

中国科学技术大学学报

第17卷

第1期

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY
OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Vol. 17

No. 1

1

1987

中国科学技术大学学报

第 17 卷 第 1 期 (总第 53 期)

目 录

非对称第一类齐性 Siegel 域的曲率	殷慰萍 (1)
某些凸紧空间的平均距离常数	杨 路 张景中 (17)
非对称第一类齐性 Siegel 域的截曲率	陈万喜 (25)
低温下氧在硫酸水溶液中铝电极上的还原反应	杭 璐 (33)
恶嗪—9 激光染料的合成	汪月生 张国尝 秦汉盈 (39)
用无焰原子吸收法直接测定植物中的 Co 和 Ni	齐文启 林淑钦 陈树榆 合志阳一 (44)
甲基丙烯酸三丁基锡酯自由基溶液聚合反应动力学的研究	韩哲文 张其锦 陈昆松 沈红娇 (51)
新稀土显色剂 DBC—偶氮氯磷导数分光光度法测定矿石中稀土总量	尹香莲 越贵文 张平辉 (59)
关于色谱柱效能评价的讨论	吴宁生 邱爱民 (65)
通过“单体检验”的中厚板—薄板单元体及其在动力特征值问题中的应用	王秀喜 兰 冬 (69)
镜像抑制混频器中镜像回收效应的分析	谈 江 (77)
集成电路的电路模拟程序	赵睿民 庄镇泉 (86)

研 究 简 报

关于 $\nu(n)$ 及 $\varphi(n)$ 的两个渐近公式	刘弘泉 (98)
一个丢番图不等式	余红兵 (105)
锈规作图论	侯晓荣 源 远 (110)
非晶硅碳 (氢) 中的光致亚稳效应及表面水气吸附的影响	王 军 赵世富 韩大星 (116)
掺杂三氧化二铁多晶压片电极的光电化学特性	赵叔晞 (120)
符离集烧鸡的辐射保鲜研究	章吉祥 施晨阳 刘隆基 杨承宗 郭仁荣 江淑云 张信仁 (124)
四水合丁烯二酸镍的晶体和分子结构	周 平 李健民 石 磊 姚家星 千金子 范海福 (130)

Na ₅ Eu(WO ₄) ₃ 发光晶体的生长与光谱特性	潘 峻 姚连增 陈立高
	周贵恩 赵贵文 (134)
数论方法在密码通讯技术中的两个应用	康继鼎 (137)

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Vol. 17 No.1 (Sum No. 53)

CONTENTS

- The Curvature of Nonsymmetric Homogeneous Siegel Domains
of the First Type..... Yin Weiping (1)
- Average Distance Constants of Some Compact Convex Spaces
..... Yang Lu, Zhang Jingzhong (17)
- The Sectional Curvatures of the Nonsymmetric Homogeneous Siegel
Domains of the First Type..... Chen Wanxi (25)
- Reduction of Oxygen on Lead Electrode in Aqueous Solution
of H_2SO_4 at Low Temperature Hang Hu (33)
- Synthesis of Oxazine-9 Laser Dyes
.....Wang Yuesheng, Zhang Guoshang, Qin Hanying (39)
- Direct Determination of Trace Co and Ni in Plants by Flamless
Atomic Absorption Spectrophotometry
..... Qi Wenqi, Lin Shuqin, Chen Shuyu, Y. Gobshi (44)
- Study on the Kinetics of Radical Polymerization of Tributyltin Methacrylate
in Solution.....Han Zhewen, Zhang gijin, Chen Kunsong,
Shen Hongjiao (51)
- A New Developer DBC-chlorophosphinazo for the Derivative
Spectrophotometric Determination of the Total Amount of Rare Earths
in Mineral Yin Xianlian, Zhao Guiwen, Zhang Pinghui (59)
- A Discussion on the Evaluation of Chromatographic Column Efficiency
..... Wu Ningsheng, Qiu Aimin (65)
- A Thin and Moderately Thick Plate Element Satisfying the
IE Test and Its Application in Dynamic Eigenvalue Problems
..... Wang Xiuxi, Lan Dong (69)
- An Analysis on Image Recovery Effect in Mixers with Image

- Rejection..... Tan Jiang (77)
 An IC Simulation Program.....Zhao Ruimin, Zhuang Zhenquan (86)

Research Notes

- Two Asymptotic Formula on $\nu(n)$ and $\varphi(n)$Liu Hongquan (98)
 On a Diophantine Inequality.....Yu Hongbing (105)
 Theory of Construction with Rusty Compass
Hou Xiaorong, Yuan Yuan (110)
 Influence of Surface Absorption of Water Vapour and Metastable
 State Induced by Light in a-SiC:H
Wang Jun, Zhao Shifu, Han Daxing (117)
 Photoeffects in Ferric Oxide Sintered Electrodes with Titanium
 Dioxide Impurities.....Zhao Shuxi (120)
 Research of Preservation Method of Fuliji Roast Chicken Using Irradiation
 Technique Zhang Jixiang, Shi Chenyang, Liu Longji
 Yang Jengtong, Guo Renrong, Jiang Shuyun, Zhang Xinren (124)
 Crystal and Molecular Structure of 4-hydrated $2(\text{COO}-\text{C}_2\text{H}_2-\text{COO})_n \cdot \text{Ni}$ (11)
Zhou Ping, Li Jianmin, Shi Lei, Yao Jiaxin
Qian Jinzi Fan Haifu (130)
 Growth of Luminescent Crystal $\text{Na}_2\text{Eu}(\text{WO}_4)_4$ and Their Spectra
 Property Pan Jun, Yao Lianzeng, Chen Ligao,
 Zhou Guien, Zhao Guiwen (134)
 Two Applications of Numer Theory Methods in Cryptography
Kang Jiding (137)

非对称第一类 Siegel 域的曲率

殷 慰 萍

(数 学 系)

摘 要

本文给出一类齐性 Siegel 域 S , 在 Hua 度量和 Bergman 度量下的全纯截曲率和 Riemann 截曲率的显表达式, 并指出与经典的 Cartan 域的不同之处。

关键词: 曲率, 对称空间, 度量。

Laura Geatti 在 [9] 中, 对一个四维的非对称齐性 Siegel 域给出了解析自同构群、Bergman 度量以及在 Bergman 度量下的曲率的显表达式。

钟家庆和作者在 [1] 中给出了非对称齐性 Siegel 域的新类型。作者在文 [2—4] 中给出了它们的解析自同构群、Bergman 核函数、Hua 度量和 Bergman 度量的显表达式, 并讨论了它们与经典的第一类 Cartan 域的相应关系。可见, 我们的工作要比 L. Geatti 的工作早得多与广泛得多。本文主要内容如摘要所述。

1

1.1

令

$$R_I = \left\{ Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{matrix} \left| \begin{matrix} \frac{1}{2i} (Z - \bar{Z}') > 0, \\ m_1 + m_2 + m_3 = m \\ i = \sqrt{-1} \end{matrix} \right. \right\}$$

若 $Z_{23} = 0, Z_{32} = 0$, 就得 [1] 中的 $S_I \begin{pmatrix} m_1, m_2, m_3 \\ 1 \quad 3 \end{pmatrix}$ 简记为 S_I 。由 [2] 知, S_I 的 Bergman 度量方阵和 Hua 度量方阵分别为:

$$T(Z, \bar{Z}) = J(\bar{A} \times A) \kappa I_\lambda (A' \times \bar{A}) \kappa J'$$

$$H(Z, \bar{Z}) = J(\bar{A} A' \times A \bar{A}') \kappa J'$$

其中

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & J_2 \\ O & J_3 \end{pmatrix}, \quad I_\lambda = \begin{pmatrix} I_1 & O \\ O & I_2 \\ O & I_3 \end{pmatrix}$$

而

$$J_1 = I^{(m, m)}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ m_1 m_2 & m_2^2 & m_2 m_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 m_2 \\ m_2^2 \\ m_3^2 \end{matrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ m_1 m_3 & m_2 m_3 & m_3^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 m_3 \\ m_2^2 \\ m_3^2 \end{matrix}$$

$$I_1 = I^{(m, m)}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 m_2 \\ m_2^2 \\ m_3 m_2 \end{matrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 I \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 m_3 \\ m_2 m_3 \\ m_3^2 \end{matrix}$$

$$\lambda_j = \frac{m_1 + m_j}{m}, \quad j = 2, 3$$

A 为 m 阶方阵, 有如下形式:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{matrix}$$

而且

$$(A\bar{A}')^{-1} = \frac{1}{2i}(Z - \bar{Z}'), \quad Z \in S_1$$

1.2

由文[6]可知, 若 K 为 Kähler 空间的一个度量张量, 则其测地线方程为:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \sum_{k=1}^n \frac{\partial K}{\partial z^k} \frac{dz^k}{dt} K^{-1} = 0,$$

其中 t 为测地线弧长. 由此, 对应于 $T(z, \bar{z})$ 及 $H(z, \bar{z})$ 的 S_1 的测地线方程分别为

$$\frac{d^2 \bar{z}}{dt^2} + \frac{d\bar{z}}{dt} \sum \frac{\partial T}{\partial \bar{z}_{j,l}} \frac{d\bar{z}_{j,l}}{dt} T^{-1} = 0 \quad (j, l \text{ 遍历 } S_1 \text{ 中点的独立变量})$$

$$\frac{d^2 \bar{z}}{dt^2} + \frac{d\bar{z}}{dt} \sum \frac{\partial H}{\partial \bar{z}_{j,l}} \frac{d\bar{z}_{j,l}}{dt} H^{-1} = 0$$

其中 \bar{z} 为 $(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + 2m_1 m_2 + 2m_1 m_3)$ 维复向量, 若先将 $Z_{j,l}$ 的元素按其行的自然顺序排成向量 $z_{j,l}$, 则

$$\bar{z} = (z_{11}, z_{12}, z_{13}, z_{21}, z_2, z_{31}, z_{33})$$

由于

$$(\bar{A}A \times A\bar{A}')_{\mathbf{K}} = \left[\left(\frac{\bar{Z} - Z'}{-2i} \right)^{-1} \times \left(\frac{Z - \bar{Z}'}{2i} \right)^{-1} \right]_{\mathbf{K}}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{A} \times A)_{\kappa} I_{\lambda} (A' \times \bar{A}')_{\kappa} &= \left[\left(\frac{\bar{Z} - Z'}{-2i} \right)^{-1} \times \left(\frac{Z - \bar{Z}'}{2i} \right)^{-1} \right]_{\kappa} \\
&+ (\lambda_2 - 1) \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\bar{Z}_{22} - Z'_{22}}{-2i} \right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{Z_{22} - \bar{Z}'_{22}}{2i} \right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)_{\kappa} \\
&+ (\lambda_3 - 1) \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\bar{Z}_{33} - Z'_{33}}{-2i} \right)^{-1} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{Z_{33} - \bar{Z}'_{33}}{2i} \right)^{-1} \end{array} \right)_{\kappa}
\end{aligned}$$

令

$$Y = \left(\frac{Z - \bar{Z}'}{2i} \right), \quad Y_2 = \left(\frac{Z_{22} - \bar{Z}'_{22}}{2i} \right), \quad Y_3 = \left(\frac{Z_{33} - \bar{Z}'_{33}}{2i} \right)$$

则

$$\begin{aligned}
\sum \frac{\partial H}{\partial \bar{z}_{j1}} \frac{d\bar{z}_{j1}}{dt} &= \frac{-1}{2i} J \left[\left(\bar{Y}^{-1} \frac{dZ'}{dt} \bar{Y}^{-1} \times Y^{-1} \right)_{\kappa} + \left(\bar{Y}^{-1} \times Y^{-1} \frac{dZ}{dt} Y^{-1} \right)_{\kappa} \right] J' \\
\sum \frac{\partial T}{\partial \bar{z}_{j1}} \frac{d\bar{z}_{j1}}{dt} &= \frac{-1}{2i} J \left\{ \left(\bar{Y}^{-1} \frac{dZ'}{dt} \bar{Y}^{-1} \times Y^{-1} \right)_{\kappa} + \left(\bar{Y}^{-1} \times Y^{-1} \frac{dZ}{dt} Y^{-1} \right)_{\kappa} \right. \\
&+ (\lambda_2 - 1) \left[\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\bar{Y}_2^{-1} \frac{dZ'_{22}}{dt} \bar{Y}_2^{-1} \times Y_2^{-1} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\bar{Y}_2^{-1} \times Y_2^{-1} \frac{dZ_{22}}{dt} Y_2^{-1} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right] \\
&\left. + (\lambda_3 - 1) \left[\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\bar{Y}_3^{-1} \frac{dZ'_{33}}{dt} \bar{Y}_3^{-1} \times Y_3^{-1} \right) \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\bar{Y}_3^{-1} \times Y_3^{-1} \frac{dZ_{33}}{dt} Y_3^{-1} \right) \end{array} \right) \right] \right\} J'
\end{aligned}$$

若将 S_r 的点 Z 看作 R_r 的点, 而按 Z 的行的自然顺序将 Z 的元素排成 m^2 维复向量 z , 则

$$z = \bar{z} J Q$$

其中 Q 为排列方阵, 它满足

$$(A \times B)_{\kappa} = Q (A \times B) Q'$$

因此上面的测地线方程就分别变为:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \left[-\frac{1}{2i} \left(\bar{Y}^{-1} \frac{dZ'}{dt} \bar{Y}^{-1} \times Y^{-1} \right) - \frac{1}{2i} \left(\bar{Y}^{-1} \times Y^{-1} \frac{dZ}{dt} Y^{-1} \right) \right] \tilde{H}^{-1} = 0$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \left(-\frac{1}{2i} L - \frac{1}{2i} L^* \right) \tilde{T}^{-1} = 0$$

其中

$$\tilde{H}^{-1} = Q' J' H^{-1} J Q, \quad \tilde{T}^{-1} = Q' J' T^{-1} J Q$$

$$L = \bar{Y}^{-1} \frac{dZ'}{dt} \bar{Y}^{-1} \times Y^{-1} + (\lambda_2 - 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Y}_2^{-1} \frac{dZ'_{22}}{dt} \bar{Y}_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ (\lambda_3 - 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Y}_3^{-1} \frac{dZ'_{33}}{dt} \bar{Y}_3^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3^{-1} \end{pmatrix}$$

$$L^* = \bar{Y}^{-1} \times Y^{-1} \frac{dZ}{dt} Y^{-1} + (\lambda_2 - 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Y}_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2^{-1} \frac{dZ_{22}}{dt} Y_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ (\lambda_3 - 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Y}_3^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3^{-1} \frac{dZ_{33}}{dt} Y_3^{-1} \end{pmatrix}$$

若 C 与 D 都是 m 阶方阵, W 与 Z 是 R_t 中的点, 都按其行的自然顺序分别排成 m^2 维复向量 w 与 z . 而且 $w = z(C \times D)$, 则有以下关系:

$$W = C' Z D$$

此事实容易直接验证. 由此可知, $\frac{dz}{dt} L$ 与 $\frac{dz}{dt} L^*$ 若写成方阵则完全相同. 换言之, 它们

是由同一个方阵按同样的顺序排成的 m^2 维复向量, 因此有 $\frac{dz}{dt} L = \frac{dz}{dt} L^*$, 这样, 测地

线方程就变为:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -i \frac{dz}{dt} \left[\bar{Y}^{-1} \times Y^{-1} \frac{dZ}{dt} Y^{-1} \right] \tilde{H}^{-1}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -i \frac{dz}{dt} L \tilde{T}^{-1}$$

1.3

根据 C. L. Siegel 在由 [7] 中所提供的方法, 我们对 $T(Z, \bar{Z})$ 定义两个共变微分如下:

$$\delta_i u = -\frac{i}{2} u \left\{ \bar{Y}^{-1} \delta_i Z' \bar{Y}^{-1} \times Y^{-1} + \bar{Y}^{-1} \times Y^{-1} \delta_i Z Y^{-1} \right\}$$

$$+ (\lambda_2 - 1) \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Y}_2^{-1} \delta_i Z'_{22} \bar{Y}_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Y}_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2^{-1} \delta_i Z_{22} Y_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + (\lambda_3 - 1) \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Y}_3^{-1} \delta_j Z'_{j,3} \bar{Y}_3^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3^{-1} \end{pmatrix} \right. \\
& \left. + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Y}^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3^{-1} \delta_j Z'_{j,3} Y_3^{-1} \end{pmatrix} \right] \tilde{T}^{-1}
\end{aligned}$$

$j=1,2$. 若令 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 就得到对 $H(Z, \bar{Z})$ 而言的情形. 令

$$\delta_j u^* = \delta_j u Q' = \delta_j \tilde{u} J, \quad u^* = u Q' = \tilde{u} J, \quad T^{*-1} = J' T^{-1} J$$

则有

$$\delta_j u^* = -\frac{i}{2} u^* [L_j + L_j^*] T^{*-1}, \quad j=1,2$$

其中

$$L_j = (\bar{Y}^{-1} \delta_j Z' \bar{Y}^{-1} \times Y^{-1})_{\mathbf{K}} + (\lambda_2 - 1) \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Y}_2^{-1} \delta_j Z'_{j,2} \bar{Y}_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{K}}$$

$$+ (\lambda_3 - 1) \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Y}_3^{-1} \delta_j Z'_{j,3} \bar{Y}_3^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3^{-1} \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{K}}, \quad j=1,2$$

$$L_j^* = (\bar{Y}^{-1} \times Y^{-1} \delta_j Z Y^{-1})_{\mathbf{K}} + (\lambda_2 - 1) \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Y}_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2^{-1} \delta_j Z_{j,2} Y_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{K}}$$

$$+ (\lambda_3 - 1) \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Y}_3^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3^{-1} \delta_j Z_{j,3} Y_3^{-1} \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{K}}, \quad j=1,2$$

由计算可知

$$\delta_1 \delta_1 u^* = \frac{-i}{2} \delta_1 u^* \cdot (L_2 + L_2^*) T^{*-1} - \frac{i}{2} u^* \delta_1 (L_2 + L_2^*) \cdot T^{*-1}$$

$$- \frac{i}{2} u^* (L_2 + L_2^*) \delta_1 T^{*-1}$$

$$\delta_2 \delta_1 u^* = -\frac{i}{2} \delta_2 u^* \cdot (L_1 + L_1^*) T^{*-1} - \frac{i}{2} u^* \delta_2 (L_1 + L_1^*) \cdot T^{*-1}$$

$$- \frac{i}{2} u^* (L_1 + L_1^*) \delta_2 T^{*-1}$$

由于

$$\delta_j T^{*-1} = -J' [T^{-1} \delta_j T \cdot T^{-1}] J = \frac{1}{2i} J' T^{-1} [J(L_j - \dot{L}_j + L_j^* - \dot{L}_j^*) J'] T^{-1} J$$

$$= \frac{1}{2i} T^{*-1} (L_j + L_j^* - \dot{L}_j - \dot{L}_j^*) T^{*-1}$$

其中, \dot{L}_j 是 L_j 的表达式中将 δ, Z' 换为 δ, \bar{Z} 而成的式子, \dot{L}_j^* 是 L_j^* 的表达式中将 δ, Z 换为 δ, \bar{Z}' 而成的式子。这样, 我们有

$$(\delta_2 \delta_1 - \delta_1 \delta_2) u^* = -\frac{u^*}{4} (L_2 + L_2^*) T^{*-1} (\dot{L}_1 + \dot{L}_1^*) T^{*-1} \\ + \frac{u^*}{4} (L_1 + L_1^*) T^{*-1} (\dot{L}_2 + \dot{L}_2^*) T^{*-1} + \frac{i}{2} u^* [\delta_1 (L_2 + L_2^*) - \delta_2 (L_1 + L_1^*)] T^{*-1}$$

我们引进如下的微分运算符号: $d_1, d_2, \bar{d}_1, \bar{d}_2$ 。

$$d_j = \sum \frac{\partial}{\partial z_{k1}} d_j z_{k1}, \quad \bar{d}_j = \sum \frac{\partial}{\partial \bar{z}_{k1}} \bar{d}_j \bar{z}_{k1}, \quad j=1, 2$$

记

$$\dot{T} = (\bar{A} \times A)_K J_1 (A' \times \bar{A}')_K$$

经过具体计算可知, $u^* d_2 \dot{T} \cdot T^{*-1} \bar{d}_1 \dot{T} \cdot T^{*-1} + u^* d_1 \dot{T} \cdot T^{*-1} \bar{d}_2 \dot{T} \cdot T^{*-1} + u^* (\bar{d}_1 d_2 \dot{T} - \bar{d}_2 d_1 \dot{T}) T^{*-1}$ 就等于 $(\delta_2 \delta_1 - \delta_1 \delta_2) u^*$ 的表示式中将 δ, Z 改为 d, Z , 将 δ, \bar{Z} 改为 \bar{d}, \bar{Z} 之后而得的式子 ($j=1, 2$)。因此, 我们可以定义

$$(\delta_2 \delta_1 - \delta_1 \delta_2) u^* = -u^* d_2 \dot{T} \cdot T^{*-1} \bar{d}_1 \dot{T} \cdot T^{*-1} + u^* d_1 \dot{T} \cdot T^{*-1} \bar{d}_2 \dot{T} \cdot T^{*-1} \\ + u^* (\bar{d}_1 d_2 \dot{T} - \bar{d}_2 d_1 \dot{T}) T^{*-1} \equiv (d_2 d_1 - d_1 d_2) u^*$$

此即定义 $\delta_j u^* \equiv -u^* d_j \dot{T} \cdot T^{*-1}$, 对函数 $\varphi(Z, \bar{Z})$, 定义 $\delta_j \varphi \equiv d_j \varphi + \bar{d}_j \varphi$ ($j=1, 2$)。由于 S_j 的 Bergman 度量为

$$dS^2 = d\bar{z} T \bar{d}\bar{z}' T \bar{d}\bar{z}' = d\bar{z} J \dot{T} J' \bar{d}\bar{z}' = d\bar{z} \dot{T} \bar{d}\bar{z}'$$

令

$$g(z_1^*, z_2^*) = z_1^* \dot{T} z_2^{*'}$$

则有

$$R(u^*, v^*) = \frac{1}{2} [g(d_2 d_1 - d_1 d_2) u^*, v^*] + \bar{g}'((d_2 d_1 - d_1 d_2) u^*, v^*)]$$

取

$$u^* = d_1 z^* = d_1 \bar{z} J = d_1 z Q', \quad v^* = d_2 z^* = d_2 \bar{z} J = d_2 z Q',$$

则有

$$R(d_1 z^*, d_2 z^*) = \frac{1}{2} [g((d_2 d_1 - d_1 d_2) d_1 z^*, d_2 z^*) + \bar{g}'((d_2 d_1 - d_1 d_2) d_1 z^*, d_2 z^*)] \\ = \frac{1}{2} \{ d_1 z^* [(\bar{d}_1 d_2 \dot{T} - \bar{d}_2 d_1 \dot{T}) T^{*-1} \bar{d}_1 \dot{T}] - (\bar{d}_2 d_1 \dot{T} - \bar{d}_1 d_2 \dot{T}) T^{*-1} \bar{d}_2 \dot{T} \} \overline{d_1 z^{*'}} \\ + d_2 z^* [(\bar{d}_2 d_1 \dot{T} - \bar{d}_1 d_2 \dot{T}) T^{*-1} \bar{d}_2 \dot{T}] - (\bar{d}_1 d_2 \dot{T} - \bar{d}_2 d_1 \dot{T}) T^{*-1} \bar{d}_1 \dot{T} \} \overline{d_2 z^{*'}} \}$$

由文[8]第65页可知, S_j 的 Riemann 截曲率为

$$K(S_j) = -\frac{R(d_1 z^*, d_2 z^*)}{|d_1 z^* \wedge d_2 z^*|^2}$$

由于分母是正的, 因而我们只考虑分子。

在 $R(d_1 z^*, d_2 z^*)$ 的表达式中。将 \dot{T} 换为 $[(\bar{A}A') \times (AA')]_{\kappa}$, 将 T^{*-1} 换为 $J' [J(\bar{A}A' \times A'A)]_{\kappa} J' J$, 就得到 S_i 的以 $H(Z; \bar{Z})$ 为度量张量的相应的值, 记为 $R_R(d_1 z^*, d_2 z^*)$ 。

不难验证, $[\dot{A}d\dot{T} - d\dot{T} \cdot T^{*-1}d\dot{T}]$ 就是 S_i 的 Bergman 度量的西曲率张量, 在其中令 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 就得到 S_i 的以 $H(Z, \bar{Z})$ 为度量张量的西曲率张量。

2

2.1

我们计算 $Z = iI$ 时, $R(d_1 z^*, d_2 z^*)$ 的值。

$$\begin{aligned} T^{*-1}|_{z=iI} &= (I \times I)_{\kappa} - \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \right]_{\kappa} - \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\kappa} \\ &+ \frac{m_3}{m_1 + m_2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\kappa} + \frac{m_2}{m_1 + m_3} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \right]_{\kappa} \\ &= T_1^{-1} + \frac{m_3}{m_1 + m_2} T_2^{-1} + \frac{m_2}{m_1 + m_3} T_3^{-1}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} T_1^{-1} &= T_{11}^{-1} + T_{12}^{-1}, \quad T_{11}^{-1} = (I \times I)_{\kappa} \\ T_{12}^{-1} &= - \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \right]_{\kappa} - \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\kappa} \end{aligned}$$

记

$$\dot{T} = T_1 - \frac{m_3}{m} T_2 - \frac{m_2}{m} T_3, \quad (\because \lambda_2 - 1 = -\frac{m_3}{m}, \lambda_3 - 1 = -\frac{m_2}{m})$$

其中

$$\begin{aligned} T_1 &= (\bar{Y}^{-1} \times \bar{Y}^{-1})_{\kappa}, \quad T_2 = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Y}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\kappa} \\ T_3 &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Y}_3^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3^{-1} \end{pmatrix} \right]_{\kappa} \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned} d_2 \dot{T} \cdot T^{*-1} d_1 \dot{T}|_{z=iI} &= \left[d_2 T_1 \cdot T_1^{-1} d_1 T_1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2} d_2 T_1 \cdot T_2^{-1} d_1 T_1 \right. \\ &+ \frac{m_2}{m_1 + m_3} d_2 T_1 \cdot T_3^{-1} d_1 T_1 - \frac{m_3}{m} d_2 T_2 \cdot T_1^{-1} d_1 T_1 - \frac{m_2^2}{m(m_1 + m_2)} d_2 T_2 \cdot T_2^{-1} d_1 T_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{m_2^2}{m(m_1+m_2)} d_2 T_3 \cdot T_3^{-1} \dot{\partial}_1 T_1 - \frac{m_2}{m} d_2 T_3 \cdot T_1^{-1} \dot{\partial}_1 T_1 - \frac{m_3}{m} d_2 T_1 \cdot T_1^{-1} \dot{\partial}_1 T_2 \\
& - \frac{m_3^2}{m(m_1+m_2)} d_2 T_1 \cdot T_2^{-1} \dot{\partial}_1 T_2 + \frac{m_3^2}{m^2} d_2 T_2 \cdot T_1^{-1} \dot{\partial}_1 T_2 + \frac{m_3^2}{m^2(m_1+m_2)} d_2 T_2 \cdot T_2^{-1} \dot{\partial}_1 T_2 \\
& - \frac{m_2}{m} d_2 T_1 \cdot T_1^{-1} \dot{\partial}_1 T_3 - \frac{m_2^2}{m(m_1+m_2)} d_2 T_1 \cdot T_3^{-1} \dot{\partial}_1 T_3 + \frac{m_2^2}{m^2} d_2 T_3 \cdot T_1^{-1} \dot{\partial}_1 T_3 \\
& + \frac{m_2^3}{m^2(m_1+m_2)} d_2 T_3 \cdot T_3^{-1} \dot{\partial}_1 T_3 \Big]_{z=i,1}
\end{aligned}$$

而且当 $Z = iI$ 时, 有如下等式:

$$\begin{aligned}
d_2 T_2 \cdot T_1^{-1} \dot{\partial}_1 T_1 &= d_2 T_2 \cdot T_1^{-1} \dot{\partial}_1 T_1 = d_2 T_2 \cdot T_2^{-1} \dot{\partial}_1 T_1 \\
d_2 T_3 \cdot T_1^{-1} \dot{\partial}_1 T_1 &= d_2 T_3 \cdot T_1^{-1} \dot{\partial}_1 T_1 = d_2 T_3 \cdot T_3^{-1} \dot{\partial}_1 T_1 \\
d_2 T_1 \cdot T_1^{-1} \dot{\partial}_1 T_2 &= d_2 T_1 \cdot T_1^{-1} \dot{\partial}_1 T_2 = d_2 T_1 \cdot T_2^{-1} \dot{\partial}_1 T_2 \\
d_2 T_2 \cdot T_1^{-1} \dot{\partial}_1 T_2 &= d_2 T_2 \cdot T_1^{-1} \dot{\partial}_1 T_2 = d_2 T_2 \cdot T_2^{-1} \dot{\partial}_1 T_2 \\
d_2 T_1 \cdot T_1^{-1} \dot{\partial}_1 T_3 &= d_2 T_1 \cdot T_1^{-1} \dot{\partial}_1 T_3 = d_2 T_1 \cdot T_3^{-1} \dot{\partial}_1 T_3 \\
d_2 T_3 \cdot T_1^{-1} \dot{\partial}_1 T_3 &= d_2 T_3 \cdot T_1^{-1} \dot{\partial}_1 T_3 = d_2 T_3 \cdot T_3^{-1} \dot{\partial}_1 T_3
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
[d_2 \dot{T} \cdot T^* \dot{\partial}_1 \dot{T}]_{z=i,1} &= \left[d_2 T_1 \cdot T_1^{-1} \dot{\partial}_1 T_1 + \frac{m_3}{m_1+m_2} d_2 T_1 \cdot T_2^{-1} \dot{\partial}_1 T_1 \right. \\
& + \frac{m_2}{m_1+m_2} d_2 T_1 \cdot T_3^{-1} \dot{\partial}_1 T_1 - \frac{m_3}{m_1+m_2} d_2 T_2 \cdot T_2^{-1} \dot{\partial}_1 T_1 - \frac{m_2}{m_1+m_2} d_2 T_3 \cdot T_3^{-1} \dot{\partial}_1 T_1 \\
& - \frac{m_3}{m_1+m_2} d_2 T_1 \cdot T_2^{-1} \dot{\partial}_1 T_2 + \frac{m_3^2}{m(m_1+m_2)} d_2 T_2 \cdot T_2^{-1} \dot{\partial}_1 T_2 \\
& \left. - \frac{m_2}{m_1+m_2} d_2 T_1 \cdot T_3^{-1} \dot{\partial}_1 T_3 + \frac{m_2^2}{m(m_1+m_2)} d_2 T_3 \cdot T_3^{-1} \dot{\partial}_1 T_3 \right]_{z=i,1}
\end{aligned}$$

由于

$$\dot{\partial}_1 d_2 \dot{T} = \dot{\partial}_1 d_2 T_1 - \frac{m_3}{m} \dot{\partial}_1 d_2 T_2 - \frac{m_2}{m} \dot{\partial}_1 d_2 T_3$$

$$d_2 T_1 \cdot T_1^{-1} \dot{\partial}_1 T_1 = d_2 T_1 \cdot T_1^{-1} \dot{\partial}_1 T_1 + d_2 T_1 \cdot T_1^{-1} \dot{\partial}_1 T_1$$

因此有

$$\begin{aligned}
[d_2 \dot{T} - d_2 \dot{T} \cdot T^* \dot{\partial}_1 \dot{T}]_{z=i,1} &= [\dot{\partial}_1 d_2 T_1 - d_2 T_1 \cdot T_1^{-1} \dot{\partial}_1 T_1 \\
& - \frac{m_3}{m} (\dot{\partial}_1 d_2 T_2 - d_2 T_2 \cdot T_2^{-1} \dot{\partial}_1 T_2) - \frac{m_2}{m} (\dot{\partial}_1 d_2 T_3 - d_2 T_3 \cdot T_3^{-1} \dot{\partial}_1 T_3) \\
& - d_2 T_1 \cdot T_2^{-1} \dot{\partial}_1 T_1 - \frac{m_3}{m_1+m_2} (d_2 T_1 \cdot T_2^{-1} \dot{\partial}_1 T_1 - d_2 T_2 \cdot T_2^{-1} \dot{\partial}_1 T_1 \\
& - d_2 T_1 \cdot T_2^{-1} \dot{\partial}_1 T_2 + d_2 T_2 \cdot T_2^{-1} \dot{\partial}_1 T_2) - \frac{m_2}{m_1+m_2} (d_2 T_1 \cdot T_3^{-1} \dot{\partial}_1 T_1 \\
& - d_2 T_3 \cdot T_3^{-1} \dot{\partial}_1 T_1 - d_2 T_1 \cdot T_3^{-1} \dot{\partial}_1 T_3 + d_2 T_3 \cdot T_3^{-1} \dot{\partial}_1 T_3) \Big]_{z=i,1}
\end{aligned}$$

2.2

由计算不难得到

$$(\bar{d}_1 d_2 T_1 - d_2 T_1 \cdot T_1^{-1} \bar{d}_1 T_1)_{z^{-1}I} = \frac{1}{4} [(\bar{d}_1 Z d_2 Z' \times I)_K + (I \times \bar{d}_1 Z' d_2 Z)_K]$$

$$(\bar{d}_1 d_2 T_2 - d_2 T_2 \cdot T_2^{-1} \bar{d}_1 T_2)_{z^{-1}I} = \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{d}_1 Z_{22} d_2 Z'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_K$$

$$+ \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{d}_1 Z'_{22} d_2 Z_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_K$$

$$(\bar{d}_1 d_2 T_3 - d_2 T_3 \cdot T_3^{-1} \bar{d}_1 T_3)_{z^{-1}I} = \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{d}_1 Z_{33} d_2 Z'_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \right]_K$$

$$+ \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{d}_1 Z'_{33} d_2 Z \end{pmatrix} \right]_K$$

下面计算 $[d_2 T_1 \cdot T_2^{-1} \bar{d}_1 T_1 - d_2 T_2 \cdot T_2^{-1} \bar{d}_1 T_1 - d_2 T_1 \cdot T_2^{-1} \bar{d}_1 T_2 + d_2 T_2 \cdot T_2^{-1} \bar{d}_1 T_2]_{z^{-1}I}$
由于

$$(\bar{d}_2 T_1 \cdot T_2^{-1} \bar{d}_1 T_1)_{z^{-1}I} = \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & d_2 Z'_{22} & 0 \\ 0 & d_2 Z'_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bar{d}_1 Z_{21} & \bar{d}_1 Z_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_K$$

$$+ \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & d_2 Z_{12} & 0 \\ 0 & d_2 Z_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bar{d}_1 Z'_{12} & \bar{d}_1 Z'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_K$$

$$+ \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bar{d}_1 Z_{21} & \bar{d}_1 Z_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & d_2 Z_{12} & 0 \\ 0 & d_2 Z_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_K$$

$$+ \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & d_2 Z'_{21} & 0 \\ 0 & d_2 Z'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bar{d}_1 Z'_{12} & \bar{d}_1 Z'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_K$$

$$(\bar{d}_2 T_2 \cdot T_2^{-1} \bar{d}_1 T_1)_{z^{-1}I} = \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 Z'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bar{d}_1 Z_{21} & \bar{d}_1 Z_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_K$$

$$+ \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 Z_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bar{d}_1 Z'_{12} & \bar{d}_1 Z'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_K$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \overline{d_1 Z_{21}} & \overline{d_1 Z_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 Z_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{K}} \\
& + \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 Z'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \overline{d_1 Z'_{12}} & \overline{d_1 Z'_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{K}} \\
(d_2 T_1 \cdot T_2^{-1} \overline{d_1 T_2})_{z=1} & = \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_2 Z'_{12} & d_2 Z'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{d_1 Z_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{K}} \\
& + \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_2 Z_{21} & d_2 Z_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{d_1 Z'_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{K}} \\
& + \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{d_1 Z_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & d_2 Z_{12} & 0 \\ 0 & d_2 Z_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{K}} + \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & d_2 Z'_{21} & 0 \\ 0 & d_2 Z'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{d_1 Z'_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{K}} \\
(d_2 T_2 \cdot T_2^{-1} \overline{d_1 T_2})_{z=1} & = \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 Z'_{22} \overline{d_1 Z_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{K}} \\
& + \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 Z'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{d_1 Z'_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{K}} + \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 Z_{22} \overline{d_1 Z'_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{K}} \\
& + \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{d_1 Z_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 Z_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{K}}
\end{aligned}$$

因此我们得到 $[d_2 T_1 \cdot T_2^{-1} \overline{d_1 T_1} - d_2 T_2 \cdot T_2^{-1} \overline{d_1 T_1} - d_2 T_1 \cdot T_2^{-1} \overline{d_1 T_2} + d_2 T_2 \cdot T_2^{-1} \overline{d_1 T_2}]_{z=1}$ 的表达式

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & d_2 Z'_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{K}} + \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & d_2 Z_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{K}} \right\} \\
& \cdot \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \overline{d_1 Z_{21}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{K}} + \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \overline{d_1 Z'_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{K}} \right\}
\end{aligned}$$

同样我们可以得到 $[d_2 T_1 \cdot T_3^{-1} \overline{d_1 T_1} - d_2 T_3 \cdot T_3^{-1} \overline{d_1 T_1} + d_2 T_1 \cdot T_3^{-1} \overline{d_1 T_3} + d_2 T_3 \cdot T_3^{-1} \overline{d_1 T_3}]_{z=1}$ 的表达式

$$\frac{1}{4} \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & d_2 Z'_{31} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{K}} + \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_2 Z_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{K}} \right\} \cdot$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{0}{d_1 Z_{31}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \right\}_K + \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{0}{d_1 Z_{13}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}_K$$

2.3

现在计算 $d_2 T_1 \cdot T_{12}^{-1} d_1 T_1$. 在下面的表达式中, 我们已作了某种简化, 即将矩阵的某些不影响最后结果的元素径直以 0 来代替, 例如

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & d_2 Z'_{21} & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{0}{d_1 Z_{21}} * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \right]_K$$

我们就简化为

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & d_2 Z'_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{0}{d_1 Z_{21}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \right]_K$$

原因是在上两式的左边乘以 $d_1 z^*$ 右边乘以 $\overline{d_2 z^*}$ 所得结果是完全一样的. 我们有

$$\begin{aligned} (d_2 T_1 \cdot T_{12}^{-1} d_1 T_1)_{z=i} &= -\frac{1}{4} \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & d_2 Z'_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \right]_K + \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_2 Z_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_K \right\} \\ &= \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{0}{d_1 Z_{21}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \right]_K + \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{0}{d_1 Z_{13}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_K \right\} \\ &\quad - \frac{1}{4} \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & d_2 Z'_{31} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_K + \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & d_2 Z_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_K \right\} \\ &= \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{0}{d_1 Z_{31}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_K + \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{0}{d_1 Z_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_K \right\} \end{aligned}$$

2.4

综合 2.2 与 2.3 就得到 $[\bar{d}_1 d_2 \dot{T} - d_2 \dot{T} \cdot T^{*-1} \bar{d}_1 \dot{T}]_{z=i}$ 的具体表达式, 其共轭转置就是 $[\bar{d}_2 d_1 \dot{T} - d_1 \dot{T} \cdot T^{*-1} \bar{d}_2 \dot{T}]_{z=i}$ 的具体表达式, 再注意到以下两点:

a. $d_1 z^* (C \times D) \overline{d_2 z^*} = d_1 z (C \times D) \overline{d_2 z}$

b. $u(C \times D)(E \times F) \bar{v}' = tr [C' U D F \bar{V}' E']$.

事实上, a 是显然的, 至于 b, 令

$$x = u(C \times D), \quad y = v(\bar{E}' \times \bar{F}')$$

将 x 与 y 排成方阵有

$$X = C' U D, \quad Y = \bar{E} V \bar{F}'$$

因此有

$$u((C \times D)(E \times F) \bar{v}' = x \bar{y}' = tr [X \bar{Y}'] = tr [C' U D F \bar{V}' E']$$

b 得证。这样我们有

$$\begin{aligned}
 d_{1,z^*} [\bar{d}_1 d_2 \dot{T} - d_2 \dot{T} \cdot T^{*-1} \bar{d}_1 \dot{T}]_{z=1} \overline{d_2 z^*} &= \frac{1}{4} \text{tr} [d_2 \overline{Z d_1 Z'} d_1 \overline{Z d_2 Z'} + d_1 \overline{Z d_1 Z'} d_2 \overline{Z d_2 Z'}] \\
 - \frac{m_3}{4m} \text{tr} [d_2 Z_{22} \overline{d_1 Z'} d_1 Z_{22} \overline{d_1 Z'}_{22} + d_1 Z_{22} \overline{d_1 Z'}_{22} d_2 Z_{22} \overline{d_2 Z'}_{22}] &- \frac{m_2}{4m} \text{tr} [d_2 Z_{33} \overline{d_1 Z'}_{33} d_1 \\
 Z_{33} \overline{d_2 Z'}_{33} + d_1 Z_{33} \overline{d_1 Z'}_{33} d_2 Z_{33} \overline{d_2 Z'}_{33}] &+ \frac{1}{4} \text{tr} [(d_2 Z_{12} d_1 Z_{13} + d_1 Z_{21} d_2 Z_{13}) \overline{(*)}'] \\
 + \frac{1}{4} \text{tr} [(d_2 Z_{31} d_1 Z_{12} + d_1 Z_{31} d_2 Z_{12}) \overline{(*)}'] &- \frac{m_3}{4(m_1 + m_2)} \text{tr} [(d_2 Z_{21} d_1 Z_{12} + d_1 Z_{21} d_2 Z_{12}) \\
 \overline{(*)}'] &- \frac{m_2}{4(m_1 + m_3)} \text{tr} [(d_2 Z_{31} d_1 Z_{13} + d_1 Z_{31} \overline{d_2 Z'}_{13}) \overline{(*)}']
 \end{aligned}$$

其中, $\overline{(*)}'$ 表示其前面的因子的共轭转置, 下同。

同样我们有

$$\begin{aligned}
 d_{1,z^*} [\bar{d}_2 d_1 \dot{T} - d_1 \dot{T} \cdot T^{*-1} \bar{d}_2 \dot{T}]_{z=1} \overline{d_2 z^*} &= \frac{1}{4} \text{tr} [d_1 \overline{Z d_2 Z'} d_2 \overline{Z d_1 Z'} + d_1 \overline{Z d_1 Z'} d_2 \overline{Z d_2 Z'}] \\
 - \frac{m_3}{4m} \text{tr} [d_1 Z_{22} \overline{d_2 Z'}_{22} d_2 Z_{22} \overline{d_1 Z'}_{22} + d_1 Z_{22} \overline{d_1 Z'}_{22} d_2 Z_{22} \overline{d_2 Z'}_{22}] &- \frac{m_2}{4m} \text{tr} [d_1 Z_{33} \\
 \overline{d_2 Z'}_{33} d_2 Z_{33} \overline{d_1 Z'}_{33} + d_1 Z_{33} \overline{d_1 Z'}_{33} d_2 Z_{33} \overline{d_2 Z'}_{33}] &+ \text{tr} [d_1 Z_{21} d_1 Z_{13} \overline{d_2 Z'}_{13} \overline{d_2 Z'}_{21}] \\
 + \text{tr} [d_1 Z_{31} d_1 Z_{12} \overline{d_2 Z'}_{12} \overline{d_2 Z'}_{31}] &- \frac{m_3}{m_1 + m_2} \text{tr} [d_1 Z_{21} d_1 Z_{13} \overline{d_2 Z'}_{13} \overline{d_2 Z'}_{21}] \\
 - \frac{m_2}{m_1 + m_3} \text{tr} [d_1 Z_{31} d_1 Z_{13} \overline{d_2 Z'}_{13} \overline{d_2 Z'}_{31}] &
 \end{aligned}$$

最后我们得到

$$\begin{aligned}
 R(d_{1,z^*}, d_{2,z^*})_{z=1} &= \frac{1}{4} \text{tr} [(d_1 \overline{Z d_2 Z'} - d_2 \overline{Z d_1 Z'}) \overline{(*)}'] - \frac{m_3}{4m} \text{tr} [(d_1 Z_{22} \overline{d_2 Z'}_{22} \\
 - d_2 Z_{22} \overline{d_1 Z'}_{22}) \overline{(*)}'] &- \frac{m_2}{4m} \text{tr} [(d_1 Z_{33} \overline{d_2 Z'}_{33} - d_2 Z_{33} \overline{d_1 Z'}_{33}) \overline{(*)}'] \\
 + \frac{1}{4} \text{tr} [(d_2 Z_{21} d_1 Z_{13} + d_1 Z_{21} d_2 Z_{13}) \overline{(*)}'] &+ \frac{1}{4} \text{tr} [(d_2 Z_{31} d_1 Z_{12} + d_1 Z_{31} d_2 Z_{12}) \overline{(*)}'] \\
 - \frac{1}{2} \text{tr} [d_1 Z_{21} d_1 Z_{13} \overline{d_2 Z'}_{13} \overline{d_2 Z'}_{21}] &- \frac{1}{2} \text{tr} [d_1 Z_{21} d_1 Z_{13} \overline{d_2 Z'}_{13} \overline{d_2 Z'}_{21}]' \\
 - \frac{1}{2} \text{tr} [d_1 Z_{31} d_1 Z_{12} \overline{d_2 Z'}_{12} \overline{d_2 Z'}_{31}] &- \frac{1}{2} \text{tr} [d_1 Z_{31} d_1 Z_{12} \overline{d_2 Z'}_{12} \overline{d_2 Z'}_{31}]' \\
 - \frac{m_3}{4(m_1 + m_2)} \text{tr} [(d_2 Z_{21} d_1 Z_{12} + d_1 Z_{21} d_2 Z_{12}) \overline{(*)}'] &- \frac{m_2}{4(m_1 + m_3)} \text{tr} [(d_2 Z_{31} d_1 Z_{13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + d_1 Z_{31} d_2 Z_{11} (\overline{*)}') + \frac{m_3}{2(m_1 + m_2)} \operatorname{tr} [d_1 Z_{21} d_1 Z_{12} \overline{d_2 Z'_{11}} \overline{d_2 Z'_{21}}] + \frac{m_3}{2(m_1 + m_2)} \operatorname{tr} \\
& \cdot [d_1 Z_{21} d_1 Z_{12} \overline{d_2 Z'_{11}} \overline{d_2 Z'_{21}}]' + \frac{m_2}{2(m_1 + m_3)} \operatorname{tr} [d_1 Z_{31} d_1 Z_{13} \overline{d_2 Z'_{13}} \overline{d_2 Z'_{31}}] \\
& + \frac{m_2}{2(m_1 + m_3)} \operatorname{tr} [d_1 Z_{31} d_1 Z_{13} \overline{d_2 Z'_{13}} \overline{d_2 Z'_{31}}]'
\end{aligned}$$

2.5

在上式中令 $m_2 = m_3 = 0$, 就得到 S_1 的 Hua 度量的 $R_B(d_1 z^*, d_2 z^*)$ 的值。
 由于 S_1 的关于 Bergman 度量及 Hua 度量的西曲率分别为:

$$\begin{aligned}
\omega_r &= -\frac{dz^* [\overline{\dot{A}d\dot{T}} - d\dot{T} \cdot T^{*-1} \overline{\dot{A}d\dot{T}}] \overline{dz^{*'}}}{(dz^* \dot{T} dz^{*'})^2} = -\frac{W_r}{(dz^* \dot{T} dz^{*'})^2} \\
\omega_B &= -\frac{dz^* [\overline{\dot{A}d\dot{H}} - d\dot{H} \cdot H^{*-1} \overline{\dot{A}d\dot{H}}] \overline{dz^{*'}}}{dz^* \dot{H} dz^{*'}} = -\frac{W_B}{(dz^* \dot{H} dz^{*'})^2}
\end{aligned}$$

其中, \dot{H} 及 H^{*-1} 分别为 \dot{T} 及 T^{*-1} 中将 $[(\overline{A} \times A)_{\kappa} I_{\lambda} (A' \times \overline{A})'_{\kappa}]$ 换为 $[\overline{A} A' \times A \overline{A}']_{\kappa}$ 后而成的式子。

容易看出, W_r 在 $z = iI$ 处的值为

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \operatorname{tr} [dZ \overline{dZ}']^2 - \frac{m_3}{2m} \operatorname{tr} [dZ_{22} \overline{dZ'_{22}} dZ_{22} \overline{dZ'_{22}}] - \frac{m_2}{2m} \operatorname{tr} [dZ_{33} \overline{dZ'_{33}}]^2 \\
& + \operatorname{tr} [dZ_{21} dZ_{13} \overline{dZ'_{13}} \overline{dZ'_{21}}] + \operatorname{tr} [dZ_{31} dZ_{12} \overline{dZ'_{12}} \overline{dZ'_{31}}] - \frac{m_3}{m_1 + m_2} \operatorname{tr} [dZ_{21} dZ_{12} \overline{dZ'_{12}} \overline{dZ'_{21}}] \\
& - \frac{m_3}{m_1 + m_3} \operatorname{tr} [dZ_{31} dZ_{13} \overline{dZ'_{13}} \overline{dZ'_{31}}]
\end{aligned}$$

在此式中令 $m_2 = m_3 = 0$, 就得到 W_B 的在 $Z = iI$ 处的值。

3

3.1

S_1 的对于 Bergman 度量及 Hua 度量的 Riemann 截曲率是不定的。
 事实上, 令

$$d_1 Z = \begin{pmatrix} d_1 Z_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad d_2 Z = \begin{pmatrix} d_2 Z_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则显然有

$$R(d_1 z^*, d_2 z^*) \geq 0, \quad R_B(d_1 z^*, d_2 z^*) \geq 0,$$

若令

$$d_1 Z = \begin{pmatrix} 0 & d_1 Z_{12} & d_1 Z_{13} \\ d_1 Z'_{12} & d_1 Z_{22} & 0 \\ d_1 Z'_{13} & 0 & d_1 Z_{33} \end{pmatrix}, \quad d_2 Z = \begin{pmatrix} 0 & d_2 Z_{12} & d_2 Z_{13} \\ d_2 Z'_{12} & d_2 Z_{22} & 0 \\ d_2 Z'_{13} & 0 & d_2 Z_{33} \end{pmatrix}$$

而

$$\begin{aligned} d_1 Z_{12} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ m_1 - 1 \end{matrix}, & d_1 Z_{13} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ m_1 - 1 \end{matrix}, & d_1 Z_{22} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ m_2 - 1 \end{matrix} \\ & \begin{matrix} 1 \\ m_2 - 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ m_3 - 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ m_2 - 1 \end{matrix} \\ d_1 Z_{33} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ m_3 - 1 \end{matrix}, & d_2 Z_{12} &= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ m_1 - 1 \end{matrix}, & d_2 Z_{13} &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ m_1 - 1 \end{matrix} \\ & \begin{matrix} 1 \\ m_3 - 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ m_2 - 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ m_3 - 1 \end{matrix} \\ d_2 Z_{22} &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ m_2 - 1 \end{matrix}, & d_2 Z_{33} &= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ m_3 - 1 \end{matrix} \\ & \begin{matrix} 1 \\ m_2 - 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ m_3 - 1 \end{matrix} \end{aligned}$$

我们有

$$R(d_{1z}, d_{2z}) = - \left[\frac{m_2 + m_3}{m} + \frac{2m_3}{m_1 + m_2} + \frac{2m_2}{m_1 + m_3} + 2 \right] < 0$$

$$R_H(d_{1z}, d_{2z}) = -2 < 0$$

3.2

S_I 的关于 Hua 度量的西曲率恒小于零。事实上，由于 $W_H|_{z=1} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}[dZ \bar{dZ}']^2 +$

$\operatorname{tr}[(dZ_{21}, dZ_{13})(\bar{dZ}_{21}, \bar{dZ}_{13})'] + \operatorname{tr}[(dZ_{31}, dZ_{12})(\bar{dZ}_{31}, \bar{dZ}_{12})'] > 0$ ，因此有 $\omega_H|_{z=1} < 0$ ，由于 S_I 可递，所以总有 $\omega_H < 0$ 。

3.3 S_I 的对于 Bergman 度量的西曲率 ω_r ，当 $(m_1 + m_2 - m_3)$ 与 $(m_1 + m_3 - m_2)$ 同时非负时， $\omega_r < 0$ ，当 $(m_1 + m_2 - m_3)$ 与 $(m_1 + m_3 - m_2)$ 异号时， ω_r 符号不定。

事实上，令

$$B_{11} = dZ_{11} \bar{dZ}'_{11} + dZ_{12} \bar{dZ}'_{12} + dZ_{13} \bar{dZ}'_{13}, \quad B_{12} = dZ_{11} \bar{dZ}'_{21} + dZ_{12} \bar{dZ}'_{22}$$

$$B_{13} = dZ_{11} \bar{dZ}'_{31} + dZ_{13} \bar{dZ}'_{33}, \quad B_{21} = \bar{B}'_{12}$$

$$B_{22} = dZ_{21} \bar{dZ}'_{21} + dZ_{22} \bar{dZ}'_{22}, \quad B_{23} = dZ_{21} \bar{dZ}'_{31}$$

$$B_{33} = dZ_{31} \bar{dZ}'_{31} + dZ_{33} \bar{dZ}'_{33}, \quad B_{31} = \bar{B}'_{13}, \quad B_{32} = \bar{B}'_{23}$$

则有

$$\operatorname{tr}[dZ \bar{dZ}']^2 = \operatorname{tr}[B_{11} \bar{B}'_{11} + 2B_{12} \bar{B}'_{12} + 2B_{13} \bar{B}'_{13} + B_{22} \bar{B}'_{22} + 2B_{23} \bar{B}'_{23} + B_{33} \bar{B}'_{33}]$$

以此代入 $W_r|_{z=1}$ 的表达式中，我们有

$$W_r|_{z=1} = \operatorname{tr}[B_{12} \bar{B}'_{12} + B_{13} \bar{B}'_{13} + B_{23} \bar{B}'_{23}] + \frac{1}{2} \operatorname{tr}[dZ_{11} \bar{dZ}'_{11}]^2$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m_1 + m_2}{2m} \operatorname{tr} [dZ_{22} \bar{dZ}'_{22}]^2 + \frac{m_1 + m_3}{2m} \operatorname{tr} [dZ_{33} \bar{dZ}'_{33}]^2 \\
& + \operatorname{tr} [(d\bar{Z}'_{11} dZ_{12}) (\bar{*})' + (d\bar{Z}'_{11} dZ_{13}) (\bar{*})' + (d\bar{Z}'_{12} dZ_{13}) (\bar{*})'] \\
& + \operatorname{tr} [(d\bar{Z}'_{21} dZ_{22}) (\bar{*})' + (d\bar{Z}'_{31} dZ_{33}) (\bar{*})' + (dZ_{21} dZ_{13}) (\bar{*})' + (dZ_{31} dZ_{12}) (\bar{*})'] \\
& + \frac{m_3}{2(m_1 + m_2)} \operatorname{tr} [(dZ_{12} \bar{dZ}'_{12} - dZ_{21} \bar{dZ}'_{21})^2] + \frac{m_2}{2(m_1 + m_3)} \operatorname{tr} [(dZ_{13} \bar{dZ}'_{13} \\
& - dZ_{31} \bar{dZ}'_{31})^2] + \frac{m_1 + m_3 - m_2}{2(m_1 + m_3)} \operatorname{tr} [(dZ_{13} \bar{dZ}'_{13})^2 + (dZ_{31} \bar{dZ}'_{31})^2] \\
& + \frac{m_1 + m_2 - m_3}{2(m_1 + m_2)} \operatorname{tr} [(dZ_{12} \bar{dZ}'_{12})^2 + (dZ_{21} \bar{dZ}'_{21})^2]
\end{aligned}$$

因此, 当 $(m_1 + m_2 - m_3)$ 与 $(m_1 + m_3 - m_2)$ 同时非负时, 显然有 $W_r|_{z=1} > 0$, 此即有 $\omega_r|_{z=1} < 0$, 由于 S_r 是可递域, 故总有 $\omega_r < 0$. $(m_1 + m_2 - m_3)$ 与 $(m_1 + m_3 - m_2)$ 不可能同时小于零. 但当此两数异号时, 则 $W_r|_{z=1}$ 是不定的, 因此, 此时酉曲率 ω_r 也是不定的. 例如, 若 $m_1 + m_2 - m_3 < 0$, 令

$$dZ_{12} = 0, dZ_{13} = 0, dZ_{21} = 0, dZ_{31} = 0, dZ_{11} \neq 0$$

则有

$$W_r|_{z=1} > 0.$$

若令

$$dZ_{11} = 0, dZ_{12} = dZ'_{21} \neq 0, dZ_{13} = 0, dZ_{31} = 0, dZ_{22} = 0, dZ_{33} = 0$$

则有

$$W_r|_{z=1} < 0.$$

参 考 文 献

- [1] 钟家庆, 殷慰萍, 非对称可递域的若干类型, 数学学报, 24 (1981), No. 4, 587—613.
- [2] 殷慰萍, 非对称第一类 Siegel 齐性域的酉几何 (I), 数学学报, 24 (1981), No. 5, 753—764.
- [3] 殷慰萍, 非对称第一类 Siegel 齐性域的酉几何 (II), 数学学报, 24 (1981), No. 5, 765—778.
- [4] 殷慰萍, 非对称第一类齐性 Siegel 域的酉几何 (III), 数学学报, 24 (1981), No. 6, 879—891.
- [5] Wang, Y. C., Euclidean n-planes in pseudo Euclidean spaces and differential geometry of Cartan domains, *Proc. of the Nat. Acad. Sci.*, 61 (1969), 409—414.
- [6] 陆启铿, 数学进展, 2 (1956), No. 4, 567—662.
- [7] Siegel, C. L., Symplectic geometry, *Am. J. Math.*, 65 (1943), 1—85.
- [8] Helgason, S., *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, New York and London, 1962.
- [9] Geatti, L., Holomorphic automorphisms of a nonsymmetric homogeneous bounded domain, *Rend. Mat.*, (7) 2 (1982), No. 3, 475—497.

The Curvature of Nonsymmetric Homogeneous Siegel Domains of the First Type

Yin Weiping

(Department of Mathematics)

Abstract

The explicit formulas of holomorphic sectional curvature and Riemann sectional curvature of some nonsymmetric homogeneous Siegel domains with Hua metric and Bergman metric are obtained.

Key words: curvature, symmetric space, metric.

摘 要

本文研究了第一型非对称齐性西格尔域上 Hua 度量和 Bergman 度量的全纯截面曲率和黎曼截面曲率的显式公式。

Average Distance Constants of Some Compact Convex Spaces

Yang Lu Zhang Jingzhong

(Chengdu Branch, Academia Sinica)

Abstract

This paper is inspired by the research of the so-called "average distance property" which interests many authors nowadays. Let (X, d) be a compact connected metric space. Then there is a uniquely determined constant $a(X, d)$ with the following property: For each positive integer n , and for all $x_1, \dots, x_n \in X$, there exists $y \in X$ for which

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(x_i, y) = a(X, d)$$

In this article, an explicit expression of $a(X, d)$ is discussed for the compact convex subsets of a class of symmetric spaces including Banach spaces and Lobachevsky spaces. It is given for such a compact convex subset X which is considered as a subspace (X, d) that

$$a(X, d) = \min_{x \in X} \max_{y \in X} d(x, y)$$

This is useful to evaluate the values of $a(X, d)$ for some concrete examples.

Key words: average distance constant, straight symmetric space, normal segment.

1 Introduction

Recently a result concerning the compact connected metric spaces interests

Received Dec. 2, 1985.

Projects supported by the Science Fund of the Chinese Academy of Science.

many authors, [5,6,7,8,9], that is

Theorem A Let (X,d) be a compact connected metric space. Then there is a uniquely determined constant $a(X,d)$ with the following property: For each positive integer n , and for all $x_1, \dots, x_n \in X$, there exists $y \in X$ for which

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(x_i, y) = a(X, d) \quad (1)$$

This is the so-called "average distance property": The corresponding constant is known as "average distance constant" (a.d.c.) of the space. It is a surprising fact that though the class of compact connected metric spaces is wide, the "average distance property" owned by the class is quite strong! Stadje [6] remarks that "this property of compact connected metric spaces is nontrivial even in the simplest examples".

It is rather difficult to find an explicit expression for a.d.c. for a given space. As far as we know, there are only a small number of results for a few spaces such as the spheres in E^n . No other explicit expression for a.d.c. are known even for the planar polygons.

In this paper the authors show that

$$a(X, d) = \min_{x \in X} \max_{y \in X} d(x, y) \quad (2)$$

for some compact convex spaces including the compact convex subsets of Banach spaces and Lobachevsky spaces. In this way, for example, the a.d.c. of a planar convex N -polygon can be evaluated in a time of $O(N)$.

2 The Statement of Results

Definition 1 A metric space (M, d) is called a straight symmetric space, provided

i) An isometry $f_p: M \rightarrow M$ is defined for each $p \in M$, with $f_p(x) = x$ if and only if $x = p$;

ii) A subset $L(x, y)$ called "a straight line" is defined for $x \in M$, $y \in M$ and $x \neq y$, such that $x, y \in L(x, y) \subset M$ and $L(x, y)$ is the image of the whole real axis under an isometry;

iii) Every straight line L to which the point p belongs is an invariant set with respect to f_p .

Obviously, Banach spaces and Lobachevsky spaces are straight symmetric, for which f_p is a symmetry with respect to p .

Definition 2 A compact connected subset of a straight line in a straight symmetric space is called "a normal segment" and denoted by $[x, y]$ where x

and y are its endpoints.

Definition 3 A subset X of a straight symmetric space is "convex" if every normal segment $[x, y]$ with endpoints $x \in X$ and $y \in X$ is contained by X .

Busemann pointed out that the class of straight spaces contains more members than Banach spaces and hyperbolic spaces. Other interesting examples of such spaces can be found in [1]. It is, therefore, certainly worthwhile to observe them in general.

A main result of this paper is following.

Theorem 1 Let X be a compact convex subset of a straight symmetric space (M, d) . Then, the a.d.c. of the subspace (X, d) is given by

$$a(X, d) = \min_{x \in X} \max_{y \in X} d(x, y)$$

Since Banach spaces are straight symmetric, it follows that

Corollary 1 Let X be a compact convex subset of a Banach space and d be the derived metric by the norm. Then the a.d.c. of the subspace (X, d) is given by

$$a(X, d) = \min_{x \in X} \max_{y \in X} d(x, y)$$

In terms of geometry, that is

Corollary 2 Let X be a compact convex subset of a Banach space and d be the derived metric by the norm. Then $a(X, d)$ equals the radius of the smallest Banach sphere enclosing X and having the centre contained by X .

It is easy to show for a compact convex subset X of Euclidean space that the centre of the smallest sphere enclosing X (namely, the spanning sphere of X) must belong to X , so we have

Corollary 3 The a.d.c. of a compact convex subset of Euclidean space is equal to the radius of the smallest sphere enclosing the subset itself.

Recently, an algorithm was given in [4], spending a time of $O(N)$ to find the spanning circle of a planar N -polygon, so we have

Corollary 4 The a.d.c. of a planar convex N -polygon can be evaluated in a time of $O(N)$.

On the other hand, by the well-known Jung's theorem:^[5] "A subset of E^n with diameter D must be enclosed by a sphere with radius

$$\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} D,$$

and by Corollary 3, we obtain

Corollary 5 Let X be a compact convex subset of E^n . Then

$$a(X, d) \leq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} D(X, d) \quad (3)$$

where $D(X, d)$ is the diameter of X . This result can be found in [7].

Since the n -dimensional hyperbolic space H^n is straight symmetric, we have

Corollary 6 Let X be a compact convex subset of H^n and d be the metric in H^n . Then,

$$a(X, d) = \min_{x \in X} \max_{y \in X} d(x, y)$$

Corollary 7 The a.d.c. of a compact convex subset of a hyperbolic space equals the radius of the smallest sphere enclosing the subset itself.

On the other hand, since the authors have proved in [8] that "A subset of H^n with diameter D must be enclosed by a sphere with diameter

$$\frac{2}{\sqrt{-K}} \operatorname{sh}^{-1} \left(\sqrt{\frac{2n}{n+1}} \operatorname{sh} \sqrt{-K} \frac{D}{2} \right) \quad (4)$$

where $K < 0$ is the curvature of the space", it follows that

Corollary 8 Let X be a compact convex subset of H^n . Then

$$a(X, d) \leq \frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{sh}^{-1} \left(\sqrt{\frac{2n}{n+1}} \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \sqrt{-K} D(X, d) \right) \right) \quad (5)$$

where $K < 0$ is the curvature of the space and $D(X, d)$ is the diameter of X .

The proof of Theorem 1 is postponed till Section IV.

3 Lemmas

In order to prove Theorem 1, we need the following lemmas.

Lemma 1 Let $[x_1, x_2]$ be a normal segment in a straight symmetric space (M, d) and x be the mid-point of $[x_1, x_2]$. Then it holds for all $y \in M$ that

$$d(x_1, y) + d(x_2, y) \geq 2d(x, y) \quad (6)$$

Proof Since (M, d) is straight symmetric, there is an isometry described in Definition 1, $f_x: M \rightarrow M$, (namely, the symmetry with respect to x), such that

$$x_2 = f_x(x_1) \quad (7)$$

put $y' = f_x(y) \quad (8)$

then $d(x, y) = d(x, y') = \frac{1}{2} d(y, y') \quad (9)$

and $d(x_2, y) = d(x_1, y') \quad (10)$

Thus $d(x_1, y) + d(x_2, y) = d(x_1, y) + d(x_1, y')$
 $\geq d(y, y')$
 $= 2d(x, y)$

Lemma 2 Let $[x_1, x_2]$ be a normal segment in a straight symmetric space and $x \in [x_1, x_2]$ such that

$$d(x_1, x) : d(x, x_2) = m \quad (11)$$

where m is a positive integer. Then it holds for all $y \in M$ that

$$d(x_1, y) + md(x_2, y) \geq (m+1)d(x, y) \quad (12)$$

Proof Make use of induction on m . The proposition holds for $m=1$ because of Lemma 1.

We take a point $x' \in [x_1, x] \subset [x_1, x_2]$ such that

$$d(x_1, x') : d(x', x) : d(x, x_2) = (m-1) : 1 : 1 \quad (13)$$

If it holds for any $y \in X$ that

$$d(x_1, y) + (m-1)d(x, y) \geq md(x', y) \quad (14)$$

by combining it with the following inequality from Lemma 1,

$$md(x', y) + md(x_2, y) \geq 2md(x, y) \quad (15)$$

we have

$$d(x_1, y) + md(x_2, y) \geq (m+1)d(x, y)$$

The induction is completed.

Lemma 3 Let X be a compact convex subset of a straight symmetric space (M, d) . Given n points $x_1, \dots, x_n \in X$. Then there exists a point $x^* \in X$ such that

$$\sum_{i=1}^n d(x_i, y) \geq nd(x^*, y) \quad (16)$$

holds for all $y \in X$.

Proof Let x^2 be the mid-point of $[x_1, x_2]$. Take $x^j \in [x^{j-1}, x_j] \subset X$ for $j=3, 4, \dots, n$, successively, such that

$$d(x_j, x^j) : d(x^{j-1}, x^j) = j-1 \quad (17)$$

The convexity of X implies the existence of these normal segments and all x^j .

Make use of induction on n . The proposition holds for $n=2$ clearly.

Assume

$$\sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, y) \geq (n-1)d(x^{n-1}, y) \quad (18)$$

then by combining it with the following inequality from Lemma 2,

$$d(x_n, y) + (n-1)d(x^{n-1}, y) \geq nd(x^*, y) \quad (19)$$

we have

$$\sum_{i=1}^n d(x_i, y) \geq nd(x^*, y)$$

The induction is completed.

4 Proof of Theorem 1

Proof of Theorem 1 Let X be a compact convex subset of a straight symmetric space (M, d) . Given n points $x_1, \dots, x_n \in X$. Take a point $x^* \in X$ satisfying

$$\max_{y \in X} d(x^*, y) = \min_{x \in X} \max_{y \in X} d(x, y) \quad (20)$$

Then it holds for $j=1, \dots, n$ that

$$d(x^*, x_j) \leq \max_{y \in X} d(x^*, y) = \min_{x \in X} \max_{y \in X} d(x, y) \quad (21)$$

hence

$$\sum_{j=1}^n d(x^*, x_j) \leq n \left(\min_{x \in X} \max_{y \in X} d(x, y) \right) \quad (22)$$

On the other hand, by Lemma 3, there exists a point $x^n \in X$ for which

$$\sum_{i=1}^n d(x_i, y) \geq n d(x^n, y)$$

holds for all $y \in X$. Since

$$\max_{y \in X} d(x^n, y) \geq \min_{x \in X} \max_{y \in X} d(x, y), \quad (23)$$

there exists a point $y^* \in X$ satisfying

$$d(x^n, y^*) \geq \min_{x \in X} \max_{y \in X} d(x, y) \quad (24)$$

hence

$$\sum_{j=1}^n d(x_j, y^*) \geq n \left(\min_{x \in X} \max_{y \in X} d(x, y) \right) \quad (25)$$

Because (22), (25) and the connectivity of X , there exists a point $\bar{y} \in X$ such that

$$\sum_{j=1}^n d(x_j, \bar{y}) = n \left(\min_{x \in X} \max_{y \in X} d(x, y) \right) \quad (26)$$

By the uniqueness of a.d.c., the proof of Theorem 1 is completed.

5 Remark

The expression (2) would hold for the compact convex subsets of more metric spaces which need not be straight if we restrict these subsets to suitable size. For example, we have a similar result on spherical spaces as follows:

Theorem 2 Let X be a compact convex subset of spherical space S^n with

curvature r^{-2} and d be the metric of S^r . Then the a.d.c. of the subspace (X, d) is given by

$$a(X, d) = \min_{x \in X} \max_{y \in X} d(x, y)$$

if $\max_{x, y \in X} d(x, y) \leq \frac{1}{2} \pi r$ (27)

The proof of Theorem 2 is analogous to that of Theorem 1 since the reasoning as Lemmas 1-3 is available.

References

- [1] Busemann, H., The geometry of geodesics, Academic Press, New York, 1955, 345-347.
- [2] Gross, O., The rendezvous value of a metric space, *Ann. of Math. Studies*, 52 (1964), 49-53.
- [3] Hadwiger, H.; et al., Combinatorial geometry in the plane, Holt, Rinehart and Winston, 1964, 46.
- [4] Megiddo, N., Linear-time algorithms for linear programming in R^3 and related problems, *SIAM J. Comput.*, 12 (1983), 759-776.
- [5] Morris, S. A., Nickolas, P., On the average distance property of compact connected metric spaces, *Arch. Math.*, 40 (1983), 456-463.
- [6] Stadjc, W., A property of compact connected spaces, *Arch. Math.*, 36 (1981), 275-280.
- [7] Strantzen, J., An average distance result in Euclidean n -space, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 26 (1982), 321-330.
- [8] Yang Lu and Zhang Jingzhong, Spanning-radius of a compact set of hyperbolic space, *Scientia Sinica(A)*, Vol. XXVI (1983).
- [9] Yost, D., Average distances in compact connected spaces, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 26 (1982), 331-342.

某些凸紧空间的平均距离常数

杨路

张景中

(中科院成都分院)

摘要

本文所研究的“平均距离性质”是现今许多作者感兴趣的课题。设 (X, d) 是一个紧致连通度量空间，则唯一地存在一个常数 $a(X, d)$ 具有以下性质：对于每个

正整数 n 和每一组点 $x_1, \dots, x_n \in X$, 至少存在一点 $y \in X$ 使得

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(x_i, y) = a(X, d)$$

本文对于包括巴拿赫空间和罗巴切夫斯基空间在内的一类对称空间的凸紧子集讨论了 $a(X, d)$ 的明确表达式。将这样一个凸紧子集看作一个子空间, 作者证明了

$$a(X, d) = \min_{x \in X} \max_{y \in X} d(x, y)$$

这个结果对于计算某些具体例子的平均距离常数 $a(X, d)$ 的值是有用的。

关键词: 平均距离常数, 直线型对称空间, 正规线段。

线性型对称空间的平均距离常数

非对称第一类齐性 Siegel 域的截曲率

陈万喜

(数学系)

摘 要

本文讨论了一类 Siegel 齐性域的截曲率, 它们在 Bergman 度量和 Hua 度量下都是不定的。

关键词: 曲率, 对称空间, 度量。

文 [1] 中讨论了非对称第一类齐性 Siegel 域 S_{II} 的主要酉几何性质。本文采用 [1] 中的方法, 讨论了 S_{II} 的测地线与截曲率, 所得结果与对称典型域根本不同。

1 引 理

本文考虑

$$S_{II} = \left\{ Z \mid Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & 0 \\ Z_{31} & 0 & Z_{33} \end{pmatrix}, Z \text{ 是规范化的 } m \text{ 阶} \right.$$

复对称方阵, 而 Z_{ij} ($1 \leq i, j \leq 3$) 是 $m_i \times m_j$ 阶矩阵块, $m_1 + m_2 + m_3 = m$, $\frac{Z - \bar{Z}}{2\sqrt{-1}} > 0$ 。

所谓对称方阵 Z 是规范化的, 是指

$$Z = (\mu_{ij} z_{ij}), \quad \mu_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$$

本文中用 A' 表示矩阵 A 的转置, 用 \bar{A} 表示矩阵 A 的共轭, 用 $\sigma(A)$ 表示方阵 A 的迹, 用小写的 z 表示复数, 用大写 Z 表示矩阵。矩阵块 Z_{ij} 的元素即为 $\mu_{kl} z_{kl}^{(ij)}$ ($1 \leq k, l \leq m_j$), 矩阵块 Z_{ij} ($i \neq j$) 的元素为 $\frac{1}{\sqrt{2}} z_{kl}^{(ij)}$ ($1 \leq k \leq m_i, 1 \leq l \leq m_j$)。我们记行向量

$$\mathcal{X}_{11} = (z_{11}^{(11)}, z_{12}^{(11)}, \dots, z_{1m_j}^{(11)}, z_{22}^{(11)}, z_{23}^{(11)}, \dots, z_{2m_j}^{(11)}, \dots, z_{m_j m_j}^{(11)})$$

$$\mathcal{X}_{11}^* = (\mu_{11} z_{11}^{(11)}, \mu_{12} z_{12}^{(11)}, \dots, \mu_{1m_j} z_{1m_j}^{(11)}, \mu_{21} z_{21}^{(11)}, \mu_{22} z_{22}^{(11)}, \dots, \mu_{2m_j} z_{2m_j}^{(11)}, \dots, \mu_{m_j 1} z_{m_j 1}^{(11)}, \dots, \mu_{m_j m_j} z_{m_j m_j}^{(11)})$$

$$\mathcal{X}_{i1} = (z_{11}^{(ii)}, z_{12}^{(ii)}, \dots, z_{1m_j}^{(ii)}, z_{21}^{(ii)}, \dots, z_{2m_j}^{(ii)}, \dots,$$

$$z_{m_j 1}^{(ii)}, \dots, z_{m_j m_j}^{(ii)}), \quad (i \neq j).$$

$$\mathcal{X}_{i1}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{X}_{i1} \quad (i \neq j)$$

于是, 行向量

$$\mathcal{X} = (\mathcal{X}_{11}, \mathcal{X}_{12}, \mathcal{X}_{13}, \mathcal{X}_{22}, \mathcal{X}_{33})$$

$$\mathcal{X}^* = (\mathcal{X}_{11}^*, \mathcal{X}_{12}^*, \mathcal{X}_{13}^*, \mathcal{X}_{22}^*, \mathcal{X}_{23}^*, \mathcal{X}_{31}^*, \mathcal{X}_{32}^*, \mathcal{X}_{33}^*),$$

是就 $Z \in S_{\mathbb{R}}$ 的 $S_{\mathbb{R}}$ 式分块行排列和通常式分块行排列^[1]. 对 $Z \in S_{\mathbb{R}}$, 当然 \mathcal{X}_{12}^* 和 \mathcal{X}_{32}^* 的分量全是 0.

[1] 中构造了常数矩阵 $P(S)$, 满足

$$\mathcal{X}^* = \mathcal{X} P(S) \quad (1)$$

$P(S)$ 的行数等于 $S_{\mathbb{R}}$ 的复维数, 列数等于 m^2 . 我们用 $(A \times B)_{\mathbb{R}}$ 表示矩阵 A 和 B 的分块直乘积, 其定义及 $P(S)$ 的具体构造请见^[1]. 我们在此指出, [1] 中包含这样的结果: 若 Z_j ($j=1, 2, 3, 4$) 是与 $Z \in S_{\mathbb{R}}$ 同形的对称方阵, 则

$$P(S) P'(S) = I$$

$$\mathcal{X}_1 P(S) (Z_2 \times Z_3)_{\mathbb{R}} P'(S) \mathcal{X}'_4 = \sigma(Z_2 Z_1 Z_3 Z_4) \quad (2)$$

其中 I 是单位方阵, 它的阶数等于 $S_{\mathbb{R}}$ 的复维数. 由此可得

引理 1 对 $Z \in S_{\mathbb{R}}$, I 是 $S_{\mathbb{R}}$ 中单位阵, 有

$$P(S) (Z \times I)_{\mathbb{R}} P'(S) = P(S) \cdot (I \times Z)_{\mathbb{R}} P'(S)$$

证明 对任意与 $S_{\mathbb{R}}$ 同维数的行向量 \mathcal{X}_1 和 \mathcal{X}_2 , 按 $S_{\mathbb{R}}$ 式分块行排列法排成方阵 Z_1 和 Z_2 , 则 Z_1, Z_2 与 $Z \in S_{\mathbb{R}}$ 同形, $Z'_1 = Z_1, Z'_2 = Z_2$. 于是由 (2) 得

$$\mathcal{X}_1 P(S) (Z \times I)_{\mathbb{R}} P'(S) \mathcal{X}'_2 = \sigma(Z Z_1 Z_2)$$

$$= \sigma(Z_1 Z Z_2) = \mathcal{X}_1 P(S) (I \times Z)_{\mathbb{R}} P'(S) \mathcal{X}'_2$$

由线性代数知识可知引理 1 得证.

引理 2 对 $Z_j \in S_{\mathbb{R}}$ ($j=1, 2, 3, 4$), I 是 $S_{\mathbb{R}}$ 中单位阵, 记 $C = Z_2 Z_1, D = Z_3 Z_4$, 对 C, D 作与 Z 同样的分块后记为

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix},$$

则有

$$\mathcal{X}_1 P(S) (Z_2 \times I)_{\mathbb{R}} P'(S) \begin{pmatrix} \mu_1 I_{11} & & & & \\ & \mu_1 I_{12} & & & \\ & & \mu_1 I_{13} & & \\ & & & \mu_2 I_{22} & \\ & & & & \mu_3 I_{33} \end{pmatrix}$$

从而引理 3 得证。

2 测地线方程

由 [1] 可得本文中 $S_{\mathbb{R}}$ 的 Bergman 度量方阵

$$H = T_{S_{\mathbb{R}}} = P(S) (Y^{-1} \times Y^{-1})_{\mathbb{R}} P'(S) + (\lambda_2^2 - 1) P(S) \\ \cdot (Y_{\overline{2,2}}^{-1} \times Y_{\overline{2,2}}^{-1})_{\mathbb{R}} P'(S) + (\lambda_3^2 - 1) P(S) (Y_{\overline{3,3}}^{-1} \times Y_{\overline{3,3}}^{-1})_{\mathbb{R}} P'(S)$$

其中我们记

$$Y = \frac{Z - \bar{Z}}{2i} \quad (i = \sqrt{-1}), \quad Y_{2,2} = \frac{Z_{2,2} - \bar{Z}_{2,2}}{2i}, \quad Y_{3,3} = \frac{Z_{3,3} - \bar{Z}_{3,3}}{2i},$$

$$Y_{\overline{2,2}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & Y_{2,2}^{-1} & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_{\overline{3,3}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & Y_{3,3}^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{m+1}{m_1+m_2+1}}, \quad \lambda_3 = \sqrt{\frac{m+1}{m_1+m_3+1}}.$$

从而 $S_{\mathbb{R}}$ 的微分度量为

$$dS^2(dZ, \overline{dZ}) = \sigma(Y^{-1} dZ Y^{-1} \overline{dZ}) \\ + \sum_{i=2}^3 (\lambda_i^2 - 1) \sigma(Y_{\overline{i,i}}^{-1} dZ_{i,i} Y_{\overline{i,i}}^{-1} \overline{dZ}_{i,i}).$$

用 \dot{Z} 和 \ddot{Z} 表示 Z 关于参数的一阶导数和二阶导数，用 [2] 中方法可得 $S_{\mathbb{R}}$ 的测地线方程

$$\ddot{Z} = -\dot{Z} \left(\sum \dot{z}_{k,l} \frac{\partial}{\partial z_{k,l}} H \right) H^{-1}$$

其中 Σ 取遍 $S_{\mathbb{R}}$ 中一切独立变元。更具体的表达式是

$$\ddot{Z} = -\frac{i}{2} \dot{Z} P(S) \left\{ (Y^{-1} \dot{Z} Y^{-1} \times Y^{-1})_{\mathbb{R}} + (Y^{-1} \times Y^{-1} \dot{Z} Y^{-1})_{\mathbb{R}} + \right. \\ \left. + \sum_{i=2}^3 (\lambda_i^2 - 1) [(Y_{\overline{i,i}}^{-1} \dot{Z}_{i,i} Y_{\overline{i,i}}^{-1}) \times Y_{\overline{i,i}}^{-1}]_{\mathbb{R}} + (Y_{\overline{i,i}}^{-1} \times Y_{\overline{i,i}}^{-1} \dot{Z}_{i,i} Y_{\overline{i,i}}^{-1})_{\mathbb{R}} \right\} \\ \cdot P(S) H^{-1}$$

由 (1)、(2) 可知 $\dot{Z} P(S) (Y^{-1} \dot{Z} Y^{-1} \times Y^{-1})_{\mathbb{R}}$ 和 $\dot{Z} P(S) (Y^{-1} \times Y^{-1} \dot{Z} Y^{-1})_{\mathbb{R}}$ 同是 $Y^{-1} \dot{Z} Y^{-1} \dot{Z} Y^{-1}$ 的通常式分块行排列，所以相等，从而 $S_{\mathbb{R}}$ 的测地线方程即

$$\ddot{Z} = -i \dot{Z} P(S) \left\{ Y^{-1} \dot{Z} Y^{-1} \dot{Z} + \sum_{i=2}^3 \{ (\lambda_i^2 - 1) \cdot (Y_{\overline{i,i}}^{-1} \dot{Z}_{i,i} Y_{\overline{i,i}}^{-1}) \times Y_{\overline{i,i}}^{-1} \}_{\mathbb{R}} \right\} P'(S) H^{-1}$$

3 Riemann 截曲率

定义算子

$$d_i = \sum d_{i z_{k1}} \frac{\partial}{\partial z_{k1}}, \quad \bar{d}_i = \sum \bar{d}_{i z_{k1}} \frac{\partial}{\partial z_{k1}},$$

由 (3) 得

$$\begin{aligned} d_i H = & \frac{i}{2} P(S) \left\{ (Y^{-1} d_i Z Y^{-1} \times Y^{-1})_{\kappa} + (Y^{-1} \times Y^{-1} d_i Z Y^{-1})_{\kappa} \right. \\ & \left. + \sum_{i=2}^3 [(Y_{(i)}^{-1}, d_i Z_{(i)} Y_{(i)}^{-1} \times Y_{(i)}^{-1})_{\kappa} + (Y_{(i)}^{-1} \times Y_{(i)}^{-1}, d_i Z_{(i)} Y_{(i)}^{-1})_{\kappa}] \right\} P(S) \end{aligned} \quad (5)$$

同法易得 $\bar{d}_i H$, 有 $\bar{d}_i H = \overline{d_i H}$. 在 $Z = iI$ 点, 用引理 1 可得

$$d_i H = i P(S) \left\{ (d_i Z \times I)_{\kappa} + \sum_{i=2}^3 (d_i Z_{(i)} \times I_{(i)})_{\kappa} \right\} P'(S) \quad (5-1)$$

我们用 [3]、[4] 中方法求 S_{Π} 的 Riemann 截曲率. 定义 S_{Π} 中协变向量 U 关于 $d_i Z (j=1, 2)$ 的协变微分为

$$\begin{aligned} 2i \delta_i \mathcal{U} = & \mathcal{U} P(S) \left\{ (Y^{-1} d_i Z Y^{-1} \times Y^{-1})_{\kappa} \right. \\ & \left. + \sum_{i=2}^3 (\lambda_i^2 - 1) [(Y_{(i)}^{-1}, d_i Z Y_{(i)}^{-1} \times Y_{(i)}^{-1})_{\kappa}] \right\} P'(S) H^{-1} \\ & + d_i \mathcal{U} P(S) \left\{ (Y^{-1} U Y^{-1} \times Y^{-1})_{\kappa} + \sum_{i=2}^3 (\lambda_i^2 - 1) [(Y_{(i)}^{-1}, U Y_{(i)}^{-1} \times Y_{(i)}^{-1})_{\kappa}] \right\} \\ & \cdot P'(S) H^{-1} \end{aligned}$$

其中 \mathcal{U} 是 U 的 S_{Π} 式分块行排列. 由 (1)、(2) 可知 $d_i \mathcal{U} P(S) (Y^{-1} U Y^{-1} \times Y^{-1})_{\kappa}$ 和 $\mathcal{U} P(S) (Y^{-1} \times Y^{-1} d_i Z Y^{-1})_{\kappa}$ 同是 $Y^{-1} U Y^{-1} d_i Z Y^{-1}$ 的通常式分块行排列, 因而相等, 从而有

$$\begin{aligned} 2i \delta_i \mathcal{U} = & \mathcal{U} P(S) \left\{ (Y^{-1} d_i Z Y^{-1} \times Y^{-1})_{\kappa} \right. \\ & \left. + (Y^{-1} \times Y^{-1} d_i Z Y^{-1})_{\kappa} + \sum_{i=2}^3 (\lambda_i^2 - 1) [(Y_{(i)}^{-1}, d_i Z Y_{(i)}^{-1} \times Y_{(i)}^{-1})_{\kappa} \right. \\ & \left. + (Y_{(i)}^{-1} \times Y_{(i)}^{-1}, d_i Z Y_{(i)}^{-1})_{\kappa}] \right\} P'(S) H^{-1} \end{aligned} \quad (6)$$

与 (5) 比较可知

$$\delta_i \mathcal{U} = -\mathcal{U} d_i H H^{-1} \quad (6-1)$$

对 Z 的函数 $\varphi(Z, \bar{Z})$, 定义 $\delta_i = d_i + \bar{d}_i$, 由 (5)、(6) 直接计算可得

$$\begin{aligned}
& (\delta_1 \delta_2 - \delta_2 \delta_1) \mathcal{U} = \mathcal{U} (d_2 H H^{-1} \bar{d}_1 H - d_1 H H^{-1} \bar{d}_2 H \\
& + \bar{d}_2 d_1 H - \bar{d}_1 d_2 H) H^{-1} + \frac{1}{2i} (d_1 \mathcal{Z} d_2 H - d_2 \mathcal{Z} d_1 H) \\
& \cdot H^{-1} P(S) \left\{ (Y^{-1} \times Y^{-1} U Y^{-1})_{\kappa} + (Y^{-1} U Y^{-1} \times Y^{-1})_{\kappa} \right. \\
& \left. + \sum_{i=2}^3 (\lambda_i^{-2} - 1) [(Y_{(i)}^{-1} \times Y_{(i)}^{-1} U Y_{(i)}^{-1})_{\kappa} + (Y_{(i)}^{-1} U Y_{(i)}^{-1} \times Y_{(i)}^{-1})_{\kappa}] \right\} P'(S) H^{-1}
\end{aligned} \tag{6-2}$$

于是有

$$R = \frac{1}{2} [(\delta_1 \delta_2 - \delta_2 \delta_1) \mathcal{U} H \overline{\mathcal{V}'} + \text{前式共轭}]$$

其中 \mathcal{V} 是 S_{Π} 中协变向量 V 的 S_{Π} 式分块行排列。取 $U = d_1 Z$, $V = d_2 Z$, 则所得 R 与由 $d_1 Z$ 是 $d_2 Z$ 决定的截面曲率同号。此时,

$$\begin{aligned}
2R = & \{ d_1 \mathcal{Z} d_2 H H^{-1} \bar{d}_1 H \bar{d}_2 \mathcal{Z}' - d_1 \mathcal{Z} d_2 H H^{-1} \bar{d}_2 H \bar{d}_1 \mathcal{Z}' \\
& + d_1 \mathcal{Z} (\bar{d}_2 d_1 H) \bar{d}_2 \mathcal{Z}' - \bar{d}_1 \mathcal{Z} (\bar{d}_1 d_2 H) \bar{d}_1 \mathcal{Z}' \\
& + d_2 \mathcal{Z} d_1 H H^{-1} \bar{d}_1 H \bar{d}_2 \mathcal{Z}' - d_2 \mathcal{Z} d_1 H H^{-1} \bar{d}_2 H \bar{d}_1 \mathcal{Z}' \} + \text{前式共轭}
\end{aligned} \tag{7}$$

将上式中各单项依次记为 $2R_1, 2R_2, 2R_3, 2R_4, 2R_5, 2R_6$, 则得

$$2R = (2R_1 - 2R_2 + 2R_3 - 2R_4 + 2R_5 - 2R_6) + \text{前式共轭}.$$

下面在 $Z = iI$ 点来计算 $2R$ 之值。由 (3) 得到在 iI 点处

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} I_{11} & & & \\ & I_{12} & & \\ & & I_{13} & \\ & & & \lambda_2^2 I_{22} \\ & & & & \lambda_3^2 I_{33} \end{pmatrix}$$

其中 I_{ii} 与引理 2 中相同。用引理 2 直接计算可得下式, 其中 i, j, k, l 独立地取 1 或 2:

$$\begin{aligned}
& 2d_1 \mathcal{Z} d_2 H H^{-1} \bar{d}_1 H \bar{d}_2 \mathcal{Z}' = \sigma(d_1 Z d_1 Z d_1 Z d_1 Z \\
& + d_1 Z d_1 Z \bar{d}_1 Z \bar{d}_1 Z) - \sigma(d_1 Z_{21} d_1 Z_{13} \bar{d}_1 Z_{31} \bar{d}_1 Z_{12} \\
& + d_1 Z_{21} d_1 Z_{13} \bar{d}_1 Z_{31} \bar{d}_1 Z_{12} + d_1 Z_{31} d_1 Z_{12} \bar{d}_1 Z_{21} \bar{d}_1 Z_{13} + d_1 Z_{31} d_1 Z_{12} \bar{d}_1 Z_{21} \bar{d}_1 Z_{13}) \\
& + \sum_{i=2}^3 (\lambda_i^{-2} - 1) \sigma(d_1 Z_{i1} d_1 Z_{i1} \bar{d}_1 Z_{i1} \bar{d}_1 Z_{i1} + d_1 Z_{i1} d_1 Z_{i1} \bar{d}_1 Z_{i1} \bar{d}_1 Z_{i1}) \\
& + \sum_{i=2}^3 (\lambda_i^2 - 1) \sigma(d_1 Z_{i1} d_1 Z_{i1} \bar{d}_1 Z_{i1} \bar{d}_1 Z_{i1} + d_1 Z_{i1} d_1 Z_{i1} \bar{d}_1 Z_{i1} \bar{d}_1 Z_{i1})
\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $d_k Z_{ij} = (d_k Z_{ij})'$.

由 (8), 取 $i=1, j=2, k=1, l=2$, 则得 (7) 中的

$$2R_1 = \sigma(d_1 Z d_1 Z \bar{d}_1 Z \bar{d}_1 Z + d_1 Z d_1 Z \bar{d}_1 Z \bar{d}_1 Z)$$

$$\begin{aligned}
& -\sigma(d_2 Z_{21} d_1 Z_{13} \overline{d_1 Z_{31}} \overline{d_2 Z_{12}} + d_2 Z_{21} d_1 Z_{13} \overline{d_2 Z_{31}} \overline{d_1 Z_{12}} \\
& + d_2 Z_{31} d_1 Z_{12} \overline{d_1 Z_{21}} \overline{d_2 Z_{13}} + d_2 Z_{31} d_1 Z_{12} \overline{d_2 Z_{21}} \overline{d_1 Z_{13}}) \\
& + \sum_{i=2}^3 (\lambda_i^2 - 1) \sigma(d_2 Z_{i1} d_1 Z_{i1} \overline{d_1 Z_{i1}} \overline{d_2 Z_{i1}} + d_2 Z_{i1} d_1 Z_{i1} \overline{d_2 Z_{i1}} \overline{d_1 Z_{i1}}) \\
& + \sum_{i=2}^3 (\lambda_i^2 - 1) \sigma(d_2 Z_{i1} d_1 Z_{i1} \overline{d_1 Z_{i1}} \overline{d_2 Z_{i1}} + d_2 Z_{i1} d_1 Z_{i1} \overline{d_2 Z_{i1}} \overline{d_1 Z_{i1}}) \quad (9)
\end{aligned}$$

同法可得 (7) 中的 $2R_3, 2R_4, 2R_5, 2R_6$, 并知恰有 $(R_5 - R_6) + \text{前式共轭} = 0$.

直接计算可得

$$\begin{aligned}
R_3 &= \sigma(d_1 Z d_1 Z \overline{d_2 Z} \overline{d_2 Z}) + \frac{1}{2} \sigma(d_1 Z \overline{d_2 Z} d_1 Z \overline{d_2 Z}) \\
& + \sum_{i=2}^3 (\lambda_i^2 - 1) [\sigma(d_1 Z_{i1} d_1 Z_{i1} \overline{d_2 Z_{i1}} \overline{d_2 Z_{i1}}) \\
& + \frac{1}{2} \sigma(d_1 Z_{i1} \overline{d_2 Z_{i1}} d_1 Z_{i1} \overline{d_2 Z_{i1}})] \quad (10)
\end{aligned}$$

同样可得 R_4 . 于是从 (7) 得到采用 Bergman 度量时 S_π 在 iI 点的截曲率与下式同号:

$$2R = (2R_1 - 2R_2 + 2R_3 - 2R_4) + \text{前式共轭}$$

$$= -\frac{1}{2} \sigma[(d_1 Z \overline{d_2 Z} - d_2 Z \overline{d_1 Z}) (\text{前式})']$$

$$\begin{aligned}
& + 2\sigma(d_1 Z_{21} d_1 Z_{13} \overline{d_2 Z_{31}} \overline{d_2 Z_{12}}) + 2\sigma(\overline{d_1 Z_{21}} \overline{d_1 Z_{13}} d_2 Z_{31} d_2 Z_{12}) \\
& - \sigma(d_2 Z_{21} d_1 Z_{13} \overline{d_1 Z_{31}} \overline{d_2 Z_{12}}) - \sigma(d_2 Z_{21} d_1 Z_{13} \overline{d_2 Z_{31}} \overline{d_1 Z_{12}}) \\
& - \sigma(d_2 Z_{31} d_1 Z_{12} \overline{d_1 Z_{21}} \overline{d_2 Z_{13}}) - \sigma(d_2 Z_{31} d_1 Z_{12} \overline{d_2 Z_{21}} \overline{d_1 Z_{13}}) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^3 (1 - \lambda_i^2) \sigma[(d_1 Z_{i1} \overline{d_2 Z_{i1}} - d_2 Z_{i1} \overline{d_1 Z_{i1}}) (\text{前式})'] \\
& + \sum_{i=2}^3 (\lambda_i^2 - 1) [\sigma(d_2 Z_{i1} d_1 Z_{i1} \overline{d_2 Z_{i1}} \overline{d_2 Z_{i1}}) + \sigma(d_2 Z_{i1} d_1 Z_{i1} \overline{d_2 Z_{i1}} \overline{d_1 Z_{i1}}) \\
& - \sigma(d_1 Z_{i1} d_1 Z_{i1} \overline{d_2 Z_{i1}} \overline{d_2 Z_{i1}}) - \sigma(\overline{d_1 Z_{i1}} \overline{d_1 Z_{i1}} d_2 Z_{i1} d_2 Z_{i1})] \quad (11)
\end{aligned}$$

取 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 则从 (3) 得到 Hua 度量, 从 (11) 得到在 Hua 度量下 S_π 在 iI 点的截曲率与下式同号:

$$2R_H = -\frac{1}{2} \sigma[(d_1 Z \overline{d_2 Z} - d_2 Z \overline{d_1 Z}) (\text{前式})']$$

$$\begin{aligned}
& + 2\sigma(d_1 Z_{21} d_1 Z_{13} \overline{d_2 Z_{31}} \overline{d_2 Z_{12}}) + 2\sigma(\overline{d_1 Z_{21}} \overline{d_1 Z_{13}} d_2 Z_{31} d_2 Z_{12}) \\
& - \sigma(d_2 Z_{21} d_1 Z_{13} \overline{d_1 Z_{31}} \overline{d_2 Z_{12}}) - \sigma(d_2 Z_{21} d_1 Z_{13} \overline{d_2 Z_{31}} \overline{d_1 Z_{12}}) \\
& - \sigma(d_2 Z_{31} d_1 Z_{12} \overline{d_1 Z_{21}} \overline{d_2 Z_{13}}) - \sigma(d_2 Z_{31} d_1 Z_{12} \overline{d_2 Z_{21}} \overline{d_1 Z_{13}}) \quad (12)
\end{aligned}$$

取 $d_1 Z = \begin{pmatrix} d_1 z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (j=1,2)$, 则得 $R < 0, R_H < 0$. 取 $d_1 Z_{11} = 0, d_1 Z_{12} = \begin{pmatrix} d_1 z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
 $d_1 Z_{13} = \begin{pmatrix} d_1 z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, d_1 Z_{22} = \begin{pmatrix} d_1 z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, d_1 Z_{33} = \begin{pmatrix} d_1 z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
 $d_2 Z_{11} = 0, d_2 Z_{12} = id_1 Z_{12}, d_2 Z_{13} = -id_1 Z_{13},$
 $d_2 Z_{22} = -id_1 Z_{22}, d_2 Z_{33} = id_1 Z_{33}$, 则得到

$$d_1 Z \overline{d_2 Z} - d_2 Z \overline{d_1 Z} = 0, R > 0, R_H > 0. \quad (13)$$

由于 Bergman 度量和 Hua 度量在解析自同胚下不变, 而 S_{II} 是齐性域, 所以无论采用 Bergman 度量或 Hua 度量, S_{II} 中各处的截曲率都是不定的.

本文是在殷慰萍老师指导下完成的, 特此致谢.

参 考 文 献

- [1] 殷慰萍, 非对称第一类 Siegel 齐性域的酉几何——域 S_{II} 的酉几何, 数学学报, 24 (1981), No. 5, 765~779.
- [2] 陆启铿, 多复变数函数与酉几何, 数学进展, 2(1956), 567~662.
- [3] Hua, L. K., On the theory of automorphic functions of a matrix variable I-Geomltry basis, *Am. J. Math.*, 66 (1944), 470~488.
- [4] Siegel, C. L., Symplectic Geometry, *Am. J. Math.*, 65(1943), 1~86.

The Sectional Carvatures of the Nonsymmetric Homogeneous Siegel Domains of the First Type

Chen Wanxi

(Department of Mathematics)

Abstract

We discuss the sectional curvatures of the nonsymmetric homogeneous Siegel domains, and point out that their sectional curvatures with Bergman metric and Hua metric are indefinite.

Key words: curvature, symmetric space, metric.

低温下氧在硫酸水溶液中 铅电极上的还原反应

杭 瑚

(近代化学系)

摘 要

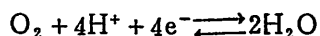
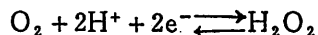
用旋转圆盘电极,研究了不同温度下氧在硫酸溶液中铅电极上的还原反应,发现 -20°C 时该反应基本上是二电子反应,不同于常温下的四电子反应。

关键词: 低温, 氧, 硫酸溶液, 铅电极, 还原反应。

前言

人们努力寻找铅酸蓄电池在低温下效率降低的原因及其解决办法。已知一个重要的实验事实:低温下 H_2O_2 的存在使得正极板的 PbO_2 被还原,同时又使得充电时 PbO_2 难以生成。于是产生一个问题:在低温条件下, H_2O_2 会不会由于电池反应而生成并产生上述有害效果?

酸性电解质溶液中,氧的电化学还原反应有两种可能的基本产物^[1]:



前者为二电子还原反应, $n=2$, 产物是 H_2O_2 ; 后者为四电子还原反应, $n=4$, 产物是 H_2O 。在不同电极表面和不同条件下进行氧的电化学还原, n 值或为2, 或为4, 或为介于2至4间的某一数值。在铅酸蓄电池中, 溶于硫酸溶液中的氧在过充电时将在负极被还原, 对于封闭的免维护电池, 充电后期有较多的氧溶于电解液中, 氧还原产物的问题更值得注意。

Delahay^[2]曾用极谱方法, 在常温下间接测定了氧在几种金属电极上还原时的极化曲线。在磷酸缓冲溶液中的铅电极, 当电位在 -1.6V 至 -0.8V (NHE) 时, 他测得氧还原的“表观电子数”为4。Fleming等^[3]证实, 在室温条件下, 氧在硫酸溶液中铅电极上还原时

1985年11月15日收到。

的电子转移数 $n=4$ 。但是没有人发表过低温下这类研究报告。低温下氧还原反应的历程会不会有所改变？ n 值是否会降低？这正是本文所关心的问题。

1 实验

本实验是在带有保温夹套的三电极玻璃电解池中进行的，其体积约 120cm^3 。参比电极是带鲁金毛细管的 $\text{Hg}/\text{Hg}_2\text{SO}_4/25\%\text{H}_2\text{SO}_4$ 电极（本文中所有电位数值，除另有说明者外，都是相对于此参比电极而言的）， Pt 片作对电极。工作电极是以纯铅（99.997%）嵌入 Scotchcast 树脂制成的旋转圆盘电极，铅电极表面积约 0.08cm^2 ，根据在显微镜下用测微计测得的直径数值算出具体数值。电极由 Beckman 可调速装置（Model No. 188501）驱动，电位控制及数据测量则使用 PAR Model 170 电化学系统。

获得重现性良好的、纯净而光滑平整的铅电极表面十分重要。其预处理手续是首先在细砂布上轻轻磨平，然后以抛光粉 Barnesite[®]85 研磨抛光，以三次蒸馏水清洗后浸入 0.35M HNO_3 ，约 15 秒钟^[4,5]，最后再以三次蒸馏水清洗后迅即固定到旋转轴上，并浸入电解池。

电解液为 $25\%\text{H}_2\text{SO}_4$ （Aristar）的水（三次蒸馏水）溶液。测量前，往电解池中通入纯氮以除去溶液中的溶解氧。电极插入溶液后，首先在还原电位 -1450mV 保持 2 小时左右直至电流达到一重复稳定的数值（约 $0.8\mu\text{A}$ ），这时才开始通入氧气，约 40 分钟后电流达到新的稳定数值。每次测量在稳定电流值保持半小时以后进行。

以低温冷冻循环装置（Neslab Model LT-50）控制溶液温度，误差不超过 $\pm 0.5^\circ\text{C}$ 。

2 结果与讨论

2.1 还原电位的选定

图 1 曲线 1 显示了电解溶液脱氧后在不同还原电位下的析氢电流，包含可能存在的微量杂质引起的微小电流，当电位正于 -0.97V 以后，开始了铅溶解以及生成 PbSO_4 钝化膜过程，产生阳极电流。曲线 2 显示了氧的还原电流，在旋转圆盘电极上，极限扩散电流在一较宽的电位范围内（约 -1.05 至 -1.40V ）为稳定值，基本上不随时间变化，对电位的依赖关系也很小。图 1 是 -20°C 时测定的结果，温度升高则氧的还原电流增大。但电流随电位的变化情况亦即曲线的形状是相似的。

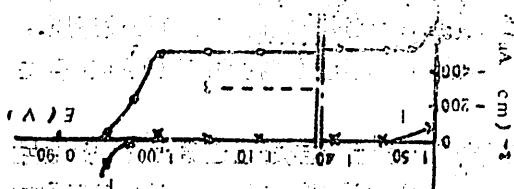


图 1 -20°C 时 $25\%\text{H}_2\text{SO}_4$ 溶液中铅电极上的稳态电位电流曲线

圆盘电极旋转速度：10 转/秒；
 曲线 1 —— 电解液已脱氧；
 曲线 2 —— 电解液被氧饱和；
 曲线 3 —— 电解液已脱氧，但电极表面预处理情况不好。

Baugh 和 Bladen 等^[4,5]曾详细研究过铅电极在脱氧与含氧的硫酸溶液中的电化行

为。其实验表明，氧在铅电极上还原时的稳定极限扩散电流出现于 -1.05 至 $-1.35V$ 左右的电位范围内，与本研究结果是一致的。但 Fleming 等认为^[9]，即使在还原电位下，氧的存在也能导致生成一未知化学式的氧化物膜，或促使电极上的还原产物再氧化，从而使得还原电流随时间增长而逐渐减小。这种情况也为本实验所证实。固态膜开始生成的电位大约在 $-1.2V$ 左右；另一方面，在 $-1.4V$ 左右，虽然氢在纯净铅电极上的析出电流很小，但只要铅电极的预处理和净化工作稍有不慎，在此电位范围就会产生较大的析氢电流，如图 1 中虚线 3 所示。因此，本研究工作选定氧的还原电位范围为 -1.2 至 $-1.3V$ 。

2.2 电子转移数 n

Levich 方程给出了一定转速下通过旋转圆盘电极的极限扩散电流密度为

$$i_d^0 = 0.62nFC_{(O_2)}D_{(O_2)}^{2/3}\nu^{-1/6}\omega^{1/2} \quad (1)$$

式中

n —电子转移数；

F —法拉第常数；

$C_{(O_2)}$ —电解液中氧的浓度，本实验情况下，即为一定温度下，氧在硫酸溶液中的溶解度；

$D_{(O_2)}$ —氧在硫酸溶液中的扩散系数；

ν —硫酸溶液的运动粘度；

ω —电极旋转角速度。

由 (1) 式得

$$n = [(0.62FC_{(O_2)}D_{(O_2)}^{2/3})^{-1}\nu^{1/6}] \cdot i_d^0/\omega^{1/2}$$

在不同的电极转速下，测扩散电流密度 i_d ，作 $i_d \sim \omega^{1/2}$ 图，其直线部分的斜率 $k = i_d^0/\omega^{1/2}$ 。又，一定温度下 $C_{(O_2)}$ 、 $D_{(O_2)}$ 及 ν 均为定值，令

$$(M_s = (0.62FC_{(O_2)}D_{(O_2)}^{2/3})^{-1}\nu^{1/6})$$

则有

$$n = M_s k \quad (2)$$

不同温度下的 $i_d \sim \omega^{1/2}$ 曲线如图 2 所示。

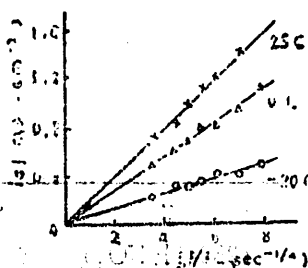


图 2 不同温度下的 $i_d \sim \omega^{1/2}$ 关系
选定还原电位 $-1.25V$ 。

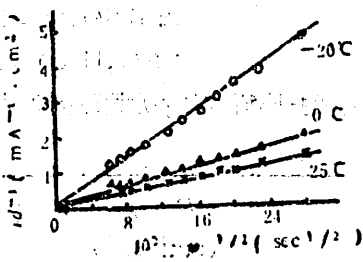


图 3 不同温度下的 $i_d \sim \omega^{1/2}$ 关系
选定还原电位 $-1.25V$ 。

为保证数据的可靠性，在每个温度下，都分别从低转速到高转速再从高转速到低转速，重复测定每一转速下的扩散电流值，两次误差不超过 $\pm 2\%$ 。

图 3 表明，即使在 $-20^\circ C$ 时，氧在铅电极上的化学还原速度仍然足够快，反应受浓差扩

散控制。因此，按式(2)计算反应电子数 n 是合理的。

氧在硫酸溶液中的溶解度 $C_{(O_2)}$ 以及硫酸溶液的运动粘度 ν 分别从文献[6]、[7]获得。

2.3 氧在硫酸溶液中的扩散系数 $D_{(O_2)}$ 的计算

无从获得氧在较浓硫酸溶液内的扩散系数，至于低温下这类数据还从未发表过，所以只能藉助于理论计算。

Akita^[6]根据 Eyring 反应速率理论给出溶质在溶液中的扩散系数

$$D = \lambda^2 \left(\frac{kT}{h} \right) \exp \left(- \frac{\Delta G^\ddagger}{RT} \right)$$

式中

ΔG^\ddagger —扩散粒子的摩尔活化自由能；

k, h, R —波兹曼、普朗克和气体常数；

T —绝对温度；

λ —扩散粒子的自由程，

$$\lambda = (V/N_0)^{1/3}$$

其中

V —溶剂的摩尔体积；

N_0 —阿佛加德罗常数。

溶液中，1 摩尔扩散粒子的活化自由能可表示为离子及溶剂的摩尔分数的线性函数

$$\Delta G^\ddagger = \Delta \alpha x_+ + \Delta \beta x_- + \gamma$$

x_+, x_- —溶液中正、负离子的摩尔分数；

$\Delta \alpha, \Delta \beta, \gamma$ —分别与正、负离子及溶剂有关的系数，可计算或查表获得。

于是有

$$D = \left(\frac{k}{h} \right) \left(\frac{V}{N_0} \right)^{2/3} T \exp \left(- \frac{\Delta \alpha x_+ + \Delta \beta x_- + \gamma}{RT} \right) \quad (3)$$

计算值与实验值相比较，相对误差一般在 $\pm 10\%$ 以内。

对于硫酸水溶液，

$$\Delta \alpha(H^+) = 10\ 200\ \text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\Delta \beta(SO_4^{2-}) = 12\ 700\ \text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\gamma(O_2, H_2O) = 13\ 700\ \text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

现将 $D_{(O_2)}$ 的计算值及有关数值列入表 1。

表 1

温 度 (°C)	$D_{(O_2)}$ ($\text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)	$C_{(O_2)}$ ($\text{g} \cdot \text{mol} \cdot \text{l}^{-1}$)	γ (25% H_2SO_4) ($\text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)	M_s (i_s 以 $\text{mA} \cdot \text{cm}^{-2}$ 计)
25	1.16×10^{-5}	0.73×10^{-3}	1.31×10^{-2}	21.7
0	5.97×10^{-6}	0.90×10^{-3}	2.57×10^{-2}	30.7
-20	3.21×10^{-6}	1.18×10^{-3}	5.52×10^{-2}	40.1

2.4 电子转移数 n 的计算结果

由实验数据所得 $i_d \sim \omega^{1/2}$ 的直线斜率 k 以及按 (2) 式计算所得 n 值列于表 2。

表 2

温度(°C)	25			0			-20		
斜率 k									
(当 i_d 以 mA·cm ⁻² 计)	0.184	0.186	0.184	0.124	0.127	0.131	0.057	0.060	0.060
n 值	3.99	4.04	3.99	3.81	3.90	4.02	2.29	2.41	2.41
n 平均	4.00 ± 0.02			3.91 ± 0.07			2.37 ± 0.05		

由表 2 可见, 常温下, 氧在 25% H₂SO₄ 溶液中的铅电极上的还原过程是四电子反应, 反应产物是 H₂O, 与 Fleming 等人的工作是一致的。当温度降至 0 °C 时, 反应历程基本上没有变化。可是, 若温度低达 -20 °C, n 值接近于 2, 氧还原的主要产物是 H₂O₂。如前所述, 这会成为铅酸蓄电池低温效能差的可能原因之一, 对此, 作进一步研究, 将是令人感兴趣的。

本工作是在加拿大卡尔顿大学化学系的 R. G. 伯纳德斯教授的研究室内进行的, 曾得到教授本人和 D. S. 纳德斯博士的支持与帮助, 在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] Hoare, J. P., *The Electrochemistry of Oxygen*, 1968, p. 117.
- [2] Delahay, P., *J. Electrochem. Soc.*, 97 (1951), 205.
- [3] Fleming, A. N., Harrison, J. A., Thompson, J., *Power Sources 5*, Ed. by Collins, D. H., Academic Press, London, 1975, 1.
- [4] Armstrong, R. D., Bladen, K. L., *J. Appl. Electrochem.*, 7 (1977), 345.
- [5] Baugh, L. M., Bladen, K. L., *J. Electroanal. Chem.*, 145 (1983), 325.
- [6] Gubbins, K. E., et al., *J. Electrochem. Soc.*, 112 (1965), 469.
- [7] *Lead-Acid Batteries, A Reference and Data Book*, Compiled by the Indian Lead Zinc Information Centre, Elsevier Sequoia S. A., Lausanne, 1977, 79.
- [8] Akita, K., *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, 20 (1981), 89.

Journal of Modern Chemistry, Vol. 1, No. 1, 1982

Reduction of Oxygen on Lead Electrode in Aqueous Solution of H_2SO_4 at Low Temperature

Hang Hu

(Department of Modern Chemistry)

Abstract

The rotating disc electrode made of lead was used to investigate the reduction of O_2 on lead electrode in H_2SO_4 solution at different temperatures. It was found that this reaction at $-20^\circ C$ is not four electron reaction as at ambient temperature but basically two electron reaction.

Key words: low temperature, oxygen, sulfuric acid solution, lead electrode, reduction.

恶嗪—9 激光染料的合成

汪月生 张国赏* 秦汉盈

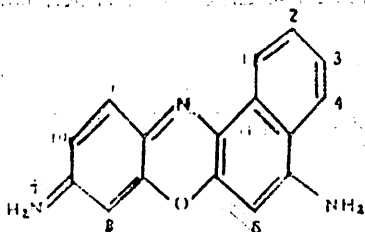
(近代化学系)

摘 要

本文简述了以间氨基苯酚和 α -萘胺为原料,经酰化、亚硝化及缩合等反应,然后经过水解、纯化等处理获得了翠绿色金属光泽针状结晶的恶嗪—9激光染料。测定了这种染料的光谱和激光性能,认为这是一种有实用价值的激光染料。

关键词: 染料, 激光染料, 恶嗪—9。

恶嗪—9激光染料又名甲酚紫 (Cresyl Violet), 结构式为:



系恶嗪型染料之一。这种染料具有化学稳定性好、激光能量转换效率高、频谱范围较宽等优点,近年来已成为一种通用的激光工作物质,受到极大重视。但是,目前国内使用的恶嗪—9都是从国外进口的,不但价格昂贵,而且供应也不方便。为了适应国内科研工作的需要,我们对它的合成进行了研究。经过反复多次实验,找到了一条较为简便的合成路线,合成了质量优于进口样品的恶嗪—9产品。产品经中国科学院上海光机所及本校激光专业测定,使用,结果表明,我们合成的恶嗪—9具有激光转换效率高、化学稳定性好、合成步骤少、收率高等优点,是一种有实用价值的激光染料。

1986年3月20日收到

* 结构成分分析中心实验室。

1 实验部分

1.1 仪器及试剂

实验中所用的原料间氨基苯酚、 α -萘胺、亚硝酸钠、醋酸酐、盐酸、无水乙醇等均为分析纯试剂。所用仪器为 240C 元素分析仪、5DXFTIR 型红外光谱仪、UV-240 紫外分光光度计、EM 360L 核磁共振波谱仪。

1.2 实验步骤

1.2.1 3-羟基乙酰苯胺的制备

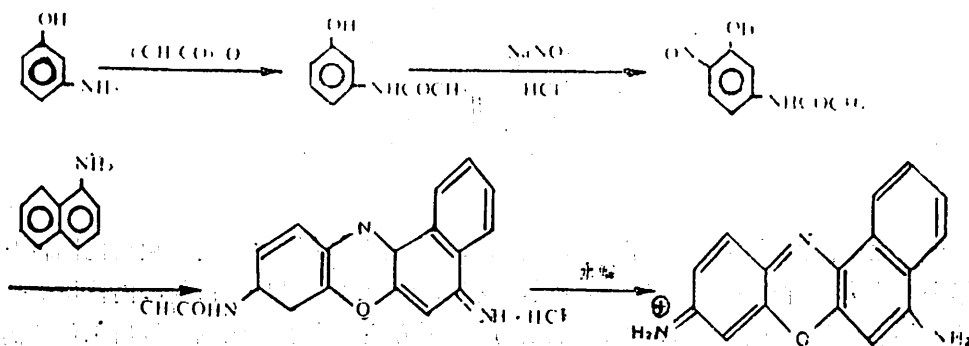
将 25ml 醋酐和约 70ml 蒸馏水置于反应瓶中，在不断振荡下加入 25 克间氨基苯酚，加热回流 1 小时，再将回流溶液倒入 200ml 冷的蒸馏水中，经加入活性炭煮沸脱色，得到白色的针状结晶 3-羟基乙酰苯胺 31 克，产率可达 90%。

1.2.2 3-羟基乙酰苯胺的亚硝化

将约 0.2mol 的 3-羟基乙酰苯胺在碱性条件下溶于水，再加入等当量的亚硝酸钠，冷却到 0°C 左右，缓慢滴加浓盐酸水溶液，在搅拌下于 0~5°C 进行亚硝化反应，约 2 小时，生成黄棕色沉淀，然后经过滤、洗涤、干燥等，得到 3-羟基-4-亚硝基-乙酰苯胺，产率约为 80%。

1.2.3 缩合反应

将 3-羟基-4-亚硝基-乙酰苯胺同 α -萘胺在无水乙醇中进行缩合反应，搅拌回流 2 小时，然后进行水解、纯化处理得到翠绿色金属光泽针状结晶恶嗪-9。反应方程式如下：



2 结果与讨论

2.1 产物的红外光谱分析

产物的红外光谱列于图 1。图中表明在 3 300cm⁻¹ 和 3 340cm⁻¹ 处有伯胺的 N—H 的伸缩振动；在 3 100—3 140cm⁻¹ 附近出现较强的芳香族苯环 C—H 伸缩振动；从图中可明显看出 C[≡]C 和 C[≡]N 环伸缩振动在 1 600cm⁻¹ 至 1 430cm⁻¹ 附近，其中 1 580cm⁻¹ 处为

C=C的环伸缩振动；在 $1210\text{cm}^{-1}\sim 1230\text{cm}^{-1}$ 的吸收带为芳香醚(C-O-C)的不对称伸缩振动，而 $1110\sim 1130\text{cm}^{-1}$ 为其对称伸缩振动吸收带。在指纹区可以明显地看出 748cm^{-1} 和 703cm^{-1} C-H 面外弯曲振动带。从产物的红外光谱图分析说明是符合恶嗪—9分子结构的。

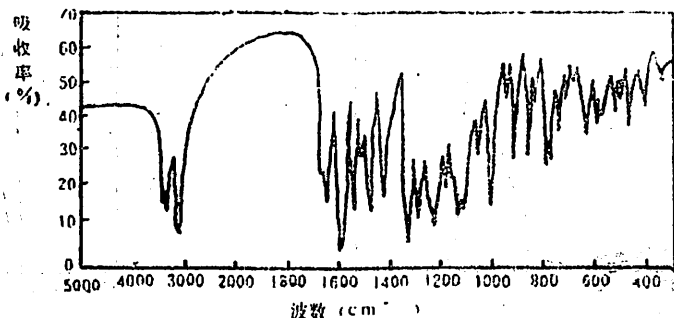


图 1 恶嗪—9 红外光谱图 (KBr)

2.2 产物的元素分析 (结果列于表 1)

表 1 由元素分析得到的产物的组成

染料	元素百分含量	% C	% H	% N
恶嗪—9	理论计算	53.49	3.62	11.69
	实验测定	54.01	3.91	11.08

从结果看，碳、氢含量实验测得值略高于理论值，而氮含量稍低于理论值，但误差仍在合理的范围之内。

2.3 产物的核磁共振图 (见图 2)

右面的核磁共振图表明，恶嗪—9 存在着四种质子峰。其中， $6.5\sim 7\text{ppm}$ 处为邻位取代的苯环上的四个质子峰；在 7.7ppm 附近是胺盐的质子吸收峰；在 8.2ppm 处和 8.6ppm 处分别为10、11位和8、6位上的质子峰。它们之间的积分比符合分子式中各类质子数之比。

2.4 产物的紫外—可见光吸收谱和荧光谱

我们以乙醇和甲醇为溶剂，分别在UV—240 紫外分光光度计和850 荧光光谱仪上测定了产物的紫外可见光吸收谱和荧光谱见图3和图4。

图3 实线表示产物溶于乙醇时的吸收谱，虚线表示溶于甲醇的吸收谱。由图3可见，产物溶于甲醇时的主要吸收在 $520\sim 625\text{nm}$ ，溶于乙醇时的吸收主要在 $500\sim 620\text{nm}$ ，它们的峰值吸收波长都在 585nm 左右，

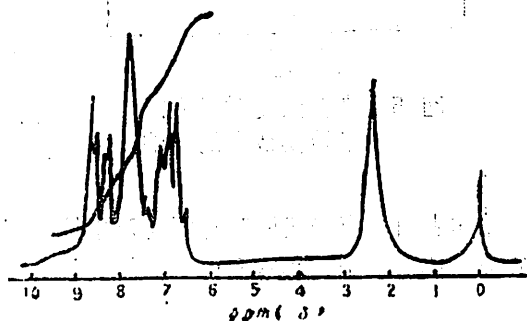


图 2 恶嗪—9 的核磁共振谱 (溶剂: 氘代二甲亚砜)

图4表明产物的甲醇和乙醇溶液,在532nm波长光的激发下,荧光范围在630~730nm,甲醇溶液的峰值荧光波长为650nm,乙醇溶液的峰值荧光波长为660nm,图中实线及虚线分别表示以乙醇和甲醇为溶剂。

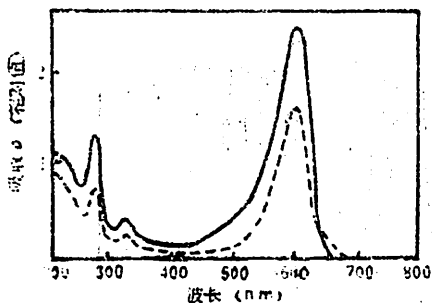


图3 恶嗪-9的紫外-可见光吸收谱

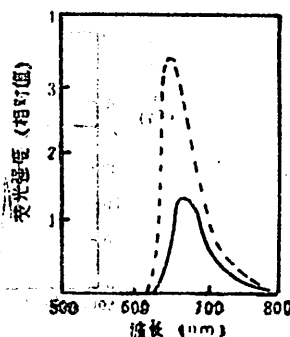


图4 恶嗪-9的荧光谱

2.5 产物的激光性能

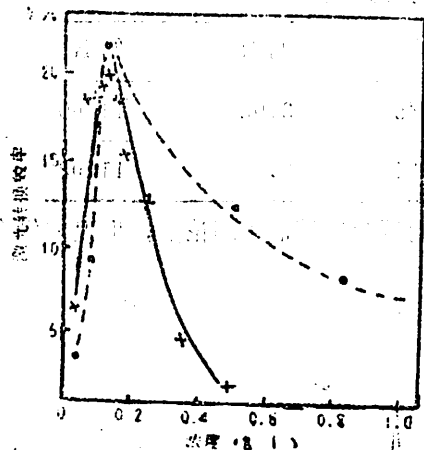


图5 染料浓度对激光能量转换效率的影响

产物经上海光机所 JDY-80 型 MYR 激光单色仪中使用,结果如下:用分析纯无水乙醇作溶剂,溶液浓度为 2×10^{-4} M/L,我们产物的激光可调范围是 $6368 \text{ \AA} \sim 6606 \text{ \AA}$,带宽约 250 \AA ,中心波长为 6500 \AA 。

图5表示产物激光能量转换效率对染料浓度的关系。两种溶液输出激光最强的最佳浓度为每升 124mg,最佳浓度下的激光转换效率达22%,在相同测试条件下,进口恶嗪-9最高转换为15%左右。

综上所述,我们制备的恶嗪-9的主要优点是激光能量转换效率高,性质稳定,合成路线短,产率高,质量比进口样品好,是一种有实用价值的激光染料。

作者对上海光机所叶林同志及本校物理系马玉蓉等同志在测定产物的激光性能方面给予的大力协助表示衷心感谢!

参 考 文 献

- [1] Ger Offen, 2353987, (1985).
- [2] Hubertus, P., Helmut, H., *Chem. Ber.*, 102 (1969), 10.
- [3] Roderich, R., Horst, H., *Heterocycles* 21 (1984), No.1, 167-190.
- [4] Romane, K. M., Hildebrand, K. O., *Opt. Commun.*, 21 (1977), No.1, 16-190.

1981.12.15

ON THE SYNTHESIS OF OXAZINE-9 LASER DYES

WANG YUESHENG, ZHANG GUOSHANG, QIN HANYING

The methods of preparation of Oxazine-9 laser dyes are described in this paper. M-aminophenol is acylated and nitrosated, then reacted with naphthylamine. Emerald green Oxazine laser dyes are obtained after hydrolysis and purification. The advantages of the dyes have been briefly pointed out.

143

Key Words: dyes, laser dyes, Oxazine-9.

The methods of preparation of Oxazine-9 laser dyes are described in this paper. M-aminophenol is acylated and nitrosated, then reacted with naphthylamine. Emerald green Oxazine laser dyes are obtained after hydrolysis and purification. The advantages of the dyes have been briefly pointed out.

Abstract

(Department of Modern Chemistry)

Wang Yuesheng, Zhang Guoshang, Qin Hanying

Synthesis of Oxazine-9 Laser Dyes

1981.12.15

143

用无焰原子吸收法直接测定 植物中的Co和Ni

齐文启 林淑钦 陈树榆

合志阳一

(中国科学技术大学)

(东京大学)

摘 要

本文采用 NH_4VO_3 作基体改良剂,提高灰化温度,改变原子化过程,达到了不经预先分离和浓缩,直接测定植物中微量元素Co, Ni的目的。采用本方法测定NBS标准样品所得结果与标准值或参考值十分接近,较其它方法简便、迅速、且精度良好。

关键词: 无焰原子吸收, 植物, 钴, 镍, 基体改进剂。

前言

生物体中的Co, Ni属于必需的微量元素,在维持生物体的健康及正常代谢机能等方面起着重要作用。随着科学的发展,Co, Ni已成为重要的工业原料,然而在环境中多量积累会成为污染物。因此,研究Co, Ni的简便、准确分析方法是十分必要的。

土壤及植物中Co, Ni的测定已有报道^[1-4],但大多采用萃取分离基体及预先浓缩的方法,手续繁杂,且精度低。本化选择 NH_4VO_3 作基体改进剂,提高灰化温度及背景补偿,不经预先分离和浓缩,采用双通道原子吸收法测定植物中的Co, Ni。为了鉴定本方法的可靠性,测定了NBS—SRM1570和NBS—SRM1571标准样品,并用萃取浓缩法进行对照,得到了十分满意的结果。

1 仪器及试剂

1.1 试剂

Co, Ni标准储存液,1000微克/毫升(Alfa Products),用时适当稀释;1% NH_4VO_3 溶液;干扰离子均用AR或GR试剂及二次去离子水配制;GR级 HNO_3 ;AR级 HClO_4 。

1983年3月18日收到。

1.2 仪器及工作条件

IL 951 双波道原子吸收分光光度计及 IL 655 控温石墨炉。以 Ar 作保护气体，用热介石墨管及 10 微升 Eppendorf 手动进样器。仪器的工作条件列于表 1。

表 1 工作条件

光源	Co	Ni H.C.L.
灯电流	8mA	9mA
工作波长	2 407 Å	2 320 Å
通带宽度	1.9 Å	1.9 Å
干燥	130°C,	30秒
灰化	800°C,	25秒
原子化	2 300°C,	5秒
保护气体 Ar	1升/分	

2 结果与讨论

2.1 添加剂的效果

根据 Co, Ni 的高温化学反应特性^[1], 在 60 ppb Ni 及 40 ppb Co 中加入 0.2% 的各种添加剂, 按表 1 条件测定 Co, Ni 的吸收。它们的增感效果示于表 2。铂族元素的 Rh,

表 2 各种外加离子对 Co, Ni 的增感效果

离子加入形式 (0.2%)	相对吸收信号	
	Co	Ni
	100	100
(NH ₄)Mo ₇ O ₂₄	110	109
MoCl ₅	104	105
Na ₂ PtCl ₆	115	100
PtCl ₄	114	102
RhCl ₃	107	109
PdCl ₂	105	105
NaWO ₄	120	111
(NH ₄) ₂ SO ₄	101	102
(NH ₄) ₂ C ₂ O ₄	100	101
Na ₃ VO ₄	134	121
NH ₄ VO ₃	141	152

Pd虽有增感效应,但不如Mo, Pt和V效果明显。此外,就Mo而言,加入的形式不同,所产生的作用也有差异。 Na_2VO_4 和 NH_4VO_3 增感效果最为明显。但采用前者时,测定精度欠佳,因此选用 NH_4VO_3 作添加剂。

2.2 添加剂 NH_4VO_3 的用量

在含60 PPb Ni和40 PPb Co的溶液中,加入 NH_4VO_3 溶液,使其含量分别为0.05%、0.1%、0.2%、0.3%、0.4%、0.5%、1.0%及1.5%,然后进行测定。当 NH_4VO_3 含量在0.1~0.4%时,Co, Ni吸光度一定,含量超过1.0%时,吸光度再现性恶化,这是添加剂产生的新背景和记忆效应所致。因此,选用0.2%的添加量,以保证测定精度。

2.3 灰化温度

根据扎川^[1,2]等的报道,灰化温度超过600℃,Co将在灰化过程中挥发损失。Ni在650℃以上也呈现出低值吸收。此外,在直接测定植物的消解溶液时,如果灰化温度较低,在原子化初期将产生较大的背景,成为误差的主要来源。因此,为了有效地消除基体的影响,必须适当提高灰化温度。在本研究中,为了提高Co, Ni的灵敏度,同时改变其灰化及原子化过程而加入 NH_4VO_3 。改变灰化温度,在15秒灰化之后,用2300℃ 10秒原子化,观察Co, Ni吸收信号的变化,其结果示于图1。在加入 NH_4VO_3 后,直到1100℃都能有效地消除背景,呈现出高值吸收,从而防止了Co, Ni的挥发损失。因此,本文采用800℃的灰化温度。

在微量Ni的原子吸收测定中,常采用最灵敏的2320.0Å线,此时易受2319.8Å Ni离子线的影响,致使背景增大,灵敏度降低。加入 NH_4VO_3 后,防止了Ni的离子化。

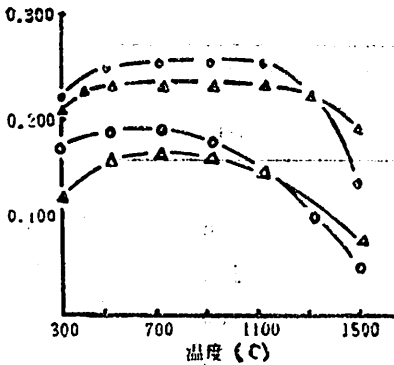


图1 Co, Ni的灰化曲线及 NH_4VO_3 的影响

- Co(40ppb) + NH_4VO_3
- ▲— Ni(60ppb) + NH_4VO_3
- Co(40ppb)
- ▲— Ni(60ppb)

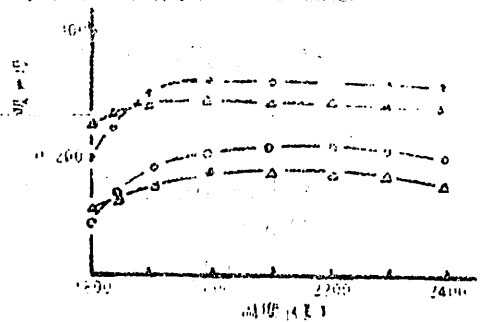


图2 Co, Ni的原子化曲线及 NH_4VO_3 的影响

- Co(40ppb) + NH_4VO_3
- ▲— Ni(60ppb) + NH_4VO_3
- Co(40ppb)
- ▲— Ni(60ppb)

同样, Co 2407Å线也常受到2408Å Co离子线的影响。若选用极小的通带,则会使信号减小,从而降低了信噪比。本研究所采用的添加剂的作用是显而易见的,此外,在保证

Co, Ni 没有挥发损失的前提下, 采用较高的灰化温度, 也有利于克服基体干扰, 从而达到直接测定的目的。

2.4 原子化温度的选择

选用 800℃, 15 秒灰化, 从 1 800~2 400℃ 改变原子化温度, 10 秒原子化, 观测 Co, Ni 的原子吸收信号随温度变化的情况. 如图 2 所示, 随着原子化温度的升高, 信号逐渐增大. 不加 NH₄VO₃ 时, 在 2 000~2 100℃ 信号最强, 而 Ni 超过 2 200℃, Co 超过 2300℃ 时信号开始减小. 采用添加剂之后, 扩大了原子化温度的线性范围 (2 000~2 400℃), 这是由于 Co, Ni 的偏钒酸化合物及与钒的金属间化合物的生成^[5], 从而改变了其原子化过程的缘故. 本文采用 2 200℃, 10 秒原子化。

2.5 共存离子的影响

根据植物基体成分的大致范围, 实验了一些离子对 0.30ppm Ni 及 0.10ppm Co 的影响, 同时探讨了消解样品常用几种酸的影响, 其结果列于表 3. 采用上述条件及加入 NH₄VO₃,

表 3 各种离子对 Co, Ni 的干扰

离 子	外 加 离 子		回 收 结 果	
	形 式	浓度, ppm	0.10ppm Co	0.30ppm Ni
K ⁺	KNO ₃	1600	0.10	0.31
Na ⁺	NaCl	300	0.10	0.32
Ca ²⁺	Ca(NO ₃) ₂	270	0.11	0.31
Mg ²⁺	Mg(NO ₃) ₂	200	0.09	0.31
Fe ³⁺	FeCl ₃	135	0.10	0.32
Mn ²⁺	MnSO ₄	95	0.10	0.31
MnO ₄ ⁻	KMnO ₄	210	0.10	0.30
Zn ²⁺	ZnCl ₂	3.0	0.10	0.30
Cu ²⁺	Cu(NO ₃) ₂	1.5	0.10	0.29
F ⁻	NaF	200	0.09	0.29
ClO ₄ ⁻	KClO ₄	500	0.10	0.30
NO ₃ ⁻	KNO ₃	2500	0.10	0.31
SO ₄ ²⁻	K ₂ SO ₄	300	0.11	0.30
PO ₄ ³⁻	KH ₂ PO ₄	300	0.09	0.30
Al ³⁺	Al(NO ₃) ₃	50	0.07	0.29
Al ³⁺	Al(NO ₃) ₃	100	0.07	0.30
Al ³⁺	Al(NO ₃) ₃	150	0.08	0.30
Al ³⁺	Al(NO ₃) ₃	200	0.07	0.31
Al ³⁺	Al(NO ₃) ₃	250	0.05	0.31
Al ³⁺	Al(NO ₃) ₃	300	0.04	0.30

时, K (1 600ppm), Na (300ppm), Ca (270ppm)、Fe (135ppm)、Mg (200ppm)、Mn(95ppm)、Zn(3.0ppm)、Cu(1.5ppm) 均未发现干扰。此外, F^- 、 MnO_4^- 、 ClO_4^- 、 NO_3^- 等阴离子也没发现干扰。在不加 NH_4VO_3 时, 由于 Ca、K、Na 的发光影响, 将产生较强的背景^[1], 甚至用氘灯也不能校正, 难以直接测定。

50~300ppm 的 Al 对 Ni 的测定无干扰, 而对 Co 产生负干扰。这与 A.M. ure 等^[6]的报道一致, 是由于光散射的结果。但 Al 含量在 50~200ppm 时, 其干扰成定值。为了补偿 Al 的负干扰, 同时考虑到植物中 Al 的大致含量, 使标准系列中含有 100ppm 的 Al。

2.6 工作曲线

在一系列 10 毫升的容量瓶中, 加入 2 毫升 1% 的 NH_4VO_3 及 1 毫升 1 毫克/毫升的 Al 溶液, 然后加入相应量的 Co、Ni 标准溶液, 用 0.5% 的 HNO_3 定容, 按前述条件进行测定, 并绘制出标准工作曲线。同时选取植物消解液作标准加入实验, 在相同条件下, 所得到的 Co、Ni 标准加入曲线分别与 Co、Ni 标准工作曲线相平行。从而说明加入 NH_4VO_3 作基体改进剂, 并以 Al 补偿, 足以消除基体影响。

3 茶叶、果树叶及菠菜的分解和 Co, Ni 的定量

3.1 干法分解

参照文献 [1] 称取经 105℃ 干燥 2 小时的植物样品 1.000 克于石英坩埚中, 在马弗炉里 200℃ 灰化 1 小时, 然后 600℃ 加热 1 小时, 用 1:1 HNO_3 3 毫升、 $HClO_4$ 1 毫升溶解残渣。将溶液转移至聚四氟乙烯烧杯中, 加入 2 毫升 HF, 在 250℃ 加热至白烟冒尽, 冷却后加入 1% NH_4VO_3 10 毫升和少量 0.5% HNO_3 , 加热溶解析出物。如果 Mn 含量较多, 出现褐色时则加入 1% H_2O_2 一滴, 用 0.5% HNO_3 定容至 50 毫升。

3.2 湿式分解

称取 1.000 克样品于聚四氟乙烯烧杯中, 加入 10 毫升 HNO_3 , 加热分解后, 再加入 5 毫升 $HClO_4$, 加热至冒白烟, 最后加入 2 毫升 HF, 继续加热至近干, 以下同干法消解。

3.3 样品测定

本文采用标准曲线法, 用表 1 的条件进行 Co、Ni 的测定。比较干法分解与湿式分解样品的测定, 结果相当接近。因湿法消解更为简便, 故本文采用湿法分解样品。为了与其他方法进行对比, 作者用了二肟一醋酸正戊酯萃取 $Ni^{[3]}$, 用 5Br—PADAP—MIBK 萃取 $Co^{[4]}$, 进行了 Co、Ni 测定, 这些结果列于表 4。从表 4 可见, 用萃取法和本方法均得到了 NBS 标准值及参考值相一致的结果。本方法变动系数 Co 是 0.42~1.8%, Ni 是 0.89~4.8%, 精度明显高于萃取法, 而且更为简便。

表 4 植物中 Co、Ni 的测定结果 ($\mu\text{g/g}$)

试样		茶叶	Or ^{a)}	Spinach ^{b)}
Co	平均值	0.081	0.19 ^{c)}	1.35 ^{e)}
	变动系数 (%)	0.42	1.70	1.80
Ni	平均值	4.68	1.22 ^{d)}	5.68 ^{f)}
	变动系数 (%)	4.30	4.8	0.89
Co ^{g)}	平均值		0.18	1.27
	变动系数 (%)		3.0	13.1
Ni ^{h)}	平均值		1.14	6.21
	变动系数 (%)		9.8	10.2
Ni ⁱ⁾	平均值		1.17	5.58
	变动系数 (%)		3.8	0.15

a) NBS SRM 1571 Orchard Leaves, n=5;

b) NBS SRM 1570 Spinach, n=5;

c) 参考值是 $0.2\mu\text{g/g}$;

d) 标准值是 $1.3 \pm 0.2\mu\text{g/g}$;

e) 参考值是 $1.5\mu\text{g/g}$;

f) 参考值是 $6\mu\text{g/g}$;

g) 用 5Br-PADAP-MIBK 萃取 (n=5);

h) 用丁二脞-乙碳酸正戊酯萃取 (n=5);

i) 丁二脞-乙酸正戊酯萃取之后, 用 0.1N HCl 反萃。

参 考 文 献

- [1] 札川纪子, 川瀬晃, 分析化学(日), 29 (1980), 6.
- [2] 札川纪子, 川瀬晃, 分析化学(日), 27 (1978), 37.
- [3] 齐文启, 何友昭等, 中国科学技术大学学报, 增刊 (1982), 65.
- [4] 齐文启, 何友昭, 环境科学情报, 12 (1981), 9.
- [5] 正木贵久等, 日本第 46 回分析化学讨论会讲演要旨集, 1985, P.161.
- [6] Ure, A. M., Mitchell, R.L., *Spectrochim Acta*, 23 B (1967) 79.

Direct Determination of Trace Co and Ni in Plants by Flamless Atomic Absorption Spectrophotometry

Qi Wenqi Lin Shuqin Chen Shuyu

(University of Science and Technology of China)

Y. Gohshi

(University of Tokyo)

Abstract

The paper reports a method. NH_4VO_3 is used as a matrix modifier for raising the pyrolysis temperature and changing the atomization process of sample. Therefore, the microelement Co and Ni in plant can directly be measured without using the pre-separation and pre-concentration technique. The measured results are in reasonable agreement with the standard values or non-certified values for NBS' samples. The method is faster and more convenient than the others.

Key words: flamless atomic absorption, plant, Cobalt, nickel, matrix modifier.

甲基丙烯酸三丁基锡酯自由基溶液聚合反应动力学的研究*

韩哲文 张其锦 陈昆松 沈红娇

(应用化学系)

摘 要

我们在苯溶液中,以偶氮二异丁腈为引发剂,在 $50^{\circ}\sim 75^{\circ}\text{C}$ 的温度范围内,进行了甲基丙烯酸三丁基锡酯(TBTM)的聚合动力学研究,得到了聚合反应速度方程式 $R_p = K_p [\text{TBTM}]^{1.5} [\text{AIBN}]^{0.5}$,即对单体和引发剂的反应级数分别为1.5级和0.5级。并测定了聚合反应活化能为 18.1kcal/mol ,及影响聚合度的综合活化能为 -12.3kcal/mol 。

关键词: 自由基聚合, 反应动力学, 甲基丙烯酸三丁基锡酯, 有机锡聚合物。

引言

有机锡聚合物具有生物活性,它与低分子的有机锡化合物相比,具有低环境污染、有效防污时间长、自抛光、减少涂层表面的粗糙度等优点。因有防止海洋生物粘附船体和抛光的作用,能大大减少燃料的消耗和提高船只的航行速度,且满足不造成环境污染的安全卫生要求,是一种具有发展前途的新型海洋船只、海港设施的防污涂料,引起人们广泛的重视。

我们在苯溶液中,以偶氮二异丁腈为引发剂,进行了甲基丙烯酸三丁基锡酯的聚合反应动力学研究,求得了聚合速度方程表达式和反应级数,以及聚合反应活化能和影响聚合度的综合活化能。

1 实验部分

甲基丙烯酸三丁基锡酯(TBTM)是由甲基丙烯酸和三丁基氧化锡按文献[3]的方法

1985年7月8日收到。

* 中国科学院科学基金资助课题。

合成的，经石油醚重结晶三次，熔点为 18°C 。

偶氮二异丁腈 (AIBN) 是化学纯试剂，经甲醇重结晶三次纯化。

溶剂苯，经浓硫酸洗、水洗、碱洗和水洗后，干燥蒸馏纯化，压入钠丝后备用。

聚合是在 50ml 反应瓶中进行。反应混合物为 10ml，按计算量加入单体、引发剂和溶剂苯，经真空脱气充氮三次后，移入恒温浴中，在电磁搅拌下进行聚合反应。每隔一定时间取样测反应混合物的红外吸收度光谱，用归属单体双键相关峰的峰强减少来计算单体的转化率进行动力学测定。

红外光谱的测定是在美国 Nicolet 公司的 5DX FTIR 仪上进行的，使用 0.05 毫米厚的液体吸收池，扫描 60 次以提高信噪比。

2 结果和讨论

2.1 被测吸收峰的确定

由于引发剂的含量很低，被测反应混合物可视为三组分体系。我们比较了甲基丙烯酸三丁基锡酯 (TBTM) 单体，聚合物 (PTBTM) 和溶剂苯的红外吸收度光谱 (图 1)，认为归属单体 $\nu = \text{CH}_2$ 非平面摇摆振动的 826cm^{-1} 吸收峰，在聚合物和苯的红外光谱中无干扰峰，以此峰强度的变化表示单体在反应混合物中浓度的变化比较合适。同理，选择苯的 1813cm^{-1} 的吸收峰作为内标峰，是为了减少池厚和测光谱时温度的微小变化所产生的误差。

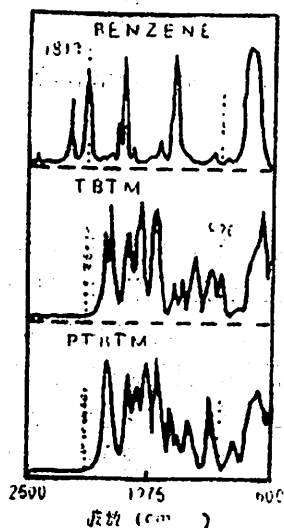


图 1 溶剂 (BENZENE)，单体 (TBTM) 和聚合物 (PTBTM) 的红外吸光度光谱

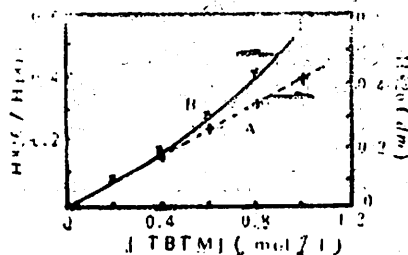


图 2 单体浓度与 (A) 826cm^{-1} 峰高和 (B) 826cm^{-1} 峰与 1813cm^{-1} 峰的峰高比与浓度的关系曲线

2.2 峰高比 (H_{826}/H_{1813}) 与单体浓度关系曲线

在 10ml 容量瓶中 (20°C 时)，配成已知单体浓度的标准溶液，测溶液的吸光度光谱

图。以 826cm^{-1} 峰高对单体浓度作图，得到通过原点的直线 A，如图 2 所示，证明在这浓度范围内符合比尔定律。又以 826cm^{-1} 和 1813cm^{-1} 的峰高比对单体浓度作图，得工作曲线 B。实际测定时，以工作曲线 B 来计算聚合反应的起始单体浓度和反应过程中单体浓度的变化，其聚合反应单体转化率

$$C, \% = \frac{[\text{TBTM}]_0 - [\text{TBTM}]_t}{[\text{TBTM}]_0} \times 100$$

聚合反应初始速度为

$$R_p = [\text{TBTM}]_0 \frac{dc}{dt}$$

$[\text{TBTM}]_0$ 为单体的起始浓度， $[\text{TBTM}]_t$ 为反应 t 时刻时测的红外光谱中 $826/1813$ 所对应的反应混合物中的单体浓度。

2.3 单体浓度对聚合反应速度的影响

在 $60.0 \pm 0.2^\circ\text{C}$ 的恒温浴中，固定引发剂浓度为 $5.03 \times 10^{-2} \text{mol/l}$ ，改变单体在苯溶液中的浓度，进行聚合反应动力学测定。图 3 表示了不同单体浓度的反应混合物，随聚合时间，其单体转化率的变化。每隔一定的聚合时间取样，装入液体吸收池测红外吸收度光谱，由于被测峰 826cm^{-1} 和内标峰 1813cm^{-1} 都是孤立尖锐的峰，用峰高来表示峰强就能得到较满意的定量测定结果，所以工作曲线 B (图 2) 和动力学测定反应混合物的峰强比都是由测定 826cm^{-1} 和 1813cm^{-1} 两峰的峰高比来计算的。图 3 所示的实验结果表明该测定方法是可行

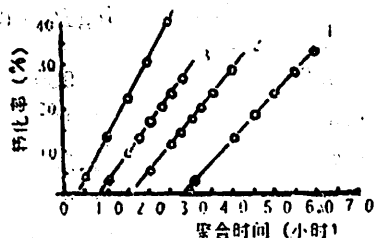


图 3 单体浓度对聚合反应转化率的影响
 $[\text{TBTM}] = (1)0.40; (2)0.50;$
 $(3)0.60; (4)0.70(\text{mol/l})$

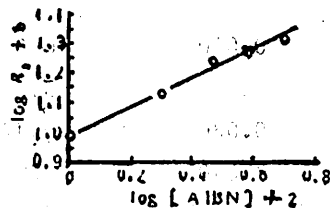


图 4 $\log R_p$ 和 $\log [\text{TBTM}]$ 的关系

表 1 单体浓度对聚合反应速度的影响*

No.	$[\text{TBTM}] (\text{mol/l})$	$\log [\text{TBTM}] + 1$	$R_p \times 10^5 (\text{mol/l} \cdot \text{s})$	$\log R_p + 6$
1	0.400	0.602	1.21	1.08
2	0.500	0.699	1.80	1.25
3	0.601	0.778	2.07	1.32
4	0.699	0.845	3.22	1.51

* $[\text{AIBN}] = 5.03 \times 10^{-2} \text{mol/l}$, $T = 60.0 \pm 0.2^\circ\text{C}$, 苯为溶剂。

的，低转化率时线性关系较好，并近似为直线；转化率超过 40% 以上时，出现正常的弯曲。聚合起始速度 R_p 就是按公式由起始单体浓度乘以直线斜率而得。其测定结果列在表 1 中。再以 $\log R_p$ 对 $\log [\text{TBTM}]$ 作图，得到如图 4 所示的斜率为 1.5 的直线。通常的自由基聚合对单体来说是 1.0 级反应，也就是说链增长是与单体浓度的一次方成正比，而链引发与单体浓度无关。这在单体浓度较高，单体活性较高时常是如此。链引发反应取决于较慢的初级自由基产生的引发剂热分解反应速度，而初级自由基活性极高，与浓度和活性都高的单体反应极快，不成为链引发反应的速度控制过程，此时链引发反应就和单体浓度无关。在我们研究的体系中，单体浓度较低，单体的体积较大，三正丁基锡酯基有较大的空间位阻，都会减慢初级自由基与单体的反应速度，以致造成引发反应不仅与引发剂浓度有关，也受单体浓度的控制，使总的聚合反应的单体级数为 1.5。

2.4 引发剂浓度对聚合反应的影响

在 60℃ 时，固定单体浓度为 0.601 mol/l，改变引发剂浓度（如表 2 所示），进行聚合转化率测定，得到与图 3 类似的一组转化率曲线。计算起始聚合速度 R_p 值，其结果如图 5 所示，得到一条斜率为 0.5 的拟合直线，这符合一般引发剂热分解的引发聚合机理。由图 4 和图 5 所得结果可导出该体系聚合速度方程式： $R_p = K_p [\text{AIBN}]^{0.5} [\text{TBTM}]^{1.5}$

其中 K_p 为综合速度常数， K_p 可表示为 $k_p (fk_d)^{\frac{1}{2}} (k_t)^{-\frac{1}{2}}$ 。式中， k_p 为聚合链增长反应速度常数， k_d 为引发剂热分解速度常数， f 为引发效率，即热

表 2 聚合反应速率与引发剂浓度关系的实验*

No.	[AIBN] (mol/l)	$\log [\text{AIBN}] + 2$	$R_p \times 10^5$ (mol/l·s)	$\log R_p + 6$
1	0.010	0.000	0.956	0.980
2	0.020	0.301	1.34	1.13
3	0.030	0.477	1.74	1.24
4	0.040	0.699	2.07	1.31

* $T = 60.0 \pm 0.2^\circ\text{C}$, $[\text{TBTM}] = 0.601 \text{ mol/l}$, 溶剂为苯

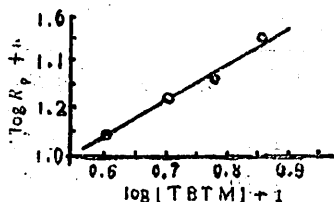


图 5 $\log R_p$ 和 $\log [\text{AIBN}]$ 的关系

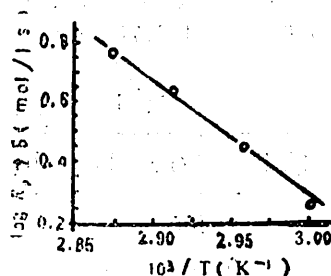


图 6 聚合温度对聚合速度的影响

分解产生的初级自由基与单体反应生成链自由基的百分数， k_t 为链终止反应速度常数。甲基丙烯酸三正丁基锡酯单体聚合机理符合一般的有机烯类单体的规律。其反应历程可表示如下：

$$2fk_d[AIBN][TBTM] = 2k_p[TBTM\cdot]^2$$

$$[TBTM\cdot]^2 = \frac{fk_d}{k_p}[AIBN][TBTM]$$

聚合反应速度就是单体消耗速度，也就是链增长的速度，因此聚合反应速度

$$R_p = k_p[TBTM\cdot][TBTM] = k_p\left(\frac{fk_d}{k_p}\right)^{\frac{1}{2}}[AIBN]^{\frac{1}{2}}[TBTM]^{\frac{3}{2}}$$

动力学测定的反应级数符合上述反应机理。这里强调一点是在本体系中，由于单体浓度低，体积大；尤其是三丁基锡酯基的空间位阻大，使引发反应(2)在动力学分析时不能忽略，仍是速度控制过程。

2.5 温度对聚合反应速度的影响

固定单体浓度为 0.50mol/l，引发剂浓度为 5.03×10^{-2} mol/l，分别在 60°C、65°C、70°C 和 75°C 的温度下进行聚合反应，其结果如表 3 和图 6 所示。从图 6 直线斜率可计算出

表 3 聚合反应速率与反应温度的关系实验数据*

No.	T(°C)	1/T × 10 ³ (K ⁻¹)	R _p × 10 ⁵ (mol/l·s)	log R _p + 5	K _p = k _p $\left(\frac{fk_d}{k_p}\right)^{\frac{1}{2}} \times 10^4$
1	60.0	3.003	1.80	0.255	2.27
2	65.0	2.959	2.82	0.450	3.56
3	70.0	2.915	4.28	0.631	5.40
4	75.0	2.874	5.81	0.763	7.33

* [TBTM] = 0.50mol/l; [AIBN] = 5.03×10^{-2} mol/l, 溶剂为苯

该体系聚合反应表现活化能 $E_s = E_p - \frac{1}{2}E_i + \frac{1}{2}E_d = 18.1\text{kcal/mol}$ ，类似于甲基丙烯酸甲酯在同样条件下的聚合，其表现活化能近似为 20kcal/mol。

2.6 温度对聚合度的影响

固定单体浓度为 0.50mol/l，引发剂浓度为 0.05mol/l，在苯溶液中于不同的温度下进

表 4 聚甲基丙烯酸三丁基锡酯的数均分子量测定*

No.	T(°C)	1/T × 10 ⁻³	(ΔV/C)C→0	$\bar{M}_n \times 10^{-4}$	\bar{X}_n	ln \bar{X}_n
1	75.0	2.87	5.03	0.72	19.1	2.95
2	70.0	2.92	3.21	1.12	30.0	3.40
3	65.0	2.96	2.63	1.37	36.6	3.60
4	60.0	3.00	2.15	1.67	44.7	3.80
5	55.0	3.05	1.43	2.52	67.4	4.21

溶剂苯；温度 $40.0 \pm 0.1^\circ\text{C}$ ；仪器常数 $K = 36039.4$ 。

行聚合反应, 分别制得 55°C、60°C、65°C、70°C 和 75°C 时所得的聚合物样品, 用 CORONA-117 型分子量测定仪测得各种样品的数均聚合度, 其结果如表 4 所示。以 $\ln \bar{X}_n$ 对 $1/T$ 作图, 得到一条直线 (图 7), 由直线斜率可算出影

响聚合度的综合活化能 $E_{\bar{X}_n} = E_p - \frac{1}{2}E_t - \frac{1}{2}E_s$

$= -12.3\text{kcal/mol}$ 。活化能为负, 说明随聚合温度升高, 聚合产物的分子量要降低。由文献数据可计算出甲基丙烯酸甲酯的 $E_{\bar{X}_n}$ 为 -10.6kcal/mol , 由此可见, 温度升高使聚合度降低的程度比甲基丙烯酸甲酯

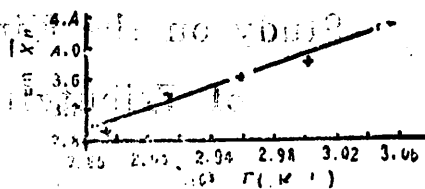


图 7 聚合温度对聚合物数均分子量的影响

的要高, 也就是说 TBTM 的 $E_p - \frac{1}{2}E_t$ 要比甲基丙烯酸甲酯 MMA 要小。从反应历程的

方程式可看出, TBTM 双基终止是两个庞大的三丁基锡酯活性端相反应, 这使得 TBTM 链终止反应活化能升高的较多, 而链增长是一个庞大的三丁基锡酯端自由基与亚甲基端反应, 其链增长 E_p 活化能增加的较少。所以与 MMA 单体相比, 温度升高时 TBTM 单体聚合速度的增加不如 MMA 大, 而对 TBTM 虽合物分子量降低的影响要超过 MMA。

综上所述, 我们利用红外光谱的定量分析方法很方便地进行了甲基丙烯酸三丁基锡酯的聚合反应动力学测定。TBTM 虽属含金属原子的有机锡单体, 其聚合行为非常类似于一般有机烯类单体, 可以和甲基丙烯酸酯类单体相比较。只是单体的体积大, 克分子浓度低时, 在我们研究的浓度范围内, 其聚合速度方程式 $R_p = K_p [AIBN]^{0.5} [TBTM]^{1.5}$, 表观聚合活化能为 18.1kcal/mol , 聚合度综合活化能为 -12.3kcal/mol 。

参 考 文 献

- [1] Deb, P. C., Samui, A. B., *Angew. Makromol. Chem.*, 80 (1979), 137.
- [2] Deb, P. C., Samui, A. B., *Angew. Makromol. Chem.*, 103 (1982), 77.
- [3] Garg, B. K., Corredor, J., Subramanian, R. V., *J. Macromol. Sci: Chem.*, A 11 (1977), No. 9, 1567.

Study on the Kinetics of Radical Polymerization of Tributyltin Methacrylate in Solution

Han Zhewen Zhang Qijin Chen Kunsong Shen Hongjiao

(Department of Applied Chemistry)

Abstract

The kinetics of polymerization of tributyltin methacrylate (TBTM) has been studied in benzene solution at temperature range 50°C—75°C in the presence of azobisisobutyronitrile (AIBN). We have obtained the rate equation as following: $R_p = K_p [\text{TBTM}]^{1.5} \cdot [\text{AIBN}]^{0.5}$. The activation energy of polymerization has been determined to be 18.1kcal/mol. The activation energy for degree of polymerization is approximately -12.3kcal/mol.

Key Words: radical polymerization, reaction kinetics, tributyltin methacrylate, organotin polymer.

新稀土显色剂 DBC 偶氮氯 膦导数分光光度法测定矿石中稀土总量

尹香莲 赵贵文 张平辉

(应用化学系)

摘 要

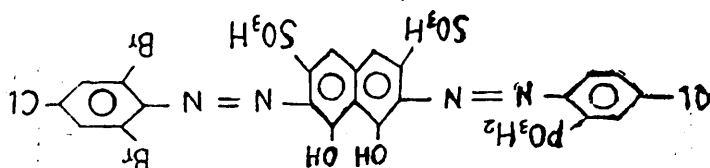
本文研究了新稀土显色剂二溴一氯-偶氮氯膦 (DBC-CPA) 与稀土元素的显色反应。该试剂在 HCl-NaAc 介质中能与稀土形成稳定的兰紫色 6:1 络合物, 平均摩尔吸光系数 ϵ 为 $1.04 \times 10^5 \text{ l} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$, 并采用 EDTA 掩蔽大量铁, 导数光谱法消除 Ca 的干扰, 测定了矿石中的稀土总量。

关键词: 导数光谱, 稀土, 二溴一氯-偶氮氯膦

引言

导数分光光度法虽然发展较晚, 国内有关这方面的工作报道较少, 但由于在确定的显色体系中可提高测定灵敏度和消除干扰, 近年来已被人们广泛应用^[1,2]。而直接用于测定矿石中稀土总量的方法尚未见报道。

武汉大学最近合成了新稀土显色剂二溴一氯-偶氮氯膦, 简称为 DBC-CPA, 其结构为



化学名称是3-[4-氯-2-膦酸基苯]偶氮]-6-[2,6-二溴-4-氯苯]偶氮]-4,5-二羟基-2,7-萘二磺酸。

本文研究了 DBC-CPA 与稀土的显色反应。该试剂在 HCl-NaAc 介质中能与稀土形成稳定的兰紫色 6:1 络合物, 平均摩尔吸光系数 ϵ 为 $1.04 \times 10^5 \text{ l} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$ 。经实验, 以

1985年10月14日收到,

EDTA 掩蔽大量铁，采用导数光谱法消除钙的干扰，提高了方法的选择性。本方法可直接测定矿石中稀土元素的含量，并实际测量了 GSD—6、GSD—8 矿样中的稀土总量。该法准确度高，回收率为 98%~105%。

1 主要仪器及试剂

- 1.1 SHIMADZU UV-240 自动记录分光光度计；
 SPECORD UV VIS 双光束自动记录分光光度计 (Zeiss)；
 SHIMADZU UV-365 导数分光光度计；
 雷磁 25 型酸度计。

1.2 稀土标准溶液

单一稀土标液：准确称取光谱纯稀土氧化物 0.1000 克，用 1:1 HCl (或补加 H_2O_2) 加热溶解，配成 1 毫克/毫升 0.1N HCl 的贮备液，用时稀释成 10 微克/毫升；

混合稀土标液：准确称取包头混合稀土氧化物 0.1000 克，用 1:1 HCl 加热溶解，配成 1 毫克/毫升 0.1NHCl 贮备液，用时稀释成 10 微克/毫升。

1.3 DBC-偶氮氯膦溶液 0.05%。

2 结果与讨论

2.1 显色条件试验

2.1.1 吸收光谱 在若干个 25 毫升比色管中，分别加入 pH = 1 的 HCl-NaAc 溶液 2 毫升，10 微克稀土溶液，0.05% DBC-CPA 溶液 0.5 毫升，用水稀释至刻度。在 Shimadzu UV-240 分光光度计上绘制吸收曲线，如图 1.1 所示。由图 1.1 可知，络合物对试剂最大吸收峰为 640nm，试剂最大吸收为 540nm。各单一稀土元素与 DBC-CPA 形成的络合物，其摩尔吸光系数 ϵ ，桑法尔灵敏度 S 分别列入表 1.1 中。

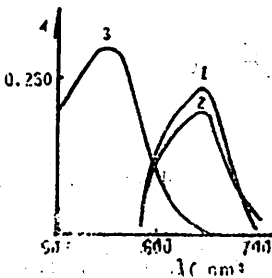


图 1.1 吸收光谱
 1. Ce 对 R; 2. Y 对 R;
 3. R 对 H_2O

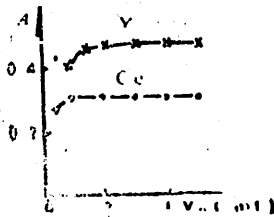


图 1.2 显色剂用量的影响

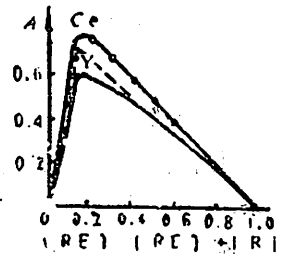


图 1.3 连续变化法
 $[RE] + [R] = 1,6 \times 10^{-3} M$

表 1.1 单一稀土络合物的光吸收性质

RE	La	Ce	Pr	Nd	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu	Y
$\epsilon_{640} \times 10^{-5}$	1.15	1.08	1.07	1.12	1.09	1.08	1.12	1.07	1.02	1.07	1.02	0.97	0.86	0.79	1.02
$S \times 10^3$	1.21	1.30	1.32	1.29	1.38	1.41	1.40	1.48	1.59	1.54	1.64	1.74	2.01	2.21	0.87

2.1.2 显色酸度的影响 实验条件同上, 改变酸度测其对络合物吸光度的影响。实验表明, pH 为 0.5~2.5 时, Ce, Y 吸光度不变, 本实验选 PH=1 的 HCl-NaAc 溶液。

2.1.3 HCl-NaAc 用量的影响 参照上面条件, 改变 pH=1 的 HCl-NaAc 溶液的用量, 结果表明, pH=1 的 HCl-NaAc 溶液用量在 0.5~5ml 范围内吸光度恒定。以下实验选用 2ml, 其实际酸度为 pH=1.7。

2.1.4 显色剂用量的影响 其它条件同前, 显色剂用量改变对络合物吸光度的影响 示于图 1.2, 可见取 0.05% 的 DBC-CPA 溶液 1.5ml 时吸光度开始恒定。以下实验中选用 2ml。

2.1.5 温度的影响 温度在 1—40°C 范围内络合物的吸光度不变。

2.1.6 络合物的稳定性 实验结果表明, 络合物一经显色吸光度即达最大值, 至少保持 24 小时不变。

2.1.7 络合物的组成比 用连续变化法测其络合物的组成比, 结果如图 1.3 所示, 说明络合物中

$$RE:R = 1:6$$

2.1.8 比耳定律范围 由图 1.4 可看出, 包头混合稀土标准在 0—16 μg 范围内服从比耳定律。

2.1.9 共存离子的影响 分别对 10 μg 的 Ce, Y 进行了离子干扰试验, 结果见表 1.2。由表 1.2 看出 Ca^{2+} 及 Fe^{3+} 干扰严重, 试样经过分解、浸取、共沉淀分离等步骤, 可除去大量干扰离子, 其中有些干扰离子在矿石中含量很少, 但对于 Ca^{2+} 及 Fe^{3+} 的干扰不宜忽略。

表 1.2 共存离子允许量

共存离子	Al^{3+}	Ba^{2+}	Bi^{3+}	Ca^{2+}	Fe^{3+}	Fe^{2+}	Nb^{5+}	pb^{2+}
允许量 mg	0.02*	0.003	0.005*	0.09*	0.03*	0.4*	0.2*	0.5*
共存离子	Mg^{2+}	Mn^{2+}	Mo^{6+}	Na^+	NH_4^+	Ni^{2+}	Si^{4+}	U^{6+}
允许量 mg	2	0.2	0.9	20	20	2	1	0.025
共存离子	Sn^{4+}	Sr^{2+}	Cd^{2+}	Co^{2+}	Cr^{6+}	Cr^{3+}	Cu^{2+}	K^+
允许量 mg	0.008*	0.0015*	0.2	0.5	0.02	0.02	0.2	20
共存离子	Zn^{2+}	Cl^-	F^-	NO_3^-	PO_4^{3-}	SO_4^{2-}	EDTA	
允许量 mg	0.5	30	0.5*	30	10	10	10*	

* 为最大允许量

2.2 导数光谱测稀土总量

2.2.1 吸收光谱 在 Shimadzu UV-240 分光光度计上绘制 Ce, Y, Fe³⁺, Ca²⁺ 的吸收光谱。如图 2.1 所示, Ca²⁺ 在 620nm 附近出现平台, 与其它曲线的斜率不同, 从而提供了利用导数光谱消除 Ca²⁺ 干扰的可能性。

2.2.2 EDTA 掩蔽作用 对于 Fe³⁺ 的干扰, 导数光谱无法消除, 故采用加入 10mg EDTA 掩蔽, 结果见图 2.2。

2.2.3 $\Delta\lambda$ 的影响 实验条件同 1, 改变 Shimadzu UV-365 导数分光光度计的 $\Delta\lambda$, 测其对络合物吸收的影响, 结果如图 2.3 所示。 $\Delta\lambda$ 越大, 灵敏度越高, 本实验选 $\Delta\lambda = 4.0\text{nm}$ 。

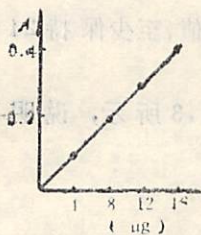


图 1.4 工作曲线

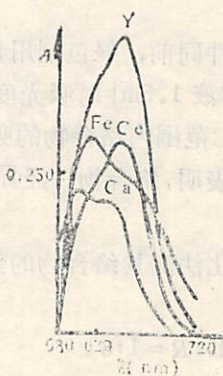


图 2.1 吸收光谱
Ce, Y: 10 μg ; Fe³⁺, Ca²⁺: 1mg

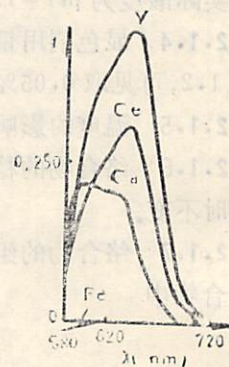


图 2.2 EDTA 的影响

2.2.4 阶数的影响 采用上述条件, 改变阶数, 发现该导数光度计的阶数越高, 灵敏度越

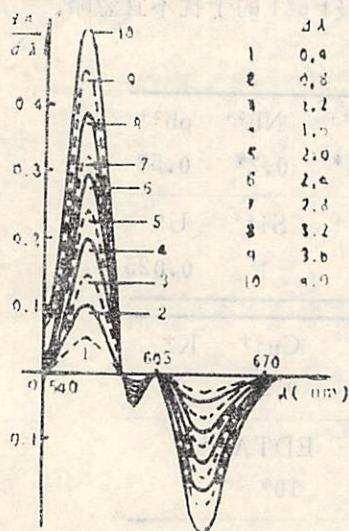


图 2.3 $\Delta\lambda$ 的影响

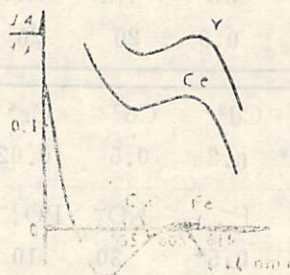


图 2.4 一阶导数光谱

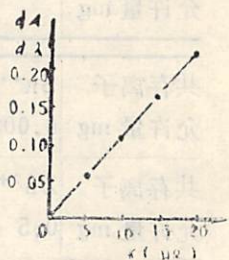


图 2.5 工作曲线

低,故选用一阶导数光谱,示于图2.4。由图2.4可看出,实验选用 $\lambda=605\text{nm}$ 测定时, Fe^{3+} 、 Ca^{2+} 的干扰均可消除。

2.2.5 工作曲线 采用包头混合稀土标准时,在0—20 μg 范围内遵守比耳定律,见图2.5。

2.3 方法应用

2.3.1 试样的分解 称取0.5克矿样,经碱溶、浸取、共沉淀分离、过滤、沉淀的溶解,制成100ml试液。

2.3.2 矿样的测定 取5ml上述矿样试液,置于25ml比色管中,加入1M NaAc溶液5ml,50mg/ml的EDTA溶液0.2ml,0.05%DBC-CPA溶液2ml,水稀释至刻度。于Shimadzu UV-365导数分光光度计上绘制一阶导数,在 $\lambda 605\text{nm}$ 处测吸光度,并在包头混合稀土标准工作曲线上查得结果。

2.3.3 矿样的分析结果及回收率 采用上述方法对GSD-6、GSD-8矿样进行稀土总量的测定,结果列于表2。由表2看出,测定值与标准值仅差1—2PPm。准确度较高。

采用标准加入法测其吸光度,结果见图3。图3表明,实验结果均落在与工作曲线平行的直线上,经计算,回收率在98%~105%之间。

实验证明,本方法操作简便,易于掌握,消除干扰效果显著。由于该导数光度计性能有限,仅用于一阶导数,因此灵敏度受到一定限制,但对于用来测定矿石中稀土总量完全能满足要求。

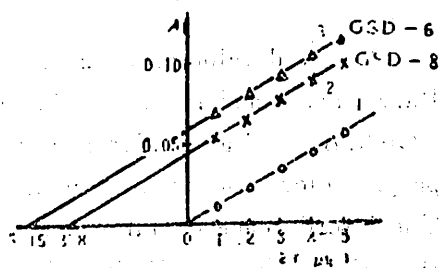


图3 标准加入法
1. 工作曲线; 2,3. 回收曲线

表2 矿样分析结果

试样号	ΣRE 测定值 ppm	ΣRE 标准值 ppm
GSD-6	206	207
GSD-8	148	150

参 考 文 献

- [1] 倪其道、吴家齐、张懋森等,地质实验,安徽省地质局实验室,1984年专刊,27—30。
- [2] Shibata, S., Furukawa, M., Goto, K., *Anal. Chim. Acta*, 65 (1973), 49—58。

A New Developer DBC-chlorophosphinazo for the Derivative Spectrophotometric Determination of the Total Amount of Rare Earths in Mineral

Yin Xianlian Zhao-Guiwen Zhang Pinghui

(Department of Applied Chemistry)

Abstract

A new developing agent dibromochloro-chlorophosphinazo (DBC-CPA) for Rare Earths and its developing reactions with the RE have been studied. In HCl-NaAc medium it forms a stable complex (6:1) with RE and gives a bluish purple color. The average molar absorptivity ϵ is $1.04 \times 10^5 \text{ l} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$. The interference of large amounts of Fe has been masked by EDTA, and that of Ca can be eliminated with the help of derivative spectrum.

Key words: derivative spectrum, Rare Earth, dibromochloro-chlorophosphinazo.

关于色谱柱效能评价的讨论

吴宁生 邱爱民

(应用化学系)

摘 要

本文对用以评价色谱柱效能的三种指标进行了分析讨论,指出不宜使用“容量比为无穷大时的理论塔板数”这个术语,并提出了一个较适用的真实塔板数表示式。

关键词: 柱效能, 理论塔板数, 真实塔板数, 半峰宽, 保留时间。

对色谱柱效能的评价是人们关心的问题之一。由于理论塔板数的数值随组分不同(即容量比 k 值不同)而不同,不适于作为评价色谱柱效能的指标。为克服这个缺点,已提出三种评价柱效能的指标,其数值均不因 k 值不同而不同。本文将对这三种指标进行讨论,提出一些看法,并对与此有关的问题进行实验验证。

1 关于色谱柱效能的评价

1965年,卢佩章等人^[1]根据同系物色谱峰半峰宽 $W_{1/2}$ 与保留时间 t 之间存在线性关系

$$W_{1/2} = a + bt, \quad (1)$$

式中, $W_{1/2}$ 和 t 的单位为秒, a 和 b 为常数。(为使文中符号统一和区别,对原文献一些符号作了改变。)提出用 $k \rightarrow \infty$ 时的理论塔板数 n^∞ , 评价柱效。

$$n^\infty = 5.54 \frac{1}{b^2} \quad (2)$$

1977年, Kaiser^[2]根据同系物的半峰宽 $W_{1/2}$ 和容量比 k 之间存在线性关系

$$W_{1/2} = b_0 + a_0 k \quad (3)$$

提出用真实塔板数 $n_{r...}$ 评价柱效。

$$n_{r...} = 5.54 \left(\frac{t_r - t_m}{W_{1/2} - b_0} \right)^2 \quad (4)$$

式中, t_m 为死时间, b_0 和 a_0 均为常数。

1985年10月26日收到。

最近, Ceulemans^[3]根据色谱峰峰宽 W 与保留时间 t_r 之间存在线性关系

$$W = a_1 + b_1 t_r \quad (5)$$

提出用 k 为无穷大时的理论塔板数 $N_{i,\infty}$ 评价柱效,

$$N_{i,\infty} = 16 \left(\frac{t_r^*}{W} \right)^2 \quad (6)$$

式中, a_1 和 b_1 为常数, $t_r^* = t_r - t_c$, t_c 为 $W-t_r$ 曲线在 t_r 轴上的截距, $t_c = -a_1/b_1$, t_r^* 称为截距调整保留时间。很明显,

$$n^\infty = n_{r,\infty} = N_{i,\infty} \quad (7)$$

这可用图 1 说明如下: 若 AB 为 $W_{1/2} \sim t_r$ 的关系曲线, 即以 O 点为原点, 以 $W_{1/2}$ 为纵坐标, t_r 为横坐标。 n^∞ 、 $n_{r,\infty}$ 和 $N_{i,\infty}$ 都是以 AB 斜率倒数的平方表示, 不同点在于: $n_{r,\infty}$ 是以 O' 点为原点, $W_{1/2}$ 为纵坐标, t_r' 为横坐标; $N_{i,\infty}$ 是以 O 点为原点, W 为纵坐标, t_r 为横坐标; n^∞ 是以 O 点为原点, $W_{1/2}$ 为纵坐标, t_r 为横坐标。根据图 1, 对于曲线 AB 的斜率还可以提出其他表示式, 但我们认为这没有必要。

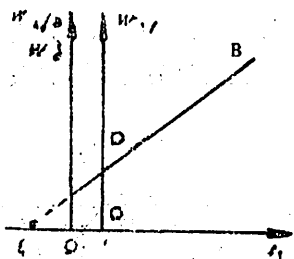


图 1 n^∞ 、 $n_{r,\infty}$ 和 $N_{i,\infty}$ 三者相互关系

示意图 $OA = a$ 或 a_1 , $OC = t_c$, $O'D = b_1$ 。

在这三个指标中, 我们认为应使用真实塔板数这个术语, 不宜使用“容量比为无穷大时的理论塔板数”这样的术语。因为

外, 色谱峰将扁平而无法确认和测量, 这在色谱分析中失去意义; (2) 根据 n^∞ 的定义和范底姆特公式, 可引伸出 H^∞ 表示式^[4]

$$H^\infty = 2\lambda d_p + \frac{2rD_s^\infty}{u} + \frac{0.01d_p^2}{D_s^\infty} u \quad (8)$$

式中各符号的意义见文献[4]。上式意含 H^∞ 仅与载体(种类、颗粒度和填充情况)、载气(种类和线速度)、组分性质以及柱温有关, 而与固定液的种类和含量无关。大家知道, 色谱分离机理, 是根据各组分在流动相和固定相两相之间的分配或吸附性质不同而使各组分得到分离。若式(8)成立, 即表示色谱柱效与固定相无关, 这是不合理的。我们使用同一色谱柱, 仅仅改变载气流速, 将实验有关数据代入式(8)求 D_s^∞ 值, 所得的数值有几个数量级的差异, 有时有虚数值, 这也说明式(8)是不合理的。

根据以上分析, 我们认为应使用真实塔板数这个术语。根据式(4)测求 $n_{r,\infty}$, 需要测求死时间 t_c 值, 而在通常情况下, 色谱峰半峰宽和保留时间之间存在着线性关系, 我们认为

$$n_{r,\infty} = 5.54 \left(\frac{t_r(i) - t_r(j)}{W_{1/2}(i) - W_{1/2}(j)} \right)^2 \quad (9)$$

表示式较好。

2 关于色谱峰峰宽与保留时间之间的线性关系

以上三种评价柱效能指标的基础是同系物色谱峰峰宽与保留时间之间存在着线性关系, 对此已有许多报道。孙传经^[5]最近在毛细管柱上作了较详尽的工作, 并得出新的结论: 若组分的极性与固定液的极性相似, 非同系物之间线性关系也是成立的。但 Ceulemans^[6]最近提出, 对于高含量固定液的填充柱, 在通常的色谱条件下, W 与 t 之间一般为非线性关系, 当纵向扩散项对 H 的贡献较大时为准线性关系, 当传质项对 H 的贡献为中等或较大时, 仅在 $k > 2$ 时为准线性关系。我们认为弄清这个问题在理论上是具有意义的, 为此进行了以下的实验验证。

实验在 102G 型气相色谱仪 (上海分析仪器厂) 上进行。载气用氮气, 流速用皂膜流量计测量, 流速波动 $< \pm 2\%$ 。柱管为内径 3 毫米盘形不锈钢柱。色谱柱长 1 米, 填以 44% SE-30/60-80 目 Chromosorb W AW-DMCS。柱温用水银温度计测量, 温度波动 $< \pm 0.3^\circ\text{C}$, 使用热导检测器, 桥流为 220mA。保留时间用岛津 C-R1B 色谱数据处理机记录, 死时间以空气峰的保留时间表示。色谱图用 XWC 记录器记录, 半峰宽用 20 倍读数显微镜测量 (精度 0.01 毫米)。试验物用苯和烷基苯系列 (苯、甲苯、乙苯、正/异丙苯、叔/仲丁苯)。测得的保留时间和半峰宽数值经 Dixon 法检验后, 取四次测定的平均值, 这样所得数值的有效数字可以增加一位。用 TI-55 型计算器拟合 $W_{1/2} \sim t$ 曲线, 求出截距 a 值、斜率 b 值和相关系数 r 值, 结果列于表 1。同时绘制曲线, 各点都落在一根直线上。另求出各条件下各组分 k 值, 和绘制各组分的 $H-u$ 曲线, 以判断传质项对板高 H 贡献的大小。在所试验的各种条件下, 其中包括传质项对板高的贡献为中等或较大, 且 $k < 2$, 线性关系都是成立的。我们也在 29% SE-30 柱上进行类似的实验, 得到同样的结果。这些都说明文献 [3] 的看法是不成立的。由于线性关系的存在, 式 (9) 是成立的。

表 1 实验条件和回归数值

柱温 ℃	流速 (毫升/分)	a	b	r	备 注
220	15.0	1.81	0.0758	0.9998	
	30.0	0.146	0.0938	0.9999	
	45.0	-0.110	0.107	0.9998	传质项对板高的贡献为中等, 苯和甲苯 $k < 2$ 。
	60.0	0.0636	0.109	0.9999	同上
	90.0	-0.126	0.132	0.9997	传质项对板高的贡献较大, 苯和甲苯 $k < 2$ 。
	100.0	-0.230	0.141	0.9999	同上

参 考 文 献

- [1] 卢佩章等, 中国科学, 14 (1965), 705.
- [2] Kaiser, R.E., Rieder, R., *Chromatographia*, 10(1977), 455.
- [3] Ceulemans, J., *J. Chromatogr. Sci.*, 22 (1984), 296.
- [4] 孙传经编著, 气相色谱分析原理与技术, 化学工业出版社, 1979, P73.
- [5] 孙传经, Proceedings of Sino-West German Symposium on Chromatography, Science Press, Beijing, 1983, P.328.

A Discussion on the Evaluation of Chromatographic Column Efficiency

Wu Ningsheng Qiu Aimin

(Department of Applied Chemistry)

Abstracts

A discussion on the real plate number and the theoretical plate number at infinite capacity is described and the shortcomings of the term of the later are pointed out. A better expression of real plate number is suggested.

Key Words: column efficiency, number of theoretical plate, number of real plate, half peak width, retention time.

通过“单体检验”的中厚板—薄板单元 体及其在动力特征值问题中的应用*

王秀喜

兰冬

(近代力学系)

摘 要

本文给出了一种考虑剪切变形的任意四边形板弯曲单元体,它以“自由公式”的形式通过“单体检验”。因此,收敛于精确解,所有关于变形的量都可用横向挠度 W 表示出来。剪切变形与板厚平方成正比,随着板厚的减小,能自动趋于薄板理论的结果。这种单元体应用于中厚板、薄板分析不会出现“闭锁”等困难。用于规则、不规则形状的中厚板和薄板动力特征值问题,都可以得到很好的数值结果。

关键词: 中厚板—薄板, 非协调单元体, 动力特征值。

引言

板壳问题一直是有限元法的一个重要研究课题。为了避免 C^1 阶连续性要求的困难和分析中厚板壳问题的需要,人们以Reissner—Mindlin^[1,2]理论为基础提出了一些包括剪切变形的板单元体模型,例如: Hughes^[3,4]等人的位移元, Spilker^[5,6]等人的应力杂交元,等等。这些单元体采用简化数值积分,适当选取应力参数等特殊技巧克服“闭锁”问题,对可能出现的多余零应变模式做了讨论,但在理论上尚不完善。

Bergan^[8,9]等人建议的“自由公式”满足与“分片检验”^[10]等价的“单体检验”^[11]。本文以“自由公式”为基础,推导出一种包括剪切变形的任意四边形板弯曲单元体。这种单元体只有横向挠度 W 是未知量,剪切变形与板厚的平方成正比,随着板厚的减小,剪切应变自动趋于零,不会出现“闭锁”现象;不存在多余零应变模式,且公式简单。用于中厚板—薄板动力特征值分析,得到很好的数值结果。文中还给出若干算例。

1986年5月30日收到。

* 中国科学院科学基金资助课题。

1 “自由公式”

Bergan 等人提出的“单体检验”把“分片检验”化为对单元体刚度矩阵施加的一组线性约束条件，可有不同的方式满足“单体检验”，其中“自由公式”特别简单易行。关于“自由公式”的讨论详见 [9]。

在一个单元体内，位移向量可表示成

$$\{u\} = [N_{r,c}]\{q_{r,c}\} + [N_b]\{q_b\} = [N]\{q\} \quad (1)$$

其中 $[N_{r,c}]$ 、 $[N_b]$ 分别表示与刚体运动和常应变对应的位移模式及高阶位移模式； $\{q_{r,c}\}$ 和 $\{q_b\}$ 是与 $[N_{r,c}]$ 和 $[N_b]$ 对应的广义参数。 $[N_{r,c}]$ 中必须包含任意刚体运动项和常应变项；广义参数 $\{q\}$ 的数目必须等于单元体自由度。

把节点坐标值代入 $[N]$ 和它的导数（如果需要的话）得到

$$\{V\} = [G_{r,c}]\{q_{r,c}\} + [G_b]\{q_b\} = [G]\{q\} \quad (2)$$

其中 $\{V\}$ 是单元体的节点位移向量。

对上式求逆得到

$$\{q\} = [G]^{-1}\{V\} = [H]\{V\} \quad (3)$$

或写成分块矩阵形式如下：

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_{r,c} \\ q_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{r,c} \\ H_b \end{bmatrix} \{V\} \quad (3a)$$

单元体中的应变可写成

$$\{\epsilon\} = [B_{r,c}]\{q_{r,c}\} + [B_b]\{q_b\} = [B_e]\{q\} \quad (4)$$

$[B_{r,c}]$ 、 $[B_b]$ 是由应变—位移之间的关系对 $[N_{r,c}]$ 和 $[N_b]$ 微分得到的，称为几何矩阵。

应力可写成

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} = [D][B_e]\{q\} \quad (5)$$

$[D]$ 是弹性矩阵。

当单元体中的位移对应于刚体运动和常应变状态时，应力也是一组常数。单元体边界上的常应力很容易用静力等效的方法化为一组节点力，一般表达式为

$$\{T_{r,c}\} = [L]\{\sigma_{r,c}\} = [L][D][B_{r,c}]\{q_{r,c}\} = [P_{r,c}]\{q_{r,c}\} \quad (6)$$

式中矩阵 $[L]$ 由单元体的几何形状确定，其中的各系数可用单元体的节点坐标表示出来，对于具体问题不难计算^[9]。

可以证明^[11]，如果单元体的刚度矩阵 $[K]$ 满足如下关系，则一定通过“分片检验”。

$$[K][G_{r,c}] = [P_{r,c}] \quad (7)$$

这就是“单体检验”的数学表达式，它表示对单元体刚度矩阵所施加的一组约束条件。在 [9] 中已经证明，下式表示的单元体刚度矩阵满足 (7) 式，即通过“单体检验”。

$$[K] = [K_b] + [K_s] = \frac{1}{V}[L][D][L]^T + [H_b]^T[K_{r,c}][H_b] \quad (8)$$

其中 V 是单元体体积, $[K_{q,s}] = \int_V [B_s]^T [D] [B_s] dV$ 是与 $\{q_s\}$ 对应的刚度矩阵。(8) 式称为“自由公式”。

2 考虑剪切变形的四边形板单元体

在 Reissner—Mindlin 中厚板理论中有如下重要关系式。平衡方程:

$$Q_x = -M_{x,x,x} - M_{x,y,y} \quad (9a)$$

$$Q_y = -M_{y,y,y} - M_{x,y,x} \quad (9b)$$

其中 $M_{x,x}$ 、 $M_{y,y}$ 是弯矩; $M_{x,y}$ 是扭矩; Q_x 、 Q_y 是剪力。几何关系:

$$\theta_x = W_{,y} - r_y \quad (10a)$$

$$\theta_y = -W_{,x} + r_x \quad (10b)$$

其中 θ_x 、 θ_y 表示转角; r_x 、 r_y 表示剪切应变; $W_{,x}$ 、 $W_{,y}$ 表示挠度 W 对 x 、 y 的导数。广义应力—应变关系有:

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = [D_s] \{r\} = [D_s] \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \end{Bmatrix} \quad (11)$$

其中

$$[D_s] = Gk_s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

G 是剪切模量, $k_s = \frac{5}{6}$ 是有效厚度, h 是板厚。

$$\begin{aligned} \{M\} &= \begin{Bmatrix} M_{x,x} \\ M_{y,y} \\ M_{x,y} \end{Bmatrix} = [D_b] \{x\} = [D_b] \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \end{Bmatrix} \\ &= [D_b] \begin{Bmatrix} W_{,xx} - r_{x,x} \\ W_{,yy} - r_{y,y} \\ 2W_{,xy} - r_{x,y} - r_{y,x} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$[D_b] = \frac{Ek^2}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

E 是弹性模量, ν 是泊松比。

利用 (9)、(13) 和 (10) 可以把 (11) 式的第一式写成

$$\{r_x\} = k_0^2 \left(-W_{,xxx} - W_{,yyy} + r_{x,xx} + \frac{1-\nu}{2} r_{x,yy} + \frac{1+\nu}{2} r_{y,xy} \right) \quad (15)$$

$$\text{其中 } k_0^2 = \frac{h^3}{6(1-\nu)h_s} = \frac{h^2}{5(1-\nu)} \quad (16)$$

当一个单元体处于常应变（常应力）状态时，弯矩 \$\{M\}\$ 为一组常数，由（9）、（11）可得单元体的剪应力 \$\{Q\}\$ 和剪应变 \$\{r\}\$ 等于零，即在常应变状态下，单元体内不产生剪切变形。由（13）式可以看出，弯矩 \$\{M\}\$ 可用横向挠度 \$W\$ 的二次导数表示出来。如果用横向挠度 \$W\$ 表示剪切变形 \$\{r\}\$，它们应是 \$W\$ 的三次导数（由（9）、（11）式可以看出）。在本文中 \$W\$ 选为四次多项式，\$\{r\}\$ 最高可能是线性函数。所以，在（15）式中关于 \$\{r\}\$ 的二次导数一定为零，故该式可写成

$$r_x = -k_0^2 (W_{,xxx} + W_{,yyy}) \quad (17a)$$

完全类似地可以得到

$$r_y = -k_0^2 (W_{,yyy} + W_{,xxx}) \quad (17b)$$

由上述讨论可知，所有关于变形的量 \$\theta_x\$、\$\theta_y\$、\$r_x\$、\$r_y\$ 都可以用横向挠度 \$W\$ 表示出来。剪切变形 \$\{r\}\$ 与板厚平方成正比，随着板厚的减小，剪切变形会自动趋于零，不存在“闭锁”问题。

对于考虑剪切变形的板弯曲单元体（8）式可写成

$$[K] = [K_b] + [K_s] = \frac{1}{A} [L] [D_b] [L]^T + [H_s]^T [K_{qs}] [H_s] \quad (18)$$

其中 \$A\$ 是单元体的面积

$$[K_{qs}] = \int_A [B_{bs}]^T [D_b] [B_{bs}] dA + \int_A [B_{ss}]^T [D_s] [B_{ss}] dA \quad (19)$$

$$[B_{bs}] = \begin{bmatrix} N_{b,xx} + k_0^2 (N_{b,xxxx} + N_{b,yyyy}) \\ N_{b,yy} + k_0^2 (N_{b,yyyy} + N_{b,xxxx}) \\ 2N_{b,xy} + 2k_0^2 (N_{b,xyxy} + N_{b,xyxy}) \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$[B_{ss}] = k_0^2 \begin{bmatrix} N_{b,xxxx} + N_{b,yyyy} \\ N_{b,yyyy} + N_{b,xxxx} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$[L] = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$[L_i] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_i - x_k & y_k - y_i \\ y_i - y_k & 0 & x_k - x_i \end{bmatrix} \quad (23)$$

\$i\$、\$k\$ 为节点 \$j\$ 前、后相邻的两个节点。

本文用上式建立了 4 节点 12 个自由度的任意四边形单元体。单元体形状和节点自由度

如图 1 所示。选取的位移模式是

$$\begin{aligned}
 [N_{r,c}] &= [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2] \\
 [N_b] &= [x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad F_1^3F_2 \quad F_1F_2^3] \\
 F_1 &= f_{4,1} - f_{2,3} \quad F_2 = f_{1,2} - f_{3,4}
 \end{aligned}$$

$f_{1,2}$ 、 $f_{2,3}$ 、 $f_{3,4}$ 、 $f_{4,1}$ 分别是单元体四个边的直线方程，如图 2 所示。

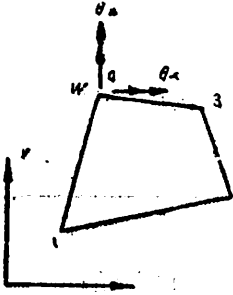


图 1 单元体形状和节点自由度

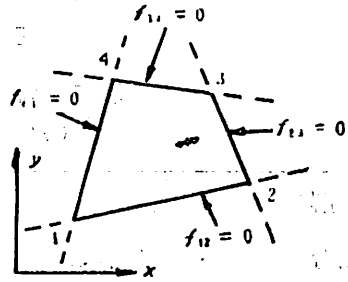


图 2 单元体各边方程

3 算例和讨论

利用本文的单元体计算了中厚板和薄板的动力特征值问题，在计算中采用集中质量矩阵，不计转动惯量，所有数值结果都很好。下面给出其中几个典型算例。

3.1 四边简支正方形薄板、中厚板基频分析

图 3、图 4 分别给出四边简支正方形薄板和中厚板基频的收敛曲线。对全板划分有限元网络， N 表示每边单元体个数，纵坐标 ϵ 表示与精确解的相对误差。薄板的精确解取自文献 [7]，中厚板的精确解为三维线弹性解，取自文献 [12]。

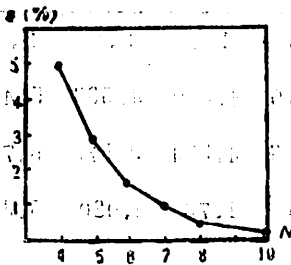


图 3 四边简支正方形薄板基频收敛曲线 ($h/a = 10^{-3}$, $\nu = 0.3$)



图 4 四边简支正方形中厚板基频收敛曲线 ($h/a = 10^{-1}$, $\nu = 0.3$)

3.2 周边固支圆形薄板基频分析

考虑问题的轴对称性，只需对四分之一板进行分析，网格划分如图 5 所示，表 1 给出基频的数值结果，其收敛趋势是很清楚的，精确解取自文献 [7]。

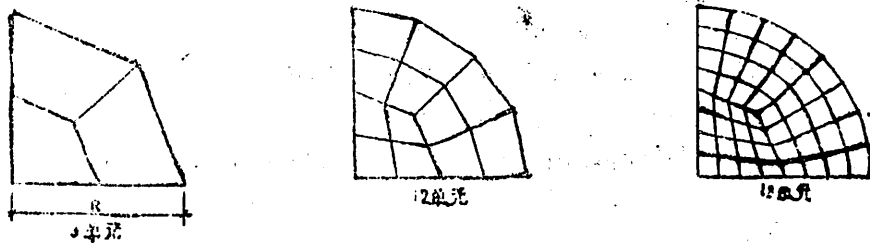


图 5 圆板的网格划分

表 1 周边固支圆形薄板的基频
($h/R = 10^{-3}$, $\nu = 0.3$)

精确解		0.4987	
网格划分	3 单元	12 单元	48 单元
计算值	0.4425	0.4649	0.4886
误差 (%)	11.27	6.78	2.03

* 表中频率值乘以因子 $10^{-2} \times \sqrt{G/\rho R^2}$ 为实际值。

3.3 四边简支矩形板各阶频率分析

表 2 给出四边简支矩形薄板各阶频率的结果，板的长宽比为 $b/a = \sqrt{2}$ 。其中 m 、 n 分别表示 x 、 y 方向上的半波个数。对四分之一板划分有限元网格（利用对称性，反对称性），表中的结果是由 5×7 网格得到的，精确解取自文献 [7]。

表 2 四边简支矩形薄板固有频率

($h/a = 10^{-3}$ $\nu = 0.3$ $b/a = \sqrt{2}$)

m, n	1,1	1,2	2,1	1,3	2,2	2,3	1,4	3,1	2,4
计算值	0.7180	1.423	2.145	2.609	2.801	3.919	4.259	4.533	5.470
精确解	0.7224	1.445	2.167	2.649	2.890	4.093	4.334	4.575	5.780
误差 (%)	0.609	1.52	1.00	1.48	3.07	4.26	1.73	0.920	5.340

* 表中频率值乘以因子 $10^{-2} \times \sqrt{G/\rho R^2}$ 为实际值。

3.4 四边简支正方形中厚板各阶频率分析

表 3 给出四边简支正方形中厚板各阶频率的结果。与上例相同， m 、 n 分别表示在 x 、 y 方向上的半波个数。表中的结果是由 6×6 网格（分析板的四分之一）下得到的，精确解取自文献 [12]。

表 3 四边简支正方形中厚板固有频率
($h/a = 10^{-1}$ $\nu = 0.3$)

m, n	1,1	2,1	2,2	3,1	3,2	3,3	4,2
计算值	0.0932	0.2225	0.3386	0.4207	0.5236	0.6893	0.7501
精确解	0.0932	0.2226	0.3421	0.4171	0.5239	0.6889	0.7511
误差(%)	0.00	0.04	1.02	-0.86	0.06	-0.06	0.13

* 表中频率值乘以因子 $\sqrt{G/\rho h^2}$ 为实际值。

数值结果表明, 这种单元体用于分析动力特征值问题收敛较快, 用较少自由度就能获得满意的结果; 通用于中厚板以及薄板, 随着板厚的减小, 剪切变形自动趋于零, 不会出现“闭锁”现象; 也能用于分析规则形状和不规则形状的板; 公式简单, 可推广用于动力响应和弹塑性等问题的分析。

参 考 文 献

- [1] Reissner, E., *J. Appl. Mech. Trans.*, **ASME** 12 (1945), A69-A77.
- [2] Mindlin, R. D., *J. Appl. Mech.*, 18 (1951), 31-38.
- [3] Hughes, T. J. R., Taylor, R. L., Kanoknulchui, W., *J. Num. Meth. Engng.*, 11 (1977), 1529-1543.
- [4] Hughes, T.J.R., Tezduyar, T. E., New concepts in finite element analysis (Edited by Hughes T. J., R., et al.), ASME, **AMD-44**(1981), 81-106.
- [5] Spilker, R. L., Munir, N. I., *J. Num. Meth. Engng.*, 15 (1980), 1239-1260.
- [6] Spilker, R. L., New concepts in finite element analysis (Edited by Hughes T. J. R., et al.), ASME, **AMD-44** (1981), 225-246.
- [7] 徐芝纶, 弹性力学 (下册), 人民教育出版社, 1980.
- [8] Bergan, P. G., Nygard, M., Wang Xiuxi. Proc. Int. Conf. on F. E. M., Shanghai, 1982, 112-117.
- [9] Bergan, P. G., Wang Xiuxi, *Computers & Structures*, 19 (1984), No. 1-2, 25-34.
- [10] Irons, B. M., Razzaque, A., Mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations (Edited by Aziz K.), Academic Press, New York, 1972, 557-587.
- [11] Bergan, P. G., Hanssen, L., The mathematics of finite element and applications (Edited by Whiteman, J. R.), Academic Press, London, 2 (1976), 483-497.
- [12] Srinivas, S., Rao, A. K., *J. Sound Vib.*, 12 (1970), No. 2 187-199.

A Thin and Moderately Thick Plate Element Satisfying the IE Test and Its Application in Dynamic Eigenvalue Problems

Wang Xiuxi Lan Dong

(Department of Modern Mechanics)

Abstract

In this paper a quadrilateral plate bending element considering shear deformations is presented, which satisfies the "individual element test" with the form of "free formulation". Shear deformations are directly proportional to the square of plate thickness; the results of thin plate theory are approached automatically as the plate thickness decreases. Dynamic eigenvalue problems of plates are analyzed with the element. Excellent numerical results are obtained.

Key words: moderately thick-thin plate, nonconforming element, dynamic eigenvalue.

镜像抑制混频器中镜像回收效应的分析

谈 江

(无线电电子学系)

摘 要

本文在 [1] 的基础上对复杂的镜像抑制混频器电路进行了定量分析, 证明了实现镜像回收的必要条件和充分条件, 计算了从镜像回收中所能得到的收益。

关键词: 混频器, 镜像抑制, 镜像回收。

引言

镜像抑制混频器 (以下简称镜抑混频器) 以其在宽频带内所具有的抗镜像干扰能力而著称, 在宽频带低噪声接收机中已被广泛应用。镜抑混频器 (见图 1) 在抑制来自外部的镜像

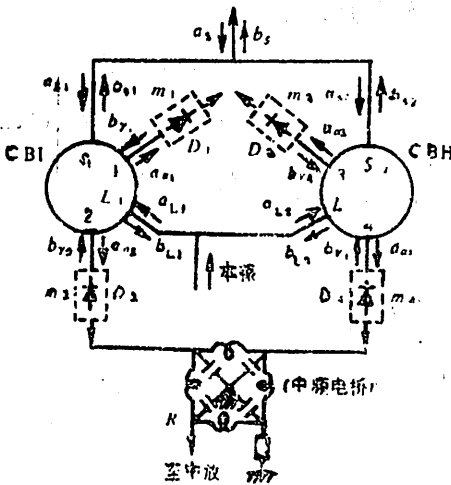


图 1 镜抑混频器的典型电路

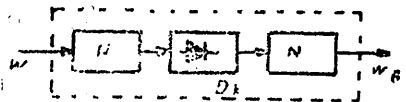


图 2 四个单管混频器 ($m_1 - m_4$) 之一

干扰的同时, 为回收利用混频过程中所产生的镜像信号能量, 以降低混频器变频损耗提供了可能。为此本文就以下两个重要问题进行了讨论—是如何合理选择镜抑混频器的电路参数以确保镜像回收的实现; 二是定量计算出镜像回收对降低混频器变频损耗所起的实际作用。

1986年5月20日收到。

由于镜抑混频器电路的复杂性，给定量分析带来很大的困难，尽管有关镜抑混频器的文章早在1961年就已见报道[2]，但对于众所关心的镜像回收问题至今仍未见用信号流图法进行较详细的定量分析。本文在[1]的基础上完成了这种定量分析，这种方法也可用来分析其它类型的复杂的混频器电路。

图1是微带型镜抑混频器的一种典型电路， CB_I 和 CB_{II} 是 $3/2\lambda_c$ 环形电桥，四个混频器($m_1 - m_4$)是具有输入匹配网络 N_1 和输出匹配网络 N_2 的单管混频器(见图2)。在实际电路中，往往把 N_1 和 N_2 简并至环形电桥和中频电桥之中，也就是使后者兼备阻抗匹配作用。

环形电桥 CB_I 和 CB_{II} 的散射矩阵分别为

$$\begin{bmatrix} b_{r,1} \\ b_{L,1} \\ a_{a,1} \\ a_{a,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -j/\sqrt{2} & j/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -j/\sqrt{2} & -j/\sqrt{2} \\ -j/\sqrt{2} & -j/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ j/\sqrt{2} & -j/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{r,1} \\ a_{L,1} \\ b_{r,1} \\ b_{r,2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_{r,2} \\ b_{L,2} \\ a_{a,3} \\ a_{a,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -j/\sqrt{2} & j/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -j/\sqrt{2} & -j/\sqrt{2} \\ -j/\sqrt{2} & -j/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ j/\sqrt{2} & -j/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{r,2} \\ a_{L,2} \\ b_{r,3} \\ b_{r,4} \end{bmatrix}$$

四个混频二极管的散射矩阵为

$$[\hat{S}] = \begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} & \hat{S}_{13} \\ \hat{S}_{21} & \hat{S}_{22} & \hat{S}_{23} \\ \hat{S}_{31} & \hat{S}_{32} & \hat{S}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12}e^{i\varphi} & S_{13}e^{i^2(\psi-\varphi)} \\ S_{21}e^{-i\varphi} & S_{22} & S_{23}e^{i(2\psi-3\varphi)} \\ S_{31}e^{-i^2(\psi-\varphi)} & S_{32}e^{-i(2\psi-3\varphi)} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

(当二极管为正极性时)

或者

$$[\hat{S}] = \begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} & \hat{S}_{13} \\ \hat{S}_{21} & \hat{S}_{22} & \hat{S}_{23} \\ \hat{S}_{31} & \hat{S}_{32} & \hat{S}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12}e^{i(\varphi\pm\pi)} & S_{13}e^{i^2(\psi-\varphi\pm\pi)} \\ S_{21}e^{-i(\varphi\pm\pi)} & S_{22} & S_{23}e^{i(2\psi-3\varphi\pm\pi)} \\ S_{31}e^{-i^2(\psi-\varphi\pm\pi)} & S_{32}e^{-i(2\psi-3\varphi\pm\pi)} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

(二极管为负极性时)

式中，

$$S_{11} = S_{33} = \frac{1}{\Delta}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - \gamma_1^2\gamma_2)$$

$$S_{12} = S_{21} = S_{23} = S_{32} = \frac{1}{\Delta}(\gamma_1\gamma_2 - 2\gamma_1)$$

$$S_{22} = \frac{1}{\Delta}(2\gamma_1^2 - \gamma_1^2\gamma_2)$$

$$S_{13} = S_{31} = \frac{1}{\Delta}(\gamma_1^2 - 2\gamma_2)$$

$$\Delta = 4 + \gamma_1^2\gamma_2 - \gamma_2^2 - 2\gamma_1^2$$

$\gamma_1 = \frac{I_1(aV_L)}{I_0(aV_L)}$; $\gamma_2 = \frac{I_2(aV_L)}{I_0(aV_L)}$ 为混频二极管在本振 V_L 激励下的调制系数； I_0 、 I_1 和 I_2 分

别为 0 阶，一阶和二阶虚宗量贝塞尔函数；

φ 为加在二极管上的本振电压的相位；

ψ 为加在二极管上的信号电压的相位。

以下用 $\omega_a, \omega_\beta, \omega_r$ 和 ω_L 分别表示信号频率、中频、镜像频率和本振频率，且 $\omega_r = 2\omega_L - \omega_a$ 。

我们把单管混频器 m_1 的二极管 D_1 作为基准，令该管上的本振电压和信号电压的相位 $\varphi_1 = 0, \psi_1 = 0$ ，并认为 D_1 的极性方向为正极性，由 (1.1) 可写出 D_1 的散射矩阵：

$$[\hat{S}]_1 = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

与 D_1 对照， D_2 为负极性， $\varphi_2 = \varphi_1 = 0, \psi_2 = \psi_1 - \pi = -\pi$ 。由 (1.2) 可写出 D_2 的散射矩阵：

$$[\hat{S}]_2 = \begin{bmatrix} S_{11} & -S_{12} & S_{13} \\ -S_{21} & S_{22} & -S_{23} \\ S_{31} & -S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

与 D_1 对照， D_3 为正极性， $\varphi_3 = \varphi_1 - \pi/2 = -\pi/2, \psi_3 = \psi_1 = 0$ 。由 (1.1) 可写出 D_3 的散射矩阵：

$$[\hat{S}]_3 = \begin{bmatrix} S_{11} & -jS_{12} & -S_{13} \\ jS_{21} & S_{22} & -jS_{23} \\ -S_{31} & jS_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

与 D_1 对照， D_4 为负极性， $\varphi_4 = \varphi_1 - \pi/2 = -\pi/2, \psi_4 = \psi_1 - \pi = -\pi$ 。由 (1.2) 可写出 D_4 的散射矩阵：

$$[\hat{S}]_4 = \begin{bmatrix} S_{11} & jS_{12} & -S_{13} \\ -jS_{21} & S_{22} & jS_{23} \\ -S_{31} & -jS_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

满足匹配条件时，四个单管混频器的简化信号流图如图 3 所示。

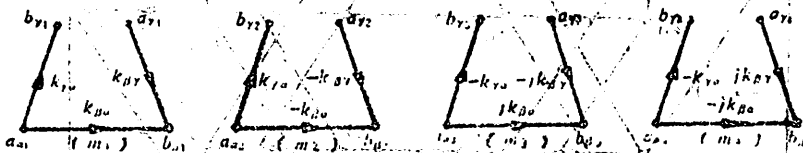


图3 匹配状态下，四个单管混频器的简化信号流图

由于单管混频器中 a_a 波和 a_r 波是在同一条传输线里沿同一方向传播的，所以在信号流图中把节点 a_a 和 a_r 合并为一，以利于分析的简化。在计算时，若输入波为 a_a ，则要用 $K_{\beta a}$ ；若输入波为 a_r ，则要用 $K_{r\beta}$ ，见 (图 4)。

图中：

$$K_{\beta a} = k_{\beta r} = S_{21} \cdot \frac{\sqrt{1 - \Gamma_L^2}}{\sqrt{1 - \Gamma_g^2}} \cdot \frac{1}{1 - S_{22} \cdot \Gamma_L} \quad (3)$$

$$k_{\gamma a} = \frac{S_{31e}}{1 - S_{33e} \Gamma_e} \quad (4)$$

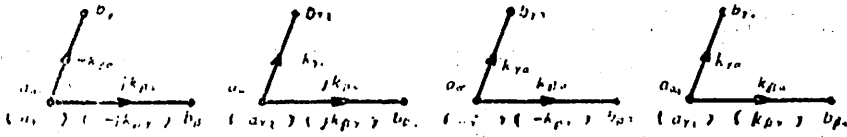


图4 四个单管混频器信号流图的进一步简化

式中：

$$\left. \begin{aligned} S_{21e} &= S_{21} + \frac{S_{31} S_{23} \Gamma_e}{1 - S_{33} \Gamma_e} \\ S_{22e} &= S_{22} + \frac{S_{23} S_{32} \Gamma_e}{1 - S_{33} \Gamma_e} \\ S_{31e} &= S_{31} + \frac{S_{21} S_{32} \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L} \\ S_{33e} &= S_{33} + \frac{S_{23} S_{32} \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_e &= \frac{\sqrt{1 - (1 + \gamma_2)(1 + \gamma_2 - 2\gamma_1^2)}}{\sqrt{1 + (1 + \gamma_2)(1 + \gamma_2 - 2\gamma_1^2)}} \\ \Gamma_L &= \frac{1 - \sqrt{\frac{1 + \gamma_2 - 2\gamma_1^2}{1 + \gamma_2}}}{1 + \sqrt{\frac{1 + \gamma_2 - 2\gamma_1^2}{1 + \gamma_2}}} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

图5是镜抑混频器的信号流图，它与图1相对应，由四个单管混频器，两个环形电桥和

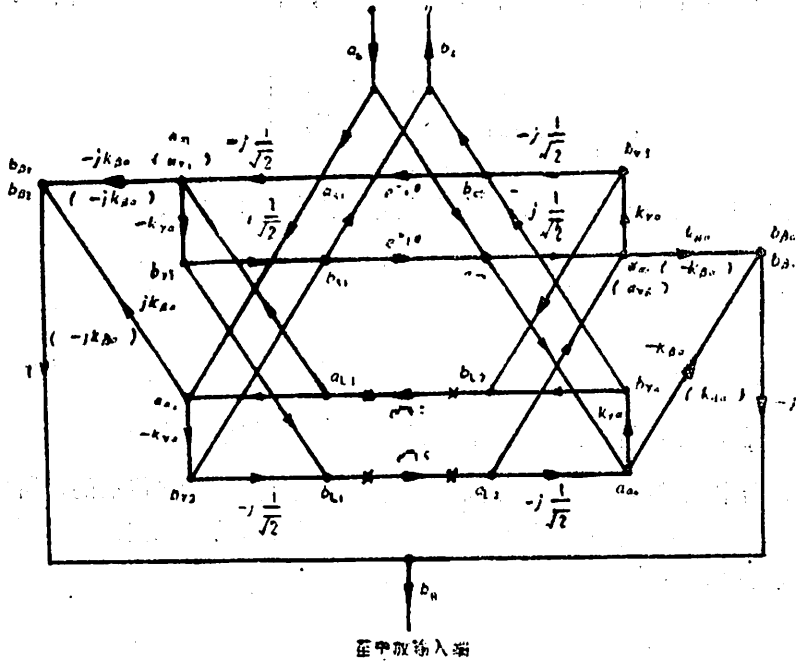


图5 整个镜抑混频器的信号流图

中频电桥的信号流图构成。此外还包含以下几个传输支路：

$e^{-j\theta}$ 表示传输支路 S_1 — S_2 ； $e^{-j\theta_1}$ 表示传输支路 S — S_1 ；
 $e^{-j\theta_2}$ 表示传输支路 S — S_2 ； $e^{-j\theta}$ 表示传输支路 L_1 — L_2 。

实现镜像回收的充要条件

为使镜像回收成为可能，在电路上应确保向信号源方向流动的镜像波 $b_s = 0$ ，向本振源方向流动的镜像波 $b_{L1} = 0$ ， $b_{L2} = 0$ 。否则就会导致镜像能量的漏损，影响回收效果。

由图 5 可写出：

$$b_{L1} = a_s \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\theta_1} \right) \left(-j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (-K_{ra}) \left(-j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + a_s \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\theta_1} \right) \left(j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot (-K_{ra}) \left(-j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} a_s K_{ra} (e^{-j\theta_1} - e^{-j\theta_1}) = 0$$

且与 θ_1 无关

$$b_{L2} = a_s \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\theta_2} \right) \left(j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (K_{ra}) \left(-j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + a_s \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\theta_2} \right) \left(-j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot (K_{ra}) \left(-j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} a_s K_{ra} (e^{-j\theta_2} - e^{-j\theta_2}) = 0$$

且与 θ_2 无关

$b_{L1} = 0$ 和 $b_{L2} = 0$ 表明镜像波与本振源之间是无条件隔离的，因此在信号流图上可将 $e^{-j\theta}$ 支路断开。

$$b_s = a_s \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\theta_1} \right) \left(-j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (-K_{ra}) \left(-j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\theta_1} \right) + a_s \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\theta_1} \right) \cdot \left(j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (-K_{ra}) \left(j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\theta_1} \right) + a_s \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\theta_2} \right) \left(j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (K_{ra}) \cdot \left(j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\theta_2} \right) + a_s \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\theta_2} \right) \left(-j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (K_{ra}) \left(-j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\theta_2} \right) = \frac{1}{2} a_s K_{ra} (e^{-j2\theta_1} - e^{-j2\theta_2})$$

可见为使 $b_s = 0$ 的条件是 $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\theta}{2}$ ，用传输线长度表示时，该条件可表示为： $S-S_1$

$= S-S_2 = \frac{1}{2} (S_1-S_2)$ ，这就是镜像回收的必要条件。所幸，由于镜抑混频器电路通常都是

对称的，此条件往往都在无形之中得到满足。

下面讨论镜像回收的充分条件。所谓镜像回收，应理解为信号波 a_s 经不同的变频方式所产生的中频波在汇总到中放输入端时产生同相迭加，使镜抑混频器的变频损耗有所降低。

镜抑混频器中存在着两种变频方式:

(1) 信号 ω_a 直接变至中频 ω_β , 这种变频方式用 $a, K_{\beta a}$ 表征。在图 5 中有四条通路都以这一方式产生中频波 b_{Ri} , 在必要条件满足时可写成:

$$b_{R1} = a, \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j \frac{\theta}{2}} \right) \left(-j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (-j K_{\beta a}) \times 1 = -\frac{1}{2} a, K_{\beta a} e^{-j \frac{\theta}{2}}$$

$$b_{R2} = a, \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j \frac{\theta}{2}} \right) \left(j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (j K_{\beta a}) \times 1 = -\frac{1}{2} a, K_{\beta a} e^{-j \frac{\theta}{2}}$$

$$b_{R3} = a, \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j \frac{\theta}{2}} \right) \left(-j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) K_{\beta a} (-j) = -\frac{1}{2} a, K_{\beta a} e^{-j \frac{\theta}{2}}$$

$$b_{R4} = a, \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j \frac{\theta}{2}} \right) \left(j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (-K_{\beta a}) (-j) = -\frac{1}{2} a, K_{\beta a} e^{-j \frac{\theta}{2}}$$

(2) 信号 ω_a 先变至镜像 ω_r , 再变至中频 ω_β , 这种变频方式用 $a, K_{r a} K_{\beta r}$ 表征。在图 5 中有八条通路都以这一方式产生中频波 b_{Ri} :

$$\begin{aligned} b_{R5} &= a, \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j \frac{\theta}{2}} \right) \left(-j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (-K_{r a}) \left(-j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) e^{-j \theta} \left(-j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (-K_{\beta r}) (-j) \\ &= \frac{1}{4} a, K_{r a} K_{\beta r} e^{-j \frac{3\theta}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{R6} &= a, \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j \frac{\theta}{2}} \right) \left(j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (-K_{r a}) \left(j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) e^{-j \theta} \left(-j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (-K_{\beta r}) (-j) \\ &= \frac{1}{4} a, K_{r a} K_{\beta r} e^{-j \frac{3\theta}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{R7} &= a, \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j \frac{\theta}{2}} \right) \left(-j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (-K_{r a}) \left(-j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) e^{-j \theta} \left(j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (K_{\beta r}) (-j) \\ &= \frac{1}{4} a, K_{r a} K_{\beta r} e^{-j \frac{3\theta}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{R8} &= a, \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j \frac{\theta}{2}} \right) \left(j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (-K_{r a}) \left(j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) e^{-j \theta} \left(j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (K_{\beta r}) (-j) \\ &= \frac{1}{4} a, K_{r a} K_{\beta r} e^{-j \frac{3\theta}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{R9} &= a, \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j \frac{\theta}{2}} \right) \left(-j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (K_{\beta r}) \left(-j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) e^{-j \theta} \left(-j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (-j K_{\beta r}) \times 1 \\ &= \frac{1}{4} a, K_{r a} K_{\beta r} e^{-j \frac{3\theta}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{R10} &= a, \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j \frac{\theta}{2}} \right) \left(j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (K_{r a}) \left(j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) e^{-j \theta} \left(-j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (-j K_{\beta r}) \times 1 \\ &= \frac{1}{4} a, K_{r a} K_{\beta r} e^{-j \frac{3\theta}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{R11} &= a_s \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\theta}{2}} \right) \left(-j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (K_{\gamma\alpha}) \left(-j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) e^{-j\theta} \left(j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (jK_{\beta\gamma}) \times 1 \\ &= \frac{1}{4} a_s K_{\gamma\alpha} K_{\beta\gamma} e^{-j\frac{3\theta}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{R12} &= a_s \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\theta}{2}} \right) \left(j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (K_{\gamma\alpha}) \left(j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) e^{-j\theta} \left(j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (jK_{\beta\gamma}) \times 1 \\ &= \frac{1}{4} a_s K_{\gamma\alpha} K_{\beta\gamma} e^{-j\frac{3\theta}{2}} \end{aligned}$$

汇总到中放输入端的中频波之和为

$$\begin{aligned} b_R &= \sum_{i=1}^{12} b_{Ri} = 2a_s (-K_{\beta\alpha} e^{-j\frac{\theta}{2}} + K_{\gamma\alpha} K_{\beta\gamma} e^{-j\frac{3\theta}{2}}) \\ &= -2a_s K_{\beta\alpha} e^{-j\frac{\theta}{2}} (1 - K_{\gamma\alpha} e^{-j\theta}) \quad (\text{因 } K_{\beta\gamma} = K_{\beta\alpha}) \end{aligned}$$

由此可见镜像回收条件为 $\theta = (2n+1)\pi$ (7)

满足该条件时合成的中频波为最强，其值为

$$|b_R| = 2a_s K_{\beta\alpha} (1 + K_{\gamma\alpha}) \quad (8)$$

$\theta = (2n+1)\pi$ ，把它换算成传输线 S_1 — S_2 的长度为 $(2n+1)\lambda_g/2$ (λ_g 为镜像频率 ω_s 上的导内波长)，这就是镜像回收的充分条件。

以上讨论的是各单管混频器 (m_1 — m_4) 自身具备匹配网络 N_1 和 N_2 的情况。对于 N_1 和 N_2 简便入环形电桥的情况，传输系数 $K_{\beta\alpha} = K_{\beta\gamma}$ 的模值仍保持不变，相角要除以 $(-j)$ ，传输系数 $K_{\gamma\alpha}$ 的模值也保持不变，相角要除以 $(-j)^2$ 。因此 m_1 — m_4 的简化信号流图变为图6。

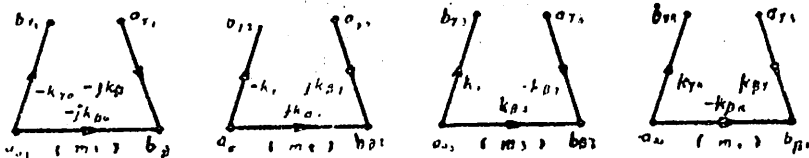


图6 单管混频器的 N_1 和 N_2 简并入环形电桥后的信号流图

重复以上的计算过程，可以得出的此种情况下的镜像回收条件为 $\theta = 2n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 其它结果仍保持不变。

当镜抑混频器由正交场混频器， $\lambda/4$ 电桥平衡混频器等部件构成时，也可用本文介绍的方法进行分析。

2 镜像回收对镜抑混频器性能的改善

在信号流图法中，混频器的变频损耗可定义为

$$L_c(\text{dB}) = 10 \lg \left(\frac{\text{信号功率}}{\text{中频功率}} \right) = 20 \lg \frac{2a_s}{|b_R|}$$

镜抑混频器实现镜像回收后， $|b_R|$ 就由 (8) 给出。此时，

$$L_{CR}(db) = 20 \lg \frac{1}{K_{\beta\alpha}} - 20 \lg(1 + K_{\gamma\alpha}) = L_{CM}(db) - R(db) \quad (9)$$

式中, $L_{CR}(db)$ 表示镜像回收后的镜抑混频器变频损耗。

$$L_{CM}(db) = 20 \lg \frac{1}{K_{\beta\alpha}} = 20 \lg \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{2r_1^2}{1+r_2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{2r_1^2}{1+r_2}}} \quad (10)$$

表示镜像能量全部损耗在信号源上时的变频损耗 (这样的混频器称为镜像匹配混频器)。

$$R(db) = 20 \lg(1 + K_{\gamma\alpha}) = 20 \lg \left[1 + \frac{S_{31} + \frac{S_{21}^2 \Gamma_{\beta}}{1 - S_{22} \Gamma_{\beta}}}{1 - \left(S_{33} + \frac{S_{21}^2 \Gamma_{\beta}}{1 - S_{22} \Gamma_{\beta}} \right) \Gamma_{\alpha}} \right] \quad (11)$$

表示镜像回收量。

L_{CR} , L_{CM} 和 R 由混频二极管的调制系数 r_1 和 r_2 所决定, 后者又由本振幅度 V_L 所决定。

$R(db)$ 随 V_L 的变化曲线示于图 7。 L_{CR} 和 L_{CM} 随 V_L 的变化曲线示于图 8。图 8 中同时给出了镜像短路混频器的变频损耗 $L_{CS}(db)$ 和镜像开路混频器的变频损耗 $L_{CO}(db)$ 随 V_L 的变化曲线。后两种混频器的变频损耗有现成的计算公式以供比较 (参看 [3])，其式为

$$L_{CS}(db) = 20 \lg \frac{1 + \sqrt{1 - r_1^2}}{1 - \sqrt{1 - r_1^2}}$$

$$L_{CO}(db) = 20 \lg \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{r_1^2}{1+r_2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{r_1^2}{1+r_2}}}$$

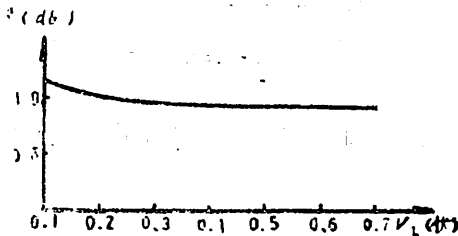


图 7 镜像回收量随 V_L 的变化

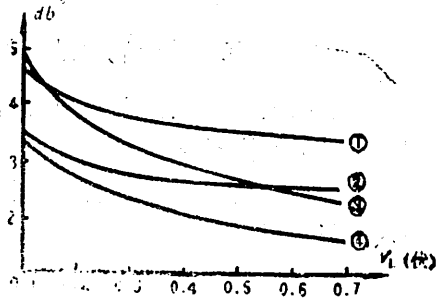


图 8 各种混频器变频损耗的比较

3 讨论

由图 7 可见, 镜像回收量并不可观, 只在 1db 左右, 因此对此不应寄予过高的希望。在设计一个低噪声镜抑混频器时, 首先必须解决好各个单管混频器 ($m_1 - m_n$) 及各个环节上的

匹配问题,然后再进一步去实现镜像回收以获得最佳性能。

图8指出,在变频损耗方面,镜像回收后的镜抑混频器并无明显优点,甚至略差于镜像开路混频器。但镜抑混频器仍有自己的特点,其工作带宽 $\Delta\omega_a$ 不受中频 ω_p 的限制,而镜像短路和开路混频器都受到这个限制(即 $\Delta\omega_a < 2\omega_p$),因此镜抑混频器更能适应现代电子技术对工作频带的高要求。二次变频虽也能摆脱这个限制,但要增加设备量。

此外,镜像开路和镜像短路混频器的阻抗匹配比较困难,镜抑混频器则比较容易解决好。特别是如果手头已经有了性能良好的单管或平衡混频器,再在此基础上构成令人满意的镜抑混频器是比较容易的。

最后还应指出,在镜像短路和镜像开路混频器的信号通道上必须插入一个带通滤波器,其带内损耗将使混频器的实际变频损耗加大,而镜抑混频器可省去滤波器,从而使实际性能更好一些。

本文曾得到西北电讯工程学院吴万春教授的启迪,特此表示衷心地感谢。

参 考 文 献

- [1] 谈江,微波混频器信号流图的一种极简形式,电子学报,1(1986),95—99.
- [2] 半导体手册,第14编“微波电路”,科学出版社,1979.
- [3] Wilds, R. B., Microwave Two-Phase Converters for Imageless Receivers, *Microwave Journal*, 9 (1961).

An Analysis on Image Recovery Effect in Mixers with Image Rejection

Tan Jiang

(Department of Radio and Electronics)

Abstract

In this paper a quantitative analysis has been given to complicated circuits of mixers with image rejection based on [1]. A necessary and sufficient condition to achieve image recovery has been demonstrated. The profit, which may be brought from image recovery has been estimated quantitatively.

Key Words: mixer, image rejection, image recovery.

集成电路的电路模拟程序

赵睿民 庄镇泉

(电工电子学教研室)

摘 要

PSCNT 1.3 是一个在微机上开发成功的集成电路模拟分析程序, 具有需要内存少、运行速度快的特点, 并有可靠的收敛性。本文较详细地介绍了使 PSCNT 1.3 达到这样效果的主要算法: 节点撕裂法、三极管的降阶算法、简化的稀疏矩阵技术, 以及改进的牛顿迭代法等。本文还给出了一个应用此程序的计算实例。

关键词: 微型计算机, 模拟程序, 节点撕裂法, 降阶算法。

随着电子技术的迅速发展, 我们迫切需要运用电路 CAD 技术来提高集成电路以及各种电子电路的研制效率。本文介绍我们最近研制完成的集成电路分析程序 PSCNT 1.3 的主要算法和程序实现。

1 节点撕裂法 (NT法)

节点撕裂法 (简称 NT 法) 是电路模拟分析中的一种分解算法^[1,2]。

NT 法的第一步是将电路划分成一系列的子电路, 称为“电路划分”或“电路分解”。每个子电路仅通过一些节点 (端节点) 与电路的其它部分相联系。划分子电路是一个相当重负但也是一件十分困难的工作。划分的好坏, 将直接影响 NT 法的效率。在本程序中, 划分子电路工作是通过程序由计算机自动完成的。

NT 法的第二步就是利用已经得到的子电路划分, 采用如下方法对 (线性) 电路进行求解。

设整个 (线性) 电路由 P 个子电路 $\{S_1, S_2, \dots, S_P\}$ 组成, 各子电路之间没有支路耦合, 外部节点数是 n_{p+1} ; S_j 的内部节点数是 n_j ($j=1, 2, \dots, P$)。

则各子电路的方程具有如下形式

1986年4月28日收到。

$P_s(p)$ }, (见图 1), 而且每个这样的计算过程只涉及到系数矩阵的少数子矩阵 (对应于某个子电路)。因此, 与各个子电路有关的子矩阵, 可以独立产生、独立处理。下面介绍相应的算法。

设子电路 S_i 的内部节点集为 N_1^i , 端节点集为 N_2^i , X_i 是 N_1^i 的电压向量, U_i 是 N_2^i 的电压向量 ($i=1, 2, \dots, p$), 外部节点集为 N_2 , X_{p+1} 是 N_2 的电压向量。用 Y_{no} 记关于 N_2 的节点电压方程 (外部电路方程) 的增广矩阵。

算法 2

begin

将 Y_{no} 清零

for ($k=1$ to p) do

列出 S_k 的电路方程:

$$\begin{bmatrix} 0_k \\ W_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{kk} & E_k \\ F_k & C_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ U_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_k \\ D_k \end{bmatrix}$$

(注: W_k 是从 N_2^k 流入 S_k 的电流向量。)

消去内部节点 (电压变量):

$$\begin{bmatrix} 0_k \\ W_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & F'_k \\ 0 & C'_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ U_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B'_k \\ D'_k \end{bmatrix}$$

保存 F'_k, B'_k

将 $[C'_k : D'_k]$ 迭加于 Y_{no} :

for ($j=1$ to $|N_2^k|$) do

查出 N_2^k 中第 i 个节点在 N_2 中的序号 jj

for ($j=1$ to $|N_2^k|$) do

查出 N_2^k 中第 j 个节点在 N_2 中的序号 jj

$$Y_{no}(ii, jj) = Y_{no}(ii, jj) + C'_k(i, j)$$

enddo

$$Y_{no}(ii, |N_2| + 1) = Y_{no}(ii, |N_2| + 1) + D'_k(i)$$

enddo

enddo

解外部电路方程, 即由 Y_{no} 求出 X_{p+1}

(注: 至此, 所有 $U_k (k=1, 2, \dots, p)$ 都已知。)

for ($k=1$ to p) do

恢复 F'_k, B'_k

$$X_k = B'_k - F'_k \cdot U_k$$

enddo

end

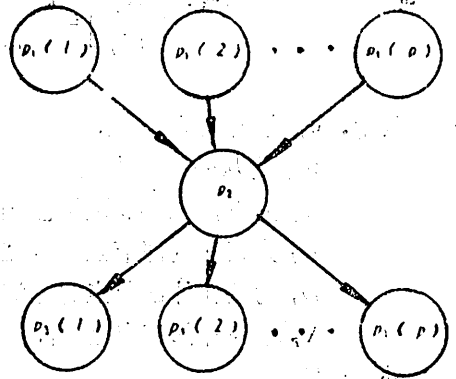


图 1

采用 NT 法的优点：(1) 组织了串行运算，从而大大地节省内存；

(2) 使稀疏矩阵技术处理问题的阶数限制在较小的范围内 (阶数 ≤ 60)。这样，我们就可采用较简单的数据结构，既节省了建立方程所需的时间，也提高了运行速度。

2 处理三极管的降阶算法

PSCNT1.3 采用的三极管 (双极型晶体管 BJT 和结型场效应晶体管 JFET) 模型中，有三个电阻值 ≥ 0 的体电阻。以 BJT 为例，见图 2。

作线性化后，此模型电路看成为一个子电路。它的三个内部节点 b' 、 c' 、 e' 可以消去，由关于 b 、 c 、 e 三点的不定导纳矩阵 $[Y_{3 \times 3} : B_3]$ 向“外部电路” (电路的某个子电路) 迭加，避免了由于三极管的内部节点而引起方程阶数的增高。

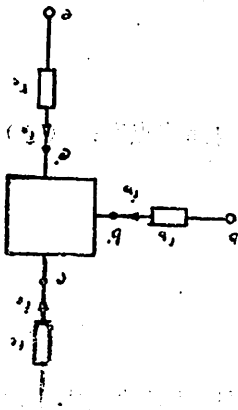
下面，介绍求 $[Y_{3 \times 3} : B_3]$ 的原理。

先求出关于 b' 、 c' 、 e' 三点的不定导纳矩阵 $[Y' : B']$ ，写成方程的形式

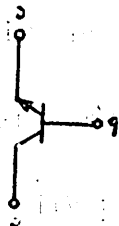
$$\begin{bmatrix} i_b \\ i_c \\ i_e \end{bmatrix} = Y' \begin{bmatrix} v_{b'} \\ v_{c'} \\ v_{e'} \end{bmatrix} - B'$$

$$\therefore \begin{cases} v_{b'} = v_b - i_b \cdot r_b \\ v_{c'} = v_c - i_c \cdot r_c \\ v_{e'} = v_e - i_e \cdot r_e \end{cases}$$

$$\therefore [Y : B] = \left[I + Y \cdot \begin{pmatrix} r_b & 0 & 0 \\ 0 & r_c & 0 \\ 0 & 0 & r_e \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot [Y' : B']$$



(a) BJT



(b) 模型电路中体电阻的位置

图 2

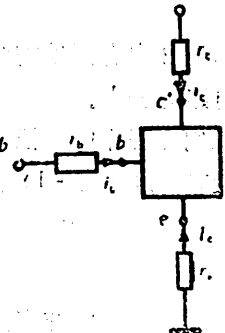


图 3

$$\text{利用关系式 } \begin{cases} \sum_{j=1}^3 Y(i, j) = 0 & i = 1, 2, 3 \\ \sum_{i=1}^3 Y(i, j) = 0 & j = 1, 2, 3 \\ \sum_{j=1}^3 B(j) = 0 \end{cases}$$

可以降低这里处理的矩阵阶数，达到减少计算量的目的。为此，

(1) 列出方程 $\begin{bmatrix} i_b \\ i_c \end{bmatrix} = Y'_{2 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} v_{b', e'} \\ v_{c', e'} \end{bmatrix} - B'_2$

(2) 将 e 点接“地” (图 3)

$$\begin{cases} v_{b', e'} = v_b - i_b \cdot r_b - (i_b + i_c) \cdot r_e \\ v_{c', e'} = v_c - i_c \cdot r_c - (i_b + i_c) \cdot r_e \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} i_b \\ i_c \end{bmatrix} = Y' \begin{bmatrix} v_b \\ v_c \end{bmatrix} - Y' \begin{bmatrix} r_b + r_e & r_e \\ r_e & r_c + r_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_b \\ i_c \end{bmatrix} - B'$$

$$[Y_{2 \times 2} : B_2] = \left[I + Y' \begin{pmatrix} r_b + r_e & r_e \\ r_e & r_c + r_e \end{pmatrix} \right]^{-1} [Y' : B']$$

(3) 再将 e 点浮起，得到完整的 $[Y_{3 \times 3} : B_3]$ ：

$$\begin{cases} Y(1, 3) = -Y(1, 1) - Y(1, 2) \\ Y(2, 3) = -Y(2, 1) - Y(2, 2) \\ \vdots \\ Y(3, 3) = -Y(3, 1) - Y(3, 2) \\ B(3) = -B(1) - B(2) \end{cases}$$

采用这样的算法，长运算可降为原来的 $2^3/3^3 = \frac{8}{27}$ 。

3 简化的稀疏矩阵技术

算法 2 中有两处需要处理线性方程的消元问题：(1) “消去内部节点”，(2) “解外部电路方程”。

我们在程序中，把 (1)、(2) 合成一个统一的问题。

设有 $n_e \times (n_e + 1)$ 阶增广矩阵

$$A_b = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \vdots & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & \vdots & B_2 \end{bmatrix}$$

(A_{11} 是 n_i 阶非奇异方阵， A_{22} 是 n_o 阶方阵， $n_e = n_i + n_o$) 要用消元法化成这样的形式：

$$A'_b = \begin{bmatrix} I & A'_{12} & \vdots & B'_1 \\ 0 & A'_{22} & \vdots & B'_2 \end{bmatrix}$$

问题 (1) 对应于 $n_1 = |N_1^k|$, $n_0 = |N_2^k|$;

问题 (2) 对应于 $n_1 = n_0 = |N_2|$

求解这问题的基本算法是矩阵 GAUSS 消元法。

由于实际上 $A_s(*, *)$ 通常是稀疏的, 所以采用稀疏矩阵技术既可避免乘零运算又可节省很多的计算时间。

应用 NT 法后, A_s 的阶数不高 ($n_s \leq 60$)。故可以采用较简单的数据结构, 十分方便地处理填入问题。

具体做法: 用数组 DD(1000) 存 A_s 的非零元, 用数组 LD(60, 61) 指示非零元的位置

$$\begin{cases} A_s(i, j) = 0 & \text{当 } LD(i, j) = 0 \\ A_s(i, j) = DD(LD(i, j)) & \text{当 } LD(i, j) > 0 \end{cases}$$

并用 n_s 记非零元的个数。下面是正向消去算法。

算法 3:

```
begin
  输入 DD, LD,  $n_1$ ,  $n_0$ ,  $n_s$ 
  for ( $k=1$  to  $n_1$ ) do
     $kk = LD(k, k)$ 
     $J_s = \phi$  (注:  $J_s$  是一个数字集合, 用于记第  $k$  行的非零元位置。)
    for ( $j=k+1$ , to  $n_0+1$ ) do
       $kj = LD(k, j)$ 
      if ( $kj > 0$ ) then
         $J_s = J_s \cup j$ 
         $DD(kj) = DD(kj) / DD(kk)$ 
      endif
    enddo
    for ( $i=k+1$  to  $n_0$ ) do
       $ik = LD(i, k)$ 
      if ( $ik > 0$ ) then
        for all  $j \in J_s$  do
           $kj = LD(k, j)$ 
           $ij = LD(i, j)$ 
          if ( $ij \neq 0$ ) then
             $n_s = n_s + 1$ 
             $LD(i, j) = n_s$ 
             $DD(n_s) = -DD(ik) * DD(kj)$ 
          else
             $DD(ij) = DD(ij) - DD(ik) * DD(kj)$ 
          endif
        enddo
      endif
    enddo
  enddo
```

```

        enddo
    endif
enddo
enddo
end

```

反向消去的处理与此类似。

4 非线性器件的线性化迭代

4.1 理想二极管的线性化迭代

理想二极管是一种指数型器件，

$$i = f(v) = I_s (e^{v/v_t} - 1)$$

设第 K 次迭代的线性化点是 (v_K^*, i_K^*) ，
与之相对应的线性化电路的解是 (v_{K+1}, i_{K+1}) ，
见图 4。

则第 $K+1$ 次迭代的线性化点确定为

$$\begin{aligned}
 & (v_{K+1}^*, i_{K+1}^*) \\
 & = \begin{cases} (v_{K+1}, f(v_{K+1})), & i_{K+1} < i_K^* \\ (f^{-1}(i_{K+1}), i_{K+1}), & i_{K+1} \geq i_K^* \end{cases}
 \end{aligned}$$

在程序的具体做法上，我们根据电流值求
线性近似等效电路（图 5(a)）。

在 $i_{K+1} < i_K^*$ 时，由 i_K^*, i_{K+1} 及理想二极管
的 $v-i$ 曲线求 i_{K+1}^* （见图 5(b)）的公式为

$$i_{K+1}^* = (i_K^* + I_s) \cdot \exp\left(\frac{i_{K+1} - i_K^*}{i_K^* + I_s} - 1\right)$$

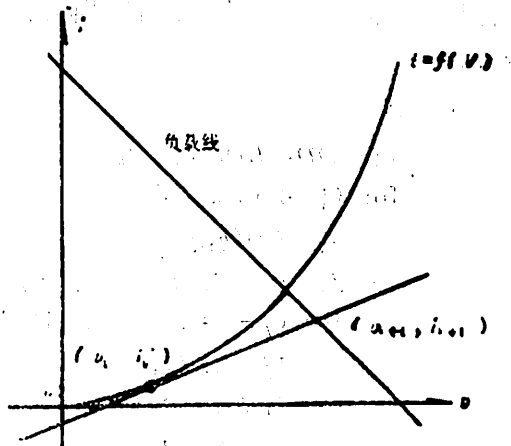
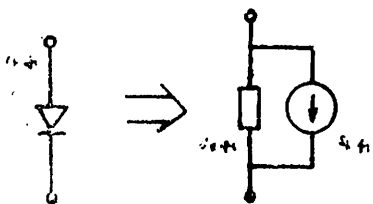
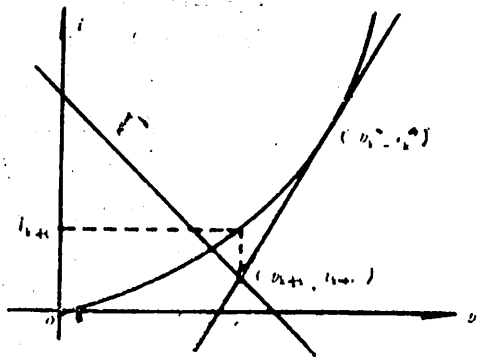


图 4



(a)

图 5(a)



(b)

图 5(b)

4.2 正向欧拉电压 V_A 的影响

BJT 模型引入 V_A 以后, β_F (正向放大倍数)、 I_s (饱和电流)、 τ_F (正向渡越时间) 都是 $v_{b'e'}$ 的函数,

$$\begin{aligned}\beta_F &= \beta_F(v_{b'e'}) = BF \cdot W(v_{b'e'}) \\ I_s &= I_s(v_{b'e'}) = IS \cdot W(v_{b'e'}) \\ \tau_F &= \tau_F(v_{b'e'}) = TF / (1 + v_{b'e'}^2 / VA^2)\end{aligned}$$

且 $W(v_{b'e'}) = 1 - v_{b'e'} / VA$.

其中, BF 、 IS 、 TF 、 VA 都是 BJT 的参数。

下面介绍直流情况 (图 6) 下的处理方法。

令
则

$$f(v) = e^{v/V_T} - 1$$

$$i_1 \triangleq \frac{I_s}{\beta_F} \cdot f(v_{b'e'}) = \frac{IS}{BF} \cdot f(v_{b'e'})$$

$$i_2 \triangleq \frac{I_s}{\beta_R} \cdot f(v_{b'e'}) = W(v_{b'e'}) \cdot \frac{IS}{BR} \cdot f(v_{b'e'})$$

$$I_{c1} \triangleq \beta_F \cdot i_1 - \beta_R \cdot i_2 = W(v_{b'e'}) \cdot BF \cdot i_1 - BR \cdot i_2$$

BR (反向放大倍数) 是 BJT 的参数。

又设

$$\begin{cases} j_1 = \frac{IS}{BF} \cdot f(v_{b'e'}) \\ j_2 = \frac{IS}{BR} \cdot f(v_{b'e'}) \end{cases}$$

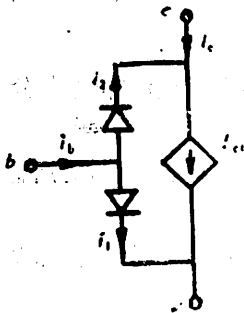


图 6

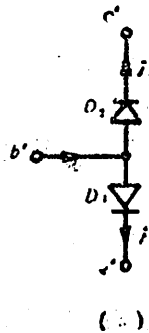


图 7(a)

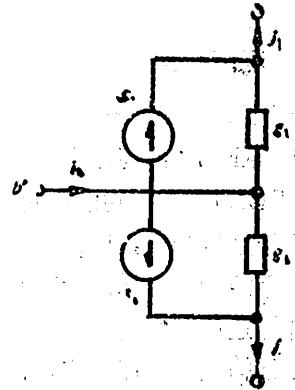


图 7(b)

则

$$\begin{cases} i_1 = j_1 \\ i_2 = W(V_{b'e'}) \cdot j_2 \end{cases}$$

而 $v_{b'e'} \sim j_1$ 和 $v_{b'e'} \sim j_2$ 相当于两个理想二极管 (图 7(a))。

这两个二极管用算法 4 处理得到线性化等效电路 (图 7(b))。...
 $W(v_{b', c'})$ 因子的出现, 相当于增加了一种非线性器件。以处理 $i_2 = W(v_{b', c'}) \cdot j_2$ 为例,

$$i_2 = j_2 - j_2 \cdot v_{b', c'} / VA$$

此式的后一项具有 $i = \alpha \cdot i_x \cdot v_y$ 的形式 (i_x 、 v_y 分别是电路中的一个电流、电压变量)。这是一种非线性关系, 在 (i_x^0, v_y^0) 处作线性化, 可得 (见图 8(a)):

$$\begin{aligned} i &= \alpha \cdot i_x^0 \cdot v_y^0 + \alpha i_x^0 \cdot \Delta v_y + \alpha \cdot v_y^0 \cdot \Delta i_x \\ &= \alpha \cdot i_x^0 \cdot v_y + \alpha \cdot v_y^0 \cdot i_x - \alpha \cdot i_x^0 \cdot v_y^0 \end{aligned}$$

因此, 可将 $(j_2, v_{b', c'}) \sim i_2$ 的关系线性化, 见图 8(b)。同理, 可对 $W(v_{b', c'}) \cdot BF \cdot i_1$ 项作相应的处理。

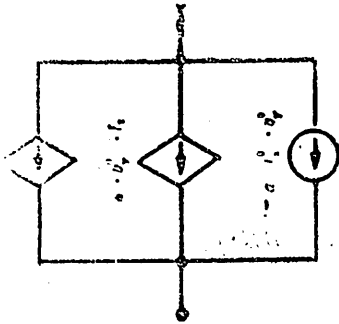


图 8(a)

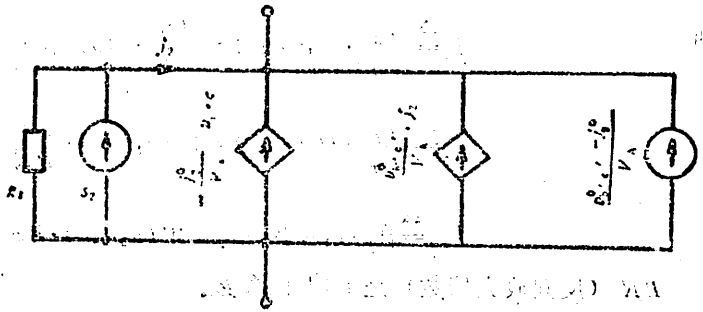


图 8(b)

5 程序结构和计算实例

5.1 程序结构

PSCNT (Program to Simulate Circuits employing Node-Tearing) 1.3 程序用 FORTRAN-77 编写, 在 IBM-PC 微型机上调试通过。

PSCNT1.3 的功能: 可对双极型晶体管和结型场效应管电路进行直流非线性分析、交流小信号频域分析, 及时域分析。

程序的特点: 采用“节点撕裂法”及简化的稀疏矩阵技术, 使得程序运行时所需的内存少、计算速度较快。

在结构上, 程序的主体部分分为直流分析程序、交流分析程序两个大模块。直流程序计算出的器件线性化结果, 通过数据文件, 直接传输至交流程序。

程序运行需要的内存空间 < 200kB, 可处理的电路规模上限为 400 个节点 (不计晶体管的内部节点)、1000 条支路、300 个三极管 (BJT 或 JFET)。

5.2 计算实例

图 9 是一个集成宽频带放大器, 直流和交流频域分析结果见表 1 和表 2,

图 9

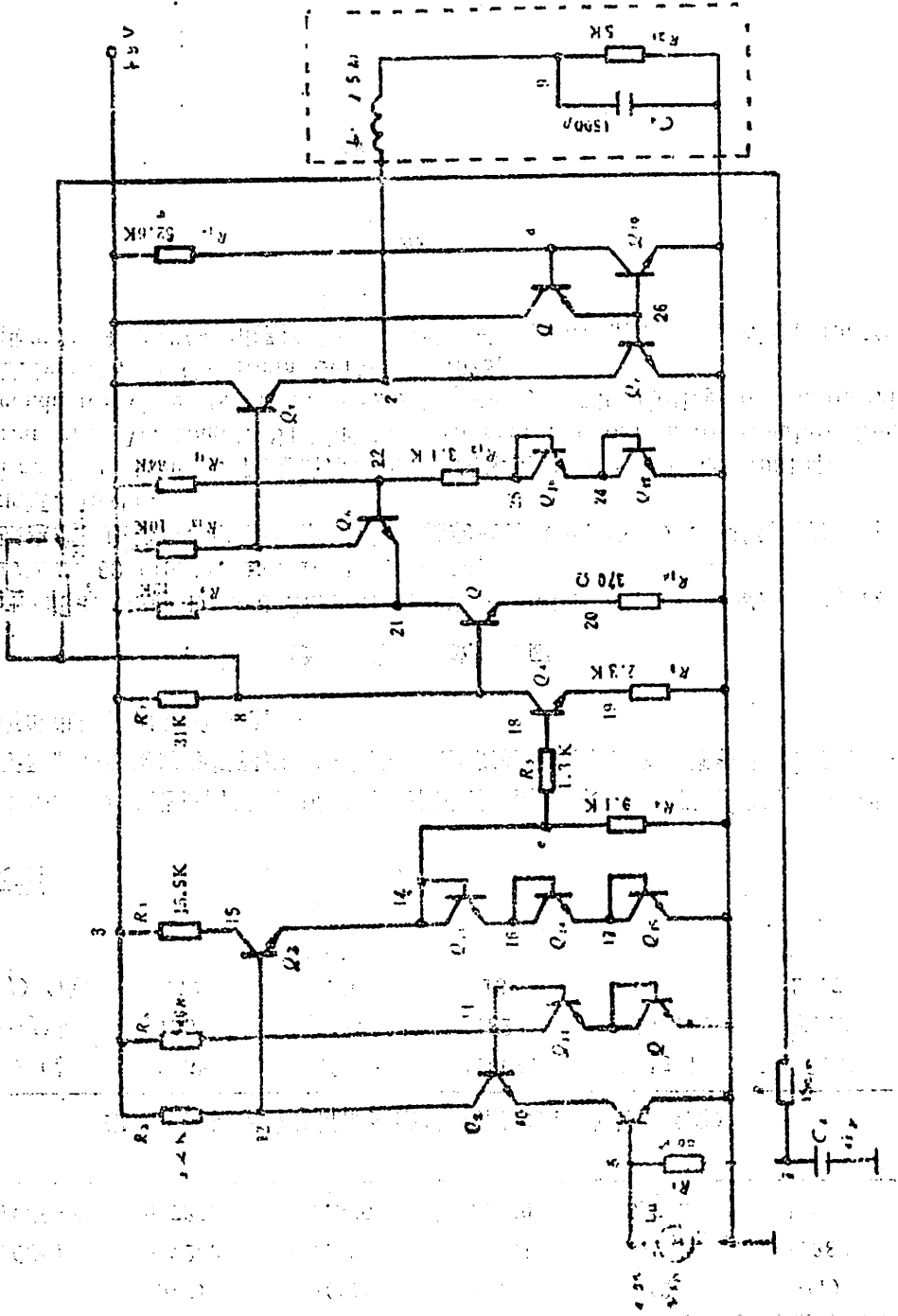


表 1 几个重要节点的直流电压数据 (单位: 伏特)

	$v(5)$	$v(14)$	$v(8)$	$v(2)$	$v(7)$
PSCNT	0.7203	1.529	1.151	3.712	1.880
SPICE-II	0.7203	1.529	1.150	3.712	1.880

表 2 交流频域分析部分结果 (输出端: 节点②至地)

频率 f (赫)	215k	464k	1.00M	2.15M	4.64M
$ H(f) $	1951	1927	1824	1441	687.5
$\angle H(f)$ (度)	171	160	138	94.3	24.7

6 结束语

程序 PSCNT1.3 是我们研究和应用第三代电路模拟技术的一个阶段结果。下一步, 我们将致力于研制高效动态分析程序。在方法上采用潜分析技术、多层撕裂技术, 使这一程序获得更完善的电路模拟分析功能。

参 考 文 献

- [1] Hachtel, Gary D. and Sangiovanni-Vincentelli, A., *Proceedings of the IEEE*, 69 (1981), No. 10 1264—1280.
- [2] 张惠廉、庄镇泉, 电子线路的计算机辅助设计 (上、下册), 高等教育出版社, 北京, 1981年。
- [3] Lan E. Getreu 著, 陈金松译, 双极型晶体模型, 科学出版社, 1981年
- [4] Lanrence W. Nagel, SPICE 2: A Computer Program to Simulate Semiconductor Circuits, *Memorandum No ERL. M520*, College of Engineering University of California Berkeley, 1975.
- [5] 洪先龙, 计算机辅助电路分析——算法和软件技术, 清华大学出版社, 1985年。

An IC Simulation Program

Zhao Ruimin Zhuang Zhenquan

(Division of Electrical Engineering and Electronics)

Abstract

PSCNT 1.3 is an IC simulation program developed on micro-computer. It runs faster, requests smaller memory, and has reliable convergence. The main algorithms of this program are introduced in this paper: Node-Tearing Algorithm, Order-Reduction Algorithm for Transistors, Simplified Sparse Matrix Technique, and Modified Newton Linearization Algorithm. At the end, a practical computational example is given.

Key words: micro-computer, simulation program, node tearing algorithm, order-reduction algorithm.

关于 $v(n)$ 及 $\varphi(n)$ 的两个渐近公式

刘弘泉

(数学系)

1970年, 印度数学家 D. Suryanarayana 在文 [1] 中提出了三个数论上的问题, 其中之一是: 设 $v(n)$ 是 n 最大的 Square-free 因子, $\beta(x) = \sum_{n \leq x} \frac{v(n)}{n^2}$, 求出常数 c 和 λ , ($0 < c < 1$), 使得 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp \beta(x)}{x^c} = \lambda$. 本文解决了这个问题, 得到了

定理 1 $\beta(x) = C_0 C_1 \log x + C_0 (C_1 \gamma - C_2 - C_3) - 2C_4 + O(x^{-1/2} \log x)$, 此处 $C_0 = \frac{6}{\pi^2}$, $\gamma = 0.577 \dots$ 为欧拉常数, 而 $C_i (1 \leq i \leq 4)$ 都是绝对常数.

命 $\varphi(n)$ 是有名的欧拉函数, 我们熟知

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \log x)$$

文 [2] 曾求 $\sum_{n \leq x} \varphi^k(n)$ (整数 $k \geq 2$), 如令

$$\sum_{m \leq n} \varphi(m) = \frac{3}{\pi^2} n^2 + R_n \tag{1}$$

[2] 中“证明”了 $R_n - R_{n-1} = O(\log n)$. 应该指出, [2] 中“证明”是不正确的, 实际上, 应有

$$R_n - R_{n-1} = \Omega(n) \tag{2}$$

这只须在 (1) 式中分别取 $n = p$ 和 $n = p-1$ (p 是素数), 将所得两式相减就得 (2) 式, 因此, [2] 的结论

$$\sum_{m=1}^n \varphi^k(m) = \frac{1}{k+1} \left(\frac{6}{\pi^2} \right)^k n^{k+1} + O(n^k \log^k n)$$

是错的. 本文将证明

定理 2 设整数 $k \geq 2$, 则有

1985年10月16日收到.

$$\sum_{n \leq x} \varphi^k(n) = \frac{1}{k+1} \prod_p \left[1 - \frac{1}{p} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p} \right)^k \right) \right] x^{k+1} + O(x^k (\log x)^k)$$

(对任意实数 σ , 这里的方法可用来求 $\sum_{n \leq x} \varphi^\sigma(n)$).

1 几条引理

下面的引理 1 和引理 2 是 [3] 的引理 3.3 和引理 4.3 稍强的形式.

引理 1 设 $x \geq 1$ 是整数, $N \geq 1$, 则

$$\sum_{\substack{t \leq N \\ (t, x) = 1}} \frac{1}{t} = \frac{\varphi(x)}{x} (\log N + \gamma) - \sum_{d|x} \frac{\mu(d) \log d}{d} + O(N^{-1} 2^{\omega(x)})$$

其中 $\omega(x) = \sum_{p|x} 1$, γ 为 Euler 常数.

证明 因为 $\sum_{1 \leq t \leq x} \frac{1}{t} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right)$, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{t \leq N \\ (t, x) = 1}} \frac{1}{t} &= \sum_{t \leq N} \frac{1}{t} \sum_{d|t} \mu(d) = \sum_{d|x} \mu(d) \sum_{\substack{t \leq N \\ d|t}} \frac{1}{t} \\ &= \sum_{d|x} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{t \leq N/d} \frac{1}{t} = \sum_{d|x} \frac{\mu(d)}{d} \left[\log \frac{N}{d} + \gamma + O\left(\frac{d}{N}\right) \right] \\ &= \frac{\varphi(x)}{x} (\log N + \gamma) - \sum_{d|x} \frac{\mu(d) \log d}{d} + O(N^{-1} 2^{\omega(x)}). \end{aligned}$$

引理 2 设 $x \geq 1$ 是整数, 而 $N \geq 1$, 则有

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{t \leq N \\ (t, x) = 1}} \frac{|\mu(t)|}{t} &= \frac{\varphi(x)}{x} E_1(x) (\log N + \gamma) - E_1(x) \sum_{d|x} \frac{\mu(d) \log d}{d} \\ &\quad - 2 \frac{\varphi(x)}{x} E_2(x) + O[N^{-1} (\log N + 2^{\omega(x)})]. \end{aligned}$$

这里, $E_1(x) = \sum_{\substack{s=1 \\ (s, x)=1}}^{\infty} \frac{\mu(s)}{s^2}$, $E_2(x) = \sum_{\substack{s=1 \\ (s, x)=1}}^{\infty} \frac{\mu(s) \log s}{s^2}$.

证明 由引理 1 可得

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{t \leq N \\ (t, x) = 1}} \frac{|\mu(t)|}{t} &= \sum_{\substack{t \leq N \\ (t, x) = 1}} \frac{1}{t} \sum_{s^2 | t} \mu(s) = \sum_{\substack{s \leq N^{1/2} \\ (s, x) = 1}} \mu(s) \sum_{\substack{t \leq N \\ (t, x) = 1 \\ t \equiv 0 \pmod{s^2}}} \frac{1}{t} \\ &= \sum_{\substack{s \leq N^{1/2} \\ (s, x) = 1}} \frac{\mu(s)}{s^2} \sum_{\substack{m \leq N/s^2 \\ (m, x) = 1}} \frac{1}{m} = \sum_{\substack{s \leq N^{1/2} \\ (s, x) = 1}} \frac{\mu(s)}{s^2} \left[\frac{\varphi(x)}{x} \log \frac{N}{s^2} + \frac{\varphi(x)}{x} \gamma \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{d|1x} \frac{\mu(d) \log d}{d} + O\left(\frac{s^2}{N} \cdot 2^{w(x)}\right) \\
& = \frac{\varphi(x)}{x} (\log N + \gamma) \sum_{\substack{s \leq N^{1/2} \\ (s,x)=1}} \frac{\mu(s)}{s^2} - \sum_{\substack{s \leq N^{1/2} \\ (s,x)=1}} \frac{\mu(s)}{s^2} \sum_{d|1x} \frac{\mu(d) \log d}{d} \\
& - 2 \frac{\varphi(x)}{x} \sum_{\substack{s \leq N^{1/2} \\ (s,x)=1}} \frac{\mu(s) \log s}{s^2} + O(N^{-1/2} 2^{w(x)})
\end{aligned}$$

由于
$$\sum_{\substack{s \leq N^{1/2} \\ (s,x)=1}} \frac{\mu(s)}{s^2} = E_1(x) + O(N^{-1/2})$$

$$\sum_{\substack{s \leq N^{1/2} \\ (s,x)=1}} \frac{\mu(s) \log s}{s^2} = E_2(x) + O(N^{-1/2} \log N)$$

引理 2 得证。

引理 3
$$\prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k = \sum_{d|n} \mu(d) \prod_{p|d} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k\right]$$

证明 这从 $\left(1 - \frac{1}{p}\right)^k = 1 + \mu(p) \left[1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k\right]$ 可得。

引理 4
$$\sum_{n \leq x} |\mu(n)| \cdot k^{w(n)} = C(k) x (\log x)^{k-1} + O(x (\log x)^{k-2})$$

其中整数 $k \geq 2$, $C(k)$ 是仅随 k 而变的常数。

证明 设 x 是半整数。在 [3] 的定理 4.2 中, 取 $a_n = |\mu(n)| \cdot k^{w(n)}$, $\psi(n) = n^{2+o(1)}$, $T = \psi(x) \cdot \log x$, $\beta = 1$, $a = k$, $c = 2 \log k$, $f(w) = \prod_p \left(1 + \frac{k}{p^w}\right)$ ($\text{Re } w > 1$), 则得

$$\sum_{n < x} |\mu(n)| \cdot k^{w(n)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} f(w) \frac{x^w}{w} dw + O(x)$$

在 $\text{Re } w > 1$ 时, 令 $f(w) = \zeta^k(w) \cdot g(w, k)$, 故

$$g(w, k) = \prod_p \left(1 + \frac{k}{p^w}\right) \left(1 - \frac{1}{p^w}\right)^k, (\text{Re } w > 1)$$

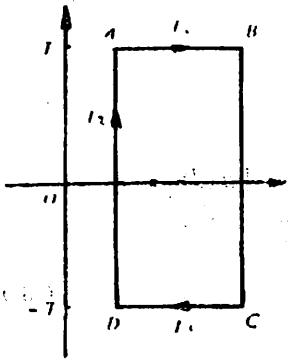
所以我们将 $g(w, k)$ 解析开拓到 $\text{Re } w > \frac{1}{2}$ 。

取 w 平面上的矩形 $ABCD$, A, B, C, D , 的复数表示依次为 $\sigma_0 + iT$, $c + iT$, $c - iT$, $\sigma_0 - iT$, 这里 $\sigma_0 = 1 - \frac{\gamma_1}{(\log T)^{2\gamma_1}}$, γ_1 是某个正的常数, 根据前面所述, $f(w)$ 在矩形 $ABCD$ 中仅以 $w = 1$ 为 k 级极点, 若令

$$g(w) = \frac{x^w}{w} (\zeta(w) (w-1))^k \cdot g(w, k)$$

则由残数定理可得

$$\sum_{n < x} |\mu(n)| k^{w(n)} = \lim_{w \rightarrow 1} \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(w) + \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{i=1}^3 I_i \right) + O(x). \text{ 其中, } I_1, I_2, I_3 \text{ 分别是沿着 } AB, DA \text{ 和 } CD \text{ 的积分, 由文献 [4] 64 页的定理 3, 可得}$$



$$|I_1| = |I_3| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0+iT}^{\sigma_0+iT} \zeta^k(w) g(w, k) \frac{x^w}{w} dw \right|$$

$$= O \left(\int_{\sigma_0}^{\sigma_0+T} (\log x)^{2k/3} \cdot \frac{x^\sigma}{T} d\sigma \right) = O((\log x)^{2k/3-2})$$

$$\text{又, } |I_2| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0-iT}^{\sigma_0+iT} \zeta^k(w) g(w, k) \frac{x^w}{w} dw \right|$$

$$= O \left(\int_0^T (\log T)^{2k/3} \cdot \frac{x^{\sigma_0}}{\sigma_0+t} dt \right)$$

$$= O \left(\int_0^1 \frac{x^{\sigma_0}}{\sigma_0} (\log x)^{2k/3} dt + \int_1^T x^{\sigma_0} (\log x)^{2k/3} \frac{dt}{t} \right)$$

$$= O(x^{\sigma_0} (\log x)^{2k/3+1}) = O(x)$$

令 $u(w, k) = \frac{1}{w} [\zeta(w) (w-1)]^k \cdot g(w, k)$, 显然, u 在 $w=1$ 附近解析, 故从 Leibniz 法则

$$g^{(k-1)}(w) = (x^w \cdot u(w, k))^{(k-1)} = \sum_{n=0}^{k-1} c_{k-1}^n x^w (\log x)^n \cdot (u(w, k))^{(k-1-n)},$$

可得 $\lim_{w \rightarrow 1} g^{(k-1)}(w) = x (\log x)^{k-1} u(1, k) + O(x (\log x)^{k-2})$. 但

$$u(1, k) = \lim_{w \rightarrow 1} \frac{1}{w} [\zeta(w) \cdot (w-1)]^k g(w, k) = g(1, k),$$

所以

$$\sum_{n < x} |\mu(n)| k^{w(n)} = \frac{1}{(k-1)!} g(1, k) x (\log x)^{k-1} + O(x (\log x)^{k-2}).$$

其中 $g(1, k) = \prod_p \left(1 + \frac{k}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k$, 证毕.

2 定理的证明

定理 1 的证明 根据 $v(n)$ 的算术含义, 我们知道 $v(n) = \max_{k|n} \{k \cdot |\mu(k)|\}$, 故由逐步淘汰原则, 有

$$v(n) = \sum_{m|n} \mu(m) \sum_{\substack{d|n \\ (d,m)=1}} d \cdot |\mu(d)|$$

$$\begin{aligned}
\beta(x) &= \sum_{n \leq x} \frac{v(n)}{n^2} = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^2} \sum_{m|n} \mu(m) \sum_{\substack{d|n \\ (d,m)=1}} d \cdot |\mu(d)| \\
&= \sum_{d \leq x} d \cdot |\mu(d)| \sum_{\substack{n \leq x \\ d|n}} \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{m|n \\ (d,m)=1}} \mu(m) \\
&= \sum_{d \leq x} \frac{|\mu(d)|}{d} \sum_{n \leq x/d} \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{m|n \\ (m,d)=1}} \mu(m) \\
&= \sum_{d \leq x} \frac{|\mu(d)|}{d} \sum_{n \leq x/d} \frac{1}{n^2} \sum_{m|n} \mu(m) \\
&= \sum_{d \leq x} \frac{|\mu(d)|}{d} \sum_{\substack{n \leq x/d \\ v(n) \cdot d}} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \cdot v(n) \leq x} \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{d \leq x/n \\ v(n) \cdot d}} \frac{|\mu(d)|}{d} \\
&= \sum_{n \cdot v(n) \leq x} \frac{1}{n^2 \cdot v(n)} \sum_{\substack{d \leq \frac{x}{n \cdot v(n)} \\ (d,n)=1}} \frac{|\mu(d)|}{d} \tag{3}
\end{aligned}$$

由引理 2 得

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{d \leq \frac{x}{n \cdot v(n)} \\ (d,v)=1}} \frac{|\mu(d)|}{d} &= \frac{\varphi(n)}{n} E_1(n) \left(\log \frac{x}{n \cdot v(n)} + \gamma \right) - E_1(x) \sum_{d|n} \frac{\mu(d) \log d}{d} \\
&\quad - 2 \frac{\varphi(n)}{n} E_2(n) + O\left(\left(\frac{x}{n \cdot v(n)} \right)^{-1/2} (\log x + 2^{w(n)}) \right)
\end{aligned}$$

所以, 我们有

$$\begin{aligned}
\beta(x) &= \sum_{n \cdot v(n) \leq x} \frac{1}{n^2 \cdot v(n)} \cdot \frac{\varphi(n)}{n} E_1(n) (\log x + \gamma - \log(n \cdot v(n))) \\
&\quad - \sum_{n \cdot v(n) \leq x} \frac{1}{n^2 \cdot v(n)} E_1(n) \sum_{d|n} \frac{\mu(d) \log d}{d} + 2 \sum_{n \cdot v(n) \leq x} \frac{1}{n^2 \cdot v(n)} E_2(n) \frac{\varphi(n)}{n} \\
&\quad + O\left(x^{-1/2} \sum_{n \cdot v(n) \leq x} \frac{1}{n^{3/2} (v(n))^{1/2}} (\log x + 2^{w(n)}) \right)
\end{aligned}$$

显见有

$$E_1(n) = C_0 \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right)^{-1}, \quad E_2(n) = O(1)$$

$$\frac{\varphi(n)}{n} E_1(n) = C_0 \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p} \right)^{-1}, \quad \text{又有}$$

$$\sum_{n \cdot v(n) > x} \frac{1}{n^2 \cdot v(n)} \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p} \right)^{-1} = O(x^{-1/2})$$

$$\sum_{n \cdot v(n) > x} \frac{1}{n^2 \cdot v(n)} E_1(n) \sum_{d|n} \frac{\mu(d) \log d}{d} = O(x^{-1/2} \log x)$$

$$\sum_{n \cdot v(n) > x} \frac{\varphi(n) \cdot E_2(n)}{n^3 \cdot v(n)} = O(x^{-1/2})$$

$$\sum_{n \cdot v(n) \leq x} \frac{1}{n^{3/2} \cdot (v(n))^{1/2}} = O(1)$$

故有 $\beta(x) = C_0 C_1 \log x + C_0 (C_1 \gamma - C_2 - C_3) - 2C_4 + O(x^{-1/2} \log x)$, 其中,

$$C_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot v(n)} \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1}$$

$$= \prod_p \left[1 + \frac{1}{(p-1)(p+1)^2}\right]$$

$$C_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n \cdot v(n))}{n^2 \cdot v(n)} \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1}$$

$$C_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot v(n)} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} \sum_{d|n} \frac{\mu(d) \log d}{d}$$

$$C_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^3 \cdot v(n)} \sum_{\substack{s=1 \\ (s,n)=1}}^{\infty} \frac{\mu(s) \log s}{s^2}$$

定理 1 证讫.

定理 2 的证明 熟知

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

故由引理 3 可得

$$\varphi^k(n) = n^k \sum_{d|n} \mu(d) \prod_{p|d} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k\right]$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \varphi^k(n) &= \sum_{n \leq x} n^k \sum_{d|n} \mu(d) \prod_{p|d} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k\right] \\ &= \sum_{d \leq x} d^k \cdot \mu(d) \prod_{p|d} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k\right] \left(\sum_{m \leq x/d} m^k\right) \\ &= \sum_{d \leq x} d^k \mu(d) \prod_{p|d} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k\right] \left[\frac{1}{k+1} \left(\frac{x}{d}\right)^{k+1} + O\left(\frac{x^k}{d^k}\right)\right] \\ &= \frac{x^{k+1}}{k+1} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d} \prod_{p|d} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k\right]^k + O(x^{k+1} \Delta_1) + O(x^k \Delta_2) \end{aligned}$$

这里 $\Delta_1 = \sum_{d > x} \frac{|\mu(d)|}{d} \prod_{p|d} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k\right]$, $\Delta_2 = \sum_{d \leq x} |\mu(d)| \prod_{p|d} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k\right]$, 应用不等式

$(1+x)^n \geq 1+nx$ ($x > -1, n \geq 0$), 可得

$$\Delta_1 = O\left(\sum_{d > x} \frac{|\mu(d)|}{d} \prod_{p|d} \left(\frac{k}{p}\right)\right) = O\left(\sum_{d > x} \frac{|\mu(d)|}{d^2} \cdot k^{\omega(d)}\right)$$

$$\Delta_2 = O\left(\sum_{d \leq x} \frac{|\mu(d)|}{d} k^{\omega(d)}\right)$$

故由引理 4 以及分部求和, 可得

$$\Delta_1 = O(x^{-1}(\log x)^k), \Delta_2 = O((\log x)^k),$$

$$\text{所以, } \sum_{n \leq x} \varphi^k(n) = \frac{1}{k+1} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d} \prod_{p|d} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k \right] x^{k+1} + O(x^k \log^k x).$$

$$\text{因为 } \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d} \prod_{p|d} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k \right] = \prod_p \left[1 - \frac{1}{p} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k\right) \right], \text{定理 2 随之成立.}$$

作者感谢陆鸣皋教授的帮助。

参 考 文 献

- [1] Suryanarayana, D., *Bull. Amer. Math. Soc.*, 76 (1970), 976.
- [2] 包那, Euler 函数 $\varphi(m)$ 的 k 次方和, 内蒙古师大学报, 1 (1984).
- [3] 闵嗣鹤, 数论的方法, 上册, 科学出版社, 1983 年, 56, 60.
- [4] A. A. 卡拉楚巴, 解析数论基础, 潘承彪、张南岳译, 科学出版社, 1984 年, 64.

Two Asymptotic Formula on $v(n)$ and $\varphi(n)$

Liu Hongquan

(Department of mathematics)

一个丢番图不等式

余红兵

(数学系)

在本文中,我们得到如下定理:

定理 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 是非零实数,不具有相同符号,且不全是无理比,那么,任给 $\epsilon > 0$, 丢番图不等式

$$|\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_s x_s^2| < (\max_{1 \leq i \leq s} x_i)^{-2/9+\epsilon}$$

有无限组正整数解 (x_1, \dots, x_s) .

1 圆法

按照 [1], 不妨设 $\lambda_1/\lambda_2 < 0$, 且是无理数; 设 N 是很大的正数, δ 是足够小的正数, 随 ϵ 而固定, 满足 $0 < 5\delta < \epsilon$. 为了方便, 记

$$\tau = N^{-2/9+5\delta}$$

又设 $R(N)$ 表示不等式

$$|\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_s x_s^2| < \tau, \quad 1 \leq x_i \leq N, \quad i = 1, \dots, s$$

的解数.

显然, 我们只需证, 存在任意大的 N , 满足

$$R(N) \geq N^{25/9}$$

按照 Davenport 引理^[1], 对任意正整数 n , 存在一个实函数 $K_n(\alpha)$, 具有以下性质

$$K_n(\alpha) = K_n(-\alpha)$$

$$K_n(\alpha) \ll \min(1, |\alpha|^{-n-1})$$

如果令 $K_1(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\alpha\beta) K_n(\alpha) d\alpha$,

则有

$$0 \leq K_1(\beta) \leq 1, \quad \text{所有实数 } \beta$$

$$K_1(\beta) = 0, \quad |\beta| \geq 1$$

1. 取 $N > 1/\delta$

$$K_1(\beta) = 1, \quad |\beta| \leq \frac{1}{3}$$

现取 $n = \lfloor \frac{3}{\delta} \rfloor + 1$, $S_i = S_i(\alpha) = \sum_{x \leq N} e(\lambda_i \alpha x^2)$, $V_i = V_i(\alpha) = \int_0^N e(\lambda_i \alpha x^2) dx$, $i = 1, 2, \dots, 5$

与 [1] 或 [2] 类似地得到

$$R(N) \geq \tau \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^5 S_i K_n(\alpha \tau) d\alpha = \tau I$$

从而我们只需证

$$I \gg N^5$$

这里, 以及以后的 “ \ll ” 或 “ \gg ” 所蕴含的常数至多依赖于 $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ 及 ε, δ .

2 主区间和余区间的定义

我们定义主区间为

$$\mathcal{M} = \{\alpha; |\alpha| \leq N^{-1+\varepsilon-\delta}\}$$

余区间为

$$m = \{\alpha; N^{-1+\varepsilon-\delta} < |\alpha| < \tau^{-1} N^\delta\}$$

平凡区间为

$$t = \{\alpha; |\alpha| \geq \tau^{-1} N^\delta\}$$

又令

$$I = \int_m + \int_n + \int_t = I_1 + I_2 + I_3$$

由于

$$K_n(\alpha \tau) \ll (|\alpha \tau|)^{-n-1}$$

于是, 由平凡估计得

$$\begin{aligned} I_3 &\ll N^5 \int_{\tau^{-1} N^\delta}^{\infty} (\alpha \tau)^{-n-1} d\alpha = \tau^{-1} N^5 N^{-n\delta} \\ &= \tau^{-1} N^{5-n\delta} \ll \tau^{-1} N^2 = o(N^5) \end{aligned}$$

3 主区间的处理

我们将证明 $I_1 \gg N^5$.

由 Van der Corput 引理, 易见, 当 $\alpha \in \mathcal{M}$ 时,

$$S_i - V_i \ll 1 \quad i = 1, 2, \dots, 5$$

因此

$$S_1 \cdots S_5 - V_1 \cdots V_5 = \sum_{i=1}^5 (S_i - V_i) \left(\prod_{i>1} S_i \right) \left(\prod_{i<5} V_i \right) \ll N^4.$$

由此可得

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\prod_{i=1}^5 S_i - \prod_{i=1}^5 V_i \right) K_n(\alpha\tau) d\alpha \ll N^{-14/9-\delta} \cdot N^4 = o(N^3)$$

分部积分得到 $V_i(\alpha) \ll |\alpha|^{-1/2}$, 对 N 一致地成立. 故

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\prod_{i=1}^5 V_i K_n(\alpha\tau) \right) d\alpha \ll \int_{N^{-14/9-\delta}}^{\infty} \alpha^{-5/2} d\alpha = o(N^3)$$

从而只需证

$$I'_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^5 V_i K_n(\alpha\tau) d\alpha \gg N^3$$

我们有

$$\begin{aligned} I'_1 &= \int_0^N \cdots \int_0^N \int_{-\infty}^{+\infty} e((\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_s x_s^2)\alpha) K_n(\alpha\tau) d\alpha dx_1 \cdots dx_s \\ &= \int_0^N \cdots \int_0^N \int_{-\infty}^{+\infty} e((\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_s y_s)\alpha) K_n(\alpha\tau) \\ &\quad \cdot (y_1 \cdots y_s)^{-1/2} d\alpha dy_1 \cdots dy_s \\ &= \tau^{-1} \int_0^N \cdots \int_0^N \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e((\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_s y_s)\alpha) K_n(\alpha\tau) d(\alpha\tau) \right\} \\ &\quad \cdot (y_1 \cdots y_s)^{-1/2} dy_1 \cdots dy_s \end{aligned}$$

以上积分次序的交换是合理的^[1].

考虑区域 $\mathcal{S}: (y_2, \dots, y_s)$, 满足 $\delta N^2 < y_2 < 2\delta N^2$, $\delta^2 N^2 < y_3, y_4, y_s < 2\delta^2 N^2$, 由于 $\lambda_1/\lambda_2 < 0$, 类似于 [1], 可知 $y_1 \asymp N^2$. 并且 y_1 所落入的区间的长度是 $\asymp \tau$, 故 \mathcal{S} 的体积 $\gg N^s \cdot \tau$.

又由 Davenport 引理, 可知

$$\tau^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e((\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_s y_s)\alpha) K_n(\alpha\tau) d(\alpha\tau) \gg \tau^{-1}$$

故有

$$I'_1 \gg (N^{s^0})^{-1/2} \tau^{-1} (N^s \tau) = N^3 \quad \text{证毕.}$$

4 余区间的处理

我们将证明 $I_2 = o(N^3)$.

引理 1 (Hua) $\int_0^1 |S_i|^4 d\alpha \ll N^{2+\delta}$

引理 2 存在无限对整数 a, q , $(a, q) = 1$, $q > 0$, 使

$$\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{a}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$$

证明 因 λ_1/λ_2 是无理数, 由熟知的逼近定理即得结果.

引理 3 对引理 2 中确定的 q , 如果又有 a', q' , 使 $1 \leq q' < q$, 则有

$$\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} q' - a' \right| > \frac{1}{2q}$$

证明 首先 $aq' - a'q \neq 0$, 否则 $\frac{a}{q} = \frac{a'}{q'}$, 然而 $(a, q) = 1, q' < q$, 因此这不可能.

又

$$\begin{aligned} \left| q' \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - a' \right| &= \left| q' \left(\frac{aq' - a'q}{qq'} \right) - q' \left(\frac{a}{q} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \right| \\ &\geq q' \left\{ \frac{|aq' - a'q|}{qq'} - \left| \frac{a}{q} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right| \right\} \\ &> q' \left\{ \frac{1}{qq'} - \frac{1}{2q^2} \right\} \geq \frac{1}{q} - \frac{q}{2q^2} = \frac{1}{2q} \quad \text{证毕.} \end{aligned}$$

由引理 2 确定的 $q \rightarrow +\infty$, 我们取 $N = q^{9/10}$, 从而 $N \rightarrow +\infty$. (以下设 N 很大)

引理 4 如果 $\alpha \in m$, 则 $\sup_{\alpha \in m} \min(|S_1|, |S_2|) \ll N^{2+2\delta}$.

证明 首先 $\alpha \in m$, 则存在 $a_i, q_i, (a_i, q_i) = 1, 1 \leq q_i \leq N^{9/10+2\delta}, (i=1, 2)$.

使得

$$\left| \lambda_i \alpha - \frac{a_i}{q_i} \right| < 1/q_i N^{14/9+2\delta} \quad (i=1, 2) \quad (1)$$

a_i 不能是 0, 否则将有 $|\alpha| \leq N^{-14/9-\delta}$, 这和 $\alpha \in m$ 矛盾

另一方面, 易见

$$|\lambda_i \alpha| \ll \frac{a_i}{q_i} \ll 1/\lambda_i \alpha, \quad (i=1, 2)$$

下面我们证明

$$\max(q_1, q_2) \geq N^{4-2\delta} \quad (2)$$

如果 (2) 不成立, 则由 (1) 推出:

$$\begin{aligned} \left| a_2 q_2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - a_1 q_2 \right| &= q_1 q_2 \left(\frac{a_2/q_2}{\lambda_2 \alpha} \right) \left(\lambda_1 \alpha - \frac{a_1}{q_1} \right) \\ &- \frac{(a_1/q_1)}{\lambda_1 \alpha} \left(\lambda_2 \alpha - \frac{a_2}{q_2} \right) \ll q_1 q_2 \left(\left| \lambda_1 \alpha - \frac{a_1}{q_1} \right| + \left| \lambda_2 \alpha - \frac{a_2}{q_2} \right| \right) \\ &\ll q_2 N^{-\frac{11}{9}-2\delta} + q_1 N^{-\frac{11}{9}-2\delta} \ll N^{-\frac{10}{9}-4\delta} < \frac{1}{2q} \end{aligned}$$

($q = N^{1/9}$, 且 N 很大)

再者, $|a_2 q_1| \geq 1$, 故由引理 3, 可得

$$|a_2 q_1| \geq q \quad (3)$$

然而, 我们又有

$$\alpha \in m, \frac{a_2}{q_2} \ll \tau^{-1} N^\delta + 1,$$

故有

$$\begin{aligned} a_2 q_1 &= q_1 q_2 \frac{a_2}{q_2} \ll N^{\frac{8}{9}-2\delta} \tau^{-1} N^\delta = N^{\frac{8}{9}-2\delta} \cdot N^{\frac{2}{9}-\delta} \cdot N^\delta \\ &= N^{\frac{11}{9}-3\delta} = o(N^3) \end{aligned}$$

这与 (3) 式矛盾, 从而 (2) 成立.

不妨设 $q_1 \geq q^{\frac{4}{9}-2\delta}$, 由 Weyl 不等式, 可得

$$|S_1| \ll N^{1+\delta} (N^{-\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{N^2}{q}\right)^{-\frac{1}{2}}) \ll N^{\frac{7}{9}+2\delta}$$

这就证明了引理 4.

下面证明 $I_2 = o(N^3)$

由 Hölder 不等式、引理 1、引理 4 以及 $K_n(\alpha\tau) \leq 1$, 可得 (不妨认为 $S_1 \ll N^{\frac{7}{9}+2\delta}$)

$$\begin{aligned} I_2 &\ll \int_m \left| \prod_{i=1}^5 S_i \right| da \ll N^{\frac{7}{9}+2\delta} \prod_{i=2}^5 \left(\int_m |S_i|^4 da \right)^{\frac{1}{4}} \\ &\ll N^{\frac{7}{9}+2\delta} \tau^{-1} N^3 \prod_{i=2}^5 \left(\int_0^1 |S_i|^4 da \right)^{\frac{1}{4}} \\ &\ll N^{\frac{7}{9}+\delta} \tau^{-1} N^\delta \cdot N^{2+\delta} = N^{3-\delta} = o(N^3) \quad \text{证毕.} \end{aligned}$$

5 定理的证明

由以上得到的结果, 可见

$$R(N) \geq \tau I = \tau(I_1 + I_2 + I_3) \gg \tau \cdot N^3 \geq N^{\frac{25}{6}}$$

完全类似地可证明下面的结果:

在定理的条件下, 对任意实数 μ 不等式

$$|\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_s x_s^2 + \mu| < (\max_{1 \leq i \leq s} x_i)^{-\frac{2}{5}+\delta}$$

有无限多正整数解.

单增副教授对本文提出了许多宝贵意见, 在此致以深切的谢意.

参 考 文 献

- [1] Vaughan, R. C., The Hardy-Littlewood method, Cambridge University Press, 1981, 141—157.
- [2] Davenport, H., Analytic methods for Diophantine equations and Diophantine inequalities, Ann Arbor: Ann Arbor publishers, 1962, 157—168.
- [3] Davenport, H., Indefinite quadratic forms in many variables, *Mathematika*, 3 (1956), 81—101.

On a Diophantine Inequality

Yu Hongbing

(Department of Mathematics)

锈规作图论

侯晓荣

源 远

(数学系)

(少年班)

只能画出同一半径的圆的圆规称为锈规。这篇论文所给出的即是锈规作图的理论。

主要结果：把给定的两点作为 $0, 1$ 嵌入一张复平面，一个点 Z 能仅由一副锈规作出，当且仅当 $Z \in Q$ (Q 为有理数域， Q_n 为 Q 的 2^n 次的正规扩域， $Q = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} Q_m$)。

上述结果的两个特例，回答了著名几何学家 D. Pedoe 几年前提起的两个古老问题^[1,2]：给定两点 A, B ，能否仅用一副锈规作出点 C ，使得 (1) $\triangle ABC$ 为一等边三角形；(2) C 为 A, B 的对称中心。这头一个问题，已有人给出了解答^[3,4]。

1 基本概念

作图原则：(1) 能够以已确定的点，为圆心作圆；(2) 作出两圆，其交点(如有的话)也能作出；(3) 能够在已知范围内取定任意的一些点，这些点至多可以不在这样的图上，这种图在任意指定的有限步内可以判定是前述两原则所规定的图上；(4) 有限次运用上述诸原则。

若 u 为一平面点集，记 $u' = \{Z | \exists Z_j, Z_k \in u, j \neq k, |Z_j - Z| = |Z_k - Z| = \rho, |Z_j - Z_k| \leq 2\rho\}$ ； $F(u) = u \cup u'$ ， $F^n(u) = F(F^{n-1}(u))$ 。

定义 1 若 $\exists n \in \mathbb{N} \Rightarrow Z \in F^n(M)$ ，则称 Z 是认 M 为基的一个确定点。

在本节我们将把讨论限制于 $|Z_j - Z_0| < \rho$ 的范围内(根据作图原则(3)及下节的同变定理，很容易把所有结论推广到一般情形)。此时，确定点在整个平面内是可稠密的^[1]，我们不能在有限步内判定任选的一些点是否为确定点，根据作图原则，不可能有更多的点被确定。只考虑确定点不会有什么遗漏。

记点 Z 所对应的复数为 Z 。

定义 2 若 Z 是一个以 $\{Z_1, Z_2\}$ 为基的确定点， $Z - Z_1 = L(D, r) \cdot (Z_2 - Z_1)$ ， $D = |Z_2 - Z_1|$ ，则称 $L(D, r)$ 为一个以 (D, r) 为基的可作线性变换。其中 $|Z_2 - Z_1|$ 表示点 Z_2, Z_1 之间的距离。

1985年12月5日收到。

显然, $L(D, r)$ 只与 D, r 有关. 记所有以 (D, r) 为基的可作线性变换的集合为 $\{L(D, r)\}$.

定义 3 若 $L \in \{L\} \equiv \bigcap_{D \in K^+} \{L(D, \rho)\}$, 则称 L 为一个可作线性变换 (表征该变换的复数也记为 L).

依照这种说法, D. Pedoe 的两个问题就成了判定 $e^{i\pi/3} \in \{L\}$ 和 $\frac{1}{2} \in \{L\}$ 的真假性问题了.

定义 4 $K \equiv \bigcup_{n \in \mathbf{N}} F^n(\{Z_0, Z_1: |Z_1 - Z_0| = \rho\})$, 称 K 为基本阵.

显然, $\{L(\rho, \rho)\} = \{L: L = m + ne^{i\pi/3}, m, n \in \mathbf{Z}\} = \left\{ L: L = m + in\sqrt{3}, \text{ 或 } L = m + \frac{1}{2} + i\left(n + \frac{1}{2}\right)\sqrt{3}, m, n \in \mathbf{Z} \right\}$ 刻画出了基本阵的整个图象.

2 基本定理

利用基本阵易知

定理 1^[3,4] 给定 $M = \{Z_0, Z_1\}$, 能够作出

$$\{Z_j: j=1, 2, \dots, n, |Z_{j+1} - Z_j| = \rho, Z_{n+1} = Z_0\}$$

定理 2 (平移定理)^[3,4] 已知 Z_0, Z_1, Z_2 , 能够作出 Z_3 , 使得 $Z_2 Z_3 \cong Z_0 Z_1$.

定理 2 可由归纳法加以证明: (1) 若 $|Z_1 - Z_0| = |Z_2 - Z_0| = \rho$, Z_3 可作; (2) 由定理 1, 任意的 Z_0, Z_1, Z_2 可归结到 (1).

平移定理的代数解释是加法定理, 即用锈规能够做复数的加减运算.

定理 3 (同变定理) $\{Z_j: j=0, 1, \dots, n\}$ 为已知,

$$L \in \bigcap_{j=0}^{n-1} \{L(|Z_{j+1} - Z_j|, r)\} \Rightarrow L \in \{L(|Z_n - Z_0|, r)\}.$$

证明 由加法定理可知

$$L \cdot (Z_1 - Z_0) + L \cdot (Z_2 - Z_1) + \dots + L \cdot (Z_n - Z_{n-1}) = L \cdot [(Z_1 - Z_0) + (Z_2 - Z_1) + \dots + (Z_n - Z_{n-1})] = L \cdot (Z_n - Z_0).$$

记 $L^* \equiv \frac{1}{2} + i\lambda, \lambda \in \mathbf{R}$.

定理 4 若 $|Z_k - Z_l| \leq \frac{2\rho}{|L^*|}$, 则用锈规可作出映射 $F: Z = L^* \cdot (Z_k - Z_l) \mapsto F(Z)$,

$$|F(Z) - Z_l| = |F(Z) - Z_k| = \frac{\rho}{|L^*|}.$$

映射 F 由下述操作定义: (1) 分别以 Z_l, Z_k, Z 为圆心作圆, 取后者与前二者的外围 (或内侧) 交点 Z_1, Z_2 ; (2) 分别以 Z_1, Z_2 为圆心作圆, 取其异于 Z 的交点即为 $F(Z)$.

证明 $Z_1, F(Z), Z$ 三点同在以 Z_1 为圆心的圆上, 故 $\angle Z_1 Z_1 F(Z) = 2\angle Z_1 Z F(Z) = \angle Z_1 Z Z_k$, 可见, $\triangle Z_1 Z_1 F(Z)$ 与 $\triangle Z_1 Z Z_k$ 相似, 定理显然.

易知

定理 4* 给定 $M = \{Z_0, Z_1\}$, 若 $L^* \in \{L\}$, 则

可作出 $\{Z_j; j=1, 2, \dots, n, |Z_{j+1} - Z_j| = \frac{\rho}{|L^*|}, Z_{n+1} = Z_0\}$.

3 推演和化简

命题 1 $\{L(D, r)\} = \{L(1, r/D)\}$

只要在 $L(D, \rho)$ 的定义式 $Z - Z_i = L(D, \rho) \cdot (Z_k - Z_i)$, ($|Z_k - Z_i| = D$) 两端同除以 D 即可证明该命题.

由命题 1、定理 3、定理 4* 可得

命题 2 $L^* \in \{L\} \Rightarrow \{L(1, |L^*|)\} \subset \{L\}$

由定理 3、定理 1 及基本阵的性质可得

命题 3 $\{L(\rho, \rho)\} \subset \{L\}$

$e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \in \{L\}$, 这就是 D. Pedoe 的等边三角形问题的答案.

由
得

$$\begin{cases} |Z - Z_1| = \rho \\ |Z - Z_k| = \rho \end{cases}$$

$$Z = \frac{Z_1 + Z_k}{2} + i \frac{Z_1 - Z_k}{2} \sqrt{\frac{4\rho^2}{|Z_1 - Z_k|^2} - 1} = \langle Z_1, Z_k \parallel |\rho \rangle$$

(另有一解是 $\langle Z_k, Z_1 \parallel |\rho \rangle$). 于是作为命题 2 的推论有

$$L^* \in \{L\}; L_1, L_k \in \{L\}; |L_k - L_1| \leq 2|L^*|; \Rightarrow \langle L_1, L_k \parallel |L^*| \rangle \in \{L\}.$$

以下, $L^* \in \{L\}, \rho_j = |L^*|$.

命题 4 $|L^*|$ 可以取到 $\sqrt{2n-1} (n \in \mathbb{N})$.

证明 由命题 3 知, $\frac{1}{2} + i(m + \frac{1}{2})\sqrt{3} \in \{L\}$, 即 $\rho_1 = \sqrt{(m+1)^2 - m^2}$; 同理 $2, -1 \in \{L\}$,

$\Rightarrow \langle 2, -1 \parallel \rho_1 \rangle = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{\rho_1^2 - \frac{9}{4}} \in \{L\}$, 即 $\rho_2 = \sqrt{\rho_1^2 - 2}$; 连续重复从 ρ_1 到 ρ_2 的程序可

得 $\rho_{j+1} = \sqrt{\rho_j^2 - 2}, j \in \mathbb{N}$ (根号内自然不允许负值出现). 由于 ρ_1^2 可以是任意的奇数, 故

$|L^*|$ 可以取到 $\sqrt{2n-1} (n \in \mathbb{N})$.

定理 4 的逆定理显然成立. 在上述讨论的基础上明确叙述如下:

$$\rho = \sigma, \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 2, \Rightarrow \frac{1}{2} \pm i\sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{4}} \in \{L\}$$

4 “中心”问题

下述几条是显然的 (下文 $L \in \{L\}$):

$$(1) L, L_1 \in \{L\} \Rightarrow L \pm L_1 \in \{L\}$$

$$(2) L, L_1 \in \{L\} \Rightarrow L \cdot L_1 \in \{L\}$$

$$(3) \bar{L} \in \{L\}, \bar{L} \text{ 为 } L \text{ 的共轭变换}$$

现在来解答 D. Pedoe 的“对称中心”问题,

$$\frac{1}{2} \in \{L\}$$

证明 (证明中根号内要求不出现负值, $m, n \in \mathbf{N}$).

$$(a) \langle -L, L \parallel \sqrt{2n-1} \rangle = i \frac{L}{|L|} \sqrt{2n-1-|L|^2} \in \{L\}$$

$$(b) L=2, n=3, \stackrel{(a)}{\Rightarrow} i \in \{L\}$$

$$-i \cdot i \frac{L}{|L|} \sqrt{2n-1-|L|^2} = \frac{L}{|L|} \sqrt{2n-1-|L|^2} \in \{L\}$$

$$(c) L=1, n=2, \stackrel{(b)}{\Rightarrow} \sqrt{2} \in \{L\}$$

$$L = \sqrt{2} \stackrel{(b)}{\Rightarrow} \sqrt{2n-3} \in \{L\}$$

$$L = \sqrt{2m-1} \stackrel{(b)}{\Rightarrow} \sqrt{2(n-m)} \in \{L\}$$

$$\implies \sqrt{m} \in \{L\}$$

$$(d) L=1+i \cdot \sqrt{15}, n=9$$

$$\stackrel{(b)}{\Rightarrow} \frac{1+i\sqrt{15}}{4} \in \{L\}$$

$$(e) L = \frac{1+i\sqrt{15}}{4} \Rightarrow L + \bar{L} = \frac{1}{2} \in \{L\}$$

5 $\{L\}$ 的结构

本节的结果是: $L^{-1} \in \{L\}$ ($L \neq 0$), $\sqrt{\bar{L}} \in \{L\}$. 因而结合上一节所列 $\{L\}$ 中的几条运算规律及平凡事实 $Q \supset \{L\}$, 有

命题 5 $\{L\} = Q$

证明中要用到如下一些结果:

$$(a) \eta \in R \quad |\eta| < \rho, \eta \in \{L\} \Rightarrow i \cdot \langle \pm \eta, \mp \eta \parallel \rho \rangle = \pm \sqrt{\rho^2 - \eta^2} \in \{L\}$$

$$(b) i, \sqrt{m}, 2^n \in \{L\}, m \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{Z}$$

$$(c) \rho_i = |L^*|$$

$$(d) \rho = \sigma \left(\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 2 \right) \Rightarrow \frac{1}{2} + i \sqrt{\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{4}} \in \{L\} \Rightarrow \left| \frac{1}{2} + i \sqrt{\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{4}} \right|^2 \\ = \frac{1}{\sigma^2} \in \{L\}$$

$$(1) \sigma \geq \frac{1}{2}, \sigma \in \{L\} \Rightarrow \rho_i = \sigma$$

$$\text{证 (c)} \Rightarrow \rho_1 = \left| \frac{1}{2} + i \frac{1}{2} \sqrt{4m^2 + 1} \right| = \sqrt{m^2 + \frac{1}{2}}$$

$$\rho_2 = \left| \frac{1}{2} + im \right| \sqrt{m^2 + \frac{1}{4}}, \sigma \geq \frac{1}{2}, \sigma \in \{L\} \stackrel{(a)}{\Rightarrow} \eta = \sqrt{\rho_1^2 - \sigma^2} \in \{L\} \stackrel{(a)}{\Rightarrow} \sqrt{\rho_2^2 - \eta^2}$$

$$= \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{4}} \in \{L\} \Rightarrow \frac{1}{2} + i \cdot \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{4}} \in \{L\} \stackrel{(c)}{\Rightarrow} \rho_i = \left| \frac{1}{2} + i \cdot \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{4}} \right| = \sigma.$$

$$(2) \zeta \in R \cap \{L\} \Rightarrow \sqrt{\zeta} \in \{L\}$$

$$\text{证 } \zeta \in R^+ \cap \{L\} \Rightarrow \zeta + \frac{1}{2}, \zeta - \frac{1}{2} \in \{L\} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \rho_3 = \zeta + \frac{1}{2} \stackrel{(a)}{\Rightarrow} \sqrt{\rho_3^2 - \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2\zeta} \in \{L\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2\zeta} = \sqrt{\zeta} \in \{L\}; 0 \in \{L\}; \zeta \in (R \setminus R^+) \cap \{L\} \Rightarrow$$

$$\sqrt{-\zeta} \in \{L\} \Rightarrow -i \cdot \sqrt{-\zeta} = \sqrt{\zeta} \in \{L\}.$$

$$(3) \eta \in R^+ \cap \{L\} \Rightarrow \frac{1}{\eta} \in \{L\}$$

$$\text{证 } \eta \in R^+ \cap \{L\} \Rightarrow 2^n \cdot \eta \in \{L\}, \left(\frac{1}{2} \leq 2^n \cdot \eta \leq 2 \right) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \rho = 2^n \cdot \eta \stackrel{(d)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{(2^n \cdot \eta)^2} \in \{L\} \Rightarrow 2^{2n} \cdot \eta \cdot \frac{1}{(2^n \cdot \eta)^2} = \frac{1}{\eta} \in \{L\}.$$

$$(4) L^{-1} \in \{L\}, L \neq 0$$

$$\text{证 } |L|^2 \in \{L\} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \frac{1}{|L|^2} \in \{L\} \Rightarrow \bar{L} \cdot \frac{1}{|L|^2} = L^{-1} \in \{L\}$$

$$(5) \sqrt{L} \in \{L\}$$

$$\text{证 } |L|^2 \in \{L\} \Rightarrow |L| \in \{L\} \Rightarrow \sqrt{|L|} \in \{L\}; |L| \in \{L\} \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \frac{1}{|L|} \in \{L\}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{|L|} = e^{i\theta} \in \{L\} \Rightarrow \cos \theta, \sin \theta \in \{L\} \Rightarrow \frac{1 + \cos \theta}{2}, \frac{1 - \cos \theta}{2} \in \{L\} \stackrel{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} = \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} = \sin \frac{\theta}{2} \in \{L\} \Rightarrow e^{i\theta/2} \in \{L\}.$$

$$\sqrt{L} = \pm \sqrt{|L|} \cdot e^{i\theta/2} \in \{L\}.$$

6 理论的完善

这一节将用新观念来完善我们的理论。

用 $F(M, r)$ 表示当锈规脚间开度为 r 时, 以 M 为基的全部确定点的集合。

定义 若点 $Z \in \bigcap_{\substack{r \in \mathbb{R}^+ \\ r > |Z_1 - Z_0|}} F(M, r)$, 则称 Z 为以 M 为基的锈点。

定理 若点 Z 为锈点, $M = \{Z_0, Z_1\}$, 则

$$Z - Z_0 = L \cdot (Z_1 - Z_0)$$

其中 L 是一(复常数)线性变换。

记所有上述线性变换的集合为 $\{L\}$, 则 $\{L\} = Q$ 。

推论 不能用锈规对复数施行乘积、求逆、开方等运算。

定理 0 $M = \{Z_0, Z_1\}$, $\rho > |Z_1 - Z_0|$, 则确定点集在平面上任何有限的范围内是可稠密的。

证明这一定理时, 可以运用定理 1—4、基本阵; 借助于它们, 不难证明锈点集的可稠密性。

命题 0 $M = \{Z_0, Z_1\}$, $\rho \leq |Z_1 - Z_0|$, 则用一副锈规能且仅能作出

$$\{Z \mid Z - Z_0 = L \cdot (Z_1 - Z_0), L \in Q\}$$

这里“作出”是在“生锈”的意义上而言的。根据作图原则(3)、定理 3、定理 0 不难获得该命题的证明。详细说来, 要把作图原则(3)用数学语言来转述, 然而为了这样一个显而易见的命题, 无庸如此。

参 考 文 献

- [1] Pedoe D., *Cruz Mathematicorum*, 8 (1982), No. 3, 79.
- [2] 张景中, 自然杂志, 7 (1984), No. 12, 927,
- [3] 肖韧吾, 数学通讯, 2 (1983), 26.
- [4] 张景中、杨路, 初等数学论丛第 6 辑, 上海人民出版社, 1983, 37.
- [5] Pedoe D., Aeppli A., *Cruz Mathematicorum*, 9 (1983), No. 7, 218.

Theory of Construction with Rusty Compass

Hou Xiaorong

Yuan Yuan

(Department of Mathematics)

(the Honored Youth Class)

非晶硅碳(氢)中的光致亚稳效应 及表面水气吸附的影响

王 军

赵世富

韩大星

(中国科学技术大学物理系)

(中国科学院物理所)

引言

存在于 a-Si:H 中的光致亚稳效应, 即 SW (Staebler-Wronski) 效应, 近年来引起了人们的极大兴趣, 成为十分活跃的课题之一。光致亚稳缺陷不仅强烈地影响着样品的暗电导和光电导, 同时对样品的其它许多性质也存在着影响^[1]。为了解光致亚稳缺陷产生和消失的机理, 人们进行了大量的实验研究和理论探讨。许多实验事实表明^[2, 3], SW 效应是一种体效应。因此人们通常将 SW 效应产生的原因, 归结为样品体内非平衡载流子复合过程所引起的悬挂键密度的增加。然而, 就目前存在的模型来说, 圆满地解释与 SW 效应有关的全部实验现象, 任何单独一个模型都是无能为力的。

近几年来, 人们在 a-Si:H 中发现了一些新的亚稳效应。虽然它们同样可以影响样品的性质, 但与 SW 效应不同的是这些新的效应只与样品的表面状态及界面状态有关, 与表面氧化层及表面层上的吸附物质有关^[4-5]。B. Aker 和 M. Yamaguchi 各自分别在掺硼的 P 型 a-Si:H 和非掺杂的 n 型 a-Si:H 中详细研究了这些新的亚稳效应^[6, 7]。他们的研究结果表明, 这些新的亚稳效应受到了表面和界面附近空间电荷积累层的影响。

在高频辉光放电淀积工艺制备的 a-SiC:H 样品上, 我们观察到了与 a-Si:H 中的 SW 效应相类似的效应, 而且同样存在着确定的曝光态和退火态。实验中同时发现, 在真空系统中, 对于表面有氧化层和水分子吸附层存在的样品, 从室温加热到 100°C 时, 样品的暗电导增加了五个数量级; 重新回到室温的样品, 如果使样品表面重新有少量水气吸附, 暗电导将下降二到三个数量级, 恢复到最初的状态。这种电导的反常变化, 可以解释为由于氧化层和水分子吸附层的存在, 在靠近样品表面附近由空穴形成的空间电荷层产生的影响而造成的。

1986年5月16日收到。

1 实验与结果

用高频辉光放电淀积工艺制备 α -SiC:H 样品。制备条件为：高频电源频率 10MHz，电流 60mA，电压 640V；反应气体采用 SiH_4 和 CH_4 的混合物，其气体比为 1:1；电离室预真空为 3×10^{-3} Torr，样品淀积时为 4.5×10^{-1} Torr，淀积速率为 $85 \text{ \AA}/\text{min}$ ；淀积底板为 95 玻璃，淀积时其温度为 300°C ，样品厚度为 $0.6 \mu\text{m}$ 。样品的化学组分由 ^{19}F 低能核反应、称重法、气体库仑滴定法和 XES 的实验结果综合分析得出。样品各主要成分的原子百分比为： $\text{H}:\text{C}:\text{N}:\text{O}:\text{Si} = 27.7:18.1:7.2:3.6:43.4$ 。

测量引线由涂在样品上的 5mm 长，0.5mm 间隔的共面型胶体石墨电极上引出。在室温时，6—230V 的直流电压范围内电极与样品有良好的欧姆接触。暗电导和光电导的测量，在屏蔽良好、温度可控并带有光学窗口的金属恒温器中进行。实验中样品所加电压为 230V 直流电压，电流测量使用 KEITHLY 614 型电表，实验过程中样品所处真空度优于 1×10^{-6} Torr。

将样品从室温升至 160°C ，并在此温度下保温 1 小时，样品由此进入到一个确定的退火态 (A 态)。然后令处于 A 态的样品在 -150° — 160°C 之间做温度循环，测量以上全部过程中样品的电流—温度关系。图 1 为根据测量结果绘出的电导—温度曲线。每条曲线上有实验点三十余个，描在坐标纸上后，线性区域内采用最小二乘法拟合，其余区域数据点用光滑曲线连接。从图中可以看到，样品由初态开始升温时，在电导起始点 *a* 的附近电导随温度的变化是缓慢的；而从 60°C 附近开始，电导随温度急剧增加，并在 100°C 附近的温度达到极大值。此时的电导值比初始值要高出大约五个数量级；温度继续升高时，电导略为下降后又继续升高至 *b* 点，在 160°C 附近保温 1 小时后，电导值降到了 *c* 点。退火后的降温过程中测得的 $\sigma_s \sim 1/T$ 曲线 (*cd* 段) 中存在着三段明显的线性区域，即相

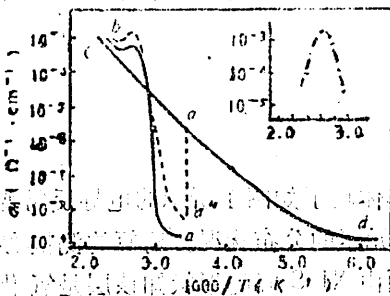


图 1 样品的暗电导 σ_d 与温度 T 的相互关系

应于不同的温度有三个热激活导电过程。室温至 100°C 的温区内，电导激活能 E_s 和电导率指数前因子 σ_0 分别为 0.51eV 和 $4.6 \times 10^{10} \text{ cm}^{-1}$ ；室温以下的二个电导激活能分别为 0.38eV 和 0.31eV ；在 -70°C 至 -150°C 的温度范围内，不存在明显的热激活导电过程。

样品经第一次退火之后，在多次升降温过程中测量的 $\sigma_s \sim 1/T$ 曲线都与图 1 中的曲线 *cd* 有较好的符合，反常的只是第一次升温过程中的曲线段 *ab*。为了验证这种反常的电导变化现象与样品表面吸附之间的联系，将去离子水蒸气通入样品室内，使水气重新吸附在样品表面上。重新将系统真空度提高时，样品的电导值下降了三个数量级，即由 *a'* 点降到了 *a''* 点。再次加热样品，即可得到图 1 中的虚线结果，与第一次升温测得的结果基本一致。由此可见，在第一次升温过程中样品出现的电导异常现象，是样品表面水分子的吸附所引起的。

曝光和退火实验，在前述装置内完成。对于室温下处于 A 态的样品，用波长小于 9000 \AA ，光强约为 $200\text{mW}/\text{cm}^2$ 的可见光均匀地辐照，记录的光电流、暗电流如图 2 所示。光电流测量采用稳频 He-Ne 激光器为光源，调整插入光路中的二个偏振片，以抵消激光输出的长时漂

移, 提高光源的稳定度。实验结果表明, 有效曝光时间达到三个小时后, 光电导和暗电导都趋向稳定值。图 2 示出的第二条曲线是延长曝光至 20 小时后再退火而得到的可逆过程曲线。样品所处的 B 态是一个确定和稳定的状态, 与 A 态相比光电导要低 10 倍, 暗电导低约 5 倍。

图 3 给出了样品在 A 态和 B 态时的暗电导——温度关系变化曲线。从图中看出, 强光辐

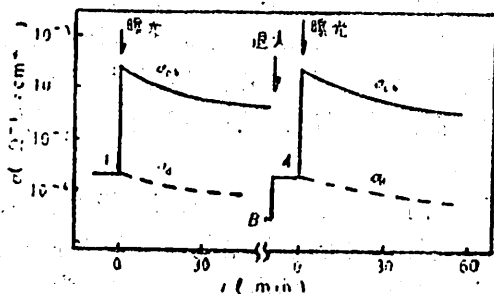


图 2 曝光过程中光电导 σ_{ph} 和暗电导 σ_d 随时间变化曲线

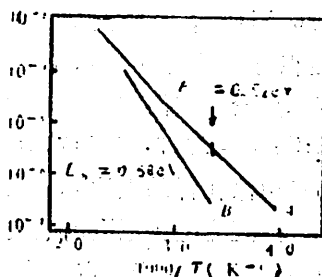


图 3 A 态和 B 态时样品的暗电导 σ_d 随温度变化曲线

照之后, 样品的电导下降, 同时激活能增加, 而且 160°C 恒温退火后电导值又得以恢复; 在室温至 160°C 的范围内, B 态电导恒比 A 态电导为小。a-SiC:H 样品的实验结果与 a-Si:H 中的 SW 效应的结果是极为相似的。

2 分析与讨论

测试了两块同一时期, 但不同炉次生产的样品, 结果都体现了如图 1 所示的电导反常变化现象。取其中的一块做 XES 剖面分析, 以了解样品中各元素的分布状况。对氧的测量结果如图 4 所示, 可见在样品表面存在着几十埃的富氧层, 而由 XES 峰的形状知该层是氧化层。

M. Yamaguchi 等人的实验结果表明^[7], 在 n 型 a-Si:H 的样品表面存在 5~50 Å 厚的氧化层时, 样品的表面附近会形成空穴积累层, 引起表面处的能带向上弯曲。这时, 样品的电导主要由空穴积累层的电导所决定, 电极接触表现出超欧姆型行为。当样品表面有水分子吸附层存在时, 对于 n 型的 a-Si:H 来说, 水分子的作用相当于电子施主, 它可以隧穿到氧化层的内侧而与空穴积累层中的空穴复合, 其结果导致表面能带向上弯曲程度减小, 电导值降低。当吸附的水分子达到一定的数目时, 电导降得更低, 表面能带变成向下弯曲, 电极接触表现出了良好的欧姆型行为。

已有的研究结果表明^[4, 5, 8], 当电荷积累层对样品的总电导起支配作用时, 用通常方法得出的电导率, 即从样品的总电导和样品的几何尺寸计算出的结果, 较电荷积累层的实际电导率要低的多。因为此时流经样品的绝大部分电流都集中在厚度为 δ 的电荷积累层中, 而 δ 要比样品的厚度 d 小得很多。 δ 的数值取决于温度和电荷积累的分布, 典型的数据是 $\delta \sim 50$

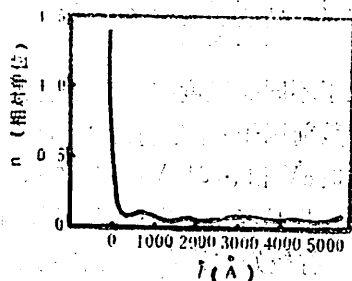


图 4 氧的浓度 n 随样品深度 l 的变化关系

Å, 而样品厚度一般都在 10^5 Å 量级。

基于以上考虑, 我们不难理解图 1 中的实验结果。样品在测试之前在空气中存放时间已达半年, 致使样品表面形成了氧化层和水分子吸附层, 因此样品最初体现出了很好的欧姆型接触性质和较小的电导率; 在真空中对样品进行加热处理, 表面吸附的水分逃逸离开样品表面并被抽出样品室外, 于是形成了电导的急剧上升和 100°C 附近的电导峰。图 3 的 B 态暗电导是在消除了表面吸附后的样品本征曲线, 若将图 1 中 *ab* 段高于图 3 中 B 态的电导差值等效地视为表面吸附的贡献, 则可将两部分曲线相减而得到表面吸附部分的电导温度特性 (如图 1 中的插图)。由此可见, 表面吸附在 100°C 附近的电导贡献是峰状的, 而它在第二次退火时不再出现。

a-SiC:H 样品在消除了表面吸附层的影响后, 其曝光退火行为表明, 在 a-SiC:H 中存在着类似于 a-Si:H 中体现出的 SW 效应。至于二者机制是否相同, 尚待作进一步的研究。

由以上实验结果及相应的分析可知: (1) 样品存放在大气中一段时间, 表面会形成厚度为几十埃的氧化层; 氧化层上吸附的水分子层会使电导率的测量结果改变二、三个数量级; 经高于 100°C 的高温退火, 可以完全消除表面吸附的影响。(2) 与 a-Si:H 中的 SW 效应类似, a-SiC:H 中存在着光致亚稳效应。

样品为中国科学院上海硅酸盐所程如光、章敏权同志提供, 在此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] Wronski, C. R., *Semiconductors and semimetals*, Vol. 21 Part C, edited by Pankove, J. I., Academic press, N. Y., 1984.
- [2] Staebler, D. L., Crandall, R. S., Williams, R., *Appl. Phys. Lett.*, **39** (1981), 733.
- [3] Jousse, D., Basset, R., Delionibus, S., *Appl. Phys. Lett.*, **37**(1980), 208.
- [4] Fritzsche, H., *Solar Energy Mat.*, **3** (1980), 447.
- [5] Solomon, I., Dietl, T., Kaplan, D., *J. Phys. (Paris)*, **39** (1978), 1241.
- [6] Aker, B., Fritzsche, H., *J. Appl. Phys.*, **54** (1983), 6628.
- [7] Yamaguchi, M., Fritzsche, H., *J. Appl. Phys.*, **56** (1984), 2303.
- [8] Goldstein, Y., Abeles, B., Wronski, C. R., Kelemen, S. R., Witzke, H., *J. Electron. Mater.*, **11** (1982), 191.

Influence of Surface Absorption of Water Vapour and Metastable State Induced by Light in a-SiC:H

Wang Jun

(Department of Physics, USTC)

Zhao Shifu Han Daxing

(Institute of Physics, Academia Sinica)

掺杂三氧化二铁多晶压片电极 的光电化学特性

赵叔晔

(近代化学系)

用电极反应方法实现水的光电分解, 是利用太阳能的一条途径。但这一方法的主要障碍是能量转换效率低。原因之一是目前能用于光解水的大部分半导体材料的禁带宽度大, 只能吸收太阳谱带中很小的一部分能量。例如, TiO_2 的禁带宽度约为 3 电子伏, 相应吸收波长小于 413nm 的光子, 其能量只占整个太阳能的 3% 左右^[1]。而一些禁带宽度比较小的半导体材料, 如禁带宽度为 1.43 电子伏的 GaAs, 光照时, 在电解液中易发生腐蚀溶解。寻找既能吸收长波方向的光子, 在电解液中又比较稳定的半导体材料, 提高能量转换效率, 是一项有意义的探索。 Fe_2O_3 是一种有希望的材料, 它的禁带宽度为 2.2 电子伏, 相应吸收光的波长小于 564nm, 理论上可以利用整个太阳能的 25% 以上, 在 $\text{pH} > 4$ 的电解液中是稳定的。自 1976 年 K.L. Hardee 和 A.J. Bard^[2] 报道了用 CVD 法制得氧化铁光敏电极以来, 相继又报道了单晶 $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ 半导体电极^[3], 金属热氧化法^[4] 及压片烧结法^[5] 等不同的制备方法 & 材料的光电化学性能。在本文中, 我们试就 Fe_2O_3 掺 TiO_2 经压片烧结后获得的电极, 测试其光电响应, 以期探讨杂质对 Fe_2O_3 电极的影响。

1 实验

1.1 电极的制备 TiO_2 粉末按 Ti 原子百分数分别为 0.1%、0.5%、1%、2%、3%、4% 的比例和 Fe_2O_3 粉末均匀混合 (可把粉末置于烧瓶中, 加入蒸馏水摇晃 20~30 分钟, 使之混合均匀, 然后过滤烘干)。用 $\phi = 30\text{mm}$, 厚度 $d = 3\text{mm}$ 的铜环作模子, 将混合粉末在 $2000\text{kg}\cdot\text{cm}^{-2}$ 的压力下压成圆形薄片。在煤气灯上均烧片刻, 以取出铜环, 得到呈棕红色的完整 $\text{Fe}_2\text{O}_3\text{-TiO}_2$ 薄片。将薄片放在真空容器中, 以 1100°C 的高温灼烧 16 小时后取出, 令其缓慢冷却, 此时薄片呈铁灰色。电极的一面用银导电胶和导线相连, 并用一层环氧树脂加以绝缘。

1986 年 3 月 12 日收到。

1.2 形貌观察和结构分析

对掺有 0.5%TiO₂ 的 Fe₂O₃ 电极, 分别以 800、2000、5000 倍的放大倍数, 在扫描电镜下进行表面和断面的观察和拍照, 并进行 X-射线多晶衍射分析。

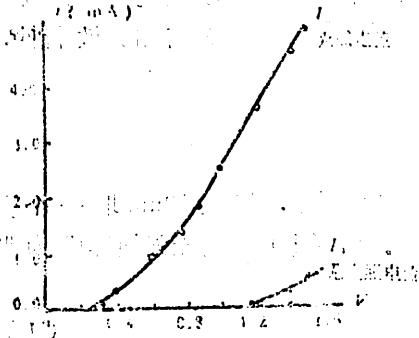


图 1 Ti/Fe比 0.5%电极极化曲线

1.3 频率响应的测定

在150瓦氙灯照射下, 测量不同杂质含量的电极极化曲线, 如图1。电解液为 0.2M 的 Na₂HPO₄, 参比电极为饱和甘汞电极, 对电极为铂黑电极, 记录仪是 7044A 型 X-Y 记录仪。由 GMA201 型单色仪将氙灯分色, 测量不同电极的频率响应, 并计算响应的量子转换效率, 结果如图 2、图 3 所示。

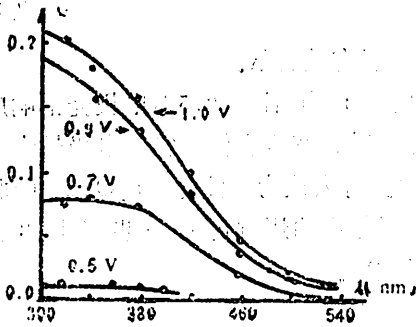


图 2 量子效率的光谱响应

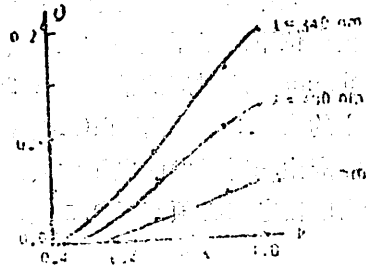


图 3 电极电位 V 与量子效率 Q 关系

2 结果和讨论

2.1 杂质含量对电极性能的影响

n 型 Fe₂O₃ 半导体电极在 pH=9 的电解液中平带电位为 -0.1 伏^[2], 需要一定的极化电位才能使光电池工作。光照时电流开始增加的极化电位用 V_L 表示, 其数值的大小与半导体平带电位值相对应。Ti/Fe 比为 0.5% 至 4% 的 Fe₂O₃ 电极, 在 pH=9 的 Na₂HPO₄ 溶液中, 测得的 V_L 值大都在 0.25 伏左右, 和 TiO₂ 含量没有明显关系。而 Ti/Fe 比为 0.1% 的 Fe₂O₃ 电极, 几乎无光响应。当无光照时, 电流开始上升的相应电位用 V_D 表示。显然, 对以光为能源分解水的电化学装置, V_D 值愈大愈好。Ti/Fe 比为 0.1% 的 Fe₂O₃ 电极, V_L 和 V_D 值均很大, 材料电阻为 MΩ 数量级, 和用纯的 Fe₂O₃ 粉末压片烧结出来的材料相差不多, 这和 John H. Kennedy 等人报道的结果一致^[6]。

随着 Ti/Fe 比增高, 半导体的电导率亦增高, 材料的电阻变小, 如 Ti/Fe 比为 0.5%

的电极，其阻值约为 $50\text{k}\Omega$ ，只有前者的百分之一。相应的 V_D 值也逐渐变小。不同电极 V_D 、 V_L 平均值的结果表明，Ti/Fe 比在 $1\% \sim 3\%$ 之间时，由于掺杂结果的影响，电极电阻很小，极化行为类似于普通金属电极。此时分解水的能量均来自电源， V_D 值已经小到和 V_L 值接近，电极不具有光敏特性，因而不能作为光解池的电极材料。

只有 Ti/Fe 比在 0.5% 左右时，适量的杂质使材料具有半导体电极的特征。此时 V_D 值大于 1 伏，而 V_L 值仅有 0.2 伏，因而电极在比较宽的电位范围内都具有较好的光敏特性，如图 1 所示。

2.2 Ti/Fe 为 0.5% 的电极光谱响应

用光强计测量不同波长的光强度 $P(\text{mw})$ ，波长从 300nm 开始，每隔 10nm 取一个数值，到 540nm 为止。波长大于 540nm 的光已不产生光电流。用 (1) 式将光强换算成为照射到电极表面的光子数：

$$x = (0.95R_1 P \lambda) / (hc \cdot \nu) \quad (1)$$

相应的电子数可由 (2) 式求出：

$$y = (I_L - I_D) \times 10^{-3} / F \quad (2)$$

则量子转换效率 $Q = x/y$ 。式中各变量的意义可见于一般有关文献。

不同电极电位下的量子效率和入射光波长关系如图 2。Ti/Fe 比为 0.5% 电极光谱响应终止波长为 540nm ，所对应的能量为 2.29eV ，和 Fe_2O_3 的禁带宽度大体相符。电极最大的量子转换效率约为 0.21，低于 TiO_2 电极的最高量子效率。有人认为可能是 Fe_2O_3 需吸收两个光子才能产生一对激发的电子空穴对。电极电位对量子效率的影响可进一步从图 3 看出，结果表明电极电位必须高于 0.5 伏，才有较高的量子效率。

2.3 结构测试的初步结果

用扫描电镜对电极进行表面和断面观察，可以见到均匀的颗粒状的 Fe_2O_3 结构，但晶粒棱角不明显，表面生成一层熔融的薄膜。X 射线多晶衍射分析表明，压片烧结后材料是结构完整的 $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ 晶型，为 $a = 5.4228$ ， $\alpha = 55^\circ 17'$ 的立方晶系。

3 结论

用掺杂的方法可以改善 Fe_2O_3 的光电响应特性，4 价氧化物含量在 0.5% 左右比较合适，用压片烧结的方法杂质含量容易控制，电化学参数的重现性也较好。但和金属基底的氧化物薄膜电极相比，前者制得的材料电阻值较大，光照后达到平衡所需要的时间较长。研制 Fe_2O_3 掺杂的薄膜电极，是今后的一个改进方向。

参 考 文 献

- [1] Tomkiewicz, M., Fay, H., *Appl. Phys.*, 18 (1979), 1.
- [2] Hardee, Bard, *J. of Electrochem. Soc.*, 123 (1976), 1024.
- [3] Quinn, R.K., Nasby, R.D., *Mat. Res. Bull.*, 11 (1976), 1011.
- [4] Sammells, *J. of Electrochem. Soc.*, 126(1979), 1831.
- [5] McGregor, K. G., *J. Appl. Phys.*, 50 (1979), 1.
- [6] Kennedy, J. H., *J. of Electrochem. Soc.*, 127 (1980), 10.

Photoeffects in Ferric Oxide Sintered Electrodes with Titanium Dioxide Impurities

Zhao Shuxi

(Department of Modern Chemistry)

符离集烧鸡的辐射保鲜研究*

章吉祥 施晨阳 刘隆基 杨承宗

(中国科技大学)

郭仁荣 江淑云 张信仁

(安徽省卫生防疫站)

(安徽省宿县烧鸡公司)

引言

辐射保藏食品研究,已有三十余年的历史。据统计,到目前为止,三十一个国家和地区批准了七十六种辐照食品投放市场。

符离集烧鸡是安徽省优质名特产品,随着人民生活水平的不断提高,近年来生产有了较大地发展。然而,本省夏季炎热,成品烧鸡存放一天就会腐败变质,即使在冬季,存放期也只有2—3天,这从客观上限制了它的发展。为此,我们进行了符离集烧鸡的辐射保鲜研究。

1 工艺过程及测试结果

1.1 包装材料及包装方式

经过综合考察和多次试验,在试验中,我们采用了PP/PE和PET/PE复合薄膜作为包装材料,分别在常压和抽真空条件下进行包装、辐照。

1.2 辐射剂量

食品辐照程度以辐照剂量表示。辐照剂量单位为戈瑞(Gy),1千戈瑞=10⁵拉德。

世界辐射食品卫生专家联合委员会(JEFEC)于1980年确认,在十千戈瑞剂量以下,辐照处理的食物绝对安全无毒,可免做毒理实验。联合国粮食及农业组织(FAO)、世界卫生

1986年1月20日收到。

* 国家教育委员会博士点科技基金资助项目。

组织 (WHO)、国际原子能机构 (IAEA) 等权威组织均支持这一意见^[1]。根据此项标准,我们在 5~10 千戈瑞剂量范围内,对烧鸡进行辐射保鲜。

1.3 理化指标测定

除了按照国家卫生标准中规定的感观检查及细菌指标中对细菌总数、大肠菌数、致病菌数的控制外,我们还进行了蛋白质、脂肪、氨基酸、挥发性盐基氮等理化指标的检测。

供试验用的样品必须能代表整批产品。

1.3.1 烧鸡的营养指标

取烧鸡腿为样品,真空封装,分别以 5、8、10 千戈瑞的剂量进行辐照。辐照完成后,对样品及空白对照样进行氨基酸分析 (日立氨基酸分析仪),其结果见表 1。

由表可见,在 5 和 8 千戈瑞剂量辐照下,各种氨基酸变化量 (除个别外) 损失的相对百分比均在 5% 以下。考虑到分析手段及实验误差,可以认为,在这种剂量辐照下,鸡肉的营养

表 1 烧鸡辐照前后的氨基酸含量变化 (单位 mg/100g)

氨基酸种类	辐 照 剂 量 (kGy)								
	5			8			10		
	前	后	%	前	后	%	前	后	%
天冬氨酸 ASP	3.17	3.19	+0.63	2.88	2.87	-0.35	2.87	2.83	-1.4
苏氨酸 THR*	1.58	1.61	+1.9	1.44	1.42	-1.4	1.51	1.39	-7.9
络氨酸 SER	1.37	1.39	+1.5	1.22	1.21	-0.82	1.36	1.23	-9.6
谷氨酸 GLU	5.98	5.80	-3.0	5.22	5.12	-1.9	5.58	5.22	-6.4
甘氨酸 GLY	1.93	1.70	-11.9	1.39	1.35	-2.9	/	/	/
丙氨酸 ALA	2.05	1.97	-3.9	1.72	1.70	-1.2	1.84	2.00	+8.7
胱氨酸 CYS	0.17	0.17	0	0.13	0.14	+7.7	0.16	0.14	-12.5
缬氨酸 VAL*	1.64	1.64	0	1.51	1.50	-0.66	1.57	1.43	-8.9
甲硫氨酸 MET*	0.43	0.43	0	0.23	0.31	+34.8	0.41	0.38	-7.3
异亮氨酸 ILE*	1.64	1.63	-0.61	1.52	1.49	-2.0	1.59	1.44	-9.4
亮氨酸 LEU*	2.69	2.71	-0.74	2.46	2.41	-2.0	2.62	2.32	-11.4
酪氨酸 TYR	1.03	1.09	+5.8	0.90	0.90	0	0.95	0.81	-14.7
苯丙氨酸 PHE*	1.48	1.48	0	1.36	1.34	-1.5	1.41	1.28	-9.2
赖氨酸 LYS*	2.98	2.89	-3.0	2.73	2.60	-1.8	2.84	2.55	-10.2
组氨酸 HIS	0.91	0.84	-7.7	0.86	0.81	-5.8	0.87	0.97	-11.5
精氨酸 ARG	2.31	2.28	-1.3	1.96	1.93	-3.1	2.08	2.13	+2.4
脯氨酸 PRO	1.39	1.32	-5.0	0.91	0.92	+1.1	1.55	1.53	-1.31

表中辐照前后含量指 100g 鸡肉中含有蛋白质的毫克数

* 人体必需的氨基酸

养组成基本上无变化。因此，从营养指标的分析结果来看，保鲜烧鸡的剂量在5~10千戈瑞之间是适宜的。

为了深入了解蛋白质、肽键及氨基酸在辐射场中的效应，我们补充设计了两组实验，即以纯蛋白质（牛血清白蛋白）和混合氨基酸为典型体系，对其辐照效应作全面考察，进一步验证了符离集烧鸡辐射保鲜的良好效果。

图1—4分别为牛血清白蛋白和混合氨基酸溶液，在空气和充氮条件下辐照后，氨基酸含量的变化规律。

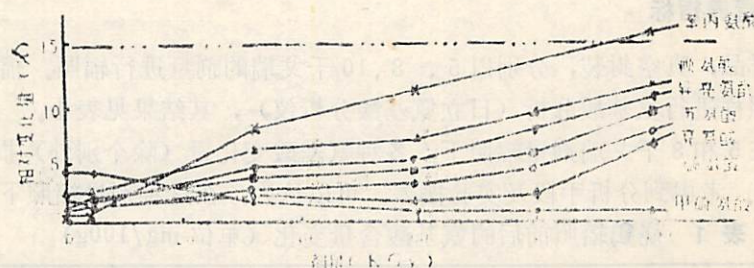


图1 牛血清白蛋白水溶液在空气中辐照后，人体必需氨基酸含量的变化

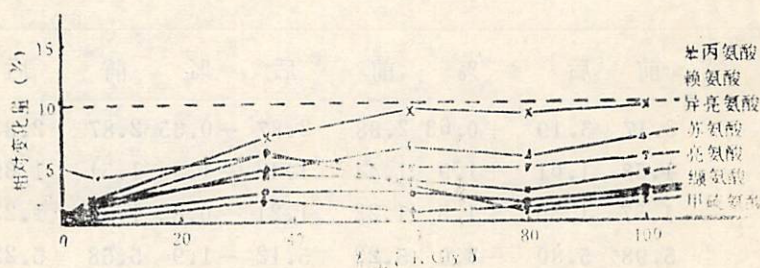


图2 牛血清白蛋白水溶液在充氮条件下辐照后，人体必需氨基酸含量的变化

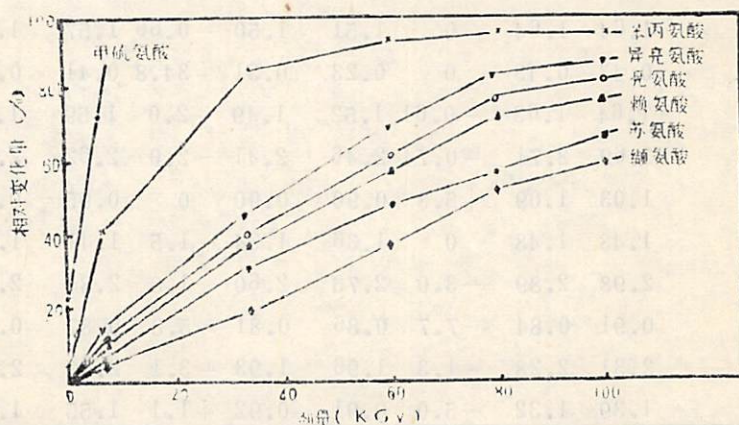


图3 混合氨基酸溶液在空气气氛下辐照后的变化量

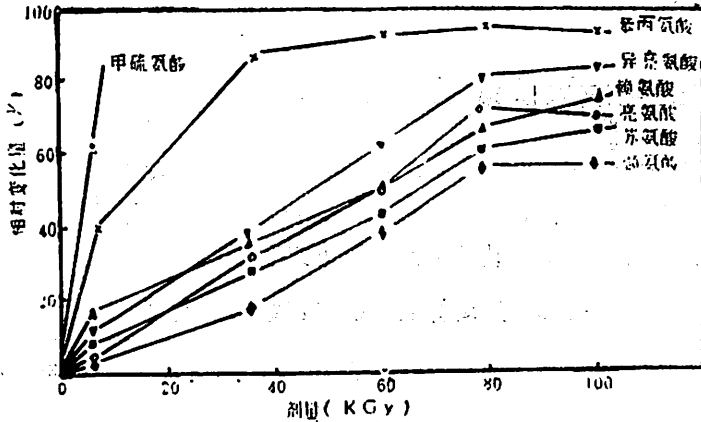


图 4 混合氨基酸溶液在氮气气氛下辐照后的变化量

由图可见，辐照后，混合氨基酸溶液和蛋白质溶液中各种氨基酸的含量都有了不同程度的降低，且随着剂量的增大，降低的程度也相应增大。在纯蛋白质溶液中，人体必需的八种氨基酸经小于 10 千戈瑞剂量辐照后，一般损失均小于 5%，符合国际规定，对保鲜食品具有实际意义。相比而言，在混合氨基酸溶液中，氨基酸损失程度大得多，这是因为蛋白质中的肽键起了一定的保护作用^[3]，大大提高了其辐射稳定性。另外，辐照气氛也有着重要影响。图 2、4 表明氮对蛋白质中的氨基酸有一定的保护作用，这为今后辐照保鲜食品时采用抽空充氮包装提供了理论和实验依据。

1.3.2 符离集烧鸡的保鲜指标——挥发性盐基氮的测定

动物性食品由于酶和细菌的作用，在腐败过程中，其蛋白质分解产生氨及胺类等碱性含氮物质^[4]。此类物质具有挥发性，在碱性溶液蒸馏后，用标准酸滴定，算出其含量，即可得挥发性盐基氮（简称 TVB-N）数据。TVB-N 是肉食品新鲜度最重要的理化指标之一，通常以此来判断肉品是否腐败。对上述同样条件的样品的 TVB-N 的分析结果列于表 2 中。

表 2 辐照烧鸡的挥发性盐基氮测定*

时 间 (天)	温 度 (°C)	辐 照 剂 量 (kGy)			
		0	5	8	10
TVB-N(mg/100g)					
0	25	14.63	17.71	14.82	15.79
30	25	185.74	23.87	18.09	20.79
30	37	270.63	26.19	26.95	26.18

* 按国标 GB-2724-81，测定新鲜鸡肉，TVB-N ≤ 15mg/100g 为一级新鲜度，TVB-N ≤ 25mg/100g 为二级新鲜度。

由表可见，γ 辐照能起到理想的保鲜作用，与此同时，对照样品已经腐败。从保鲜指标

分析, 10 千戈瑞以下的剂量对保鲜烧鸡完全可行。

2 符离集烧鸡的辐射灭菌效果

采用不同剂量处理后的烧鸡试样的杂菌总数测定结果列于表 3 中, 其中样品均以真空封装。此表表明, 辐照剂量为 5、8、10 千戈瑞时, 灭菌效果良好, 试样色泽、弹性等外观指标仍与新鲜烧鸡无两样。真空包装效果比常压下封装好。

表 3 烧鸡样品辐照消毒效果观察**

时 间 温 度 (天) (°C)		辐 照 剂 量 (kGy)			
		0	5	8	10
		细 菌 数 (个/克)			
0	25	106	5	5	5
	37	106	5	5	5
10	25	∞	5	10	0
	37	∞	45	40	315
30	25	∞	500	30 125	1 000
	37	∞	2 125	1 250	620

** 按国标 GB—2726—81 酱卤肉类的细菌总数的销售指标 $\leq 80\ 000$ 个/克

3 关于放射性污染和感生放射性问题

放射性污染是指放射性物质直接污染食品, 感生放射性是指组成物质的元素在接受中子、高能电子或 γ 光子照射后转变成放射性同位素。

烧鸡在辐照过程中只接受由放射源发出的射线的照射, 并没有与放射源直接接触, 因此并不存在辐照食品被放射性污染的问题。

组成食品的基本元素, 如碳、氢、氧、氮等, 只有在接受了大于 10MeV 的高能射线照射后才可能发生核反应, 转变成放射性同位素。美国陆军部的研究数据表明^[5], 即使采用 10MeV 电子束流辐照食品, 也未测到感生放射性。本实验室采用 ^{60}Co γ 源辐照烧鸡, γ 射线的能量仅 1.17~1.33MeV, 完全不足以引起元素的核反应。

无论用 ^{60}Co γ 源, 或是用电子加速器辐照烧鸡均不存在放射性污染及感生放射性问题。

4 结论

(1) 首次测得符离集烧鸡的营养成分蛋白质、氨基酸含量及重要理化指标——挥发性

盐基氮的数据。

(2) 用 PP/PE 和 PET/PE 复合材料真空包装烧鸡, 用 ^{60}Co 辐射源, 在 5—10 千戈瑞剂量范围内辐照, 可在保证营养素不受损害的情况下达到保鲜目的。

(3) 辐照保鲜的符离集烧鸡, 其色泽、味道、弹性等感观指标均保持良好。

中国科技大学张曼维教授、周漪琴副教授、安徽农业科学院、安徽医学院、中华人民共和国安徽进出口商品检验局、合肥市联合大学均对本工作给予了有益的帮助, 合肥市二商局张肖明、钟平同志参加了部分实验工作, 在此一并表示感谢。

参 考 文 献

- [1] Wholesomeness of Irradiated Food, WHO Technical Report Series, 1981, P: 659.
- [2] Ambe, K. S., et al., *Radiat. Res.*, 15 (1961), 709.
- [3] Rosen, H., *Biochem. J.*, 72 (1959), 597.
- [4] Guzman Barron, E. S., et al., *Archs Biochem. Biophys.*, 41(1952), 212.
- [5] Corrol, W. R., et al., *Archs Biochem. Biophys.* 39 (1952), 232.

Research of Preservation Method of Fulji Roast Chicken Using Irradiation Technique

Zhang Jixiang Shi Chenyang Liu Longji Yang Jengtsong

(University of Science and Technology of China)

Guo Renrong Jiang Shuyun

Zhang Xinren

(Anhui Health and Quarantine

(Su Xian Roast Chicken

Station)

Company, Anhui Province)

120.0

1988年12月

四水合丁烯二酸镍的晶体和分子结构

周 平 李健民 石 磊

(结构中心) (近代化学系) (结构中心)

姚家星 千金子 范海福

(中国科学院物理所)

除苹果酸对生物体有重要的意义外,微量过渡金属的离子对生物体还显示了极其微妙的作用。因此,人们对过渡金属苹果酸盐一直具有浓厚的兴趣^[1,2]。我们在前人工作的基础上,对苹果酸钴和苹果酸酞铜的电子结构进行了研究^[3]。苹果酸镍盐的晶体结构及电子结构迄今未见报道。我们合成了苹果酸酞镍,得到丁烯二酸镍盐的淡兰色晶体,并完成了晶体结构测定工作。

1 实验

将苹果酸与碳酸镍按摩尔比 2:1 加入蒸馏水中,稍稍加热,除去气泡后,将溶液过滤,滤液在室温中静置数天,让它缓慢蒸发得到淡兰色透明柱状晶体,即为四水合丁烯二酸镍。

在 Enraf—Nonius CAD—4 型四圆衍射仪上,用 $M_oK\alpha$ 射线,以 $\theta-2\theta$ 方式扫描,扫描速度在 $1.6^\circ\sim 8.24^\circ/\text{分}$ 可变,收集三维强度数据,在 $2^\circ\leq\theta\leq 23^\circ$ 范围内,共收集了 1346 个独立衍射点,其中 $I>2\sigma$ 的可观测点 1337 个。数据经过 LP 因子校正,吸收校正和衰减校正。晶体结构用重原子方法解出。从 Patterson 图上看,晶胞中只含有一个重原子。取 Ni^{2+} 的坐标为 $(0,0,0)$,从差值 Fourier 图上找出了 Ni^{2+} 附近配位的四个水分子中的氧原子和两个丁烯二酸分子中的全部非氢原子,进行一轮最小二乘修正, $R\approx 0.066$,继续用差值 Fourier 方法找出全部氢原子。进行各向异性全矩阵最小二乘修正,最后 $R\approx 0.021$ 。

2 结果讨论

$Ni_1[COO-C_2H_2-COOH]_2\cdot 4H_2O$ 晶体属三斜晶系, $P\bar{1}$ 空间群, $Z=1$, $F(000)=$

1986 年 12 月 4 日收到。

186, $D_c = 1.15 \text{ 克/cm}^3$, 晶胞常数: $a = 5.1797(3) \text{ \AA}$, $b = 7.3097(4) \text{ \AA}$, $c = 9.1387(3) \text{ \AA}$, $\alpha = 108.47(2)^\circ$, $\beta = 104.63(1)^\circ$, $\gamma = 92.84(2)^\circ$; 晶胞体积 $V = 314.373 \text{ \AA}^3$. 所有原子坐标及其等效温度因子 B_{eq} , 列于表 1.

表 1 原子坐标及其等效温度因子

Atom	x	y	z	B_{eq}	Atom	x	y	z	B_{eq}
O ₁	0.8597(5)	0.0592(4)	1.2016(3)	1.71(6)	O ₂	1.2034(5)	0.2723(4)	1.3797(3)	2.58(7)
O ₃	1.3420(5)	0.4546(4)	1.6666(3)	2.88(7)	O ₄	1.1887(6)	0.4758(4)	1.8740(3)	2.52(7)
O ₅	1.2524(5)	0.2522(3)	2.0753(3)	1.82(6)	O ₆	1.3125(5)	0.8671(3)	2.0974(3)	1.74(6)
C ₁	0.9764(7)	0.1709(5)	1.3425(4)	1.55(8)	C ₂	0.8355(7)	0.1766(5)	1.4659(4)	1.79(9)
C ₃	0.9123(7)	0.2712(5)	1.6235(4)	1.93(9)	C ₄	1.1627(8)	0.4076(5)	1.7298(4)	1.81(7)
N ₁	1.000	0.000	2.000	1.20(1)	H ₁	0.332(7)	0.897(5)	0.578(4)	2.6(8)*
H ₂	0.207(7)	0.747(5)	0.323(4)	2.5(8)*	H ₃	0.225(8)	0.336(6)	0.026(5)	4(1)*
H ₄	0.298(9)	0.763(6)	0.026(5)	5(1)*	H ₅	0.554(7)	0.076(5)	0.884(4)	2.6(9)*
H ₆	0.280(9)	0.327(6)	0.158(5)	5(1)*	H ₇	0.304(8)	0.387(6)	0.549(5)	8(1)*

* 温度因子只进行各向同性修正

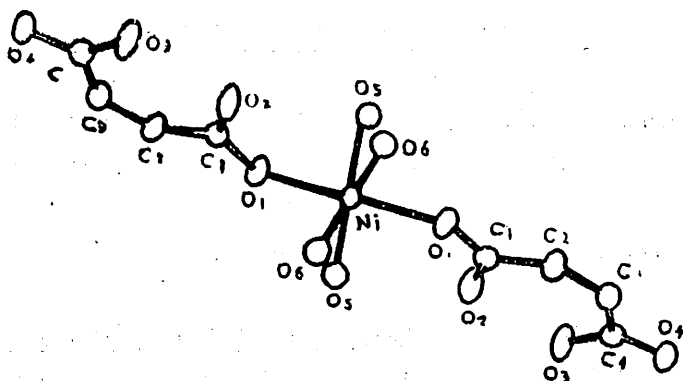


图 1 Ni[COO—C₂H₂—COOH]₂ · 4H₂O 分子结构示意图

表 2 键长 \AA

键	键长(\AA)	键	键长(\AA)	键	键长(\AA)
O ₁ —C ₁	1.257(0)	O ₁ —N ₁	2.077(0)	O ₂ —C ₁	1.265(0)
O ₃ —H ₇	0.994(0)	O ₃ —C ₁	1.296(0)	O ₄ —C ₁	1.221(0)
O ₅ —N ₁	2.021(0)	O ₅ —H ₃	0.865(0)	O ₆ —N ₁	2.081(0)
O ₆ —H ₄	0.813(0)	C ₁ —C ₂	1.481(0)	C ₂ —C ₃	1.328(0)
C ₂ —H ₁	0.917(0)	C ₃ —C ₄	1.497(0)	C ₃ —H ₂	0.907(0)

从图 1 中可以看出 Ni²⁺ 处在晶胞原点, 四个水分子和二丁烯二酸根中的氧原子与

Ni^{2+} 离子配位；整个分子呈中心对称，从键长键角表（表2和表3）可以看出， Ni^{2+} 与6个氧原子的键长基本相等，其平均键长为 2.0597Å ， $\text{O}-\text{Ni}^{2+}-\text{O}$ 所成键角几乎为直角，键角平均值为 90° ，形成较规整的正八面体结构。 Ni^{2+} 具有 d^8 结构，在八面体络合物中 d^8 的电子结构为高自旋。

表3 键角($^\circ$)

角	度	角	度	角	度
$\text{O}_1-\text{C}_1-\text{O}_2$	122.7(4)	$\text{O}_1-\text{C}_1-\text{C}_2$	116.4(3)	$\text{O}_2-\text{C}_1-\text{C}_2$	120.8(3)
$\text{O}_3-\text{C}_4-\text{C}_3$	119.5(3)	$\text{C}_1-\text{C}_2-\text{C}_3$	130.3(3)	$\text{C}_2-\text{C}_3-\text{C}_4$	130.9(4)
$\text{O}_3-\text{C}_4-\text{O}_4$	121.7(3)	$\text{O}_4-\text{C}_4-\text{C}_3$	118.7(4)	$\text{O}_5-\text{N}_1-\text{O}_6$	89.2(4)

按照配位场理论，中心离子的 d 轨道能级在配体的电场作用下产生能级分裂。在八面体场中，配体电场使中心离子的 d 轨道分裂成两组，一组是能量较高的 d_x 和 $d_{x^2-y^2}$ 轨道，即 eg 轨道；另一组是能量较低的 d_{xy} ， d_{yz} ， d_{zx} 轨道，即 T_{2g} 轨道。 eg 轨道与二个配体丁烯二酸一个羧基上氧原子的 σ 轨道组成 σ 分子轨道，而 T_{2g} 中的 d_{xy} 轨道与四个水分子中氧原子的 P 轨道（ P_x 或 P_y 轨道）形成 π （ Pd_{xy} ）轨道。

表4 原子的最小二乘平面表

元素	O_1	O_2	O_3	O_4	C_1	C_2	C_3	C_4
距离	-0.038	-0.001	0.033	-0.039	0.003	0.037	0.017	-0.012
偏差	0.003	0.003	0.003	0.003	0.004	0.004	0.004	0.004
参数	A	B	C	D				
	-0.4737	0.8665	-0.1576	-5.0835				

丁烯二酸中 $\text{COO}-\text{C}-\text{C}-\text{COO}$ 八个非氢原子的共面性很好（见表4，该表利用公式 $Ax+By+Cz+D=0$ 计算得到），这八个原子和最小二乘平面的距离不超过 0.04Å ，这个计算结果表明了丁烯二酸中的八个非氢原子 O_1 ， O_2 ， O_3 ， O_4 ， C_1 ， C_2 ， C_3 ， C_4 形成了 $\pi_{\text{O}}^{\text{O}}$ 大 π 键，由于共轭效应，使键长趋于均匀化。表2给出的 C_2-C_3 键长 1.328Å ，比标准 $\text{C}=\text{C}$ 双键略长一些，而 C_1-C_2 键长为 1.481Å ， C_3-C_4 键长为 1.497Å ，这两个键都略短于标准 $\text{C}-\text{C}$ 单键键长。 O_1-C_1 键长 1.257Å ， O_2-C_1 键长 1.265Å ， O_3-C_4 键长 1.296Å ， O_4-C_4 键长 1.221Å ，都比 $\text{C}-\text{O}$ 标准单键短，而比 $\text{C}=\text{O}$ 键略长^[4]。这些实验结果表明，由于共轭效应形成的 $\pi_{\text{O}}^{\text{O}}$ 大 π 键使键长均匀化。

参 考 文 献

- [1] Karipides, A., *Acta Crystallogr. Sect. B*, **37** (1981), 1115.
[2] Lenstra, A. T. H., et al., *Bull. Chem. Soc. Belg.*, **92** (1983), No. 3, 257.
[3] 张永峰, 李健民等, *Inorg. Chem. Acta*, **87** (1984), L25.
[4] *Handbook of Chemistry and Physics*, 61st, Edition, The Chemical Rubber Pub. Co., 1980, F₂₁₈~F₂₁₉.

Crystal and Molecular Structure of 4-hydrated
 $2(\text{COO}-\text{C}_2\text{H}_2-\text{COO}) \cdot \text{Ni}(\text{II})$

Zhou Ping

Li Jianmin

Shi Lei

(Central Lab.)

(Department of Modern Chemistry)

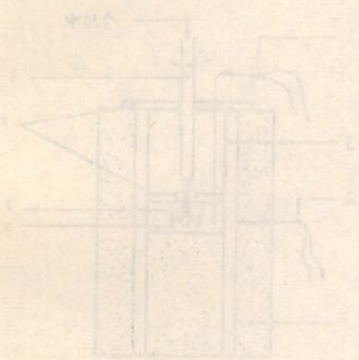
(Central Lab.)

Yao Jiaxin

Qian Jinzi

Fan Haifu

(Institute of Physics, Chinese Academy of Science)



Na₅Eu(WO₄)₄ 发光晶体的生长 与光谱特性

潘峻* 姚连增 陈立高 周贵恩 赵贵文

(中国科学技术大学)

引言

对 Na₅Eu(WO₄)₄ 发光材料的研究近几年来已有不少报道。陈立高、施朝淑等人^[1-2]改进了 Na₅Eu(WO₄)₄ 的发光性能,认为 Na₅Eu(WO₄)₄ 色度纯、亮度高,有可能成为高压汞灯用荧光粉的一个新品种。但是,目前的研究一直限于粉末材料,迄今为止,尚未见到有关 Na₅Eu(WO₄)₄ 晶体方面的研究报道。

实验与结果

以优级纯 H₂WO₄, 基准试剂 Na₂CO₃, 99.95% 纯 Eu₂O₃ 为原料;用固相反应法制备 Na₅Eu(WO₄)₄ 发光粉料;以分析纯 Na₂WO₄ 为助熔剂;铂丝为异质籽晶;采用助熔剂泡生法成功地生长出了 Na₅Eu(WO₄)₄ 单晶,尺寸达到 2×1×1mm³。实验装置如图 1。

晶体粉末 X 射线衍射分析表明,生成物为单相 Na₅Eu(WO₄)₄。晶体属四方晶系, I₄₁/a 空间群。用最小二乘法计算出 Na₅Eu(WO₄)₄ 晶格常数为 a = 11.5068 Å, c = 11.4057 Å, 与文献 [3] 的数据相符。图 2 为 Na₅Eu(WO₄)₄ 单晶劳厄相。显微镜下可观察到晶体生长缺陷,可能是生长速度较快引起的。

分别测定了 Na₅Eu(WO₄)₄ 晶体的吸收光谱(图 3), 荧光光谱(图 4) 和激发光谱(图 5)。

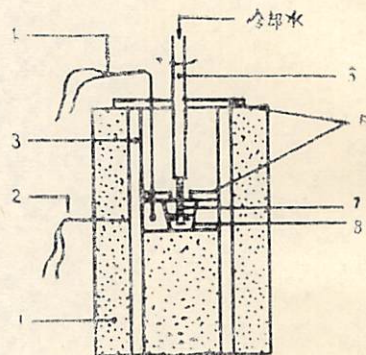


图 1 实验装置示意图

1. 保温层; 2. 控温热偶; 3. 电阻炉; 4. 测温热偶; 5. 籽晶杆;
6. 隔热板; 7. 铂丝; 8. 刚玉坩埚。

1986年5月26日收到。

*河北水利专科学校进修教师。



图 2 $\text{Na}_5\text{Eu}(\text{WO}_4)_4$ 晶体劳厄相

首次获得了 $\text{Na}_5\text{Eu}(\text{WO}_4)_4$ 的吸收光谱。图中各吸收峰均为 Eu^{3+} 离子 $4f$ 电子 $f \rightarrow f$ 跃迁的特征吸收。没有观察到 ${}^7F_0 \rightarrow {}^5D_0$ 的吸收，这是 Eu^{3+} 离子占据 S_4 对称位置，受到 S_4 对称性禁戒的结果^[4]。观察到了基态 7F_0 向激发态 ${}^5D_{1,2,3}$ ， 5L_6 ， ${}^5G_{2,4}$ ， 5D_4 ， 5H_6 能级的跃迁以及 7F_1 向 ${}^5D_{0,1,2}$ 的跃迁。它们分别对应的吸收波长为 524、464、415、392、381、374、361、318nm 和 594、536、473nm。 ${}^7F_2 \rightarrow {}^5D_0$ 的跃迁极其微弱，表明在室温下 7F_2 能级上的粒子数分布很少。300nm 处的两个吸收峰的归属有待进一步确定。基质吸收掩盖了 297nm 以下波长的吸收峰，吸收边在 285nm 处。计算得知 $\text{Na}_5\text{Eu}(\text{WO}_4)_4$ 晶体的禁带宽度为 4.3eV，该晶体属于电介质离子晶体。

$\text{Na}_5\text{Eu}(\text{WO}_4)_4$ 晶体的荧光光谱在 580~640nm 范围与文献 [1] 的结果基本相同。发光谱线少而锐，主发射峰为 Eu^{3+} 离子 ${}^5D_0 \rightarrow {}^7F_2$ 电偶极跃迁的 617.2nm 辐射，半宽度约为 20Å。 ${}^5D_0 \rightarrow {}^7F_1$ 的 593nm 和 ${}^5D_0 \rightarrow {}^7F_4$ 的 704nm 荧光强度仅为 617nm 的 8%。 $\text{Na}_5\text{Eu}(\text{WO}_4)_4$ 的发光显示了强荧光发射和高色纯度的特性。

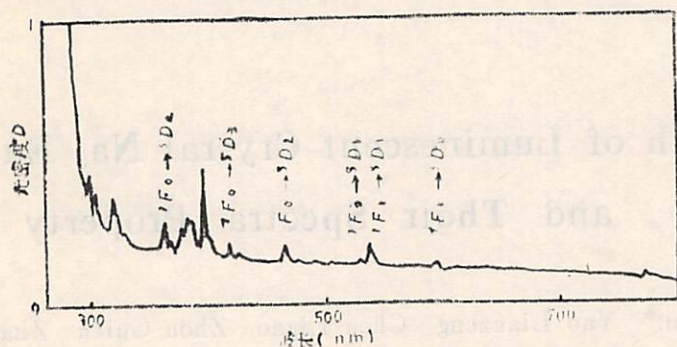


图 3 $\text{Na}_5\text{Eu}(\text{WO}_4)_4$ 晶体吸收光谱

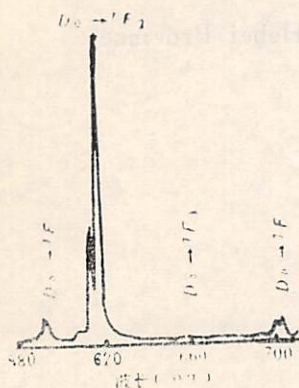


图 4 $\text{Na}_5\text{Eu}(\text{WO}_4)_4$ 晶体荧光光谱

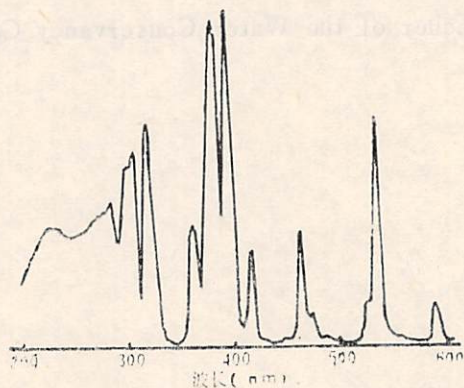


图 5 $\text{Na}_5\text{Eu}(\text{WO}_4)_4$ 晶体 617nm 荧光激发光谱

激发光谱表明最佳激发波长为 381nm 与 392nm。它们对应 ${}^7F_0 \rightarrow {}^5L_6$ ， 5G_2 的激发。然

而, 对应 ${}^7F_1 \rightarrow {}^5D_1$ 跃迁的 537nm 波长具有强的激发效果, 这是引人注意的。它有利于用激光泵浦。另外, 297nm 和 303nm 波长吸收也具有较强的激发作用。基质吸收的激发效果不好, 这是值得注意的。

$\text{Na}_5\text{Eu}(\text{WO}_4)_4$ 晶体的吸收光谱和激发光谱为选择激发条件提供了依据。

$\text{Na}_5\text{Eu}(\text{WO}_4)_4$ 晶体的最佳生长条件、结构分析和发光机制等方面的研究工作正在进行。

$\text{Na}_5\text{Eu}(\text{WO}_4)_4$ 晶体的生长得到本校晶体车间徐维民、陈葆梅等同志的热情帮助, 特此表示感谢。

参 考 文 献

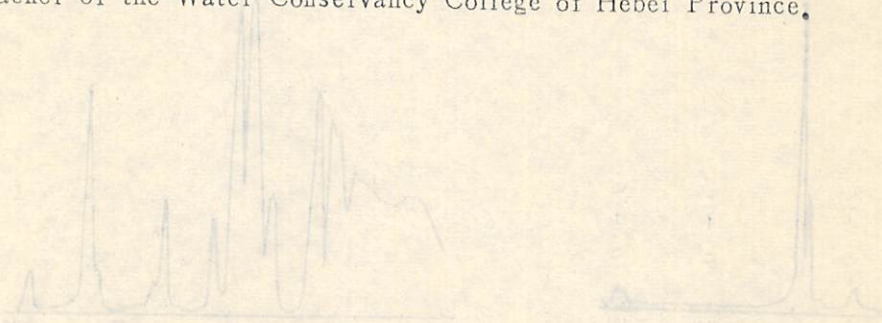
- [1] 陈立高等人, Eu^{3+} 离子在固态钨酸盐中的发光, 全国第三次发光学术会议《论文摘要汇编》第三册, 1983, 1~5.
- [2] 施朝淑等人, 硅钨酸铈钠发光的光谱特性和温度特性, 全国第三次发光学术会议《论文摘要汇编》第三册, 1983, 30~33.
- [3] Трунов, В. К.; Ж. Неорчан. Химии, 23 (1978), 2645~2649.
- [4] 黄京根, 发光与显示, 5 (1984), No. 4, 11~18.

Growth of Luminescent Crystals $\text{Na}_5\text{Eu}(\text{WO}_4)_4$ and Their Spectra Property

Pan Jun* Yao Lianzeng Chen Ligao Zhou Guien Zhao Guiwen

(University of Science and Technology of China)

*Teacher of the Water Conservancy College of Hebei Province.



数论方法在密码通讯技术中的两个应用

康 继 鼎

(西南师范大学)

在密码技术中, R. Solovay 和 V. Strassen 于文[1]中, 论述了用计算机检验一个整数是否为素数的快速 Monte—Carlo 方法, 提出了与之有关的一个概率问题.

问题 A 设 M 是一个不小于 2 的整数, x 是一个在集合 $\{1, \dots, M-1\}$ 上均匀取值的随机变数. 如果是复合数, 试求事件

$$x^M \equiv x \pmod{M} \quad (1)$$

发生的概率是多少?

(显然, 如果 M 是素数, 则 (1) 恒成立, 即 Fermat 小定理).

为了解决这个问题, 先解决下列的

问题 B 设 k, M 为正整数, 试求同余方程

$$x^k \equiv 1 \pmod{M} \quad (2)$$

的解数是多少?

其次, 在密码技术中, 关于原始信息的加密与加密信息的解密变换中^[2,3], 提出下列数论问题:

问题 C 设 M 是至少两个不同的奇素数之积, k 为一个正整数, 则对于任意的正整数 a ,

$$a^{\frac{\varphi(M)}{2}} + 1 \equiv a \pmod{M} \quad (3)$$

是否恒成立? 其中 φ 为 Euler 函数.

问题 C 是简单的, 但我们不妨进而讨论一个更一般的问题 D, 以明确 (3) 式成立的主要条件.

问题 D 试问哪些正整数 $r > 1, M > 1$ 能使得对于任意的正整数 a ,

$$a^r \equiv a \pmod{M} \quad (4)$$

恒成立?

以下是本文的基本结果及其论证.

定理 1 若 $M = 2^u p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$, $u \geq 0, \alpha_i \geq 1, p_i$ 为奇素数 ($i = 1, \dots, n$). 则同余方程 (2) 的解数为

$$S = f(u) \cdot \prod_{i=1}^n (k, \varphi(p_i^{\alpha_i})) \quad (5)$$

其中函数 $f(u)$ 的定义为

$$\begin{aligned} f(0) &= f(1) = 1, \quad f(2) = (k, 2), \\ f(u) &= (k, 2) (k, 2^{u-2}) \quad (u \geq 3) \end{aligned}$$

其中 φ 为 Euler 函数.

证明 同余方程 (2) 的解数 s 等于下列同余方程组

$$x^k \equiv 1 \pmod{2^u} \tag{6}$$

$$x^k \equiv 1 \pmod{p_i^{a_i}} \quad (i = 1, \dots, n) \tag{7}$$

中各个方程的解数的乘积. 设 g_i 是模 $p_i^{a_i}$ 的元根, 则易知 (7) 的解数等于

$$k \operatorname{ind}_{g_i} x \equiv 0 \pmod{\varphi(p_i^{a_i})} \quad (i = 1, \dots, n) \text{ 的解数, 而此解数为 } (k, \varphi(p_i^{a_i})).$$

当 $u = 1, 2$ 时, 模 2^u 的元根存在, 此时同上可证 (6) 的解数为 $(k, 2^{u-1}) = f(u)$. 当 $u = 0$ 时, 显然 (6) 的解数为 $1 = f(0)$. 当 $u \geq 3$ 时, 5 模 2^u 的次数为 2^{u-2} , 因此易知

$$\{\pm 5^l; l = 1, \dots, 2^{u-2}\}$$

构成模 2^u 的缩系, 从而此时 (6) 的解数等于 $(\pm 5^l)^k \equiv 1 \pmod{2^u}$ 的解数. 由 5 模 2^u 的次数为 2^{u-2} , 得知

$5^{lk} \equiv 1 \pmod{2^u} \quad (l = 1, \dots, 2^{u-2})$ 的解数等于 $lk \equiv 0 \pmod{2^{u-2}}$ 的解数, 而此解数即为 $(k, 2^{u-2})$. 从而

$$(\pm 5^l)^k \equiv 1 \pmod{2^u} \quad (l = 1, \dots, 2^{u-2}) \text{ 的解数为 } (k, 2) (k, 2^{u-2}) = f(u).$$

综上所述, 知命题得证.

1. 设 $M \geq 2$ 且 $M = 2^u p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}$, 则同余方程 (1) 的解数为

$$s = g(u) \cdot \prod_{i=1}^n [1 + (M-1, p_i - 1)]$$

其中 $g(0) = 1, g(u) = 1 + f(u) \quad (u \geq 1)$.

证明 只须注意方程 (1) 可写为

$$x(x^{M-1} - 1) \equiv 0 \pmod{M}$$

以及

$$(M-1, \varphi(p_i^{a_i})) = (M-1, p_i^{a_i-1}(p_i-1)) = (M-1, p_i-1) \quad (1 \leq i \leq n).$$

2. 在 1 的条件下, 又 x 只在集合 $\{1, \dots, M-1\}$ 上取值, 则同余方程 (1) 的解数为

$$s = g(u) \cdot \prod_{i=1}^n [1 + (M-1, p_i - 1)] - 1$$

3. 设随机变数 x 遵从 $\{1, \dots, M-1\}$ 上的均匀分布, $M \geq 2$, 则 (1) 发生的概率为

$$p = \frac{1}{M-1} \left\{ g(u) \prod_{i=1}^n [1 + (M-1, p_i - 1)] - 1 \right\}$$

以下讨论问题 C 与问题 D.

定理 2 设 $r > 1, M > 1$, 则使同余方程 (4) 对于任意正整数 a 成立的 τ, M 的解为

$$\begin{cases} M = p_1 \cdots p_n \quad (k_i \text{ 为互不相同的奇素数}); \\ \tau = k_i \varphi(p_i) + 1 \quad (p_i \text{ 为正整数, } 1 \leq i \leq n), \end{cases}$$

证明 若有一个素数 p 及大于 1 的整数 l , 使 $p^l \parallel M$, 则令 $a = p^{l-1}$. 显然

$$r(l-1) \geq 2(l-1) \geq l,$$

于是 $p^l \mid (a^r - a)$, $M \mid (a^r - a)$. 从而 M 为若干个互不相同的奇素数之积, 记 $M = p_1 \cdots p_n$. 由定理 1 知 (4) 的解数为

$$s = \prod_{i=1}^n [1 + (r-1, \varphi(p_i))]$$

为使解数 $s = M$, 必须而且只须

$$(r-1, \varphi(p_i)) = p_i - 1 \quad (i=1, \dots, n), \text{ 从而}$$

$$\varphi(p_i) \mid r-1 \quad (i=1, \dots, n)$$

亦即 $r = k_i \varphi(p_i) + 1 \quad (1 \leq i \leq n)$. 命题得证.

$$\text{设 } M \geq 3, r = \frac{k\varphi(M)}{2} + 1, \text{ 则}$$

- (i) 当 M 含平方素因子时, 方程 (3) 不能对任意的 a 成立;
 - (ii) 当 M 不含平方素因子时, 方程 (3) 能对任意的 a 成立的主要条件是: k 为偶数或 M 至少含有两个不同的奇素因子.
- 至此, 全部问题皆得到解决.

参 考 文 献

- [1] Solovay, R., Strassen, V., A fast Monte Carlo test for primality, *SIAM J. Comput.*, **6** (1977), No. 1, 84—85.
- [2] Rivest, R. L., Shamir, A., Adleman, L., A method for obtaining digital signature and public key cryptosystems. *communications of the ACM Feb.*, 1978, 120—126.
- [3] Markle, R. C., Hellman, M. E., Hiding information and signatnres in trap door knapsacks, *IEEE, Trans. Inform. Theory*, 1978, 525—530.

Two Applications of Numer Theory Methods in Cryptography

Kang Jiding

(Southwest Teachers University)

JOURNAL OF CHINA UNIVERSITY
OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

(Quarterly)

Vol. 17 No. 1 Sum No. 53 1987

Hefei, Anhui

The People's Republic of China

中国科学技术大学学报

(季刊)

第17卷 第1期 (总第53期)

编辑出版: 《中国科学技术大学学报》编辑部
(安徽省合肥市金寨路24号)

印刷: 中国科学技术大学印刷厂

国内总发行: 合肥市邮局

订购处: 全国各地邮局

国外总发行: 中国国际图书贸易总公司
(中国国际书店, 北京2820信箱)

安徽省报刊登证: 055

1987年3月出版

邮政代号: 26—31

定价: 1.20元

国外代号: Q 527