种失真。

非线性阶梯波发生器用 12 位数模转换器 (DAC80) 来产生扫描所需要的阶梯波。二片 EPROM (2716) 并联成 12 位使用,其 12 位数据输出线分别接到数模转换器 DAC80 的 12 位数据输入端。在 EPROM 的内存单元里存有三次多项式校正曲线的 512 个数据,当行激励脉冲触发电路的计数单元而改变 EPROM 地址时,EPROM 里的内容通过数模转换器变成相应的电压输出,在数模转换器的输出端便得到了所希望的 x 轴扫描阶梯波电压。

非均匀失真的校正电路由数模转换器和运算放大器所组成的数控增益放大器、EPROM 所组成。在 EPROM 中存放有非均匀失真的三次多项式校正曲线的 512 个数据,摄像管输出的视频信号经前置运放倒相放大后,作为数模转换器的参考电压输入端,当电路计数单元改变 EPROM 地址时,EPROM 的内容在 x 轴的不同位置给数模转换器输入不同的数字量,从而使视频信号得到不同程度的衰减,整个靶面的信号增益变得均匀一致。

3 软件结构和主要功能

图 4 为本系统软件框图,全部程序用汇编语言和 PASCAL 语言编写,用户界面采用菜单式驱动。程序采用模块化结构,分为数据采集、文件处理、谱线的实时显示、谱线的运算处理和谱线绘制与数据打印五个模块。

3.1 数据采集模块

数据采集程序用汇编语言编写。具有内采集（由仪器自身提供同步脉冲）和外采集（由外部光学系统提供同步脉冲）二种方式。二种方式中都具有单次采集、连续采集和噪声处理采集三种采集模式。

数据采集的关键步骤是：1) 检测帧同步脉冲的上升沿，一旦产生上升沿，则启动中断服务程序。2) 确定中断类型，本系统选用 IBMPC/XT 的中断请求 2，由于中断类型号 = 8 + 中断请求源序号^[5]，因此中断请求 2 的中断类型为 OAH。3) 在中断矢量表中，填写中断服务程序地址，8088 中断矢量表的入口地址 = 中断类型号 × 4，因此将中断服务程序的地址填写在 0028H 开始的四个字节内。

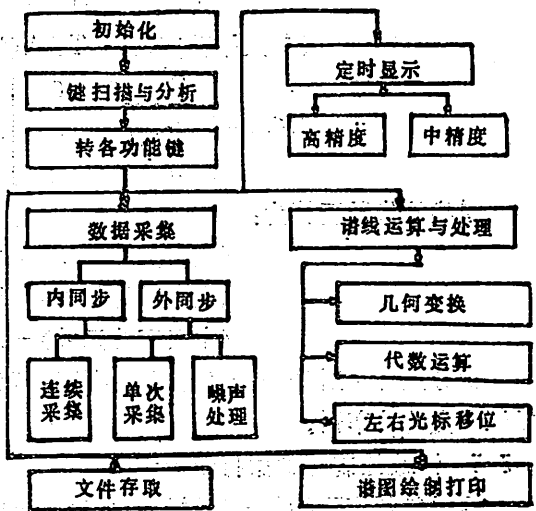


图 4 软件流程图

3.2 文件存取模块

可将采集的数据以谱线为单位存盘，并可从磁盘所存的谱线数据回放到内存，供显示与处理使用。

3.3 谱线的实时显示模块

为了将采集的光谱数据、对应的道数转换成屏幕视图区内谱线的坐标位置，可通过下面变换来实现：

$$\begin{bmatrix} y_i \\ x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

式中 x_i 、 y_i 为谱线在视图区内的坐标， v_i 为转换后的数据， i 为光谱的道数， $1 \leq i \leq 512$ 。

若视图区内，谱线纵坐标最大值为 Y_{\max} ，最小值为 Y_{\min} ，AD574 转换的最大正值为 4095，最小值为 0，可得 $a = \frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{4095}$ ， $b = Y_{\min}$ 。

在程序中，定义谱线为：

$$\text{谱线} = \text{Curve}(\text{谱线名}) \langle \text{型值点坐标} \{x_i, y_i\} i = 1^{12} \rangle$$

定义谱线的输出：

$$\langle \text{谱线输出} \rangle = \text{DIS} \langle \text{谱线} \rangle, \langle \text{颜色} \rangle, \langle \text{显示模式} \rangle$$

$$\langle \text{三维谱线输出} \rangle = \text{3D} \langle \text{起始谱线} \rangle, \langle \text{终止谱线} \rangle, \langle \text{颜色} \rangle, \langle \text{显示模式} \rangle$$

上述定义中，颜色编码为 {0, 1, 2, 3}，分别代表四种不同的颜色；显示模式定义为 {h, l}，h 代表高分辨率显示，l 为中分辨彩色显示。

3.4 谱线的运算处理模块

包括左右光标的控制、基本几何变换、基本算术运算以及积分运算。
谱线的几何变换：

〈定义比例变换〉= SCA〈比例变换参考点坐标 (x_0, y_0) 〉,

〈 x, y 方向上的比例系数 S_x, S_y 〉

〈定义平移变换〉= TRA〈沿 x, y 方向的平移量 T_x, T_y 〉

$$SCA = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad TRA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix}$$

谱线的代数运算为:

〈定义加法运算〉= ADD〈谱线〉, 〈谱线〉

〈定义减法运算〉= SUB〈谱线〉, 〈谱线〉

〈定义积分运算〉= ING〈谱线〉, 〈积分上下限 (x_s, x_e) 〉

积分运算可对任一谱线的任一区间进行积分, 积分上下限由左右光标位置给出, 并实时显示出光的功率谱。

3.5 谱线绘制与数据打印模块

通过绘图仪可绘制出经过运算处理的谱图、彩色三维谱图, 谱线的数据可由打印机给出。

4 仪器性能

本仪器的绝对灵敏度为 $18 \text{ Phons/sec} \cdot \text{mm}^2$, 图5a 是仪器在 $18 \text{ Phons/sec} \cdot \text{mm}^2$ 入射光的情况下, 累加 300 次所测的光谱。

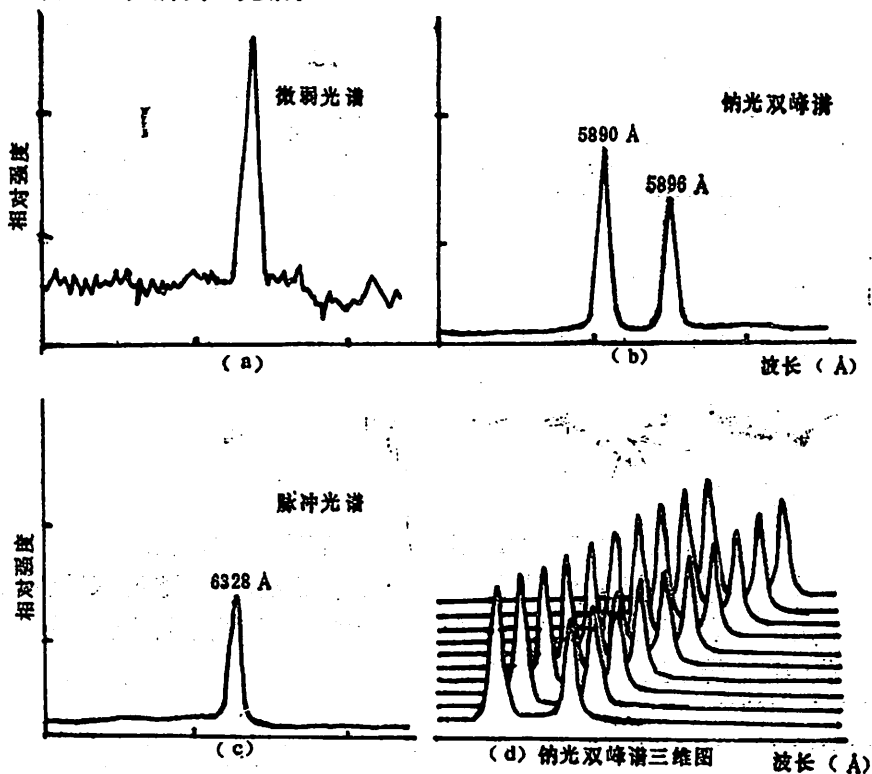


图 5 实验光谱图

图 5b 是仪器所测的钠光灯双峰谱图, 转动光栅时, 使双峰谱线在靶面上移动, 可测得在不同位置上, 双峰谱线间距误差 $< 2\%$, 幅度误差 $< 5\%$ 。

图 5c 是仪器所测的 He-Ne 激光器的脉冲光谱。

为了观察光谱动态特性与稳定度, 本仪器可在屏幕上显示连续采集的谱线族的三维图, 图 5d 为本仪器所绘制的钠光灯双峰谱的三维图形。

5 结束语

MOSA—II 多道光谱分析仪于 1988 年 1 月 15 日在中国科技大学通过了技术鉴定, 确认该仪器为国内首创, 在光谱数据采集、处理技术及软件开发方面达到了国际水平。它的研制成功为革新我国光谱分析技术作出了贡献。

仪器研制成功后, 曾在中国科技大学物理系进行了一段时间实验, 运行正常、稳定。

该仪器结构紧凑, 使用方便, 在激光、等离子物理、生物学、冶金地质等各种光谱测试中广泛使用。

参 考 文 献

- [1] OMA III, EG & G Princeton Applies Research, U. S. A., (1984), p3.
- [2] Data Acquisition Components and Catlog, Analog Devices Inc., U. S. A., (1981), Chap. 10, p38.
- [3] Paul, M. D., *Byte*, 10 (1985), 224.

The Development of MOSA—II Multichannel Optical Spectrum Analyzer

Guo Li Yang Zhoujing Fang Shuyao

(Division of Electrical Engineering and Electronics)

Abstract

The MOSA-II Multichannel Optical Spectrum Analyzer is a high-performance, easy-to-use measurement system for extremely rapid spectral data acquisition, processing and presentation. It consists of four parts: vidicon, data acquiring and timing circuit, the correcting circuit for the geometric distortion and the non-uniform distortion of the vidicon, IBMPC/XT and color plotter. The system has the following functions: single spectrum acquisition, continuous acquisition of multi spectra, noise reduction, math. operations (in-

cluding addition, subtraction, multiplication, and division) and geometric transformation of the spectra, and 3D-presentation of the spectra on both the color screen and the plotter. The absolute sensitivity of the system is 18 Photons/sec·mm². The access time for data acquisition is 64 μs/per channel and the spectrum range is 1800 Å—8000 Å, the geometric distortion <2%, the amplitude error <5%.

Key words, multichannel optical spectrum analyzer, real-time display of the spectra, 3D presentation of the multi-spectra, correcting for the distortion of the vidicon.

新型组合电收尘器的结构和机理

李浩林 周惠民

(合肥水泥研究设计院)

黄教民

(中国科学技术大学)

摘 要

本文介绍了新型组合电收尘器的结构和机理。这种组合收尘器把电气收尘和机械收尘组合起来,进行电旋、电抑、电凝三级收尘,其实用的入口含尘浓度为 $176.24\text{g}/\text{Nm}^3$,排放浓度为 $85.4\text{mg}/\text{Nm}^3$,收尘效率为99.95%。

关键词: 电收尘器,管式电收尘器,电旋风,电抑制,电凝聚,双区管式电收尘器,组合电收尘器。

1 引言

烟气净化方式大致分为电气收尘和机械收尘两种。相对而言,前者的主要优点是收尘效率高, $\geq 99\%$;而机械收尘,如旋风收尘器、沉降宝等,结构简单、价格低廉。两者如能组合,则可取长补短。苏联专利 SU446313 电旋风收尘器,以旋风收尘器的排气芯管为放电极,形成电旋组合收尘器。它既有旋风收尘器结构简单、耗钢少、体积小等优点,又把离心力和电场力组合起来,提高了收尘效率。但因保留了旋风收尘器的模式,存在“内旋气流”和“上灰环”问题,使其实用于磨机的收尘效率只能接近95%。这种效率,对电收尘器而言,是难以推广的。美、日专利 US3970437 和 JP78-98577 等收尘器亦是如此。本文介绍的中国专利 CN86104221 新型组合电收尘器,属套管结构,采用内管电旋风、灰斗电抑制及外管电凝聚等三级收尘,用于水泥磨尾收尘,经环保部门测定,入口含尘浓度 $176.24\text{g}/\text{Nm}^3$,排放含尘浓度 $85.4\text{mg}/\text{Nm}^3$,收尘效率高达99.95%。

2 新型组合电收尘器 (CEP) 的研究目标

目前国内外使用的电收尘器大多为板式电收尘器 (EP) 和立管式电收尘器 (TEP)

二类。近十年来，国外研制的电旋风收尘器（EC）和双区管式电收尘器（TTEP）作为TEP新技术使人刮目相看。本文研制的新型组合电收尘器（CEP）既要吸收这些新技术又要解决其存在的技术难题。其技术难题及我们的方案对策如下：

技术难题

- 1) EP 投资多，钢耗多，技术难度大；
- 2) TEP 占空高，容量小，气流向上；
- 3) TEP 单电场，运行难以稳定可靠；
- 4) 国外 EC 存在“内旋气流”和“上灰环”问题；
- 5) 国外 TTEP 处理风量小，不能处理高浓度烟尘；
- 6) 电抑收尘的安全实用问题。

方案对策

- 1) 采用电气收尘和机械收尘相组合；
- 2) 套管组合 TEP；
- 3) 采用二电场三级收尘；
- 4) 采用无排气芯管的内管 EC，使旋流在灰斗中减速折向外管；
- 5) 采用外管 TTEP，增大收尘截面和尘表面积；
- 6) 采用灰斗中电抑收尘。

方案对策概括起来是：（1）两台 TEP 的同轴组合；（2）单区和双区 TEP 的串联组合；（3）电力和离心力的电旋组合；（4）电力和重力的电抑组合；（5）各 CEP 的串、并联组合，故称之为组合电收尘器（Combined Electrostatic Precipitator）。

3 新型 CEP 的结构和烟气流程

新型 CEP 的结构有内管电旋风收尘器、外管双区电收尘器、汇风筒、灰斗、振打清灰装置等五个部分组成。

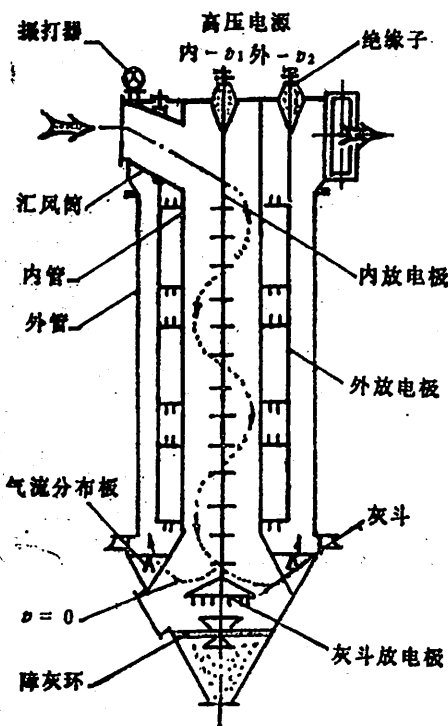


图 1 组合电收尘器原理图

CEP的同轴内外 TEP 上端，由汇风筒使其彼此隔离，下端在灰斗中相互贯通。内 TEP 由内放电极和内管组成。内放电极是“十”字形芒刺，其下端连接伞形放电极使其和灰斗形成电抑收尘器。外放电极位于内外管之间，其形如筒，端部或针或齿的芒刺在内外管间形成不均匀电场的电离区，中间筒体和内外管形成均匀电场的收尘区，从而形成外管双区电收尘器。

CEP 的烟气流程如图 1 所示。烟气由汇风筒进风管下斜切向高速进入内管电场形成第一级电旋风收尘，由电场力和离心力共同扑尘。因为烟气螺旋向下故而高速对清灰有利。烟气到达灰斗时，由于灰斗截面数倍于内管，根据旋转矩不变原理，其径向风速和轴向风速大为降低。其轴向风速在由向下转而向上的变向界面中风速为零。在风速为零的界面附近的放电极和灰斗形成第二级电抑收尘。经过二级收尘后的烟气，含尘浓度低，但残尘粒难难收，此正适合外管双区电收尘器的收尘特性。残尘在电离区再次荷电，在收尘区的均匀电场中，由“空间

凝聚”和“电场凝聚”进行第三级收尘。为了增加收尘效果，外放电极由几段组成，从而反复荷电和凝聚收尘。净化后的烟气再由汇风筒的出风口排出。

为了外管双区电场环形截面的风量均布，灰斗设置了“人”字形布风板，在汇风筒和灰斗盖板上各设一振动清灰装置，在灰斗中设置障灰环以防止二次扬灰。为便于检修，除了内外管和灰斗检查门外，特地把外管设计成“哈夫”结构。

4 CEP 的收尘机理

电收尘器的收尘效率是由下列 Deutsch 公式判断的：

$$\eta = 1 - \exp\left(-\frac{A_c}{Q_v} \cdot w\right) \quad (1)$$

或
$$\eta = 1 - \exp(-SCA \cdot w) \quad (2)$$

式(1)和(2)表明，收尘效率 η 随着驱进速度 w 和收尘面积 A_c 的增大而增加，随着处理风量 Q_v 的增大而减少， $SCA = \frac{A_c}{Q_v}$ 为比面积，是电收尘器的技术经济参数。

由 CEP 的结构可知，它是内外管二电场、三级收尘的新型电收尘器。下面分别叙述三级收尘的机理及收尘效率。

4.1 第一级内管电旋风收尘

电旋风收尘器是对烟尘粒子施加离心力使其脱离气流的装置。把电力和离心力组合起来使粒子脱离气流的装置称之为电旋风收尘器。

CEP 的内管为电旋风收尘器。现设内管直径为 D_1 ，在任一旋流半径 R 处的气流流速为 v_c 和场强为 E ，粒径为 d 、比重为 r 、质量为 m 的粉尘，其荷电量为 Q ，烟气的粘滞系数为 μ ，假定粒子在 R 处以 w_1 驱进速度向管壁运动。如图 2 所示，粒子主要受力为：电场力 $F_c = EQ$ ，离心力 $F_c = m \frac{v_c^2}{R}$ ，粘滞力 $F_{1s} = 3\pi d \mu w_1$ ，惯性力 $F_{1s} =$

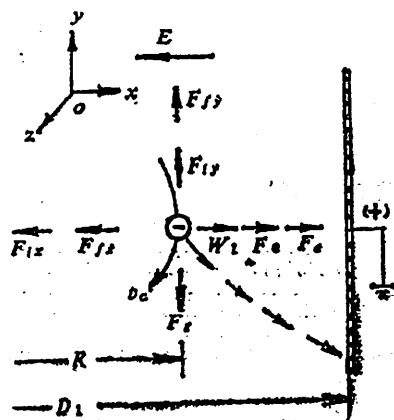


图 2 电旋风收尘的粒子的驱进速度

$m \frac{dw_1}{dt}$ 。重力 $F_g = mg$ 较 F_c ， F_{1s} 相差百倍，可忽略不

计。根据旋转矩不变原理， v_c 为常数，故 y 和 z 坐标的力学方程可予简略，只剩下 x 坐标方程 $\Sigma F_x = 0$ ，即

$$EQ + m \frac{v_c^2}{R} - 3\pi d \mu w_1 - m \frac{dw_1}{dt} = 0 \quad (3)$$

移项得

$$\frac{m}{EQ + m \frac{v_c^2}{R}} \cdot \frac{dw_1}{dt} + \frac{3\pi d \mu}{EQ + m \frac{v_c^2}{R}} \cdot w_1 = 1 \quad (4)$$

利用 Laplace 变换，很简便地即可得方程的解

$$w_1(t) = \frac{EQ + m \frac{v_c^2}{R}}{3\pi\mu d} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{m/(3\pi\mu d)}\right) \right] \quad (5)$$

式中 $\frac{m}{3\pi\mu d}$ 为时间常数，在 5 倍于时间常数的范围内， w_1 接近其终值，其指数部分在正常情况下可以忽略，

$$\text{故} \quad w_1 = \frac{EQ + m \frac{v_c^2}{R}}{3\pi\mu d} = \frac{EQ}{3\pi\mu d} + \frac{m \frac{v_c^2}{R}}{3\pi\mu d} = w_{1.} + w_{1.} \quad (6)$$

$$\text{式中} \quad w_{1.} = \frac{EQ}{3\pi\mu d}, \quad w_{1.} = \frac{m \frac{v_c^2}{R}}{3\pi\mu d} = \frac{d^2 v_c^2}{18\mu R} \cdot r$$

$w_{1.}$ 即为普通电收尘器的驱进速度， $w_{1.}$ 为相当于普通旋风收尘器的粒子分离速度。

假定内管高度为 H ，其烟气轴向风速为 v_1 ，则收尘面积 $A_{c.1} = \pi D_1 H$ ，烟气流量 $Q_v = \frac{1}{4} \pi D_1 v_1$ ，按 (1) 式，内管电旋风收尘效率

$$\eta_1 = 1 - \exp\left(-\frac{A_{c.1}}{Q_v} \cdot w_1\right) \quad (7)$$

$$\text{或} \quad \eta_1 = 1 - \exp\left(-\frac{4H}{D_1 v_1} \cdot w_1\right) \quad (8)$$

$$\text{代入 (6) 式} \quad \eta_1 = 1 - \exp\left[-\frac{4H}{D_1 v_1} (w_{1.} + w_{1.})\right] \quad (9)$$

对于普通电收尘器，是不存在 $w_{1.}$ 的。CEP 的内管电旋风收尘效率 η_1 中新增加的 $w_{1.}$ 可使收尘效率增加；运行可靠性增加，因为即使停电，即 $w_{1.} = 0$ ，仍有旋风收尘效果；可以处理高浓度烟尘，因为旋风收尘可以适应 $500\text{g}/\text{m}^3$ 的含尘烟气^[1]，约为普通电收尘器的 10 倍。

4.2 第二级灰斗中电抑收尘

灰斗中放电极因和内放电极相连隶属内电场。其收尘面 $A_{c.2}$ 是灰斗内壁和其中钢制另件的部分表面。由于烟气在灰斗中折向，故而存在风速为零的界面。设 CEP 的处理风量为 Q_v ，灰斗中粒子驱进速度为 w_2 ，则其近似的收尘效率

$$\eta_2 = 1 - \exp\left(-\frac{\alpha \cdot A_{c.2}}{Q_v} \cdot w_2\right) \quad (10)$$

式中 α 为小于 1 的系数。实践证明 η_2 和灰斗容积、障灰环和气流分布板的配置密切相关。

4.3 第三级外管双区收尘

如前所述，CEP 的外管电场的电离区和收尘区是分开的，故而称为双区管式电收尘器。其特点为：(1) 电离区狭，电离时间短暂，这样既节约了电晕功率又提高了火花电压。其实测功耗约为 $248\text{W}/(\text{m}^3/\text{s})$ ，150mm 异极间距的升压值达 $72\text{kV} \sim 100\text{kV}$ ；(2) 内

外管间的环形截面大于国外双区管式电收尘器的环形截面,风量成倍增加;(3)内外管表面均是收尘表面,SCA增加,提高了收尘效率;(4)均匀电场的凝聚效应,能够提高收尘效率。实测入口烟尘和灰斗回收粉尘的粒度分布显示,对 $>30\mu\text{m}$ 的粉尘,烟气中仅12%,而灰斗中比例提高至25%。

4.3.1 外管双区电收尘的短暂电离时间

Kinkelin 提出电场中粒子荷电量 Q_f 和饱和荷电量 Q_{fs} 的比值为^[5]

$$\frac{Q_f}{Q_{fs}} = \frac{t/t_0}{1+t/t_0} \quad (11)$$

其本征荷电时间

$$t_0 = \frac{1}{\pi N e K i} \quad (12)$$

式中电子电荷 $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{C}$, 离子迁移率 $K i = 2.2 \times 10^{-4} (\text{m}^2/\text{V} \cdot \text{s})$, 电场中离子密度 $N = 10^{13} \sim 10^{14} (\text{ions}/\text{m}^3)$, 于是得到 $t_0 = 0.01 \sim 0.1 \text{s}$ 。把 t_0 代入 (11), 则可知一旦粉尘进入电场, 不到 0.1 秒即达饱和荷电。普通电收尘器提供的 5~10 秒电离荷电时间显然浪费了电晕功率。据此, CEP 外管电场的放电电极的端部芒刺设计得很短, 从而节约电晕功率^[7]。

4.3.2 外管双区的均匀收尘电场

与端部芒刺相比, 外放电电极的筒体显得很长, 且表面积很大, 它位于内外管的中间, 并与其形成均匀电场的收尘区, 有以下作用:

1) 防止放电电极积尘肥大。对工业用负电晕而言, 在电晕区产生的正负离子是相等的, 正离子粉尘就近很快被放电电极吸附。常规电收尘器放电电极表面极很小, 易于积灰形成放电电极肥大, 使电晕电流减少, 降低收尘效率。CEP 的外放电电极表面很大, 因而可以避免积灰肥大。

2) 均匀电场的凝聚收尘。CEP 外管收尘区是管—管均匀电场, 它通过“极化”效应使运动的粉尘凝聚成较大的“极化”灰珠, 形成所谓的“空间凝聚”, 同时库仑力又使荷电粉尘和“极化”灰珠在电极表面附聚形成“电场凝聚”。这两种凝聚使得 CEP 能够高效收尘^[4]。

4.3.3 CEP 外管双区电收尘的收尘效率公式

如前所述, 外管双区的放电电极表面很大, 有凝聚收尘效能, 故而其收尘效率公式也要修正。设其比面积为 SCA_3 , 驱进速度为 w_3 , 则外管双区的收尘效率

$$\eta_3 = 1 - \exp(-SCA_3 \cdot w_3 \cdot \beta) \quad (13)$$

式中 β 是大于 1 的常数, SCA_3 大于国外双区管式电收尘器 SCA , 故而 η_3 明显增加。

4.4 CEP 的整机收尘效率

根据三级收尘效率 η_1 、 η_2 、 η_3 , 与各级进出含尘浓度的关系不难推算出整机收尘效率

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 - \eta_1 \cdot \eta_2 - \eta_2 \cdot \eta_3 - \eta_1 \cdot \eta_3 \quad (14)$$

由 (14) 不难看出: 效率大于 99%, 即使某一级下降, 仍能维持高效率。如引言中所述的水泥磨上收尘, 整机效率为 99.95%。当内电场停电时, η_1 变成旋风收尘效率, η_2 变成沉降收尘效率, 此时实测的排出含尘浓度也只有 $164.4 \text{mg}/\text{Nm}^3$, 整机收尘效率仍高达 99.9%。

5 结论

CEP把旋风、电抑制、电凝聚三种复式收尘机理组合成一体,设计合理,结构紧凑,具有处理粉尘浓度大、收尘效率高、占空小、钢耗低、电耗少、使用可靠、维修方便等特点,可作为建材、化工、冶金、电力等工业的收尘或物料回收装置。

参 考 文 献

- [1] 陈明绍等编著,除尘技术基本理论与应用,建筑出版社,北京,1981年12月。
- [2] H. J. 怀特著,王成汉译,工业电收尘,冶金出版社,北京,1984年。
- [3] S. 小奥格尔斯比等著,谭天祐译,电除尘器,水电出版社,北京,1983年。
- [4] 大野长太朗著,除尘、收尘理论与实践,科技出版社,北京,1981年。
- [5] Brauer, H., Air Pollution Control Equipment, Springer-Verlag, Berlin, (1981).
- [6] Strauss, W., Industrial Gas Cleaning (second edition), Pergamon Press, Hungary, (1975).
- [7] Surati, H. S., *Env. Int.*, 6 (1981), 239—244.

The Construction and Fundamentals of a New Type Combined Electrostatic Precipitator

Li Haoling Zhou Huiming

(Hefei Cement Research and Design Institute)

Huang Jiaoming

(University of Science and Technology of China)

Abstract

The construction and fundamentals of a new type combined electrostatic Precipitator(CEP) are described in this paper. CEP combines electrostatic precipitation with mechanical collection, so that it incorporates the best features of the electro-cyclone, electro-inhibitor and electro-agglomerator. The performance parameters of CEP applied in industry are the inlet dust concentration $176.24\text{g}/\text{Nm}^3$, the outlet content $85.4\text{mg}/\text{Nm}^3$ and the collection efficiency 99.95%.

Key words: electrostatic precipitator(EP), tubular EP's, tubular EP's of two-stage, electro-cyclone, electro-inhibitor, electrostatic agglomeration, combined electrostatic precipitator.

有关不独立和相关的进一步讨论

金振风 黎彦修

(数学系)

1 引言

在概率论中有这样一个众所周知的事实：两个独立随机变量一定不相关（自然要求方差有限），不相关却并不一定意味着两个随机变量独立。这样的例子很多。不少人从不同的角度研究不相关和独立之间的关系。陈希孺、何声武在[1]中提出了这样一个问题：

任意给定两个一维分布 F 和 G ，其方差都非零有限，是否存在两个随机变量 X, Y ，使得① X 有分布 F ， Y 有分布 G ；② X, Y 不独立；③ $r(X, Y) = 0$ 。

他们给出了下面的定理：

定理 设 F, G 为一维分布，其方差非零有限，则为存在一对随机变量 X, Y ，满足问题中提到的①、②、③三个条件，充要条件是： F, G 中至少有一个不是两点分布。

他们又提出了下面的问题：

问题A 给定 n 维分布 F 和 m 维分布 G ，在什么条件下存在 n 维随机向量 X 和 m 维随机向量 Y ，使得① X 有分布 F ， Y 有分布 G ；② X, Y 不独立；③ $\text{Cov}(X, Y) = 0$ 。

问题B 与问题A相同，只是条件②强化为要求“ X 的任一分量与 Y 的任一分量不独立”。

可以看出陈、何的工作仅是上面问题在 $n = m = 1$ 时的特例。本文在[1]的基础上，对高维情形进行了讨论，解决了问题A，对问题B的结论何时成立给出了一个必要条件和两个充分条件。

2 问题A

为了叙述上的方便，我们先作一些记号上的说明： R^n 空间中的点我们都用 $n \times 1$ 的列向量表示，比如 $x \in R^n$ ， $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ ； $B(x, \delta)$ 表示以 x 为中心，以 δ 为半径的 n 维开球；分布函数 F 的所有支撑点的全体记为 $S(F)$ 。

引理1 任一 n 维分布 F 可以分解为如下形式：

$$F = \alpha F_1 + (1 - \alpha) F_2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

其中 F_1 为离散分布, F_2 为无原子的分布, α 为常数.

引理 2 如果 n 维分布 F 不是单纯离散的, 则 $S(F)$ 为不可数集.

以上两个事实都是显然的, 我们略去证明.

定义 1 如果 n 维离散分布 F 只有有限个离散点, 离散点全体设为 $S(F) = \{x^1, x^2, \dots, x^s\}$, 并且

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x^1 & x^2 & \dots & x^s \end{pmatrix} = s$$

则称 F 为 n 维 A 分布.

定理 1 设 F 为 n 维非退化分布, 则存在 R^n 上的可测函数 φ , 满足

$$\textcircled{1} |\varphi| \leq 1;$$

$$\textcircled{2} \int_{R^n} \varphi dF = 0, \text{ 且 } \int_{-\infty}^{\infty} \varphi dF \neq 0;$$

如果 F 不是 A 分布, φ 还可以满足条件:

$$\textcircled{3} \int_{R^n} x \varphi dF = 0.$$

其中 $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi dF$ 表示在区域 $(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \dots \times (-\infty, x_n]$ 上的重积分, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$.

证明 首先我们记 $|S(F)|$ 为 $S(F)$ 中不同点的个数, 如果 $S(F)$ 为无限点集, 则记 $|S(F)| = +\infty$.

先设 F 不是退化分布, 则 $|S(F)| \geq 2$. 取 $S(F)$ 中两个不同点 x^1, x^2 , 取分别包含 x^1, x^2 的两个开球 Δ_1, Δ_2 , 使得它们不交.

设 φ_1, φ_2 , 为 $\varphi_1 \int_{\Delta_1} dF + \varphi_2 \int_{\Delta_2} dF = 0$ 的非零解, 且 $|\varphi_1| \leq 1, |\varphi_2| \leq 1$.

$$\text{令 } \varphi(x) = \begin{cases} \varphi_i & \text{如果 } x \in \Delta_i, \quad i=1, 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

则 φ 满足 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 两条.

再设 F 不是 A 分布, 如果 $|S(F)| \geq n+2$, 取 $S(F)$ 中 $n+2$ 个不同点 x^1, x^2, \dots, x^{n+2} . 取分别包含 x^1, x^2, \dots, x^{n+2} 的开球 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_{n+2}$. 但使得它们互不相交.

设 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n+2}$ 为方程组

$$\left(\int_{\Delta_1} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} dF, \int_{\Delta_2} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} dF, \dots, \int_{\Delta_{n+2}} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} dF \right) (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n+2})' = 0$$

的非零解, 且 $|\varphi_i| \leq 1, 1 \leq i \leq n+2$.

$$\text{令 } \varphi(x) = \begin{cases} \varphi_i & \text{如果 } x \in \Delta_i, \quad 1 \leq i \leq n+2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

如果 $|S(F)| < n+2$, 根据引理 2, F 一定是离散的. 设 $S(F) = \{x^1, x^2, \dots, x^s\}$, 且设集中在 x^i 处的 F -质量为 p_i . 因为 F 不是 A 分布, 所以

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x^1 & x^2 & \cdots & x^s \end{pmatrix} < s$$

设 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s$ 为方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x^1 & x^2 & \cdots & x^s \end{pmatrix} (p_1 \varphi_1, p_2 \varphi_2, \dots, p_s \varphi_s)' = 0$$

的非零解, 且 $|\varphi_i| \leq 1, 1 \leq i \leq s$.

$$\text{令 } \varphi(x) = \begin{cases} \varphi_i, & \text{如果 } x = x^i, 1 \leq i \leq s \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

可以验证在以上两种情况下构造的可测函数 φ 都满足条件①、②、③.

定理 2 给定 n 维分布 F 和 m 维分布 G , 协方差阵存在非零, 则为存在 n 维随机向量 X 和 m 维随机向量 Y , 使得① X 有分布 F , Y 有分布 G ; ② X, Y 不独立; ③ $\text{Cov}(X, Y) = 0$ 三个条件同时成立的充要条件是: F 和 G 中至少有一个不是 A 分布.

证明 先证充分性. 不妨设 F 不是 A 分布, 根据定理 1 存在 n 维可测函数 φ 和 m 维可测函数 ψ 满足:

$$\begin{array}{ll} |\varphi| \leq 1 & |\psi| \leq 1 \\ \int_{R^n} \varphi \left(\frac{1}{x} \right) dF = 0 & \int_{R^m} \psi dG = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi dF \neq 0 & \int_{-\infty}^{\infty} \psi dG \neq 0 \end{array}$$

定义 $H(x, y) = F(x)G(y) + \int_{-\infty}^x \varphi dF \int_{-\infty}^y \psi dG \geq 0$. 任取 R^{n+m} 中一个方体 $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$, 其中 Δ_1 为 R^n 中的方体, Δ_2 为 R^m 中的方体, 有

$$\int_{\Delta} dH = \int_{\Delta_1} dF \int_{\Delta_2} dG + \int_{\Delta_1} \varphi dF \int_{\Delta_2} \psi dG \geq 0$$

不难证明 H 为 $(n+m)$ 维分布函数.

设 $(n+m)$ 维随机向量 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ 服从分布 H , 则 X, Y 分别服从分布 F 和 G .

$$\text{Cov}(X, Y) = \left(\int_{R^n} x \varphi dF \right) \left(\int_{R^m} y \psi dG \right)' = 0$$

但因为 $\int_{-\infty}^x \varphi dF \int_{-\infty}^y \psi dG \neq 0$ 即 $H(x, y) \neq F(x)G(y)$, 所以 X, Y 不独立.

再证必要性. 如果 F 和 G 都是 A 分布, 设 $S(F) = \{x^1, x^2, \dots, x^s\}$, 相应于 x^i 处的 F -质量为 p_i . $S(G) = \{y^1, y^2, \dots, y^t\}$, 相应于 y^j 处的 G -质量为 q_j . 设随机向量 X, Y 分别服从分布 F 和 G .

$$\text{记 } \delta_{ij} = P(X = x^i, Y = y^j) - p_i q_j, \text{ 则 } \sum_{i=1}^s \delta_{ij} = \sum_{j=1}^t \delta_{ij} = 0.$$

$$\text{如果 } \text{Cov}(X, Y) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^t \delta_{ij} (x^i) (y^j)' = 0, \text{ 则有 } \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x^1 & x^2 & \cdots & x^s \end{pmatrix} (\delta_{ij})$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y^1 & y^2 & \cdots & y^t \end{pmatrix} = 0$, 其中 (δ_{ij}) 为 $s \times t$ 的矩阵.

但因为 F 和 G 均为 A 分布, 所以 $\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x^1 & x^2 & \cdots & x^s \end{pmatrix} = s, \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y^1 & y^2 & \cdots & y^t \end{pmatrix} = t$.

由此推出 $(\delta_{ij}) = 0$, 所以 X 和 Y 必然独立.

3 问题 B

欲使问题 B 有意义, 对分布函数 F 和 G 的一个自然的假定是 F 和 G 的一维边缘分布都不是退化的.

在上一节, 我们构造了随机向量 X 和 Y 的联合分布 $H(x, y) = F(x)G(y) + \int_{-\infty}^x \varphi dF + \int_{-\infty}^y \psi dG$. 显然如果我们构造的辅助函数 φ 和 ψ 还满足 $\int_{-\infty}^{x_i} \varphi dF \equiv 0, \int_{-\infty}^{y_j} \psi dG \equiv 0$, 对一切 $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ 成立, 那么随机向量 X 的任一分量与随机向量 Y 的任一分量都不独立. 其中 $\int_{-\infty}^{x_i} \varphi dF$ 表示在相应区域 $\{u \in R^n | u = (u_1, u_2, \dots, u_n)', u_i \leq x_i\}$ 上的积分, $\int_{-\infty}^{y_j} \psi dG$ 表示在相应区域 $\{v \in R^m | v = (v_1, v_2, \dots, v_m)', v_j \leq y_j\}$ 上的积分. 下面我们记 $F_i(x_i)$ 表示边缘分布 $\int_{-\infty}^{x_i} dF$.

设 F 为离散分布, $S(F) = \{x^1, x^2, \dots, x^s\}$, 设 F_i 的支撑集为 $\{u^1, u^2, \dots, u^t\}, t \leq s$.

给定 $i, 1 \leq i \leq n$, 记矩阵 $A_i = (\delta(u^t, x_i^j))$, 则称 A_i 为分布 F 在相应第 i 个坐标轴上的系数矩阵, A_i 的元素不是 0 就是 1.

记矩阵 $F^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x^1 & x^2 & \cdots & x^s \end{pmatrix}$, 记 $V(F^*), V(A_i)$ 分别为 F^* 和 A_i 的行向量张成的线性空间.

定义 2 如果存在正整数 $i (1 \leq i \leq n)$, 使得 $V(A_i) \subset V(F^*)$, 则称 F 为 n 维离散 B 分布.

定义 3 设 F 为 n 维分布函数, 如果存在某个整数 $k (1 \leq k \leq n)$, 使得 F 的某个 k 维边缘分布为离散 B 分布, 则称 F 为 n 维 B 分布.

定理 3 给定 n 维分布 F , 如果存在 R^n 上的可测函数 φ 满足 ① $|\varphi| \leq 1$, ② $\int_{R^n} \varphi dF = 0$ 且 $\int_{-\infty}^{x_i} \varphi dF \equiv 0$, 任给 $1 \leq i \leq n$; ③ $\int_{R^n} x \varphi dF = 0$, 则 F 一定不是 B 分布.

有了以上的定义, 这一结论是显然的. 那么其逆是否成立呢? 我们证明了在一定的条件下也是可以的.

定理 4 给定 n 维离散分布 F , 如果 F 不是 B 分布, 则存在 R^n 上的可测函数 φ , 满足定理 3 中的 ①、②、③三个条件.

证明 设 $S(F) = \{x^1, x^2, \dots, x^s\}, s \leq +\infty$.

仅证 $s = +\infty$ 时的情形, 在 $s < +\infty$ 时的情形同样证明.

设集中在 \mathbf{x}^i 处的 F 一质量为 p_i . 任给 i ($1 \leq i \leq n$), 因 F 不是 B 分布, 所以 $V(A_i) \subsetneq V(F^*)$. 由线性代数的知识我们知道, 一定存在正整数 N , 使得当只取 A_i 及 F^* 的前 N 列时 (记为 $A_i(N)$ 及 $F^*(N)$), 仍有 $V(A_i(N)) \subsetneq V(F^*(N))$ 且 $\text{rank}(F^*(N)) < N$.

设 $\varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(i)}, \dots, \varphi_N^{(i)}$ 为方程组

$$F^*(N)(p_1 \varphi_1^{(i)}, p_2 \varphi_2^{(i)}, \dots, p_N \varphi_N^{(i)})' = 0$$

的非零解, 且 $|\varphi_j^{(i)}| \leq 1, 1 \leq j \leq n$, 并且满足 $A_i(N)(p_1 \varphi_1^{(i)}, p_2 \varphi_2^{(i)}, \dots, p_N \varphi_N^{(i)})' \neq 0$.

令 $\Phi^{(i)}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \varphi_j^{(i)} I_{(x_j = a_j)}$, 因为 i 是任意选取的, 所以得到 n 个可测函数 $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(n)}$, 满足 $\int_{R^n} \Phi^{(i)}\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) dF = 0$ 且 $\int_{-\infty}^{a_i} \Phi^{(i)} dF \neq 0$.

设在 $x_i = a_i$ 时有 $\int_{-\infty}^{a_i} \Phi^{(i)} dF \neq 0$, 适当选取参数 t_1, t_2, \dots, t_n , 使得

$$\prod_{i=1}^n \left[\int_{-\infty}^{a_i} (t_1 \Phi^{(1)} + t_2 \Phi^{(2)} + \dots + t_n \Phi^{(n)}) dF \neq 0 \right]$$

再令 $\varphi = (t_1 \Phi^{(1)} + t_2 \Phi^{(2)} + \dots + t_n \Phi^{(n)}) / (|t_1| + |t_2| + \dots + |t_n|)$, 则 φ 就满足①、②、③三个条件.

定理 5 给定 n 维分布 F , 如果对任意的 i , 都有 $|S(F_i)| \geq n+2$ ($1 \leq i \leq n$), 则存在 R^n 的可测函数 φ , 满足定理 3 中的①、②、③三个条件.

证明 因 $|S(F_i)| \geq n+2$, 所以一定存在 F 的 $(n+2)$ 个支撑点, 使得它们的第 i 个坐标都互不相同. 取分别包含这些点的开球, 且使得它们在第 i 个坐标轴上的投影互不相交. 与定理 1 中的构造完全相同, 可以得到可测函数 $\Phi^{(i)}$ 满足 $\int_{R^n} \Phi^{(i)}\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) dF = 0$ 而且 $\int_{-\infty}^{a_i} \Phi^{(i)} dF \neq 0$. 然后与定理 4 后半部分证明一样, 对 $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(n)}$ 进行线性组合得到 φ , 满足定理 3 中的①、②、③三个条件.

推论 如果对任意的 i, F_i 为连续或绝对连续的 ($1 \leq i \leq n$) 则定理 5 的结论也成立.

定理 6 给定 n 维分布 F , 如果 F 的一维边缘分布都不是退化的, 则存在 R^n 上可测函数 φ , 满足定理 3 中的①、②两个条件.

这个定理的证明只要利用 $|S(F_i)| \geq 2$ 对任意 i 成立 ($1 \leq i \leq n$) 这一事实, 证明与定理 5 相仿.

定理 7 给定 n 维分布 F 和 m 维分布 G , 其中 F 和 G 的一维边缘分布都是非退化的, 则为存在 n 维随机向量 \mathbf{X} 和 m 维随机向量 \mathbf{Y} , 使得① \mathbf{X} 有分布 F , \mathbf{Y} 有分布 G ; ② \mathbf{X} 的任一一分量与 \mathbf{Y} 的任一一分量不独立; ③ $\text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$, 一个必要条件是 F, G 中至少有一个不是 B 分布. 充分条件是 F, G 中至少有一个满足定理 4 或定理 5 中的条件.

有了前面的准备工作, 充分性是显然的. 我们仅证必要性.

证明 如果 F 和 G 均为 B 分布, 不失一般性, 我们假定 F 和 G 均为如定义 2 中所定义的离散 B 分布, $S(F) = \{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^s\}$, $S(G) = \{\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^t\}$, $\mathbf{x}^i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^n)$, $\mathbf{y}^j = (y_j^1, y_j^2, \dots, y_j^m)$, $1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t$ ($s, t \leq +\infty$).

设 A_1, A_2, \dots, A_n 及 B_1, B_2, \dots, B_m 分别为相应于 F 和 G 的系数矩阵. 设随机向量 \mathbf{X} 和

Y 分别服从于分布 F 和 G , $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$, $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)'$. 记 $p_i = P(X = x^i)$, $q_j = P(Y = y^j)$, $\delta_{ij} = P(X = x^i, Y = y^j) - p_i q_j$, 则有

$$\sum_{i=1}^n \delta_{ij} = \sum_{j=1}^m \delta_{ij} = 0$$

如果 $\text{Cov}(X, Y) = (x^1, x^2, \dots, x^n)(\delta_{ij})(y^1, y^2, \dots, y^m)' = 0$, 那么

$$F^*(\delta_{ij})G^{*'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x^1 & x^2 & \dots & x^n \end{pmatrix} (\delta_{ij}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ y^1 & y^2 & \dots & y^m \end{pmatrix}' = 0$$

因为 F 和 G 均为 B 分布, 所以一定存在自然数 $u, v (1 \leq u \leq n, 1 \leq v \leq m)$, 使得 $V(A_u) \subset V(F^*), V(B_v) \subset V(G^*)$, 故 $A_u(\delta_{ij})B_v' = 0$, 其中 (δ_{ij}) 为 $s \times t$ 的矩阵.

根据 A_u, B_v 的定义, 上式也就是

$$\sum_{x_u^i=a, y_v^j=b} \delta_{ij} = 0$$

对任意的实数 a 和 b 成立, 则知

$$P(X_u = a, Y_v = b) = \sum_{x_u^i=a, y_v^j=b} (p_i q_j + \delta_{ij}) = \sum_{x_u^i=a, y_v^j=b} p_i q_j = \left(\sum_{x_u^i=a} p_i \right) \left(\sum_{y_v^j=b} q_j \right) = P(X_u = a)P(Y_v = b)$$

由此推出 X 的分量 X_u 与 Y 的分量 Y_v 之间相互独立.

注 1 二维分布函数的 Lebesgue 分解可参见 [2]. 在 $n=2$ 时, 可以证明定理 3 的逆也是成立的.

注 2 从前面的证明可以看出, 问题 B 中结论成立的条件仅仅与分布函数的支撑点在整个空间相对于坐标轴散布的几何性质有关.

注 3 最后还可以提出一个问题: 定理 7 中的必要条件是否也是充分的?

本文是在钱大同、苏淳两位副教授的悉心指导下完成, 作者在此表示衷心的感谢.

参 考 文 献

- [1] 陈希孺、何声武, 应用概率统计, 2(1986), 183—185.
 [2] 白志东、苏淳, 中国科学技术大学学报, 10(1980), 16—94.

Some Further Discussions on Dependence and Uncorrelatedness

Jin Zhenfeng Li Yanxiu

(Department of Mathematics)

关于曲面线性分割的讨论

陈效群

(数学系)

1 引言

线性分割在计算机辅助几何设计中,有许多应用。一个简单的分割算子可以分割一条曲线或曲面,分割也可以用作线性逼近。基于其在计算机辅助几何设计中的重要性,什么样的曲线或曲面允许线性分割,是大家共同感兴趣的课题。

在一维情况下^[1],已知一组控制点 $P = (P_0, P_1, \dots, P_N)$ 和一组连续的混合函数集 $B(t) = (B_0(t), B_1(t), \dots, B_N(t))$,定义一个连续的参数曲线 $B[P](t) = \sum_k B_k(t)P_k$,

$(0 \leq t \leq 1)$,并假设① $\sum B_k(t) = 1$; ② $B(t)$ 是线性无关的函数集。一条参数曲线称为允许线性分割^[1],是指对任意的参数对 (u_0, u_1) ,一定存在控制点 $P(u_0, u_1) = (P_0(u_0, u_1), \dots, P_N(u_0, u_1))$,使得 $B[P(u_0, u_1)](t) = B[P]((1-t)u_0 + tu_1)$ 。此时, $B[P(u_0, u_1)](0) = B[P](u_0)$; $B[P(u_0, u_1)](1) = B[P](u_1)$ 。但在文献[1]中,只是对曲线进行了讨论。

在本文中,我们将讨论曲面的线性分割性,在采用重心坐标后,给出三角域上对曲面线性分割的定义,进而讨论三角域上多项式曲面的分割形式;最后证明只有多项式曲面才能进行线性分割。

2 多项式曲面的线性分割

给定控制点的集合 $P = (P_0, \dots, P_N)$ 和连续的混合函数集 $B(u, v, w) = (B_0(u, v, w), \dots, B_N(u, v, w))$,可以定义三角域上的连续参数曲面:

$$B[P](u, v, w) = \sum_{k=0}^N B_k(u, v, w)P_k \quad (1)$$

其中 $u+v+w=1, 0 \leq u, v, w \leq 1$ 。为简化起见,令 $X = (u, v, w)$,则(1)式写成

$$B[P](X) = \sum_{k=0}^N B_k(X)P_k \quad |X|=1 \quad (2)$$

为了使曲面为非退化的并与坐标架的选取无关, 假设① $B_1(X), \dots, B_N(X)$ 线性无关,

② $\sum_{k=1}^N B_k(X) = 1$. 以后, 不加说明, 这两个条件总是满足的.

定义 一曲面 $B[P](X)$ 称为是允许线性分割的, 是指对任意参数组 (M_0, M_1, M_2) , 一定存在控制点 $P(N_0, N_1, N_2) = (P_0(N_0, N_1, N_2), \dots, P_N(M_0, M_1, M_2))$, 使得

$$B[P(M_0, M_1, M_2)](X) = B[P](\bar{X}) \quad (3)$$

其中

$$M_i = (u_i, v_i, w_i), |M_i| = 1, 0 \leq u_i, v_i, w_i \leq 1, i = 0, 1, 2 \quad (4)$$

$$\bar{X} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = XA \quad (5)$$

$$A = \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

因此, 对于允许线性分割的曲面, 我们有

$$B[P(A)](X_i) = B[P](M_i), i = 0, 1, 2 \quad (7)$$

其中, 我们记 $P[A] = P(M_0, M_1, M_2)$; $X_0 = (1, 0, 0)$, $X_1 = (0, 1, 0)$, $X_2 = (0, 0, 1)$, 而且 (3)、(7) 式表明了 $B[P[A]](X)$ 等价于 $B[P](X)$ 在点 $B[P](M_0)$, $B[P](M_1)$, $B[P](M_2)$ 之间的一块.

下面将要证明, 如果混合函数 $B(X)$ 形成三角域上的多项式基, 则由 (2) 定义的曲面 $B[P](X)$ 允许线性分割, 为此先有

命题1 对任意的形如 (2) 式的曲面 $B[P](X)$ 允许线性分割, 当且仅当

$$B_j(X) \equiv B_j(\bar{X}) \in \text{span}(B(X)) \quad 1 \leq j \leq N \quad (8)$$

对任意的 M_0, M_1, M_2 成立, 其中 \bar{X} 由 (5) 式给出.

证明 (\Leftarrow) 假设 $B_j(X) \in \text{span}(B(X))$, 对任意的 $1 \leq j \leq N$ 和 $M_i, i = 0, 1, 2$ 成立, 则一定存在常数 $C_{j,k} = C_{j,k}[A]$ 使得

$$B_j(X) = \sum_{k=0}^N C_{j,k} B_k(X) \quad (9)$$

令

$$P_k[A] = \sum_{j=1}^N C_{j,k}[A] P_j, \quad 1 \leq k \leq N \quad (10)$$

则对于 (10) 式所给出的控制点, 有

$$\begin{aligned} B[P(A)](X) &= \sum_{k=1}^N B_k(X) P_k[A] = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1}^N C_{j,k} P_j \right) B_k(X) \\ &= \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^N C_{j,k} B_k(X) \right) P_j = \sum_{j=1}^N B_j(X) P_j \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^N B_i(\bar{X}) P_i \quad (11)$$

因此, 由定义可知, 曲面允许线性分割。

(\Rightarrow) 若对任意的形如 (2) 式的曲面可线性分割, 则一定存在控制点 $P[A] = (P[A], \dots, P_N[A])$, 使得

$$B[P[A]](X) = B[P](\bar{X}) \quad (12)$$

因此, 对任意的 $j: 1 \leq i \leq N$, 特别取这样的曲面使其控制点为

$$P_k = \begin{cases} 1 & k=j \\ 0 & k \neq j \end{cases} \quad (13)$$

则 (12) 式为

$$\sum_{k=1}^N B_k(X) P_k(A) = B_j(\bar{X}) = \bar{B}(X) \quad (14)$$

因此 $\bar{B}(X) \in \text{span}(B(X))$ 。

推论 1. 若混合函数集 $B(X)$ 为三角域上次数不超过 n 全体多项式的基, 则曲面 $B[P](X)$ 允许线性分割。这里取 $N = (n+1)[(n+2)/2] - 1$ 。

证明 由假设知 $B_j(X) \in B(X)$ 是 $X = (u, v, w)$ 的次数 $\leq n$ 的多项式, 则对三角域中任意的点 $M_0, M_1, M_2, B_j(X) = B_j(\bar{X})$ 显然也是 $X = (u, v, w)$ 的次数 $\leq n$ 的多项式。而 $B(X)$ 是次数 $\leq n$ 多项式全体的基, 所以 $B_j(X) \in \text{span}(B(X))$, $j = 1, 2, \dots, N$ 。由命题 1 可知, 任意的 $B[P](X)$ 允许线性分割。

在计算机辅助几何设计中, 最重要的曲面是 Bezier 曲面^[2]。这类曲面的混合函数是三角域上的 Bernstein 多项式,

$$B_{i,j,k}^n(X) = \frac{n!}{i! j! k!} u^i v^j w^k \quad (15)$$

其中, $i + j + k = n$ 。它们构成所有次数 $\leq n$ 的 Bezier 曲面的基, 因此由推论 1 知, Bezier 曲面允许线性分割。下面将给出 Bezier 曲面被线性分割的具体形式。

命题 2 使得 Bezier 曲面允许线性分割的 $\bar{B}_{i,j,k}^n(X) = B_{i,j,k}^n(\bar{X})$ 和控制点 $P_{i,j,k}[A]$ 分别为

$$\begin{aligned} \bar{B}_{i,j,k}^n(X) = & \sum_{r+s+t=n} \left[\sum_{|\beta|=j} \sum_{|\gamma|=k} B_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1}^r(M_0) B_{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2}^s(M_1) \right. \\ & \left. \times B_{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3}^t(M_2) \right] B_{r,s,t}^n(X) \quad (16) \end{aligned}$$

$$P_{i,j,k}[A] = (u_0 E_1 + v_0 E_2 + w_0 E_3)^i (u_1 E_1 + v_1 E_2 + w_1 E_3)^j (u_2 E_1 + v_2 E_2 + w_2 E_3)^k \cdot P_{0,0,0} \quad (17)$$

其中, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$; $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$; $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$; $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = i$; $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = j$; $|\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = k$; $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = r$; $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = s$; $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = t$; $i + j + k = r + s + t = n$ 。 $E_i, i = 1, 2, 3$ 是指标平移算子使得

$$\bar{E}_1 \bar{P}_{i,j,k} = \bar{P}_{i+1,j,k}, \quad \bar{E}_2 \bar{P}_{i,j,k} = \bar{P}_{i,j,k+1}, \quad \bar{E}_3 \bar{P}_{i,j,k} = \bar{P}_{i,j,k+1} \quad (18)$$

证明 根据 (15) 式可得

$$\begin{aligned} \bar{B}_{ijk}^n(X) &= \bar{B}_{ijk}^n(\bar{X}) \\ &= \frac{n!}{i! j! k!} (uu_0 + vu_1 + wu_2)^i (uv_0 + vv_1 + ww_2)^j (uw_0 + vw_1 + ww_2)^k \\ &= n! \sum_{|\alpha|=i} \sum_{|\beta|=j} \sum_{|\gamma|=k} \frac{u^r v^s w^t u_0^{\alpha_1} v_0^{\beta_1} w_0^{\gamma_1} u_1^{\alpha_2} v_1^{\beta_2} w_1^{\gamma_2} u_2^{\alpha_3} v_2^{\beta_3} w_2^{\gamma_3}}{\alpha_1! \beta_1! \gamma_1! \alpha_2! \beta_2! \gamma_2! \alpha_3! \beta_3! \gamma_3!} \\ &= \sum_{|\alpha|=i} \sum_{|\beta|=j} \sum_{|\gamma|=k} \frac{n! u^r v^s w^t}{r! s! t!} \frac{r! u_0^{\alpha_1} v_0^{\beta_1} w_0^{\gamma_1}}{\alpha_1! \beta_1! \gamma_1!} \frac{s! u_1^{\alpha_2} v_1^{\beta_2} w_1^{\gamma_2}}{\alpha_2! \beta_2! \gamma_2!} \frac{t! u_2^{\alpha_3} v_2^{\beta_3} w_2^{\gamma_3}}{\alpha_3! \beta_3! \gamma_3!} \\ &= \sum_{|\alpha|=i} \sum_{|\beta|=j} \sum_{|\gamma|=k} \bar{B}_{r,s,t}^n(X) B_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1}^r(M_0) B_{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2}^s(M_1) B_{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3}^t(M_2) \\ &= \sum_{r+s+t=n} \left(\sum_{|\beta|=j} \sum_{|\gamma|=k} B_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1}^r(M_0) B_{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2}^s(M_1) B_{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3}^t(M_2) \right) \bar{B}_{r,s,t}^n(X) \end{aligned}$$

这里, 我们用到了 $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = r$, $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = s$, $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = t$. 另一方面, 我们有

$$\begin{aligned} B[P](\bar{X}) &= \sum_{i+j+k=n} \frac{n! \bar{u}^i \bar{v}^j \bar{w}^k}{i! j! k!} P_{i,j,k} = (\bar{u}E_1 + \bar{v}E_2 + \bar{w}E_3)^n P_{0,0,0} \\ &= (E\bar{X}^T)^n P_{0,0,0} = (EA^T X^T)^n P_{0,0,0} \end{aligned}$$

其中 $E = (E_1, E_2, E_3)$, E^T , X^T , A^T 等表示向量和矩阵的转置. 因此

$$\begin{aligned} B[P](\bar{X}) &= (EA^T X^T)^n P_{0,0,0} \\ &= \sum_{i+j+k=n} \bar{B}_{ijk}^n(X) (u_0 E_1 + v_0 E_2 + w_0 E_3)^i (u_1 E_1 + v_1 E_2 + w_1 E_3)^j \\ &\quad \cdot (u_2 E_1 + v_2 E_2 + w_2 E_3)^k P_{0,0,0} \end{aligned}$$

因为 $B[P](X)$ 可线性分割, 所以有

$$B[P](\bar{X}) = B[P[A]](X) = \sum_{i+j+k=n} \bar{B}_{ijk}^n(X) P_{i,j,k}[A]$$

比较两边系数就得到 (17) 式.

3 线性分割是严格的多项式现象

设 $\text{span}(B(X))$ 是 $N+1$ 维空间, 并设 $B(X)$ 中函数都是连续可微的. 在这些假设下, 我们将证明任何一个函数 $f(X) \in \text{span}(B(X))$ 可线性分割, 则 f 一定是三角域上的多项式曲面. 以下, 我们都不加说明地假定 $f(X)$ 可线性分割.

引理 1 若 $f_n(X) \in \text{span}(B(X))$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(X) = f(X)$, 则 $f(X) \in \text{span}(B(X))$.

引理 1 的证明是显然的. 为了方便, 引进

$$u = x, \quad v = y, \quad w = 1 - x - y \quad (19)$$

$$f(u, v, w) = f(x, y, 1 - x - y) = f(x, y) \quad (20)$$

$$f_x = f_u - f_w, \quad f_y = f_v - f_w \quad (21)$$

命题 3 若 $f \in \text{span}(B(X))$, 则 xf_*, yf_*, xf_*, yf_* 都属于 $\text{span}(B(X))$

证明 由假设, f 是可线性分割的, 因此对任意的 $A = (M_0, M_1, M_2)^T$, 有 $f(\bar{X}) \in \text{span}(B(\bar{X})) \subset \text{span}(B(X))$

(22)

特别取

$$A = \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

然后定义函数列

$$g_n(\bar{X}) = n(f(u(1 - \frac{1}{n}), v, u\frac{1}{n} + w) - f(u, v, w)) \quad (24)$$

则 $g_n(X) \in \text{span}(B(X))$ 对 $\forall n$ 成立, 另一方面

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(X) = -u(f_* - f_*) \quad (25)$$

因此由引理 1 和 (19), (20) 可知 $xf_* = u((f_* - f_*) \in \text{span}(B(X)))$. 同理,

$$\text{取 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 可得 } yf_* \in \text{span}(B(X)) \quad (26)$$

$$\text{取 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & 0 & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix}, \text{ 可得 } (1-x-y)f_* \in \text{span}(B(X)) \quad (27)$$

$$\text{取 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix}, \text{ 可得 } (1-x-y)f_* \in \text{span}(B(X)) \quad (28)$$

$$\text{取 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 可得 } y(f_* - f_*) \in \text{span}(B(X)) \quad (29)$$

$$\text{取 } A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 可得 } x(f_* - f_*) \in \text{span}(B(X)) \quad (30)$$

由 (25) 和 (30) 可得到 $xf_* \in \text{span}(B(X))$, 由 (26) 和 (29) 得 $yf_* \in \text{span}(B(X))$, 所以命题得证. 由该命题和 (27), (28) 很容易得到

推论 2 $f \in \text{span}(B(X)) \Rightarrow f_*, f_* \in \text{span}(B(X))$

推论 3 $f \in \text{span}(B(X)) \Rightarrow \frac{\partial^k f}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} \in \text{span}(B(X))$ 对任何满足 $k_1 + k_2 = k$ 的 k_1, k_2 成立.

命题 4 $f \in \text{span}(B(X)) \Rightarrow x^i y^j \frac{\partial^k f}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} \in \text{span}(B(X))$

对任何 $k_1 + k_2 = k, i + j \leq k$ 成立.

证明 用归纳法. 当 $k=1$ 时, 命题显然成立; 若当 $k=n$ 时, 命题成立, 即

$$x^i y^j \frac{\partial^n f}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} \in \text{span}(B(X)), i + j \leq n, k_1 + k_2 = n \quad (31)$$

则当 $k=n+1$ 时, 不妨设对 x 的偏导数增加一次.

因此 $f \in \text{span}(B(X)) \Rightarrow x^i y^j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{k_1+1} \partial y^{k_2}} = x^i y^j \frac{\partial^n f}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} \in \text{span}(B(X))$, 另一方面

$$x^{i+1} y^j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{k_1+1} \partial y^{k_2}} = \left(x \frac{\partial(x^i y^j \frac{\partial^n f}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}})}{\partial x} - i x^i y^j \frac{\partial^n f}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} \right) \in \text{span}(B(X)),$$

(根据命题 3). 同理, 也可证得 $x^i y^{j+1} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{k_1+1} \partial y^{k_2}} \in \text{span}(B(X))$, 所以命题成立.

命题 5 $f \in \text{span}(B(X)) \Rightarrow \partial^{n+1} f / \partial x^i \partial y^j = 0$ 对 $i + j = n + 1$ 成立, 此处

$$N = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1.$$

证明 因为 $\text{span}(B(X))$ 的维数是 $N + 1$, 所以存在不全为零的常数 $C_{i,j}$, 使得

$$\sum_{i+j=n+1} C_{i,j} x^i y^j (\partial^{n+1} f / \partial x^{k_1} \partial y^{k_2}) = 0, k_1 + k_2 = n + 1 \quad (32)$$

而 $\sum_{i+j \leq n} C_{i,j} x^i y^j = 0$ 最多只能在 $n+2$ 条曲线上成立, 因此由 (32) 可 $\partial^{n+1} f / \partial x^{k_1} \partial y^{k_2}$ 的连

续性可知命题成立.

推论 4 $f \in \text{span}(B(X)) \Rightarrow f$ 是次数 $\leq n$ 的三角域上多项式.

推论 5 混合函数 $B_j(X), j=1, 2, \dots, N$ 是次数 $\leq n$ 的多项式, 并构成所有次数 $\leq n$ 的三角域上多项式的全体的基.

推论 4 的证明可由命题 5 的结果直接得到. 因为 $B_j(X) \in \text{span}(B(X)), B_j(X), j=1, 2, \dots, N$ 线性无关, 再由命题 5 就可得到推论 5. 因此直接可得

推论 6 $f \in \text{span}(B(X)) \Leftrightarrow f$ 是次数 $\leq n$ 的三角域上多项式.

因此, 由上面的结论, 我们最后得到

命题 6 任一形如 (2) 式的曲面 $B[P](X)$ 允许线性分割的充要条件是混合函数集 $B(X)$ 形成三角域上多项式的基, 即线性分割是严格的多项式现象.

本文是在冯玉瑜老师的热情指导和鼓励下完成的, 特此致谢!

参 考 文 献

- [1] Goldman, R.N., *CAGD*, 1 (1984), 269—278.
[2] Bohn, W., *CAGD*, 1 (1984), 1—60.

On Linear Subdivision of the Surfaces

Chen Xiaoqun

(Department of Mathematics)

一维连续映射的拓扑熵和紊动集*

武 河

(数学系)

1 引言及定理的叙述

在动力系统的讨论中, 拓扑熵的计算或估计是一个十分重要的问题, 然而, 即使对于线段或圆周上的连续映射, 其拓扑熵的计算也很困难. 于是人们有的对特殊类型的函数给出了新的计算公式, 如适合公理 A 的微分映射^[2]、区间上的分段单调连续映射^[3]等, 也有的则考虑把空间中对映射的拓扑熵没有影响的点集去掉, 如 R. Bowen^[2]对紧致度量空间上的连续自映射 f 给出了下述公式:

$$\text{ent}(f) = \text{ent}(f|_{\Omega(f)})$$

其中, $\Omega(f)$ 对 f 的非游荡点集. 这种考虑在一定程度上对拓扑熵的本质的讨论带来了方便. 我们在这篇文章里针对线段映射推广了上述结论.

首先我们给出一个定义. 设 I 为连通闭区间, $f \in C^0(I, I)$, 记 $P(f)$ 为映射 f 的周期点集, $IP(f)$ 为 $P(f)$ 的孤立点集或称为 f 的孤立周期点集, $\overline{P(f)}$ 和 $\overline{IP(f)}$ 分别为 $P(f)$ 和 $IP(f)$ 的闭包. 我们定义

$$DP(f) = \overline{\overline{P(f)} - P(f) - \overline{IP(f)}}$$

并称之为映射 f 的稠密周期点集. 显然 $DP(f)$ 是关于 f 的不变闭子集.

定理 1 设 I 为连通闭区间, $f \in C^0(I, I)$,

则

$$\text{ent}(f) = \text{ent}(f|_{DP(f)})$$

定理 2 设 I 和 f 意义同定理 1, $X \subset I$ 为 f 的不变闭子集, 且 $f|_X$ 无紊动集, 则

$$\text{ent}(f|_X) = 0$$

这里紊动集的定义同文献[8].

文献[8]对 $f \in C^0(I, I)$ 且有周期 3 的周期点, 则必可以选择完全由 $\Omega(f)$ 中点构成的紊动集. 本文也顺便给出了

定理 3 $f \in C^0(I, I)$ 且有非 2 方幂周期的周期点, 则 f 的紊动集可选择全由 $DP(f)$ 中的点所构成.

1988年4月4日收到.

• 国家自然科学基金资助项目.

从定理 3 可知紊动集的本质表现在非孤立周期点集的极限点集 (或聚点集) 上, 文献 [7] 和 [8] 关于紊动集限制在 $\Omega(f)$ 上的讨论都可以进一步限制在上述的极限点集上讨论.

在这篇文章中我们不妨设 $P(f)$ 中的每一个连通线段 (如果有这样的连通线段必是闭的) 视为一个点来处理. 另外, 本文的符号及术语均如往常, 详见文献 [4].

2 一些引理和定理的证明

引理 1^[2] 设 X 为紧致度量空间, $f \in C^0(X, X)$,

则 $\text{ent}(f) = \text{ent}(f|_{\Omega(f)})$

引理 2^[3] 设 $f \in C^0(I, I)$, $X \subset I$ 为 f 的闭不变子集, 则存在

(1) $J_1, J_2, \dots, J_n, \dots$ I_j 为 $X \cap I$ 的子区间列 ($j=1, 2, \dots$)

(2) $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$ D_n 为 J_n 的分拆

(3) $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ $k_j \in \mathbb{N}$ ($j=1, 2, \dots$)

满足 a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k_n} \log \text{card } D_n = \text{ent}(f)$

b) $f^{k_n}(d) \supset J_n$ ($\forall d \in D_n$)

(其中 $\text{card } D_n$ 表示 D_n 的基数)

引理 3^[4] 设 X 是 Hausdorff 空间, A_1, A_2, \dots, A_m 是两两不交的非空紧集, $f \in C^0(X, X)$

满足

$$f(A_i) \supset \bigcup_{j=1}^m A_j \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

则存在 f 的一个紧致不变集合 $\Lambda \subset \bigcup_{i=1}^m A_i$ 和一个满连续映射 $\varphi: \Lambda \rightarrow \Sigma_m$, 使得下列图表可交换:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{f} & \Lambda \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \Sigma_m & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_m \end{array}$$

这里的 Λ 在文献 [4] 中称为 m 阶伪转移不变集.

这里的 $\Sigma_m = \prod_0^{\infty} \{1, 2, \dots, m\}$, 即对集合 $\{1, 2, \dots, m\}$ 赋以离散拓扑, 然后作自乘积得到的

m 阶单边符号空间. Σ_m 上的转移自映射定义为

$$\begin{aligned} \sigma: \Sigma_m &\longrightarrow \Sigma_m \\ (a_0, a_1, a_2, \dots) &\mapsto (a_1, a_2, \dots) \end{aligned}$$

映射 σ 决定了 Σ_m 上的一个半动力系统.

引理 4 $f \in C^0(I, I)$, $X \subset I$ 为 f 的不变闭子集, 如果 $\text{ent}(f|_X) > 0$, 则 $f|_X$ 必存在紊动集.

证明 由 $\text{ent}(f|_X) > 0$ 知 $\exists \epsilon > 0$ 使

使得

$$\text{ent}(f|_X) > \varepsilon > 0$$

据引理 2 可取 n 充分大, 使得

$$k_n > \frac{\log 3}{\text{ent}(f|_X) - \varepsilon}$$

以及

$$\frac{1}{k_n} \log \text{card } D_n > \text{ent}(f|_X) - \varepsilon$$

成立. 因而有

$$\text{card } D_n > 3$$

记 $m = \text{card } D_n \geq 4$, $k = k_n$, 设 $J_n = [a_0, a_m] \cap X$, 且

$$D_n = \{[a_0, a_1] \cap X, \dots, [a_{m-1}, a_m] \cap X\}$$

这里

$$a_0 < a_1 < \dots < a_{m-1} < a_m$$

由引理 2 知

$$f^k([a_i, a_{i+1}] \cap X) \cap J_n = [a_0, a_m] \cap X \\ (i = 0, 1, \dots, m-1)$$

取 $A_1 = [a_0, a_1] \cap X$, $A_2 = [a_{m-1}, a_m] \cap X$, 则

$$f^k(A_r) \supset A_1 \cup A_2 \quad (r=1, 2)$$

且 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, A_1 和 A_2 非空闭

由引理 3 知 f^k 具有 2 阶伪转移不变集 $\Lambda \subset A_1 \cup A_2$, 即图表

$$\begin{array}{ccc} & f^k & \\ \Lambda & \xrightarrow{\quad} & \Lambda \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ & \sigma & \\ \Sigma_2 & \xrightarrow{\quad} & \Sigma_2 \end{array}$$

可交换, 其中 $\varphi \in C^0(\Lambda, \Sigma_2)$, $\varphi(\Lambda) = \Sigma_2$.

由于 (Σ_2, σ) 有素动集是显然的, 例如

$$B = \{ba_1aa_1a_2aaa_1a_2a_3aaa \dots a_1a_2 \dots a_n \overbrace{aa \dots a}^{n \text{ 个}} \dots | a_j \in (0, 1), j = 1, 2, \dots\}$$

其中 $a = 0$, $b = 1$. 容易验证 B 就是 (Σ_2, σ) 的一个不可数素动集.

所以由上述图表知 $(\Lambda, f^k|_\Lambda)$ 必有素动集, 因而 $(X, f|_X)$ 必有素动集. 证毕.

有了这个引理, 我们很自然就可以得到我们的定理 2.

定理 2 的证明 因为 $X \subset I$ 为 f 的不变闭子集, 且 $f|_X$ 无素动集, 故由引理 4 及反证法显然有

$$\text{ent}(f|_X) = 0$$

定理 1 的证明 在 §1 的结尾我们声明 $P(f)$ 中的每个连通区间都作为点来处理 (因为这种区间中的点的周期必有限, 故这样处理不影响映射的拓扑熵和素动集), 从而有

$$\overline{\overline{P} - P - \overline{IP}} = \overline{\overline{P} - \overline{IP}}$$

显然 $\overline{\overline{P} - \overline{IP}}$ 和 \overline{IP} 均为 f 的不变闭子集, 且

$$\overline{\overline{P} - \overline{IP}} \cup \overline{IP} = \overline{P}$$

故由文献 [1] 中的定理 4 知

$$\text{ent}(f|_{\bar{P}}) = \max\{\text{ent}(f|_{\overline{P-\bar{P}}}), \text{ent}(f|_{\overline{TP}})\} \quad (1)$$

又因 \overline{TP} 为一无处稠密的可数集, 故 $f|_{\overline{TP}}$ 无紊动集, 再由定理 2 知 $\text{ent}(f|_{\overline{TP}}) = 0$.

由文献[5]知 $\Omega - \bar{P}$ 是 I 中无处稠密的可数集, 从而有

$$f(\overline{\Omega - \bar{P}}) \subset \overline{\Omega - \bar{P}}$$

且 $\overline{\Omega - \bar{P}}$ 为一可数集, 所以我们有

$$\text{ent}(f|_{\Omega}) = \max\{\text{ent}(f|_{\overline{\Omega - \bar{P}}}), \text{ent}(f|_{\bar{P}})\}$$

同样由定理 2 可推得 $\text{ent}(f|_{\overline{\Omega - \bar{P}}}) = 0$, 则

$$\text{ent}(f|_{\Omega}) = \text{ent}(f|_{\bar{P}}) \quad (2)$$

由引理 1 以及 (1) 式和 (2) 式可得

$$\text{ent}(f) = \text{ent}(f|_{\overline{P-\bar{P}}})$$

从而定理得证.

定理 3 的证明 因为 $f \in C^0(I, I)$ 有非 2 方幂周期的周期点, 由文献[3]中定理知 $\text{ent}(f) > 0$, 再由定理 1 和引理 4, 本定理显然成立.

推论 1 若 $f \in C^0(I, I)$, 则

$$\text{ent}(f) = \text{ent}(f|_{W(f)}) = \text{ent}(f|_{P'(f)})$$

其中 $W(f)$ 为 f 的 ω -极限集, $P'(f)$ 为 $P(f)$ 的极限点集.

证明 由于 $W(f)$ 为 f 的不变闭子集, 且满足

$$\Omega(f) \supset W(f) \supset P(f)$$

以及

$$W(f) \supset P'(f) \supset \overline{P(f) - P(f) - \overline{TP}(f)}$$

再由定理 1 此推论显然.

推论 3 如果 $f \in C^0(I, I)$, 则有

$$\text{ent}(f) = 0 \iff f|_{DP(f)} \text{ 无紊动集.}$$

证明 由文献[8]知 $\text{ent}(f) > 0 \iff f|_{\Omega(f)}$ 有紊动集, 这一结论结合本文定理 1 定理 2 以及

$$\Omega(f) \supset \overline{P(f) - P(f) - \overline{TP}(f)} = DP(f)$$

此推论显然.

我们知道紊动现象描述了空间 X 在连续自映射 f 迭代作用的混乱情况, 因而紊动现象和拓扑熵有着必然的联系, 这样我们自然关心能够引起 (X, f) 的紊动现象以及能够决定拓扑熵的关键点集. 本文的结果或许对进一步探讨紊动现象的本质以及拓扑熵的性质有些帮助.

顺便说明, 对圆周 S^1 上的连续自映射 f , 也具有本文相应的结果, 这里不再详述.

作者感谢熊金城教授对本文的关心和帮助.

参 考 文 献

- [1] Adler, R. L., Konheim A. G. and McAdrew, M. H., *Trans. AMS*, 114 (1965), 309-319.
- [2] Bowen, R., *Proc. Symp. Pure Math.*, 14 (1970), 23-41.

- [3] Misiurewicz, M., *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 27(1979), 167-169.
- [4] 张筑生, *数学学报*, 27 (1984), 564—576.
- [5] 熊金城, *科学通报*, 29 (1984), 518—519.
- [6] 熊金城, *数学学报*, 29 (1986), 691—696.
- [7] 周作领, *科学通报*, 1 (1986), 1—3.
- [8] 周作领, *科学通报*, 4 (1987), 248—250.

On Topological Entropy and Chaotic Set of One-dimensional Continuous Map

Wu He

(*Department of Mathematics*)

镉(II)—对-甲氧基苯氨基重氮偶氮苯 —吐温-80显色反应的研究及应用

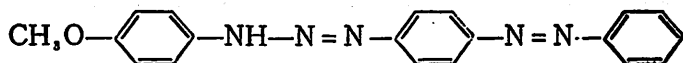
朱玉瑞 郑俐 金谷

(应用化学系)

1 前言

在微量镉的光度法测量中,常用的显色剂有双硫脲^[1]和镉试剂^[2]。用光度法测定微量镉的文章不少,其中报道摩尔吸光系数 ϵ 达 10^5 以上的高灵敏度显色反应的文章令人注目^[3-7]。

本文所用显色剂对-甲氧基苯氨基重氮偶氮苯是镉试剂的一种新的衍生物,是测镉的高灵敏度显色剂之一。其结构式为



经试验发现:在 $\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7$ 介质中和有吐温-80存在的条件下,镉(II)与该试剂生成橙色络合物,最大吸收峰位于505nm处,在 $0\sim 10\mu\text{gCd}^{2+}/25\text{ml}$ 范围内,有良好的线性关系。由此计算出平均摩尔吸光系数 ϵ 为 $1.2\times 10^5\text{l}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{cm}^{-1}$ 。若采用双波长法测定摩尔吸光系数可提高至 $1.8\times 10^5\text{l}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{cm}^{-1}$,络合物稳定,其吸光度至少15小时不变。用该法直接测定电池厂废水中的微量镉,获得令人满意的结果。对1号样及2号样分别进行9次和10次平行测定,其相对标准偏差分别为3.3%和1.1%,加入标准镉的回收率为92~112%。本法具有灵敏、操作简便、选择性、重现性良好等优点。

2 实验部分

2.1 仪器与试剂

- 1) SHIMADZU—UV—240 自动记录分光光度计;
- 2) 721 型分光光度计;
- 3) 镉标准溶液:准确称取光谱纯氧化镉0.1142g,置于100ml烧杯中加入25ml 6N盐酸,待完全溶解后,定量转入100ml容量瓶中,用水稀释至刻度,此溶液为每毫升含1.0mg镉的贮备液。用时稀释成 $10.0\mu\text{gCd}^{2+}/\text{ml}$ 的操作液;
- 4) 0.04%对-甲氧基苯氨基重氮偶氮苯乙醇液;
- 5) 2%吐温-80水溶液;

1988年4月4日收到。

6) 混合掩蔽剂: 称取 0.5g 草酸、1.5g 柠檬酸、1.5g 酒石酸钾钠, 加 25% 三乙醇胺水溶液配成 100ml。

其余试剂均为分析纯, 按常规方法配制。

2.2 一般实验方法

2.2.1 单波长测量法

在 25ml 比色管中, 按顺序分别加入 pH 为 12.0 的 $\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7\text{—NaOH}$ 缓冲溶液 2.5ml、0.04% 的对-甲氧基苯氨基重氮偶氮苯乙醇液 2.5ml、2% 吐温-80 2ml 标准镉 $10.0\mu\text{g}$, 摇匀, 用水稀释至刻度, 于 505nm 处, 用 1cm 比色皿对试剂空白测定吸光度。

2.2.2 双波长测量法

先在 505nm 以试剂为参比测出吸光度为 a , 然后在 418nm 以络合物为参比测量试剂的吸光度为 b , $a+b$ 即为 ΔA , 用 ΔA 代替 A , 其它均同单波长法。

3 结果与讨论

3.1 试剂及与镉(II)络合物的吸收光谱

在 $\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7$ 介质中, 吐温-80 存在时, 该试剂的最大吸收峰位于 418nm 处, 纯络合物最大吸收位于 490nm 处, 结果见图 1。随着试剂比例的增加, 络合物的吸收峰渐渐红移, 这可能是由于络合物的组成比发生变化而引起的。当显色剂过量后, 以试剂空白为参比的谱图上, 络合物的最大吸收峰移至 505nm 处, 红移 15nm, 结果见图 2。

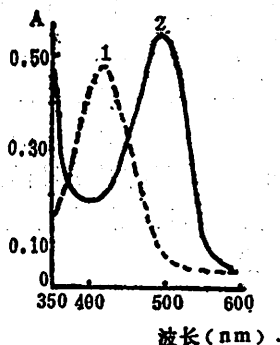


图 1 试剂及络合物吸收曲线

1 $1.0 \times 10^{-6} M$ 试剂对水

2 $4 \times 10^{-5} M$ 镉 + $5 \times 10^{-6} M$ 试剂对水

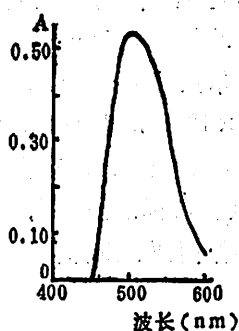


图 2 络合物吸收曲线

3.2 试剂加入顺序对显色反应的影响

实验中, 我们对试剂加入顺序进行试验, 发现试剂加入顺序影响显色反应的吸光度和稳定性。实验中采用的顺序: 先加四硼酸钠缓冲液, 然后按顺序先后加入显色剂, 非离子表面活性剂吐温-80, 最后加入镉标准溶液。按此顺序操作, 其吸光度最大且稳定。

3.3 酸度及缓冲液用量的影响

实验表明在 pH 11.0—12.5 的酸度范围内, 络合物吸光度达最大且恒定, 实验中选用 pH 12.0。缓冲溶液用量为 1.0ml 时, 吸光度已达最大值, 实验中选用 2.5ml。

3.4 显色剂用量的影响

除改变显色剂用量外,其它同实验方法1,结果表明,吸光度随显色剂用量的增加而增大,当显色剂用量2.0~5.0ml时,吸光度达最大值,实验中选用2.5ml。

3.5 表面活性剂的选择及吐温-80用量的影响

镉(II)与该显色剂生成的络合物微溶于水,我们采用表面活性剂增溶,分别用阳离子表面活性剂溴代十六烷基三甲基铵,阴离子表面活性剂十二烷基苯磺酸钠和非离子表面活性剂乳化剂OP, Triton X-100, 吐温-80 分别进行试验。结果发现:阴、阳两种离子表面活性剂对体系无增溶作用,而三种非离子表面活性剂均能增溶但以吐温-80 效果最佳,故被选用。

实验表明:2%吐温-80 用量为1.7~4.0ml时,络合物吸光度达最大且恒定。实验中选用2.0ml。

3.6 温度影响及络合物稳定性

实验中发现:温度在5℃~50℃范围内变化,对该显色体系无影响。

在选用的实验条件下,镉与试剂的显色反应瞬间完成,吸光度迅速达到最大值,15小时内吸光度稳定不变。

3.7 比耳定律

按实验方法1、2操作,结果表明:镉(II)在0~10 μ g/25ml范围内,存在良好的线性关系,见图3。由曲线I计算出平均摩尔吸光系数 ϵ 为 $1.2 \times 10^5 \text{ l} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$;由曲线II计算出的平均摩尔吸光系数 ϵ 为 $1.8 \times 10^5 \text{ l} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$ 。

3.8 共存离子试验

对37种离子分别进行试验,结果发现下列离子(单位mg):Na⁺10, K⁺10, NH₄⁺1, Ba²⁺1, Cu²⁺0.5, Pb²⁺0.5, Sr²⁺5, Bi³⁺0.5, Si⁴⁺10, W⁶⁺5, Mo⁶⁺2, Cr⁶⁺2, F⁻10, Cl⁻10, Br⁻10, I⁻10, NO₃⁻10, SO₃²⁻10, SO₄²⁻10, C₂O₄²⁻5, PO₄³⁻10, 硫脲10, 柠檬酸10, 酒石酸10, S₂O₃²⁻20 不干扰10 μ g 镉的测定。

等量的Ag⁺, Ni²⁺, Hg²⁺, Co²⁺产生正干扰,而Zn²⁺, Ca²⁺, Mg²⁺, Be²⁺, Fe²⁺, Al³⁺, Ti⁴⁺在该体系的碱性条件下发生水解而出现浑浊,但采用混合掩蔽剂可很好的掩蔽之。

混合掩蔽剂0.1ml加5%NaF 0.1ml,可掩蔽下列离子(单位 μ g):Ag⁺10, Fe²⁺100, Fe³⁺100, Co²⁺200, Ni²⁺10, Be²⁺100, Mg²⁺300, Ca²⁺500, Hg²⁺10, Al³⁺40。

4 样品分析

4.1 操作步骤

取100ml水样加入1ml浓硝酸,置于电热板上煮沸消解10分钟,冷却后用快速定量滤纸过滤,滤纸用少许0.2%硝酸洗涤,滤液保存于塑料瓶中以备测定之用。分析时用固体NaOH将水样调至中性,准确吸取5.0ml或10.0ml经上述处理的水样,代替实验方法1中的镉标准液,且在各组分加入后,分别加入混合掩蔽剂0.1ml和5%NaF溶液0.1ml,其余步骤同实验方法1,根据测得的吸光度在标准曲线I上查出镉的微克数,然后计算出水样中

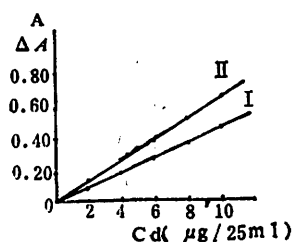


图3 标准曲线

I 单波长法测得的标准曲线
II 双波长法测得的标准曲线

镉的含量。

4.2 废水分析结果

测定四个废水样品并用标准加入法检验方法的可靠性, 其结果见表1。

表1 废水样品分析结果

样号	取样量 (ml)	加入Cd ²⁺ (μ g)	测出Cd ²⁺ (μ g)	样品含量 (ppm)	回收Cd ²⁺ (μ g)	回收率 (%)
1*	5.0	0	3.35*			
	5.0	5.0	8.95	0.67*	5.60	112
	5.0	10.0	13.8		10.5	105
	5.0	0	4.25**			
2*	5.0	5.0	8.86	0.85*	4.61	92.2
	5.0	10.0	13.8		9.55	95.5
	5.0	0	0.29			
	5.0	5.0	5.29	0.058	5.0	100
3*	5.0	10.0	10.4		10.1	101
	10.0	0	0.54			
	10.0	5.0	5.54	0.054	5.0	100
	10.0	10.0	10.6		10.1	101
4*	5.0	0	0.31			
	5.0	5.0	5.18	0.062	4.87	97.4
	5.0	10.0	10.6		10.3	103

* 9次平行测定的平均值。

** 10次平行测定的平均值。

从表1可知: 标准加入的回收率为92~112%; 对1*样进行9次平行测定平均含Cd²⁺ 0.67ppm, 相对标准偏差为3.3%; 对2*样进行10次平行测定平均含Cd²⁺ 0.85ppm, 相对标准偏差为1.1%。

参 考 文 献

- [1] 环境污染分析方法编写组编, 环境污染分析方法, 科学出版社, 1980年, 71—77.
- [2] Watanabe, H., et al., *Talanta*, 26 (1979), 959.
- [3] 曾胜年, 化学试剂, 7 (1985), 70.
- [4] 魏复盛等, 分析化学, 13 (1985), 762.
- [5] 刘忻, 分析试验室, 5 (1986), 41.
- [6] 滕恩江等, 分析测试通报, 6 (1987), 7.
- [7] Sanchez, F. G. et al., *Anal. Chem. Acta*, 167 (1985), 217.

Study on the Colour Reaction of Cd(II) With *p*-Methoxybenzeneaminodiazoazobenzene—Tween-80 and Its Application

Zhu Yurui Zheng Li Jin Gu

(Dept. of Appl. Chem.)

Bi-Ca-Sr-Cu-O 体系大尺寸单晶 的生长及其超导电性

孙敦明 陈祖耀 钱逸泰 程庭柱 牛立文 周贵恩

(应用化学系)

(结构成分分析中心)

方明虎 夏健生 张其瑞

(物理系)

引言

Bi-Sr-Ca-Cu-O 超导体系的发现^[1-2]对超导材料的理论研究和应用开发将产生重大影响。Bi-Sr-Ca-Cu-O 体系的大尺寸单晶对探索超导的结构机理和物理特性是非常必要的。

作者利用 CuO 和 Bi₂O₃ 作助熔剂生长出尺寸为 2×1×0.4mm 的超导单晶。并讨论了 Bi-Sr-Ca-Cu-O 体系的超导性能和晶体结构。

实验部分

按照 Bi: Sr: Ca: Cu = 1: 1: 1: 2 的比例混合 Bi₂O₃ (AR)、CaCO₃ (AR)、SrCO₃ (AR) 和 CuO (99.9%)，充分研磨，然后在空气中 800℃ 时预烧 12 小时，产物供晶体生长使用。

晶体生长装置由竖式的单晶炉和带有 Pt-Pt(Rh) 热电偶的 TPC-III 温度控制仪组成。将一定数量的 CuO 和 Bi₂O₃ 混合物作为助熔剂加入预烧产物中，长时间研磨，将混合物置于直径为 40mm 的刚玉坩锅中，按 100℃/hr 的升温速率加热到 900℃—1000℃ 保温数小时，然后按 10℃/hr 的速率冷却至室温。整个生长过程都在 O₂ 气氛中进行。

分别采用互感法和四引线法测量样品的直流电阻和交流磁化率与温度的关系，测量电阻时所用数字电压表的灵敏度为 1×10⁻⁶V。

利用等离子体光谱对样品进行了化学分析。

结果与讨论

从熔化物切出尺寸为 2×1×0.4mm³ 的 Bi-Sr-Ca-Cu-O 体系的黑色条状单晶，劳埃

1988年8月29日收到。

照相显示了其单晶性（照片略）。

用于魏森堡照相的晶体有两个微畴，相互间倾斜大约 8° ，照相时对准其中一个畴。魏森堡照相（照片略）给出了正交晶胞常数为 $a=5.42\text{ \AA}$ ， $b=27.18\text{ \AA}$ ， $c=30.67\text{ \AA}$ ， b 方向的格子常数比Chu等人报道的^[5]放大了五倍。可能的空间群为 I_{222} ，从照片上还可以看到发生了大面积的消光，使得魏森堡照片看上去很空。一个原因是由于空间群的对称性，另一个原因或许与层上或层间的有序—无序的转变有关。

将Bi-Sr-Ca-Cu-O单晶研成粉末，照了X射线粉末图（图1）。尽管Bi-Sr-Ca-Cu-O单晶有较大的晶胞参数，但粉末图上 2θ 在 $5^\circ-60^\circ$ 的范围内只有7个强峰和10个弱峰，这同魏森堡照片所获得的结果一致。粉末图上所有17个峰都可由魏森堡照片所得的晶胞参数进行指标（表1）。

由化学分析知道单晶样品的化学式为 $\text{Bi}_4\text{Ca}_2\text{Sr}_3\text{Cu}_5\text{O}_{22}$ 。

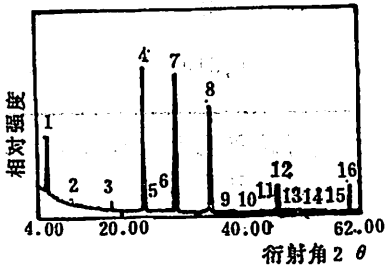


图1 Bi-Sr-Ca-Cu-O 超导氧化物单晶研成粉末后的X射线粉末衍射谱

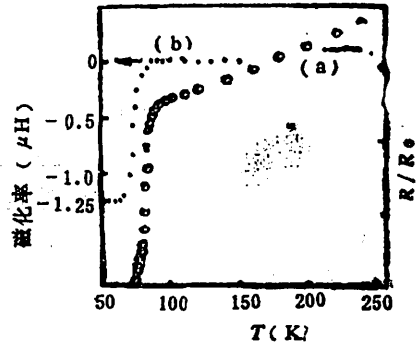


图2 Bi-Sr-Ca-Cu-O 超导氧化物单晶的电阻—温度关系和交流磁化率—温度关系

表1 Bi-Ca-Sr-Cu-O 单晶研成粉末后的X射线粉末衍射数据

N	hkl	d_{obs}	d_{calc}	I/I_0
1	002	15.49	15.37	57
2	032	7.74	7.81	9
3	052	5.14	5.13	11
4	071	3.85	3.86	100
5	155	3.24	3.26	5
6	083	3.227	3.227	5
7	156	3.080	3.071	95
8	079	2.565	2.565	74

表 1 (续)

N	hkl	d_{obs}	d_{calc}	I/I_0
9	0113	2.354	2.355	4
10	276	2.039	2.308	4
11	1014	2.031	2.034	4
12	278	1.923	1.923	21
13	351	1.708	1.710	4
14	2414	1.654	1.654	3
15	2315	1.609	1.608	3
16	368	1.537	1.537	21
17	3111	1.514	1.514	2

图 2 (a) 是单晶样品的电阻随温度变化的曲线, 超导转变参数为: $T_c(\text{onset}) = 86\text{K}$, $T_c(\text{mid}) = 79.5\text{K}$, $T_c(\rho = 0) = 74\text{K}$, 交流磁化率测量显示 Bi-Sr-Ca-Cu-O 单晶具有强的抗磁性 (图 2)。

参 考 文 献

- [1] Michel, C., Hervieu, M., Borel, M.M. et al., *Z. Phys.*, **B68** (1987), 421.
- [2] Maeda, H., Tanaka, Y., Fukutomi, M. et al., *Jpn. J. Appl. Phys. Lett.*, Vol 27, No. 2, (in press).
- [3] Hazen, R.M., Chu, C.W. et al., Superconductivity in the Very High T_c Bi-Ca-Sr-Cu-O System, *Phys. Rev. Lett.*, (submitted).

The Growth of Bi-Ca-Sr-Cu-O Single Crystal With Large Size and Its Superconductivity

Shin Dunming Chen Zuyao Qian Yitai Chen Tingzhu Niu Liwen Zhou Guien
(Dept. of Appl. Chem.) (Center of Struc. and Elem. Anal.)

Fang Minghu Xiang Jianshen Zhang Qirui
(Dept. of Phys.)

改善PIC 丝室边缘电场分布的研究

马文淦 周中平 张子平 林趾荣

许咨宗 陈宏芳

(近代物理系)

1 引言

在 LEP3 实验中, 倾斜式多丝正比室 PIC (proportional inclined chamber) 是用来监测束流亮度和双光子物理事例测量的。该室可以确定粒子位置, 与 BGO 量能器配合, 测量巴巴散射事例和双光子事例。实验上要求 PIC 室能在尽可能大的小角度范围内测量出射粒子的径迹, 为此, 必须尽量地改善 PIC 室靠近束流管道的边缘场分布, 使得靠近 PIC 室边缘的几根丝与室中心的信号丝具有同样灵敏性。通常的丝室由于不受使用位置的限制, 没有对室边缘丝的灵敏性提出要求。然而, 对于使用在特定空间位置、具有特殊几何形状 PIC 室, 我们必须在设计和制造中, 对室内的电场分布、空间分辨率等进行研究, 从而确定诸如丝径、丝距, 丝上所加的电压以及气体成分等各项技术设计指标。

2 PIC 室介绍

PIC 室是由 8 个梯形的正比丝室组成, 室的总装外形呈喇叭状。在 LEP3 实验装置上, 两个同样的 PIC 室分别对称地放在对撞中心的两侧, 每个梯形多丝室的室内结构见图 1。图中 s 为阳极丝间隔, d 为靠近边框的阳极丝到边框距离。PIC 室的中心套在束流金属管道上。为了排除束流管道对 PIC 室引起的电场分布影响, PIC 室靠近束流管道的一侧采用金属板边框, 并与阴极板一起接地。室内工作气体采用混合气体 $Ar + CO_2$ (CO_2 占 20%, Ar 占 80%)。

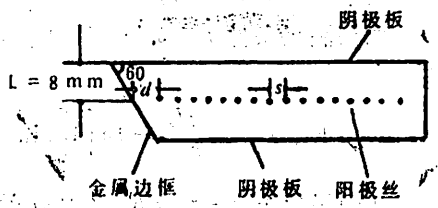


图 1 构成 PIC 室的单个丝室结构示意图

PIC 丝室的设计必须满足如下物理要求: 靠近束流管道的边缘场分布要尽量均匀, 使边缘丝保持灵敏, 并尽可能得到一致空间分辨率; 至于室边缘区丝和室中心区丝的增益, 只要求在同一数量级上

(除一号丝外, 其余丝的增益偏差不超过 30%)。确定采用较宽松的增益要求, 是由于 PIC 室是用于粒子定位, 并不测量电离, 因而改善了边缘电场分布以后, 即使各根丝的增益略有差异, 只要增益足够大, 也不会影响 PIC 室的正常工作。

实验和理论计算都表明, 对具有确定的外部几何形状和尺寸 PIC 室, 在室内工作气体已选定的情况下, 影响边缘场的因素有边缘区丝径、丝距以及丝上所加的电压等, 我们的工作就是通过理论计算来指导实验, 选择出最佳设计方案来。

3 室边缘场分布计算方法

我们采用了周期排列丝室的电场计算方法, 并将丝室用一组丝来描述, 其边框、阴极板等均用互相紧靠在一起的、具有相同半径的无限长金属丝来代替。这样 PIC 室内的电场计算就可以简化为对每一根丝在室内某点处产生的电位进行叠加。

对多丝室的电场计算公式简述如下^[1-3]: 假定在两个间距为 $2L$ 的平行零电位阴极板平面间, 有由单位长度上带单位电荷的无限长的阳极丝所构成的丝距为 s 的丝栅 (图 2),

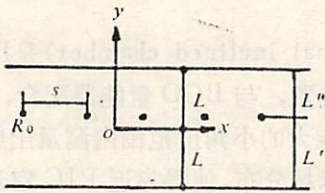


图 2 多丝室坐标图

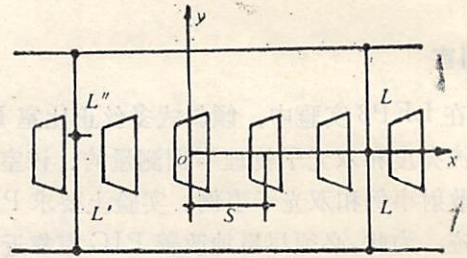


图 3 在两阴极板间沿 x 方向周期排列的丝室坐标图

丝的位置为 $z_k = z_0 + ks$ ($z_0 = x_0 + iy_0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。这些丝在空间任意一点 $z(z = x + iy)$ 处产生的复电位为

$$\psi(z) = i \frac{2\pi y_0}{Ls} (z - x_0) + \frac{2\pi L}{s} - 2 \ln \left[\frac{2(\sin \zeta - q^2 \sin 3\zeta + q^6 \sin 5\zeta - \dots)}{1 - q(\cos 2\zeta' - q^4 \sin \zeta' + q^9 \cos 6\zeta' - \dots)} \right] \quad (1)$$

其中 $\zeta = \pi(z - z_0)/s$, $\zeta' = \pi(z - \bar{z}_0)/s$, $q = \exp(-4\pi L/s)$

如果满足条件 $L \gg s$, 并且 $y_0 < s$, $v < s$, 则 q 是一个小量, 可取近似得到对应的物理势

$$V(z) \simeq \frac{2\pi L}{s} - \ln \left\{ 4 \left[\sin^2 \frac{\pi(x - x_0)}{s} + \sinh^2 \frac{\pi(y - y_0)}{s} \right] \right\} \quad (2)$$

在阳极丝上 $z - z_0 = R_0$ (阳极丝半径) 处, $\pi R_0/s \approx \sin[\pi(x - x_0)/s]$, 可以从公式 (2) 得到单位长度上的电荷 Q 。假定阳极丝上的电位为 V_0 , 则

$$Q = \frac{V_0}{\frac{2\pi L}{s} - 2 \ln \frac{2\pi R_0}{s}} \quad (3)$$

于是, 当丝栅平面上每根阳极丝的电位均为 V_0 时, 有公式

$$V(z) \approx \frac{V_0}{\frac{2\pi L}{s} - 2 \ln \frac{2\pi R_0}{s}} \left\{ \left(\frac{2\pi L}{s} \right) - \ln \left[4 \left(\sin^2 \frac{\pi(x-x_0)}{s} + \sinh^2 \frac{\pi(y-y_0)}{s} \right) \right] \right\} \quad (4)$$

为便于研究室边缘场，计算时将每个 PIC 的室体取为如图 3 中所示的轴对称形状。为了能采用周期性分布的丝室计算方法，假定在两个假想的相距很远的阴极板间，沿 x 方向周期排列着许多同样的，用相同一组丝来描述的室。取 $x-y$ 坐标原点 O 于一个具有对称形状的室中心（见图 3），并让这些室的间距大于 PIC 单个室的外形尺寸，这样我们就可以用公式（4）来计算构成室的每一根丝在室内任一点产生的电位了。通过电位计算，还可以得到电场的等位线，电力线以及室内各根阳极丝上的信号增益。

4 改善 PIC 室边缘场分布的方法

利用上述方法对 PIC 室的电场分布计算表明，如果按一般多丝正比室选用丝参数的办法，例如选取所有阳极丝具有相同丝径（0.02mm）和电位，丝间距为 2mm，边缘第一根丝与边框距离 $d = 3\text{mm}$ 时，这时边缘几根丝，特别是第一根丝周围电位梯度很大。以这样的参数作成的室，边缘丝与金属板边框易发生打火，而不能正常工作。即使工作后，靠边缘框架的几根丝上的增益也明显偏大。为避免 PIC 室的这种不稳定工作状态，并设法使 PIC 室能满足上述的物理要求，我们改变边缘部分的丝参数，作了理论计算，并和实验进行对比，我们发现改善 PIC 室边缘场分布可以用以下方法来实现：

（1）适当加粗靠近边缘的四根丝的丝径，特别是加粗第一根丝的丝径。

对比计算中均选取室内工作气体为 $\text{Ar} + \text{CO}_2$ （ CO_2 占 20%， Ar 占 80%），大气压力为 760mm 汞柱高，温度为 20°C （以下讨论中，PIC 室均采用这些参数值）。

图 4 绘出了两条均匀性已有所改善的增益曲线。它们是通过适当加粗靠近边框的四根丝的丝径计算得到的。这两组方案的室丝参数如下：第一组室丝参数取 $d = 4\text{mm}$ ，丝间距 $s = 2\text{mm}$ ， $V = 4.6\text{kV}$ ；1 号丝、2 号丝、3 号丝、4 号丝的丝径分别取 0.35mm，0.04mm，0.03mm，0.03mm；

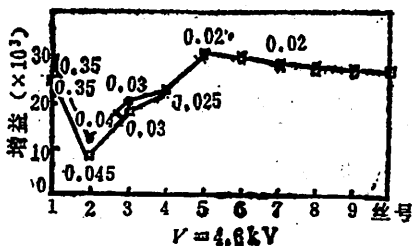


图 4 理论计算获得的增益曲线
 • 采用第一组室丝参数
 □ 采用第二组室丝参数

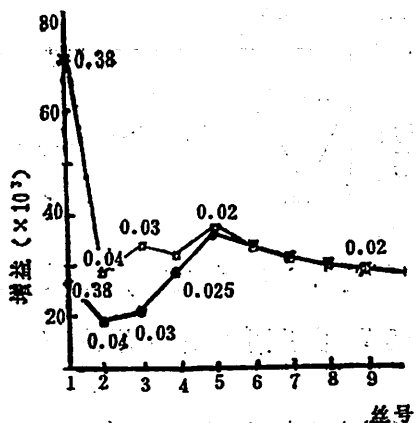


图 5 理论计算获得的增益曲线
 • $V_1 = 4.4\text{kV}$
 □ $V_1 = 4.5\text{kV}$

0.03mm 和 0.025mm, 其余丝径为 0.02mm。第二组室丝参数取 $d = 4\text{mm}$, 丝间距 $s = 2\text{mm}$, $V = 4.6\text{kV}$; 1号、2号、3号、4号丝的丝径分别取 0.35mm、0.045mm、0.03mm 和 0.025mm。图中可以看出适当加粗边缘四根丝的丝径, 尤其是第一根丝的丝径, 可以得到边缘丝与室中心的丝上大致相同的增益。

(2) 适当降低边缘第一根丝上所加的电压。

在 $d = 3\text{mm}$, $s = 2\text{mm}$ 的情况下, 我们比较了两种设计方案。在不改变前一方案的丝径时, 分别在第一根的丝上加 4.5kV 和 4.4kV 电压, 其余丝上电压均为 4.6kV。由此计算得到的两条增益曲线绘在图 (5) 上。图中可以看出边缘第一根丝上所加电压对边缘几根丝的增益有明显的影响。适当降低边缘第一根丝上的电压, 对改善边缘丝增益的均匀性有明显

效果。

(3) 将边缘第一根丝与边框的距离稍许加大。

在图 6 中绘出了均匀性大致相同的两条增益曲线。其中一条是通过降低边缘第一根丝的电压得到的 ($V_1 = 4.4\text{kV}$, 其余丝的电压 $V = 4.6\text{kV}$, $d = 3\text{mm}$, $s = 2\text{mm}$); 另一条则是通过加大边缘第一根丝至边缘的距离 d 得到的 (所有丝上的电压 $V = 4.6\text{kV}$, $d = 4\text{mm}$, $s = 2\text{mm}$)。这个结果表明, 稍许加大边缘第一根丝与边框距离, 同样能达到增益均匀的目的。

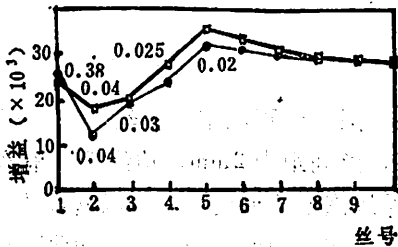


图 6 理论计算获得的增益曲线
 • $V_1 = 4.6\text{kV}$, $d = 4\text{mm}$
 □ $V_1 = 4.4\text{kV}$, $d = 3\text{mm}$

5 PIC 室边缘电场分布和丝空间分辨率

根据上述改善 PIC 室边缘场分布的方法, 结合实验上的测试调整丝参数; 最后我们选择了如下较理想的室丝参数: 边缘第一根丝的丝径取 0.35mm; $V_1 = 3.3\text{kV}$, $d = 3\text{mm}$, $s = 2\text{mm}$, 第二、三、四号丝的丝径也稍加粗为 0.04mm、0.03mm、0.025mm, 其余丝的丝径为 0.02mm, 第五号丝上电压 $V_5 = 3.389\text{kV}$, 其余丝上电压 $V = 3.4\text{kV}$ 。对这样的 PIC 室测得的增益曲线见图 7。

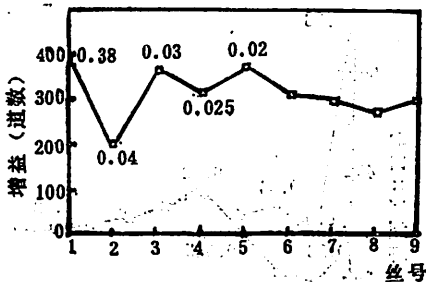


图 7 实验测试获得的增益曲线

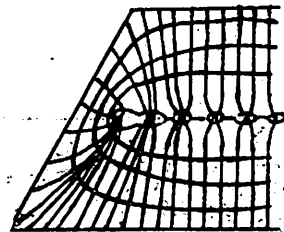


图 8 理论计算获得的室内等位线和电力线分布图

第五号丝上的电压降低了 11V, 这是为了降低一下五号丝上的增益, 以达到进一步改善增益均匀性的目的。图 7 中的曲线基本上能满足物理上对 PIC 室提出的要求。

采用这个方案的丝参数, 计算得到的电力线和等位线绘在图 8 上, 图中可以看到: 靠近

边缘的三根丝附近电场分布有明显的畸变，越靠近边框，电场畸变越厉害。3号丝以后的区域电场分布基本均匀，丝周围的电场分布也是左右对称的。

我们对用这组参数做成的 PIC 室进行了丝分辨率的测试，其实验框见图 9。用 ^{55}Fe 放射源，从 PIC 室阴极板表面一侧的不同位置垂直入射到室内。测得的靠近边框的 2 号、3 号、4 号……等几根丝的计数率曲线绘在图 10 上。图中可明显看出 4 号丝及 4 号以上丝的计数率曲线呈上升、下降都很陡的坪曲线。这一现象可以从图 8 所描述的电场特性得到解释。由于在这一区域内电场分布对称均匀，因而实验测到一个宽度约为阳极丝间隔，上升下降很陡的坪。在理想情况下，4 号以上的丝上的空间分辨率应等于阳极丝间距 2mm，但由于放射源准直缝有一定宽度，实际测到的空间分辨率略大于此值。在靠近边框的 2 号丝左侧区域，电力线向 1 号丝方向弯曲；2 号丝右侧区域，电力线向 2 号丝方向倾斜。这就使得 2 号丝上测得的是一个不再有坪区、上升下降平缓的计数率曲线。同样原因使得 3 号丝上也有类似的曲线，只是由于电场畸变较小，它还保留有一段较短的坪区，并且上升、下降的曲线部分也比 2 号丝附近要稍陡一些。

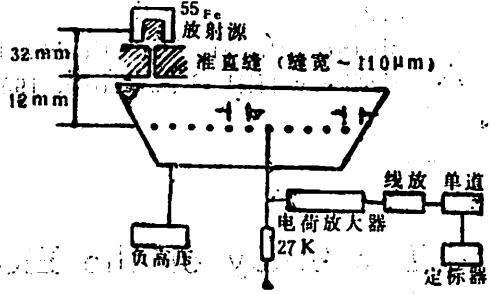


图 9 测量信号丝的空间分辨率的实验框图

以上讨论可以看出，实验上测量的 PIC 室的空间分辨率可以由理论计算得到的室边缘电场分布的畸变特性得到解释，这也说明了理论计算的可靠性。

6 结论

理论计算与实验测试表明，要使 PIC 室边缘场分布得到改善，以满足物理要求，可采

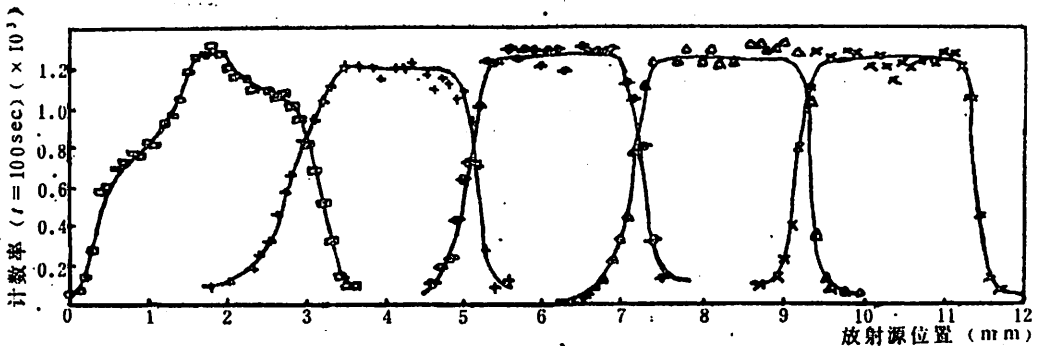


图 10 实验测试获得的室空间位置分辨曲线

用以下方法：首先，可以适当加粗靠近边缘的四根丝的丝径，特别是第一根丝的丝径。加粗第一根丝的丝径时，要考虑到若丝径太粗时，会引起这根丝与边框打火，使室不能正常工作；第二，可以适当降低边缘几根丝，特别是第一根丝上的电压，也可以把边缘第一根丝与边框的距离稍许加大。不过采用降低第一根丝上电压的方法时，要考虑到它会引起邻近三、

四根丝上增益的变化，使这几根根丝的灵敏度降低；采用加大第一根丝与边框距离的方法时，也要考虑到这样会增加室在探测时的死区。因而在具体确定优化设计方案时，综合考虑上述各方面的因素，结合材料性能及加工条件，选择了在文章第五部分中所述的较理想的丝参数。

参 考 文 献

- [1] Buchholz, H., *Electrische and Magnetische Potentialfelder*, Spring, Berlin, 1957, p90.
- [2] Erskine, G. A., *Nuclear Instruments and Methods*, 105 (1972), 565—572.
- [3] Morse, P. M. and Feshbach, H., *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York, 1953, p489.

The Study of the Electric Field Distribution on the Edge of the PIC Chamber

Ma Wengan Zhou Zhongping Zhang Zhiping
Lin Zhirong Xu Zizong Chen Hongfang

(Dept. of Modern Physics)

百合组织培养中不同发育途径的激素调节

鲁 润 龙

(生物系)

引 言

植物组织培养的先驱 Haberlandt (1902年) 发表了最早的植物组织培养成果。他试图从植物的离体成熟细胞形成“人工胚”，试验未成功。

Skoog 和崔激 (1948年)，Skoog 和 Miller (1957年) 提出了生长素和细胞分裂素的比例对植物组织培养完成各种形态的重要性。Steward (1958年) 发表了“胡萝卜体细胞的胚胎发生及其植株再生过程”一文，证实了 Haberlandt 的预想的正确性。此后植物组织培养进入新的时期^[1]。多年来，人们积累了许多宝贵经验，然而，植物生长发育的激素调节机理仍不清楚，较多的工作是集中在器官发生的激素调节方面，很少有人把组织培养中器官型、器官发生型、胚胎发生型的激素调节联系起来研究^[2]。研究三种不同类型的生长发育途径中所添外源激素的种类和比例的差别、激素引起的细胞形态结构及其代谢的变化，包括基因的转录表达的差异，这是涉及植物遗传和发育的基础理论问题。研究此问题的困难在于采用同一种外植体能否得到三种不同的生长发育途径类型；其次在营养、光照和温度基本相同的条件下，激素是怎样作用于细胞和基因活动。

本实验试图采用同一种植物的同一组织部位的外植体，通过组织培养获得三种不同类型发育途径。以此比较激素种类和配比的差别、植物组织细胞形态结构的变化、激素作用部位，最后，探索激素作用途径。

本实验已成功地诱导百合组织培养形成三种类型生长发育途径：在鳞片上直接长出芽和根的器官型；在鳞片上形成愈伤组织，再分化成芽和根的器官发生型；在鳞片上通过愈伤组织形成胚状体，最后都能形成植株。对三种类型发育途径进行了组织学的观察，比较了激素调节作用，并对此进行讨论。

1 材料与方 法

实验采用的材料：麝香百合 (*Lilium longiflorum*) 的鳞片，组织培养形成的小鳞片。

实验方法：采用 MS 培养基 (Murashige & Skoog 1962) 为基本培养基。通过改变生

长素 (2,4-D, NAA, IBA) 与细胞分裂素 (KT, BA, ZT) 的种类和浓度的比例来诱导器官型、器官发生型、胚胎发生型的生长发育。

接种采用肥皂水刷洗、流水冲洗, 然后用 70-75% 乙醇、0.1% HgCl₂ 常规消毒。

接种外植体取 0.5cm × 0.5cm 鳞片小块, 突面向下。

培养物置于 1000-1500lx 的光照下, 每日光照 10-12 小时, 于 25℃-26℃ 静置培养。每四周至一月转代培养, 已三年。

2 实验结果

2.1 器官型的植株形成

把百合鳞片的切块放在 MS + 吲哚丁酸 IBA 0.1-0.2mg/l + KT (或 BA) 1-2mg/l 的培养基上 (pH=5.8)。在接种后的三、四周左右, 在外植体鳞片切段的近轴面可见到小鳞茎突起。在同种新鲜培养基上继续培养可见到小鳞茎的形成, 三周左右可长绿叶。转移到 MS + NAA 0.5mg/l 的培养基上培养均能长根。待根长到 1cm 长时, 即可转移到花盆或土中栽培, 成活率 95% 以上。

若把鳞片表皮撕去, 则在上述同样的培养基和培养条件均无法形成小鳞茎突起, 也无法形成植株。

2.2 器官发生型的植株形成

百合鳞片的切块在 MS + 2,4-D 1-2mg/l + BA 0.1mg/l 的培养基培养, 四周左右即可见到浅黄色愈伤组织的形成, 每四周传接一次, 愈伤组织即可扩增。当愈伤组织转到 MS + BA 1mg/l + 2,4-D 0.1mg/l (或不加) 的培养基培养, 则可形成小鳞茎和绿芽。同上, 转到 MS + NAA 0.1mg/l (或无激素培养基上) 可长根, 形成植株即可移栽, 存活率同样在 95% 以上。

2.3 胚胎发生型的植株形成

百合鳞片切块在 MS + 2,4-D 2mg/l 培养基上培养三、四周, 然后转到无激素培养基 + 水解酪蛋白 CH 100mg/l, 则可形成愈伤组织松散, 具独立界面的小颗粒, 此颗粒均能进一步形成苗, 在 NAA 0.5mg/l + BA 0.1mg/l + CH 100mg/l 培养基生长, 可形成芽和根, 长成植株, 均较一般小鳞茎细小。经观察, 同样有球状胚和心形胚时期, 此颗粒为胚状体。

2.4 胚性细胞无性系的建立

上述胚状体形成之后, 在分化培养基上形成苗, 并在基部又形成许多颗粒、胚状体, 转入传代培养, 能不断增殖。一瓶接种十瓶, 每四周至一个月传代一次, 已传代 41 代, 历时三年半, 仍保持旺盛的增殖能力, 不断产生新的胚状体和苗, 可诱导成植株。

无论何种发育途径, 只要一旦形成鳞茎和根, 存活率极高, 移栽也极易存活。

3 讨论

植物组织培养中, 再生植株的形态发生, 可以综合为四种基本方式: ① 先形成根, 后来在根上长芽; ② 先形成芽, 后在芽下形成根; ③ 在愈伤组织上独立地产生根和芽, 以后连接成统一的轴状结构; ④ 再生植株通过合子胚相似的胚胎发生过程^[1]。

归纳上述方式为三种不同类型的生长发育途径: 直接 from 外植体长出不定芽不定根; 通过

愈伤组织形成植株；通过胚状体形成植株。目前兼有以上不同发育途径的材料不多，而采用外植体相同的部位的则更少。

采用同一种植物，相同的外植体部位，甚至尽可能的相同的生理状态下进行接种操作，这样要有一个相似的背景，包括内源激素相类似的背景下，才能准确地比较不同激素的调节作用。当细胞分裂素浓度高于生长素浓度时，能诱导小鳞茎的形成；当生长素浓度高于细胞分裂素浓度时，就诱导愈伤组织的形成；而当生长素 2,4-D 高于诱导愈伤组织的浓度，就会形成胚状体，此时需加 CH100mg/l。此结论符合 Skoog 和崔激、Skoog 和 Miller 的观点，胚状体的形成也符合大多数实验的结论^[4-6]。

从不同的激素浓度比例诱导不同的生长发育途径的差异中，可以进一步探讨激素与植物性状表达的关系，即激素与基因表达的关系。研究激素作用部位和作用机理，这是一个具有实际应用又有理论意义的问题。

从组织学观察中，发现细胞分裂素浓度高于生长素浓度的培养基中，外植体表皮细胞及其邻近皮层细胞分裂加快，形成芽原基。当撕去表皮细胞时，无法形成芽原基，则不能形成鳞茎。而当生长素浓度高于细胞分裂素浓度时则无此现象，而是组织内部分裂细胞增多。形成细胞团，即愈伤组织。

关于胚状体的诱导和发育，Kohlenbach (1978) 把胚状体的发生分为胚胎原始细胞的诱导和胚状体的发育两个阶段^[2,7]。另有实验说明，胚状体的诱导确有两步：首先是高浓度的生长素 2,4-D 添加培养基，诱导胚胎原始细胞的形成；撤去 2,4-D 的培养基培养，或添加微量细胞分裂素则可诱导胚状体的发育。如果在高浓度 2,4-D 的培养基进行继代培养，则向愈伤组织方向发展。这些实验结果说明：一旦胚原细胞形成，则适当光照、温度、营养条件，它会按既定的发育顺序进行。若此时再添加 2,4-D 的培养基培养，则会使细胞过度增殖，形成细胞团，打乱发育顺序，形成愈伤组织。若此时添加适当的细胞分裂素则会启动胚原细胞的进一步发育，形成胚，进而发育成植株。

通过实验明确了诱导三种不同的发育途径所需的激素种类和比例，初步进行了组织学的观察。探索激素的作用部位和激素怎样调节基因的活动的研究工作有待进一步进行。

参 考 文 献

- [1] 罗士韦, 遗传学报, 4 (1978), 91-112.
- [2] 詹祥灿, 植物生理学报, 9 (1983), 317-325.
- [3] 朱激, 遗传学报, 5 (1978), 79-88.
- [4] 周俊彦, 植物生理学报, 7 (1981), 389-396.
- [5] 许智宏, 植物生理学报, 3 (1979), 66.
- [6] Skoog, F., Miller, C. O., 11th Symp. Soc. Epx. Biol., 11 (1957), 118-131.
- [7] Kohlenbach, H. W., Frontiers of Plant Tissue Culture (ed. T. A. Thorpe), Univ. of Calgary Offset Printing Services, Calgary, 1978, p59-66.
- [6] Skoog, F., Miller, C. O., 11th Symp. Soc. Epx. Biol., 11(1957), 118-131.
- [7] Kohlenbach, H. W., Frontiers Of Plant Tissue Culture (ed. T. A. Thorpe), Univ. of Calgary Offset Printing Services, Calgary, 1978, p59-66.

On the Phytohormone Regulation of Different Development Pathways in *Lilium* Tissue Culture

Lu Runlong

(*Department of Biology*)

雾化淀积石墨炉原子吸收法直接 测定植物油中微量铁

陈树榆 林淑钦 齐文启

(结构成分分析中心)

食用植物油中微量铁的含量是评价油质量的指标之一。铁含量过多会影响油的色泽和滋味，并且会对油脂的氧化起催化作用。测定油中铁含量的一般方法是将油经过消解处理后再进行测定^[1,2]，其过程冗长，且易受到沾污或损失。文献[3]采用甲基异丁基酮稀释，石墨炉原子吸收直接测定，精度较低，相对标准偏差大于10%；为了消除基体干扰，有的使用标准加入法，这样又使得测定手续复杂化。

美国实验仪器公司研制的雾化淀积进样装置对于解决上述问题颇有好处。本文使用此装置，将经四氢呋喃适当稀释的油样以气溶胶形式淀积于预热的石墨管内，结果表明，这样的进样方式既有利于消除基体干扰，又明显改善了测定精度，是一种简便、迅速而又比较准确的分析方法。

1 实验部分

1.1 仪器及工作条件

1.1.1 仪器

美国 IL951 型原子吸收分光光度计、655 控温石墨炉、254FASTAC 雾化淀积自动进样器、铁空心阴极灯及热解石墨管。

IL 250 FASTAC 雾化淀积进样器如图 1 所示。试液经毛细管由气体雾化器引入雾化室（类似于火焰法的预混合室），转变为气溶胶，大的液滴从雾化室底部排液管排出，小的雾滴则通过塑料管经玻璃喷嘴淀积于已预热的石墨管内，触及热的管壁后立即被干燥。采用真空清洗方式洗涤进样系统，喷嘴的一端还接有一根与真空装置相连的塑料管，管上装有夹紧阀 2。在延迟时间内，阀 2 松开，清洗

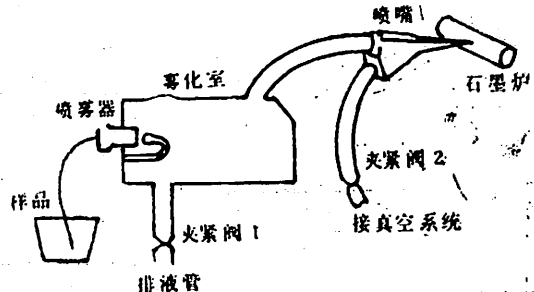


图 1 气溶胶淀积系统示意图

1988年2月27日收到

液由与塑料管相连的真空装置抽出并排掉，在雾化淀积时间阀 2 夹紧。而阀 1 在延迟和淀积时均处于夹紧状态，在每个样品淀积完成后，阀 1 松开排弃大的液滴。

1.1.2 工作条件

仪器工作条件如表 1 所示。

表 1 仪器工作条件

原子吸收分光光度计		雾化淀积自动进样器		控温石墨炉		
				程序	温度(°C)	时间(sec)
波长(nm)	248.3	喷雾提升量 (ml/min)	4.5	雾化淀积	65	5
灯电流(mA)	8	延迟时间 (sec)	5.0	热解	65~850 850~950	10 15
光谱通带(nm)	0.5	淀积时间 (sec)	5.0	原子化	950~2500 2500	0 5
背景校正	氘灯			载气	氩气, 流速	15
测量方式	峰高				(立方呎/时) 积分开始减为 5	

1.2 试剂

铁标准储备液, 1000 $\mu\text{g/ml}$, 含 5.6% HCl (Alfa products), 经适当稀释后配成工作标准液; 四氢呋喃, 分析纯。

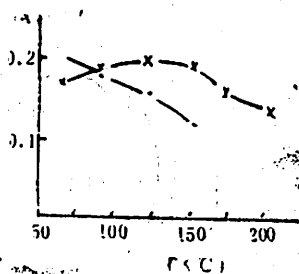
1.3 测定方法

称取 0.25~0.50g 植物油和 99.75~99.50g 四氢呋喃于容量瓶中混匀, 用表 1 所列条件测定峰值吸光度。取一定量铁标准储备液, 用四氢呋喃作溶剂配成相应浓度的工作标准液, 按与样品相同条件和步骤测定其峰值吸光度, 绘制吸光度与铁浓度的关系曲线。

2 结果与讨论

2.1 雾化淀积温度对灵敏度的影响

由于沸点的差异, 不同溶剂应选择适宜的淀积温度。本文实验了水和四氢呋喃分别作溶剂时, 雾化淀积温度对灵敏度的影响, 结果示于图 2。由图可见, 四氢呋喃在 65°C 时灵敏度最高, 随着淀积温度的升高, 灵敏度逐渐降低。而水却在低于 120°C 时灵敏度较低, 在 120°C~150°C 时灵敏度最高。超过 150°C 又逐渐降低。这是由于当淀积温度过低时, 喷到石墨管壁上的气溶胶未完全干燥而被载气流带走, 从而降低了气溶胶的淀积效率。若淀积温度过高, 会使气溶胶在到达管壁之前一部分已完全干燥而随气流排出, 只有一部分淀积到管壁上, 导致淀积效率降低。用雾化淀积进样时, 石墨管暴露在空气中, 温度太高影响石墨管的寿命, 所以选取淀积效率高而温度适当的一点作为雾化淀积的温度。对于水溶液,



● 2 雾化淀积温度对灵敏度的影响

- 10 $\mu\text{g Fe/kg}$ 四氢呋喃溶液
- × 20 $\mu\text{g Fe/kg}$ 水溶液

对于水溶液,

雾化淀积温度在 120℃~150℃ 之间选取比较合适。本文采用四氢呋喃作溶剂，由于其沸点低，易挥发，选取 65℃ 比较合适。

2.2 有机溶剂对灵敏度的影响

实验结果表明，铁溶解在水和四氢呋喃中，在用微量注射器进样时，两种溶液的灵敏度无明显差别。而用雾化淀积进样时，铁在四氢呋喃中是在水中的两倍（见表 2）。这是由于四氢呋喃具有较高的挥发性和较低的表面张力，扩散性良好，能形成比水溶液更均匀的气溶胶，可使样品均匀地淀积在石墨管内表面，有利于加热至原子化的热传导，提高了原子化速度。另外，由于四氢呋喃的表面张力比水小，喷雾可得到直径更小的雾滴，减小雾滴在雾化室的凝聚，使单位时间内进入石墨管的试样量增多，从而提高了灵敏度。有机试剂对灵敏度的影响情况列于表 2。

表 2 不同溶剂用两种进样方式对铁灵敏的影响 (10 μg Fe/kg)

溶剂	微量注射器进样 (10 μl)		雾化淀积自动进样 (淀积 10 sec)	
	吸光度平均值 (10次测定)	绝对灵敏度 (× 10 ⁻¹² g)	吸光度平均值 (10次测定)	相对灵敏度 (μg/kg)
水	0.180	2.22	0.130	0.31
四氢呋喃	0.160	2.17	0.247	0.16

2.3 石墨管表面处理对灵敏度的影响

实验结果表明，热解涂层石墨管测定铁的灵敏度是普通管的 3 倍。热解管吸收峰形比普通管陡峭，而普通管峰半宽较宽，且有拖尾现象，记忆效应严重（见图）用扫描电镜观察发现，普通石墨管表面有许多小孔，使石墨管内的原子蒸气通过管壁的扩散损失增大。在高温石墨炉原子化法中，测定吸收信号大小直接取决于石墨管内的自由原子密度。自由原子通过管壁的扩散逸失是自由原子在石墨管内最主要的损失，故对灵敏度有相当大的影响。此外，石墨管表面的多孔性还使试样渗入管壁不同深度，影响原子化速度，从而使灵敏度下降，并产生记忆效应。相反，热解石墨管由于表面镀覆了一层热解石墨，因而具有更低的透气性、低孔度及高的热传导性。可以克服普通石墨管的缺点，延长了原子蒸气在石墨管内的停留时间，具有更高的灵敏度。

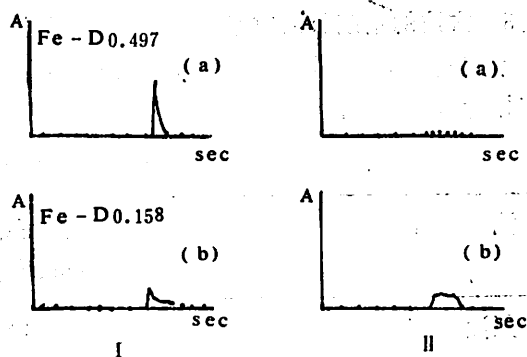


图 3 石墨管表面处理对铁灵敏度的影响
I 20 μg Fe/kg 淀积 10 秒, (a) 热解管, (b) 普通管
II 空烧, (a) 热解管, (b) 普通管。

2.4 标准加入法曲线与标准曲线的比较

对两种植物油作标准加入法实验，在相同条件下所得到的加入法曲线与铁的标准曲线相

互平行(见图4)。从而说明雾化淀积进样石墨炉原子吸收法可以有效地克服基体干扰。这是因为这种进样方式,样品以气溶胶形式均匀淀积在石墨管较大的表面上,形成的晶粒细小,有利于样品加热至原子化阶段的热传导,减低了背景及元素间可能引起的化学干扰。用两种曲线法测得两种油的含铁量十分接近,如表3所示。在实测油样时,为简化操作,可选用标准曲线法。

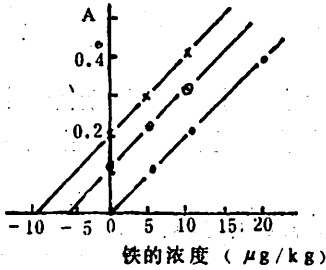


图4 标准曲线和加入法曲线
 · 标准曲线
 ○ 多维油加入法曲线
 × 菜油加入法曲线

表3 两种曲线法的测定结果

油样	标准加入法 (mgFe/kg)	工作曲线法 mgFe/mg
菜油 I	3.79	3.98
多维油	1.21	1.27

2.5 共存离子的干扰

食用油中的金属元素除少数几种外,大多数低于铁的含量。在石墨炉原子吸收法中,Ag、Au和Cr的存在对Fe的测定有负干扰^[4]。作者取三份浓度为0.01mgFe/kg标准铁溶液,分别加入10mgFe/kg的Ag、Au和Cr,未发现干扰。一般植物油中Ag和Cr的含量在0.01~0.02mg/kg之间^[1,2],所以植物油中共存离子不干扰铁的直接测定。

2.6 方法的精度及回收率

本文测定了三种油计5个样品中铁的含量及回收率,其含铁量与文献[1]和[2]中的报道值接近(表4)。

表4 油样测定结果及回收率

油 样	测定结果 (mgFe/kg)	回收率 (%)
菜油 I	3.98	88~102
菜油 II	2.30	
菜油 III	1.50	
豆油	3.37	104
多维油	1.27	94~100

取两种油样重复进行10次测定,相对标准偏差均小于3.80%。用有机溶剂稀释直接测定油样中的铁含量,获得这样的精度是令人满意的。在用微量注射器进样时,同样试液的相对标准偏差却高于10%。这是因为后者系液滴进样,样品在石墨管内的流散、渗透和飞溅等问题引起物理干扰,从而影响测定值的精度。雾化淀积技术由于溶剂在进样时受热挥发,从而避免了上述物理干扰,且进样量和进样位置重复性好,从而改善了测定精度。

参 考 文 献

- [1] Abdel-Kahman, A. H. Y., *Food Chem.*, 13 (1984), 161.
- [2] Raptis, S. E., et al., *Analytica Chimica Acta*, 138 (1982), 93.
- [3] Coms, R. and Van Pee W., *JAOCS*, 60(1983), 957.
- [4] C. W. 富勒著, 李述信译, 电热原子化原子吸收光谱分析, 冶金工业出版社, 1979年, 91—92.

Direct Determination of Micro Iron in Vegetable Oil by Graphite Furnace Atomic Absorption Spectrometry With IL Fastac Autosampler

Chen Shuyu Lin Shuqin Qi Wenqi
(Center of Structure and Element Analysis)

**JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY
OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

(Quarterly)

Vol.19 No 1 Sum No.63 1989

Hefei, Anhui

The People's Republic of China

中国科学技术大学学报

(季刊)

第19卷 第1期 (总第63期)

编辑出版: 《中国科学技术大学学报》编辑部
(安徽省合肥市金寨路24号)

印刷: 中国科学技术大学印刷厂

国内总发行: 合肥市邮局

订购处: 全国各地邮局

国外总发行: 中国国际图书贸易总公司

(中国国际书店, 北京2820信箱)

国内统一刊号: CN34—1054 1989年3月出版

邮政代号: 26—31 定价: 3.80

国外代号: Q527