第44卷第3期 中国科学技术大学学报 Vol. 44, No. 3
2014年3月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Mar. 2014

文章编号:0253-2778(2014)03-0188-06

# 奈特不确定环境下固定供款型养老基金最优投资策略

石学芹,费为银,胡慧敏,鲍品娟

(安徽工程大学金融工程系,安徽芜湖 241000)

**摘要**:提出了带有最低保障固定供款养老基金最优管理的连续时间随机控制模型.在奈特(Knight)不确定的基金管理者区分含糊(ambiguity)和含糊态度(ambiguity attitude)下,用 $\alpha$ 极大极小期望效用刻画其对无限区间上养老基金财富的效用,利用随机控制理论刻画基金管理者的值函数.给出了作为 HJB 方程解的值函数的显式解及反馈形式的最优投资策略的显式解.

**关键词**:随机控制;奈特不确定;$\alpha$ 极大极小期望效用;无穷区间倒向随机微分方程;最优投资策略

**中图分类号**:F224.9 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2014.03.004

**AMS Subject Classification (2000)**: Primary 65C30; Secondary 91B30

**引用格式**: Shi Xueqin, Fei Weiyin, Hu Huimin, et al. On optimal investment strategy of pension funds with a minimum guarantee under Knightian uncertainty[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2014,44(3):188-193,226.

石学芹,费为银,胡慧敏,等. 奈特不确定环境下固定供款型养老基金最优投资策略[J]. 中国科学技术大学学报,2014,44(3):188-193,226.

# On optimal investment strategy of pension funds with a minimum guarantee under Knightian uncertainty

SHI Xueqin, FEI Weiyin, HU Huimin, BAO Pinjuan

(*Department of Financial Engineering, Anhui Polytechnic University, Wuhu* 241000, *China*)

**Abstract**: A continuous-time stochastic control model of optimal management was proposed for a defined contribution pension fund with a minimum guarantee. A pension fund manager's utility was characterized from the fund wealth on an infinite horizon by $\alpha$-maxmin expected utility ($\alpha$-MEU), by which he differentiates ambiguity and ambiguity attitude under Knightian uncertainty. Pension fund manager's value function was derived by the stochastic control theory. The explicit expressions for both the optimal allocation strategy in feedback form and the value function which is a solution to the HJB equation were obtained.

**Key words**: stochastic control; Knightian uncertainty; $\alpha$-maxmin expected utility; infinite time interval BSDE; optimal investment strategy

---

**收稿日期**:2011-12-15;**修回日期**:2012-03-06

**基金项目**:国家自然科学基金(71171003),安徽省高校自然科学基金(KJ2012B019, KJ2013B023)资助.

**作者简介**:石学芹,女,1975年生,助教/硕士. 研究方向:金融工程. E-mail: fengyuan71206@163.com

**通讯作者**:费为银,博士/教授. E-mail: wyfei@dhu.edu.cn

## 0 引言

在最优投资问题研究中一些学者把不确定性分为风险和奈特不确定(又称含糊)两种,并且两者差异显著. Chen 等[1]研究了存在含糊厌恶情形下,用连续时间递推多先验效用刻画的最优消费投资问题. Fei[2]研究了带预期的最优消费和投资组合选择问题,其中区分了风险和含糊. 进一步地,Fei[3]研究了区分含糊和含糊态度的最优消费投资策略. 夏登峰等[4-5]分别研究了变折现率下带含糊和预期的投资问题及带含糊厌恶的股东价值最大化的比例再保险问题. 费为银等[6]在考虑通胀情形下,区分含糊和含糊态度的最优消费和投资策略问题. 费为银等[7]在奈特不确定环境下,研究了经济代理人在劳动负效用情形下的消费投资和退休选择问题,指出不确定将影响决策行为. 李娟等[8]在部分信息及市场利率非零的情形下,利用半鞅和倒向随机微分方程方法,研究了资产预期收益率发生紊乱时的最优投资策略选择问题,推广了一般框架下最优投资组合的研究结果. 李娟等[9]在上面情形下,应用 $\alpha$ 极大极小期望效用,研究资产预期收益率发生紊乱时的投资组合问题,并应用鞅论解出指数效用下的最优交易策略和价值过程的明确表达式. Fei[10]在 $\alpha$ 极大极小预期的不变替代弹性效用下,研究了无限时间区间上的投资者,区分含糊和含糊态度的最优消费闲暇、资产配置和退休选择问题;给出了最优退休时间,得到了退休前及退休后最优消费闲暇和资产配置的闭型解.

在世界人口老龄化加剧背景下,研究养老基金的投资增值问题的国内外学者越来越多. Deelstra 等[11]对终端财富不低于最低收益保障的固定供款型(defined contribution,DC)养老基金的最优投资管理问题进行了研究. Deelstra 等[12]研究了 DC 型养老基金最低保障的最优设置,并给出供款者效用最大化下供款者最小保障的显式解. 两个模型中,都把基金经理的报酬取为盈余的固定比例. Giacinto 等[13]用随机最优控制方法,进一步研究了带最低保障的养老基金最优投资问题. 并证明了值函数是相应 HJB 方程的正则解,给出了反馈形式的最优投资策略. 文中假设基金经理的目标是最大化无限区间上财富的预期效用. 石学芹等[14]研究了带红利的 DC 型养老基金的最优投资管理问题.

本文在 Giacinto 等[13]模型基础上,考虑 Knight 不确定环境下,当约束的偿债力水平不低于供款-保险给付余额时,区分含糊和含糊态度养下老基金经理的最优投资配置策略.

## 1 模型框架和基本假设

本文采用 Giacinto 等[13]中的基本假设,在由一维标准 Brown 运动生成的完备的带流概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t^B\},\mathbb{P})$上,固定供款型养老基金的财富动力学为

$$\left.\begin{aligned} dX(t) &= \{[\pi(t)(\mu-r)+r]X(t)+c(t)-b(t)\}dt+\\ &\quad \pi(t)\sigma X(t)dB(t),\\ X(0) &= x_0>0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中,$r>0$ 是债券收益率,$\sigma>0$ 是价格服从几何布朗运动的风险资产的波动率,均为常数,$\mu=r+\sigma\lambda$ 是漂移项,且市场的瞬时风险溢价 $\lambda>0$. $t(t\geqslant0)$时刻,养老基金持有的财富 $X(t)$及投资到风险资产的比例 $\pi(t)$都是$\{\mathscr{F}_t^B\}_{t\geqslant0}$适应的,记投资组合过程集为 $\Pi$. 对 $\forall\ t\geqslant0$,$\pi(t)\in[0,1]$,即本文不允许借款和卖空;$c(t)$, $t\geqslant0$, 表示养老基金的供款流(contributions), $b(t)$, $t\geqslant0$, 表示保险给付流(benefits).

为了简化计算,这里假设养老基金全部参加者是一个平稳的开类:参加养老基金的人员是同质类(homogeneous class),成员流是常数,他们在基金里停留 $T$ 个单位时间;$T$ 时刻后,总有 $N$ 个人进入养老基金,同时 $N$ 个人退出. 因此,类似 Giacinto 等[13],总假设 $X(t)\geqslant l(t)$, a. s. $t\geqslant0$. 其中,偿债力水平(solvency level) $l(t)$是非降的、严格正的连续函数,$t\geqslant T$ 时,即养老基金进入平稳阶段后,$l(t)$为常数;本文仅就 $s\geqslant T$,即养老基金进入人口统计学的平稳机制(stationary demographic regime)的最优投资问题进行研究. 当 $t<T$ 时,养老基金处于累积阶段,需要不同方法处理. 此时,记

$$A \triangleq c(t)-b(t),\ t\geqslant T,$$

即 A 为供款-保险给付余额(the balance between contribution and benefit rate). 这里 A ($A>0$)可以看成常数,且 $l=l(T)$.

此时,方程(1)变为

$$\left.\begin{aligned} dX(t) &= [(\pi(t)\sigma\lambda+r)X(t)-A]dt+\\ &\quad \pi(t)\sigma X(t)dB(t),\ t\geqslant s,\\ X(s) &= x\geqslant l. \end{aligned}\right\}$$

下面刻画奈特不确定养老基金经理的先验集及

$\alpha$ 极大极小效用($\alpha$-MEU).

类似 Chen 等[1]及 Fei[2],首先给出重要的先验集即基金经理使用的概率测度集 $\mathscr{P}$ 的构造.

定义密度生成元过程 $\theta=(\theta_t)$,记所有密度生成元集为 $\Theta$,因此,每个密度生成元 $\theta$ 相应的生成一个 $\mathbb{P}$ 鞅$(\mathbb{Z}_t^\theta)$,其中,

$$\mathbb{Z}_t^\theta \triangleq \exp\{-\frac{1}{2}\int_0^t |\theta_s|^2 ds-\int_0^t \theta_s dB(s)\},\quad 0\leqslant t<+\infty.$$

且 $\theta$ 满足

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right)\right]<\infty.$$

由此,生成了一个在$(\Omega,\mathscr{F})$上与 $\mathbb{P}$ 等价的概率测度 $\mathbb{Q}^\theta$,其中,

$$\left.\frac{d\,\mathbb{Q}^\theta}{d\,\mathbb{P}}\right|_{\mathscr{F}_t^B}=\mathbb{Z}_t^\theta,\ 0\leqslant t<+\infty \tag{2}$$

至此,对给定的密度生成元集 $\Theta$,相应的生成先验集 $\mathscr{P}$,其中,

$$\mathscr{P}=\{\mathbb{Q}^\theta:\theta\in\Theta,\mathbb{Q}^\theta\text{ 由式(2)给出}\}.$$

类似 Fei[3],易得下面引理.

**引理 1.1** 密度生成元集 $\Theta$ 满足:

① $0\in\Theta$,且 $\sup\{|\theta|:\theta\in\Theta\}<\infty$.

② 对任意过程$(\xi_t)$,都存在$(\overline{\theta}_t(\xi_t))$,$(\underline{\theta}_t(\xi_t))\in\Theta$,使得

$$\overline{\theta}_t(\xi_t)\cdot\xi_t=\max_{\theta\in\Theta}\theta_t\cdot\xi_t,$$
$$\underline{\theta}_t(\xi_t)\cdot\xi_t=\min_{\theta\in\Theta}\theta_t\cdot\xi_t.$$

③ 在 $L^1([0,\tau]\times\Omega)$上,对每个 $\tau\in[0,+\infty)$,$\Theta$ 是随机凸和弱紧的.

若养老基金经理拥有先验集 $\mathscr{P}$ 时,对任意$\mathbb{Q}\in\mathbb{P}$,$\theta$ 为相应的密度生成元,则 Girsanov 定理可知,由 $dB^{\mathbb{Q}}(t)=dB(t)+\theta_t dt$ 确定的随机过程 $B^{\mathbb{Q}}(t)$是 $\mathbb{Q}$ 布朗运动,且$\mathbb{Q}$ 在$(\Omega,\mathscr{F})$上等价于$\mathbb{P}$,于是基金财富方程(1)可以整理为

$$\left.\begin{aligned}&dX(t)=[(\pi(t)\sigma\lambda+r)X(t)-A]dt+\\&\qquad\pi(t)\sigma X(t)(dB^{\mathbb{Q}}(t)-\theta_t dt),\ t>s\geqslant T;\\&X(s)=x\geqslant l.\end{aligned}\right\}$$

记 $U:[l,+\infty)\to R\cup(-\infty)$为 $C^2((l,+\infty);R)$上的严格增的凹(concave)函数,对给定常数 $c>0$ 及 $\beta\in[0,1)$,$U(x)\leqslant c(1+x^\beta)$,其中,$\rho>\beta\gamma+\dfrac{\lambda^2}{2}\dfrac{\beta}{1-\beta}$,$\rho\geqslant 0$ 为效用 $U$ 的折现率.养老基金经理区分含糊和含糊态度的 $\alpha$-MEU 模型为

$$\left.\begin{aligned}&J_s=J(s,x;\pi(\cdot))=\\&\alpha\min_{\mathbb{Q}\in\mathscr{P}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\int_s^{+\infty}e^{-\rho(t-s)}U(X(t;s,x,\pi))dt\mid\mathscr{F}_s^B\Big]+\\&(1-\alpha)\max_{\mathbb{Q}\in\mathscr{P}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\int_s^{+\infty}e^{-\rho(t-s)}U(X(t;s,x,\pi))dt\mid\mathscr{F}_s^B\Big],\\&\qquad s\geqslant T\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

参数 $\alpha\in[0,1]$,且取 $\alpha$ 为常数,$\alpha$ 为反映了基金经理的含糊态度,当 $\alpha=0$ 时,基金经理是最乐观的;当 $\alpha=1$时,基金经理是最悲观的.由 Chen 等[15]无穷区间倒向随机微分方程理论和 Fei[3],有下面命题成立.

**命题 1.1** 对 $\pi\in\Pi$,有

① 存在唯一的连续过程$(\overline{J}_t,\bar{\sigma}_t)$和$(\underline{J}_t,\underline{\sigma}_t)$分别满足下面的倒向随机微分方程

$$\left.\begin{aligned}&d\overline{J}_t=[-U(X)+\rho\overline{J}_t+\underline{\theta}_t\bar{\sigma}_t]dt+\bar{\sigma}_t dB_t,\\&\overline{J}_{+\infty}=0\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}&d\underline{J}_t=[-U(X)+\rho\underline{J}_t+\overline{\theta}_t\underline{\sigma}_t]dt+\underline{\sigma}_t dB_t,\\&\underline{J}_{+\infty}=0\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

② $(\overline{J}_t)=(J_t^{\mathbb{Q}^{\underline{\theta}}})$是式(4)的唯一解,$(\underline{J}_t)=(J_t^{\mathbb{Q}^{\bar{\theta}}})$是式(5)的唯一解,并且有

$$\left.\begin{aligned}&\overline{J}_t=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\underline{\theta}}}\Big[\int_t^{+\infty}e^{-\rho(s-t)}U(X(s;t,x,\pi))ds\mid\mathscr{F}_t^B\Big],\\&\qquad t\geqslant T\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}&\underline{J}_t=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\bar{\theta}}}\Big[\int_t^{+\infty}e^{-\rho(s-t)}U(X(s;t,x,\pi))ds\mid\mathscr{F}_t^B\Big],\\&\qquad t\geqslant T\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

③ 过程$(\overline{J}_t)$是 $\overline{J}_{+\infty}=0$ 及式(8)的唯一解.

$$\left.\begin{aligned}&\overline{J}_t=\max_{\mathbb{Q}\in\mathscr{P}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\int_t^{\tau}e^{-\rho(s-t)}U(X(s;t,x,\pi))ds+\overline{J}_\tau\mid\mathscr{F}_t^B\Big],\\&\qquad T\leqslant t<\tau\leqslant+\infty\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

过程$(\underline{J}_t)$是 $\underline{J}_{+\infty}=0$ 及式(9)的唯一解.

$$\left.\begin{aligned}&\underline{J}_t=\min_{\mathbb{Q}\in\mathscr{P}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\int_t^{\tau}e^{-\rho(s-t)}U(X(s;t,x,\pi))ds+\underline{J}_\tau\mid\mathscr{F}_t^B\Big],\\&\qquad T\leqslant t<\tau\leqslant+\infty\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

对参数 $\kappa\in R$,且 $\kappa\geqslant 0$,若

$$\Theta=\{(\theta_t):\sup_t\{|\theta_t|:t\in[T,\infty)\}\leqslant\kappa\},$$

类似 Chen 等[1]及 Fei[3],称密度生成元集 $\Theta$ 为 $\kappa$ 无知,表示基金经理的含糊厌恶程度.由引理 1.1 的②有

$$\max_{\theta\in\Theta}\theta_t\sigma_t^I=\bar{\theta}_t^{\kappa}(\sigma_t^I)\sigma_t^I,\ \bar{\theta}_t^{\kappa}=\kappa\cdot\mathrm{sgn}(\sigma_t^I),$$

$$\min_{\theta\in\Theta}\theta_t\sigma_t^I=\underline{\theta}_t^{\kappa}(\sigma_t^I)\sigma_t^I,\ \underline{\theta}_t^{\kappa}=-\kappa\cdot\mathrm{sgn}(\sigma_t^I).$$

于是,有下面命题.

**命题1.2**　对$\kappa$无知的密度生成元集$\Theta$,有

① 令

$$\theta_t^{\kappa}(\sigma_t^I)\overset{\Delta}{=}\theta_t^{\kappa}=\lambda_t^{\kappa}\bar{\theta}_t^{\kappa}(\underline{\sigma}_t^{\kappa})+(1-\lambda)\underline{\theta}_t^{\kappa}(\bar{\sigma}_t^{\kappa}),$$

其中,

$$\lambda_t^{\kappa}=\frac{\alpha\underline{\sigma}_t^{\kappa}}{\alpha\underline{\sigma}_t^{\kappa}+(1-\alpha)\bar{\sigma}_t^{\kappa}},$$

在$\kappa$无知下,$\bar{\sigma}_t^{\kappa}$,$\underline{\sigma}_t^{\kappa}$分别为式(4),(5)的解.则由式(3)定义的目标泛函$J_t$是下面BSDE的解,

$$\mathrm{d}J_t=[-U(X(t;s,x,\pi))+\rho J_t+\theta_t^{\kappa}(\sigma_t^I)\sigma_t^I]\mathrm{d}t+\sigma_t^I\mathrm{d}B_t,\ J_{+\infty}=0\tag{10}$$

② 设$\lambda\in[0,1]$,对$0<t\leqslant\tau\leqslant+\infty$,$\theta^{\kappa}=(\theta_t^{\kappa})$,存在$\mathbb{Q}^{\theta^{\kappa}}\in\mathscr{P}$使得

$$J_t=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\theta^{\kappa}}}\Big[\int_t^{+\infty}\mathrm{e}^{-\rho(s-t)}U(X(s;t,x,\pi))\mathrm{d}s\mid\mathscr{F}_t^B\Big],\quad t\geqslant T.$$

记

$$\Pi_{ad}(s,x)=\{\pi:[s,+\infty)\times\Omega\to[0,1]$$

适应于$\{\mathscr{F}_t^{B_s}\}_{t\geqslant s}\mid X(t;s,x,\pi)\geqslant l,t\geqslant s\}$是由初始时刻$s\geqslant T$,初始财富$x\geqslant l$开始的容许策略集,并且满足

$$\underline{\sigma}_t^{\kappa}(\pi)=\bar{\sigma}_t^{\kappa}(\pi)>0,(t,\omega)\in[0,\tau]\times\Omega,\quad \text{a. s. a. e.}\quad T\leqslant\tau\leqslant+\infty.$$

由文献[13,命题4.1]易得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\int_s^{+\infty}\mathrm{e}^{-\rho t}U^+(X(t))\mathrm{d}t\Big]<\infty,\ \forall\ \mathbb{Q}\in\mathscr{P}.$$

对$\alpha\in[0,1]$,奈特不确定环境下,区分含糊厌恶和含糊态度的养老基金经理的值函数为

$$V(s,x)=\sup_{\pi(\cdot)\in\Pi_{ad}(s,x)}J(s,x;\pi(\cdot)).$$

对$\pi(\cdot)\in\Pi_{ad}(s,x)$,命题1.2的条件满足,则此时存在

$$\theta_t^{\kappa}=(2\alpha-1)\kappa,$$

使得

$$J(s,x;\pi(\cdot))=\mathbb{E}_{\kappa}\Big[\int_s^{+\infty}\mathrm{e}^{-\rho(t-s)}U(X(t;s,x,\pi))\mathrm{d}t\mid\mathscr{F}_s^{B}\Big],\ s\geqslant T.$$

其中,$\mathbb{E}_{\kappa}=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\theta^{\kappa}}}$.

由命题1.1的③可以使得下面引理成立.

**引理1.2**　值函数$V(s,x)$满足Bellman动态规划原理,即对每个$s\geqslant T$,$x\geqslant l$及停时$\tau\geqslant s$,有下面泛函方程成立:

$$V(s,x)=\sup_{\pi(\cdot)\in\Pi_{ad}(s,x)}\mathbb{E}_{\kappa}\Big[\int_s^{\tau}\mathrm{e}^{-\rho(t-s)}U(X(t;s,x,\pi))\mathrm{d}t+V(\tau,X(\tau;s,x,\pi))\mid\mathscr{F}_s^{B}\Big].$$

令

$$V(x)=\mathrm{e}^{\rho T}V(T,x),$$

类似文献[13,命题4.3]可得

$$V(x)=\sup_{\pi(\cdot)\in\Pi_{ad}(T,x)}J_T(x;\pi(\cdot))=\sup_{\pi(\cdot)\in\Pi_{ad}(T,x)}\mathbb{E}_{\kappa}\Big[\int_T^{+\infty}\mathrm{e}^{-\rho(t-T)}U(X(t;T,x,\theta))\mathrm{d}t\mid\mathscr{F}_T^{B}\Big].$$

为简化计算,由引理1.2,不妨假设总是从$T$时刻开始,$X(T)=x$,则关于$V(x)$的HJB方程为

$$\left.\begin{aligned}&\rho v(x)-\sup_{\pi\in[0,1]}H_{0,cv}(x,v'(x),v''(x);\pi)=0,\\&x\in[l,+\infty)\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

其中,

$$H_{0,cv}(x,p,Q;\pi)=U(x)+p[(\pi\sigma\lambda-\pi\sigma\theta_t^{\kappa}+r)x-A]+\frac{1}{2}\pi^2\sigma^2x^2Q.$$

为计算Hamilton函数,令

$$H_{1,cv}(x,p,Q;\pi)=p\pi\sigma(\lambda-\theta_t^{\kappa})x+\frac{1}{2}\pi^2\sigma^2x^2Q,$$

当$p\geqslant0$,$Q\leqslant0$,$p^2+Q^2>0$时,$H_{1,cv}(x,p,Q;\pi)$在$\pi\in[0,1]$上有一个唯一的极大值点,即

$$\pi^*=\left|-\frac{(\lambda-\theta_t^{\kappa})p}{Q\sigma x}\right|\wedge1(\text{若}\ Q=0,\text{则取}\ \pi^*=1),$$

且有

$$H_1(x,p,Q)=\sup_{\pi\in[0,1]}H_{1,cv}(x,p,Q;\pi)=\begin{cases}-\dfrac{(\lambda-\theta_t^{\kappa})^2p^2}{2Q}, & \pi^*<1;\\ p\sigma(\lambda-\theta_t^{\kappa})x+\dfrac{1}{2}\sigma^2x^2Q, & \pi^*=1.\end{cases}$$

当$p=Q=0$时,每个$\pi\in[0,1]$都是极大值点,且$H_1(x,p,Q)=0$.则HJB方程(11)可以写成

$$\left.\begin{aligned}&\rho v(x)-U(x)-v'(x)(rx-A)-\\&H_1(x,v'(x),v''(x))=0,\\&x\in[l,+\infty)\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

## 2　当$rl=A$时的最优策略

由文献[13,引理3.8]可知当$rl=A$时,容许策略集$\Pi_{ad}(T,x)$是非空的.本文仅就$rl=A$时进一步

考虑奈特不确定环境下,区分含糊和含糊态度的最优投资策略.为简化计算并考虑到养老基金本身的特点,本文把养老基金管理人的财富效用取成经典的幂效用函数

$$U(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-l)^{\gamma}}{\gamma},\ x\geqslant l,\ 当\ \gamma\in(0,1);\\ \dfrac{(x-l)^{\gamma}}{\gamma},\ x>l,\ 当\ \gamma\in(-\infty,0)\end{cases}\tag{13}$$

由文献[16-17],适当选取常数 C,HJB 方程(12)有如下形式的解:

$$v(x)=C\frac{(x-l)^{\gamma}}{\gamma},\ \gamma\in(-\infty,0)\cup(0,1)\tag{14}$$

把式(13)及式(14)代入 HJB 方程(12)得

$$\rho C\frac{(x-l)^{\gamma}}{\gamma}-\frac{(x-l)^{\gamma}}{\gamma}-C(x-l)^{\gamma-1}(rx-rl)+\frac{(\lambda-\theta_t^{\kappa})^2[C(x-l)^{\gamma-1}]^2}{2C(\gamma-1)(x-l)^{\gamma-2}}=0.$$

解上述方程得

$$C=\left(\rho-\gamma r-\frac{(\lambda-\theta_t^{\kappa})^2\gamma}{2(1-\gamma)}\right)^{-1}\tag{15}$$

式中,

$$\rho>\gamma r+\frac{(\lambda-\theta_t^{\kappa})^2\gamma}{2(1-\gamma)},\ \lambda\leqslant\sigma(1-\gamma)+\theta_t^{\kappa}\tag{16}$$

这里,条件 $\rho>\gamma r+\frac{(\lambda-\theta_t^{\kappa})^2\gamma}{2(1-\gamma)}$保证了值函数的有限性.由式(16)中第二个条件 $\lambda\leqslant\sigma(1-\gamma)+\theta_t^{\kappa}$,可得 $\pi^*\leqslant1$,因而,此条件满足了养老基金投资管理模型中不允许借贷的要求,从而使得无借贷约束不起作用.

已知 $\theta_t^{\kappa}=(2\alpha-1)\kappa$.为定理证明需要,下面给出引理.

**引理 2.1** 令

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{[\lambda-(2\alpha-1)\kappa](x-l)}{\sigma(1-\gamma)x}\wedge 1, & x>l;\\ 0, & x\leqslant l.\end{cases}$$

则有以下结果:

① 对任意 $x\geqslant l$,闭环方程

$$\left.\begin{aligned}&dX(t)=\\&\{[r+\sigma(\lambda-(2\alpha-1)\kappa)\ G(X(t))]X(t)-A\}dt+\\&\sigma G(X(t))X(t)dB(t),\ t\geqslant T,\\&X(T)=x\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

有唯一强解 $X_G(\cdot;T,x)$.

② 对任意 $t\geqslant T$,有 $X_G(t;T,x)\geqslant l$, a. s..

③ 对任意 $p\geqslant1$,

$X_G(\cdot;T,x)\in C_{\mathscr{F}}([T,+\infty);L^p(\Omega;\mathbb{P}))$.

其中,对任意 $p\geqslant1$,集类 $C_{\mathscr{F}}([T,+\infty);L^p(\Omega;\mathbb{P}))$表示循序可测且 $L^p$ 均值有限的连续过程集.

**证明** 类似文献[13,引理4.22]. □

下面给出本文的主要结论.

**定理 2.1** 当式(13)给出的幂效用函数满足式(16)的条件时,由式(14)给出的函数 $v(x)$就是值函数,常数 C 由式(15)给出,即

$$V(x)=v(x)=\gamma^{-1}\left(\rho-\gamma r-\frac{(\lambda-(2\alpha-1)\kappa)^2\gamma}{2(1-\gamma)}\right)^{-1}(x-l)^{\gamma},$$

其中,当 $\gamma\in(0,1)$时,$x\geqslant l$;$\gamma\in(-\infty,0)$时,$x>l$.

**证明** 类似文献[13,命题4.26]. □

由本定理可直接得出下面推论.

**推论 2.1** 当

$$\rho>\gamma r+\frac{(\lambda-(2\alpha-1)\kappa)^2\gamma}{2(1-\gamma)},$$

$$\lambda-(2\alpha-1)\kappa\leqslant\sigma(1-\gamma)$$

时,对任意 $x>l$,若效用函数为式(13),则奈特不确定养老基金管理者的最优风险资产投资比例为

$$\pi^*(t)=\frac{\lambda-(2\alpha-1)\kappa}{\sigma(1-\gamma)}\frac{X_G(t)-l}{X_G(t)},$$

其中,$X_G(\cdot)$是下面方程唯一强解.

$$\left.\begin{aligned}&dX(t)=\left(r+\frac{(\lambda-(2\alpha-1)\kappa)^2}{1-\gamma}\right)(X(t)-l)dt+\\&\qquad\frac{\lambda-(2\alpha-1)\kappa}{1-\gamma}(X(t)-l)dB(t),\\&X(T)=x.\end{aligned}\right\}$$

## 3 结论

本文讨论了奈特不确定基金经理区分含糊和含糊态度下的养老基金最优风险资产投资管理问题,给出了幂效用函数下的最优风险资产投资比例.可以看出,当 $\alpha=1$ 即基金经理极度悲观时,风险资产的最优投资比例为$\frac{\lambda-\kappa}{\sigma(1-\gamma)}\frac{X_G(t)-l}{X_G(t)}$;当 $\alpha=0$ 即基金经理极其乐观时,风险资产的最优投资比例为$\frac{\lambda+\kappa}{\sigma(1-\gamma)}\frac{X_G(t)-l}{X_G(t)}$,因为 $\kappa>0$,故基金经理的含糊态度影响了风险资产的投资比例,他们越是乐观则对风险资产的投资比例越大.同样,奈特不确定也影响了基金经理的风险投资,对 $\alpha\in[0,\frac{1}{2})$,此时基金经

理比较乐观，则 $\kappa$ 越大即奈特不确定度越大，其风险资产投资比例就越大；对 $\alpha\in(\frac{1}{2},1]$，此时基金经理比较悲观，则 $\kappa$ 越大即奈特不确定度越大，其风险资产投资比例就越小. 这可以指导我们根据养老基金的不同要求选择不同的基金管理机构.

我国每年两会上养老问题都是热点. 而养老保险基金既有社会性又有金融性，养老基金保值增值问题的研究离不开资产配置理论的新发展. 现实经济环境中影响资产定价的因素众多，使得风险资产价格的不确定源本身具有模型不确定性，这使得我们一直都在关注了部分相关理论的最新进展，例如刘宏建等[18]研究了股票价格波动率具有模型不确定情形下的最优消费和投资决策问题. 我们在传统模型的基础上对动态模型不确定性进行研究，指出含糊厌恶的投资者是基于股价波动率的上界做出决策的，给出了投资者的最优投资消费与含糊对冲需求. 另外，针对金融风险管理、随机控制等研究中出现的模型不确定性，Peng[19]提出了次线性期望和 G 布朗运动理论来处理此类问题，Epstein 等[20]在 G 布朗运动框架下研究了驱动过程的漂移项和波动项都具有不确定时决策者的资产配置问题，Fei 等[21]用 G 布朗运动和次线性期望理论首次提出了随机控制的最优化原理，并用此理论研究了最优消费投资选择问题. 这些研究为我们将来研究养老基金保值增值问题提供了很好的技术支持.

**参考文献(References)**


[1] Chen Z, Epstein L G. Ambiguity, risk and asset returns in continuous time [J]. Econometrica, 2002, 70: 1 403-1 443.

[2] Fei W Y. Optimal consumption and portfolio choice with ambiguity and anticipation [J]. Information Sciences, 2007, 117: 5 178-5 190.

[3] Fei W Y. Optimal portfolio choice based on α-MEU under ambiguity [J]. Stochastic Models, 2009, 25: 455-482.

[4] Xia Dengfeng, Fei Weiyin, Liu Hongjian. On study of optimal investment with ambiguity and anticipation under fluctuated discounting rate[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2010, 26(3): 270-276.
夏登峰，费为银，刘宏建. 变折现率下带含糊厌恶与预期的最优投资研究 [J]. 应用概率统计，2010，26(3)：270-276.

[5] Xia Dengfeng, Fei Weiyin, Liang Yong. Maximization of shareholders value with ambiguity[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2010, 40(9): 920-924.
夏登峰，费为银，梁勇. 带含糊厌恶的股东价值最大化[J]. 中国科学技术大学学报，2010，40(9)：920-924.

[6] Fei Weiyin, Li Shujuan. Study on optimal consumption and portfolio with inflation under Knightian uncertainty [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2012, 29(6): 799-806.
费为银，李淑娟. Knight 不确定下带通胀的最优消费和投资模型研究[J]. 工程数学学报，2012，29(6)：799-806.

[7] Fei Weiyin, Chen Chao, Liang Yong. Optimal consumption-portfolio and retirement problem with disutility under Knightian uncertainty [J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2013, 29(1): 53-63.
费为银，陈超，梁勇. Knight 不确定下考虑负效用的消费和投资问题研究[J]. 应用概率统计，2013，29(1)：53-63.

[8] Li Juan, Fei Wei-Yin, Shi Xueqin, et al. Optimal trading strategy under disordered asset return and partial information[J]. Journal of Mathematics, 2012, 32(4): 693-700.
李娟，费为银，石学芹，等. 部分信息下资产收益率发生紊乱的最优投资策略[J]. 数学杂志，2012，32(4)：693-700.

[9] Li Juan, Fei Weiyin, Shi Xueqin, et al. Optimal trading strategy under disordered asset return and Knightian uncertainty [J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2013, 28(1): 13-22.
李娟，费为银，石学芹，等. 奈特不确定下资产收益率发生紊乱的最优投资模型研究[J]. 高校应用数学学报 A 辑，2013，28(1)：13-22.

[10] Fei W Y. Optimal consumption-leisure, portfolio and retirement selection based on α-maxmin expected CES utility with ambiguity [J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese University, Series B, 2012, 27(4): 435-454.

[11] Deelstra G, Grasselli M, Koehl P F. Optimal investment strategies in the presence of a minimum guarantee [J]. Insur Math Econ, 2003, 33: 189-207.

[12] Deelstra G, Grasselli M, Koehl P F. Optimal design of a guarantee for defined contribution funds[J]. J Econ Dyn Control, 2004, 28: 2 239-2 260.

[13] Giacinto M D, Federico S, Gozzi F. Pension funds with a minimum guarantee: A stochastic control approach [J]. Finance Stoch, 2011, 15(2): 297-342.


(下转第 226 页)