

基于多分辨率分析和极值理论的集合 VaR 模型

王传好,方兆本,韩宇

(中国科学技术大学管理学院统计与金融系,安徽合肥 230026)

摘要:为了捕捉金融资产价格波动的多尺度时变特征,利用多分辨率分析(multi-resolution analysis, MRA)将收益率序列分解成不同时域上的正交分量,并对各分量序列分别建立适当的 ARMA-GARCH 模型,在此基础上引入极值理论(extreme value theory, EVT)对收益率的厚尾性进行建模,构建了一种 MRA-EVT 模型.将该模型应用于沪深 300 指数的 VaR 预测.实证研究结果表明,与传统 ARMA-GARCH 模型、无条件 EVT 模型和 MRA 模型相比,该 MRA-EVT 模型显著提高了 VaR 的预测绩效.

关键词:多分辨率分析;GARCH 模型;极值理论;VaR

中图分类号:F830.9 **文献标识码:**A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2016.11.008

引用格式:王传好,方兆本,韩宇.基于多分辨率分析和极值理论的集合 VaR 模型[J].中国科学技术大学学报,2016,46(11):928-938.

WANG Chuanhao, FANG Zhaoben, HAN Yu. Systematic VaR model based on multi-resolution analysis and extreme value theory[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2016, 46(11):928-938.

Systematic VaR model based on multi-resolution analysis and extreme value theory

WANG Chuanhao, FANG Zhaoben, HAN Yu

(Department of Statistics and Finance, School of Management, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: In order to capture time-varying features of volatility of asset price, multi-resolution analysis (MRA) was used to decompose financial returns into orthogonal components in different time domains. For each component, a certain ARMA-GARCH model was built. Extreme value theory (EVT) was then introduced so as to model the fat-tail of financial returns, and an MRA-EVT model was constructed. Finally, the proposed model was applied to predict VaR of CSI 300 index, and compared with traditional models, such as ARMA-GARCH model, unconditional EVT model and MRA model. Empirical results show that the MRA-EVT model significantly improves the accuracy of VaR estimation.

Key words: multi-resolution analysis; GARCH model; EVT; VaR

收稿日期:2015-11-03;修回日期:2016-05-19

基金项目:国家自然科学基金(71371007)资助.

作者简介:王传好,男,1988年生,硕士生.研究方向:金融工程. E-mail: wchgood@mail.ustc.edu.cn

通讯作者:方兆本,博士/教授. E-mail: zbfang@ustc.edu.cn

0 引言

随着我国金融改革的不断深化,金融市场面临高度不确定性,金融风险管理的重要性显得日益突出,而最标准的风险量化方法是 VaR. 国内外学者对 VaR 的预测做了大量研究, Jorion^[1]、Duffie 等^[2]对 VaR 进行了一般阐述,之后, VaR 开始逐渐成为衡量金融机构和金融市场风险控制的重要工具. 如 Bouchaud 等^[3]研究非线性组合下的 VaR 计算,他们认为把金融资产的波动性事先假定成服从正态分布与实际情形经常不符,首次采用非正态性假定来建模; Li^[4]采用半参数方法来估计 VaR; Kevin^[5]在预测 VaR 时开创性地采用了极端值法; Fan^[6]对全球金融市场中主要的股指 VaR 进行预测研究,首次综合使用参数方法、非参数方法和半参数方法估计 VaR; 刘向丽等^[7]为了研究中国铜期货市场的条件 VaR、基于非对称的 EGARCH 与 TGARCH 模型,使用了参数法、半参数法和核函数的非参数法 3 种不同方法分别对 VaR 进行预测,模型检验得出非参数法对 VaR 预测明显好于其他两种方法.

以上方法对极端事件的预测能力较差,而极值理论关注收益率分布的尾部对极端市场的风险度量. Davison 等^[8]详细讨论了极限理论的现代方法,该方法并不注意最小或最大值的讨论,但重点在高阈值的超出量和超越时间的探讨,即 POT (peaks over threshold) 模型. 接着, Danielsson 等^[9]对如何选择这个门限进行了研究. 此外, Neftci, Jondeau 等, Gilli 等, Christoffersen 等^[10-13]也各自运用 EVT (extreme value theory) 和其他模型对金融数据的尾部特征进行了分析和比较. Christoffersen^[14]阐述了极值理论的一般建模过程,叙述其在金融中有哪些具体运用,着重讨论了 EVT 在度量金融风险时的应用. 林宇等^[15]运用 FIGARCH 和极值理论针对金融收益厚尾分布特征及条件波动率长记忆性特征进行建模,测度出金融市场动态极值风险,结果表明,无论是中国新兴市场还是西方成熟发达市场,金融收益与标准收益均呈现出明显的偏厚尾分布特征. 杨超等^[16]使用 Markov 波动转移结合极值理论研究国际碳交易市场的系统风险,采用 POT 模型拟合标准残差序列的右尾超门限分布,确定极值分位数,测算动态 VaR, 并由此分析我国获批碳项目变动趋势与国际碳交易市场风险变动趋势间关系. Chavez-Demoulin 等^[17]考虑了厚尾和波动聚集效

应,采用 POT 方法估计适用于平稳和非平稳序列的条件风险度量. McNeil 等^[18]基于 GARCH 模型和 EVT 在充分考虑了收益率序列的时变性基础上,提出了过滤的极值理论模型,并对 GARCH 结合极值理论模型、一般的极值理论模型、基于正态分布的 GARCH 模型和基于学生 t 分布的 GARCH 模型预测 VaR 的不同表现进行了比较,发现 GARCH 结合极值理论模型的预测结果好于其他 3 种模型. Allen 等^[19]认为传统的风险度量技术无法模拟极端的条件,采用极值理论建立了尾部风险模型,并对英国富时 100 指数和美国标普 500 指数进行了模拟风险,表明极值理论能很好地考虑到极端的条件. 李强等^[20]针对序列相关导致的极值成串现象,引入极值指标来刻画极值数据间的相关结构,构建 GPD 模型来测度 VaR, 研究发现使用极值理论提高了 VaR 的适用性和估计的精确度. Berger^[21]建立了 EVT-GARCH-Copula 模型,并对德国股市、市场指数和汇率组成的投资组合的 VaR 进行估计,预测精度得到了提高. 小波分析近年来也被用于 VaR 的估计. 张冕等^[22]使用小波理论对预测计算 VaR 进行了研究,傅强等^[23]将小波阈值规则引入风险价值模型的计算中,利用收益率分布密度的小波非线性阈值估计方法,建立了 VaR 的多尺度估值模型,并对大中华区内四大股指的风险价值进行量化分析,获得了较好的实践经验. Liu 等^[23]采用小波分解与重构技术建立股指期货保证金的预测模型,结果表明这不同程度地改善了保证金的审慎水平. 彭选华^[24]从多尺度分析和贝叶斯学习的视角,对金融风险管理中的 VaR 模型进行相关的理论拓展和实证检验,从而实现对金融风险价值的最优预测与管理. 严纲^[25]研究金融市场交易者有着不同的投资时间尺度和风险偏好下的风险度量,采用小波分析研究了股票收益率的时间尺度属性,发现小波方差和时间尺度之间表现出近似线性的关系. He 等^[26]运用多尺度小波分析方法来分析外汇市场在多维领域的多尺度特征,进一步改善了风险价值估计的可靠性.

上述文献表明传统的无条件极值理论虽然考虑了资产收益率序列的“厚尾性”特征,但它忽略了资产收益率分布的时变特点. ARMA-GARCH 模型虽然采用了条件均值和条件方差,但只关注整个分布,而不是直接对风险管理所关心的尾部进行建模. 本文建立 MRA-EVT 模型将这二者结合,同时引进多

分辨分析,希望可以更加准确地对收益率分布进行建模,从而提高了 VaR 估计的精度.

1 MRA-EVT 模型

1.1 多分辨率分析理论

Mallat^[27]在 1989 年将计算机视觉领域中的多分辨率思想引入小波变换中,将在此之前的正交小波基的构造统一起来.所谓多分辨率分析(multi-resolution analysis, MRA),其目的是把一个函数分解成一系列平滑本分和细节部分的集成. MRA 的一般定义如下:

令 $V_j, j = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, 为 $L^2(\mathbb{R})$ 中的一函数子空间序列. 我们称空间集合 $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 为依尺度函数 $\varphi(x)$ 的多分辨率分析, 如果下列条件成立:

- ① 嵌套性: $V_j \supset V_{j+1}$;
- ② 分立性: $\bigcap V_j = \{0\}$;
- ③ 尺度性: $f(x) \in V_j$, 当且仅当 $f\left(\frac{x}{2}\right) \in V_{j+1}$;
- ④ 标准正交基: 函数 $\varphi(x) \in V_0$, 且 $\{\varphi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$ 是 V_0 的标准正交基(按 L^2 内积).

在金融时间序列的实际应用分析中,需要观察金融时间序列的细节性特征,这就可以通过多分辨率分析,从而能够逐步由粗及细地观察信号,假定原信号为 X_t , 分解层数为 J , 则 X 的多分辨率分析可表示为

$$X_t = S_{J,t} + \sum_{j=1}^J D_{j,t} \quad (1)$$

式中, $S_{J,t}$ 为平滑序列, $D_{j,t}, j = 1, 2, \dots, J$, 为 J 个细节序列.

1.2 极值理论

极值理论是研究次序统计量的极端分布的理论,其关注的是收益率分布的尾部. 假设随机变量 X 的分布函数为 F , X_F 为分布函数 F 的右端点. 选取阈值为 u , 定义 X 的超额值的分布函数为

$$F_u(y) = P(X - u \leq y \mid X > u), \quad 0 \leq y \leq X_F - u.$$

当 $u \rightarrow \infty$ 时, $F_u(y) \approx G_{\xi, \delta}(y)$, $G_{\xi, \delta}(y)$ 定义如下:

$$G_{\xi, \delta}(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y/\delta} & \text{if } \xi = 0, \\ 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\delta} y\right)^{-1/\xi} & \text{if } \xi \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

称为广义帕累托分布 (generalized Pareto distribution, GPD). ξ 为形状参数, δ 为尺度参数. 一般当 $\xi > 0$ 时, $G_{\xi, \delta}(y)$ 可以用于描述金融资产收益率序列分布的“厚尾性”.

设样本总数为 T , 观测到的超过阈值 u 的样本

个数为 T_u , 参数 ξ, δ 估计值分别为 $\hat{\xi}, \hat{\delta}$. 以 $G_{\hat{\xi}, \hat{\delta}}(y) = 1 - \left[1 + \frac{\hat{\xi}(x-u)}{\hat{\delta}}\right]^{-1/\hat{\xi}}$ 作为 $F_u(y)$ 的估计, 以 $1 - \frac{T_u}{T}$ 作为 $F(u)$ 的估计, 则由式(2)可得

$$\hat{F}(x) = \frac{T_u}{T} \left[1 - \left(1 + \frac{\hat{\xi}(x-u)}{\hat{\delta}}\right)^{-1/\hat{\xi}}\right] + \left(1 - \frac{T_u}{T}\right) \quad (3)$$

在给定的置信水平 $p = 1 - \alpha$ 下的 VaR 估计为

$$\text{VaR}_{t+1}^p = u + \frac{\hat{\delta}}{\hat{\xi}} \left[\left(\frac{T}{T_u} p\right)^{-\hat{\xi}} - 1\right] \quad (4)$$

在使用广义帕累托分布极值理论进行建模时, u 的选择至关重要. u 的不同选择将导致形状参数 ξ 的不同估计. 在实际应用中不同的金融机构应根据自己不同的风险容忍度选择确定阈值. 本文将应用超均值函数图法和 Hill 图法来选取阈值 u .

1.3 MRA-EVT 模型

传统的 VaR 方法是基于有效市场假说的, 市场的参与者都是同质的, 具有理性预期, 能理解市场结构和价格行为, 并简单地假定不同投资时段、频率的个体特征是可以忽略的. 然而实际中的金融市场日趋复杂, 市场的异质性已不容忽视. 根据异质性假说, 市场天然地具有异质性, 它是由具有不同的个性特征、投资策略、投资期限的异质性投资者组成的. 例如, 机构投资者可能偏爱一些长期投资, 而个体投资者更多的是进行短期投资. 金融资产的价格受不同投资者投资决策的综合影响. 传统的 VaR 估计方法已经无法满足风险管理的要求.

为了捕捉异质市场的更多信息和细节特征, 本文在前人研究的基础上, 基于异质性市场假说并结合小波分析中多分辨率分析和极值理论二者的优点, 提出了 MRA-EVT 模型来提高 VaR 的预测精度, 进而探究中国证券市场的微观结构特征, 这里选用具有代表性的沪深 300 指数进行实证分析. 本文利用小波分析中的多分辨率分析将收益率序列分解为不同尺度空间中的正交分量, 对各个分量分别建立 ARMA-GARCH 模型, 得到不同尺度下条件均值和条件方差的估计, 然后将其加总, 再根据 GPD 极值理论拟合标准化后的残差, 从而得出 VaR 的准确估计. Percival 等^[28]指出 La8 小波能消除频域中相位平移现象, 其最大特点是具有线性最小相位偏移, 很容易获得零相位小波变换. 随后 Fernandez 等^[29]和许启发等^[30]用 La8 小波对金融时间序列数

据进行了分析. 本文基于此也选用 La8 小波对收益率序列进行分解.

MRA-EVT 模型的具体操作程序如下:

① 确定小波分解层数 J , 利用 La8 小波对收益率序列 r_t 进行分解:

$$r_t = r_{S_j,t} + \sum_{j=1}^J r_{D_j,t}.$$

其中, $r_{S_j,t}$ 为平滑部分, $r_{D_j,t}$ 为细节部分.

② 对子序列 $r_{S_j,t}, r_{D_j,t} (j=1, 2, \dots, J)$ 分别建立适当的 ARMA-GARCH 模型, 即

$$\left. \begin{aligned} r_{s,t} &= \alpha_{s,0} + \sum_{i=1}^{m_s} \alpha_{s,i} r_{s,t-i} + \varepsilon_{s,t} - \sum_{j=1}^{n_s} \beta_{s,j} \varepsilon_{s,t-j} = \\ &\mu_{s,t} + \varepsilon_{s,t}, \\ \varepsilon_{s,t} &= \sigma_{s,t} \eta_{s,t}, \\ \sigma_{s,t}^2 &= a_{s,0} + \sum_{i=1}^{p_s} a_{s,i} \sigma_{s,t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q_s} b_{s,j} \varepsilon_{s,t-j}^2. \end{aligned} \right\}$$

其中, s 代表不同的尺度.

采用极大似然估计法估计出各个尺度下 ARMA-GARCH 模型的参数, 得到相应的条件均值和条件方差的估计值 $\hat{\mu}_{s,t}$ 和 $\hat{\sigma}_{s,t}^2$. 根据多分辨率分析的正交性, 将所得的各个分量下的 $\hat{\mu}_{s,t}$ 和 $\hat{\sigma}_{s,t}^2$ 线性叠加, 得到整体的条件均值 μ_t 和条件方差 σ_t^2 的估计:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_t &= \hat{\mu}_{S_j,t} + \sum_{j=1}^J \hat{\mu}_{D_j,t}, \\ \hat{\sigma}_t^2 &= \hat{\sigma}_{S_j,t}^2 + \sum_{j=1}^J \hat{\sigma}_{D_j,t}^2. \end{aligned}$$

③ 根据 $\hat{\mu}_t$ 和 $\hat{\sigma}_t^2$, 计算标准化残差序列:

$$z_t = \frac{r_t - \hat{\mu}_t}{\hat{\sigma}_t}.$$

再根据超均值函数图法选取阈值 u , 利用 GPD 拟合序列 z_t , 估计出参数形状参数 ξ 和尺度参数 δ . 根据无条件极值理论, 可得到置信水平为 p 下扰动项 z_t 向前一日的 VaR 预测值:

$$\text{VaR}_{t+1}^p(z) = u + \frac{\hat{\delta}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{n}{N_u} p \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right).$$

④ 根据步骤②中建立的模型估计出下一日的条件均值 $\hat{\mu}_{t+1}$ 和条件标准差 $\hat{\sigma}_{t+1}^2$, 可得 VaR 预测值为

$$\text{VaR}_{t+1}^p(z) = \hat{\mu}_{t+1} + \hat{\sigma}_{t+1} \text{VaR}_{t+1}^p(z).$$

根据上式计算得到的 VaR 实际上是一个条件 VaR.

2 实证分析

2.1 数据的选取与处理

本文主要研究中国股市的风险管理, 选取沪深

300 指数作为样本数据. 样本时间跨度从 2005-01-21 至 2014-04-04, 共得到 2 231 个交易日数据, 数据来源于 Wind 资讯终端. 根据公式 $r_t = \ln p_t - \ln p_{t-1}$, 计算得到相应的对数收益率序列, 如图 1 所示.

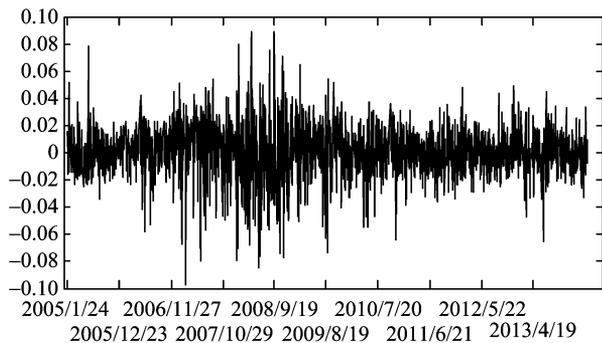


图 1 沪深 300 收益率序列

Fig. 1 CSI 300 index's daily return data

由于对训练样本和测试样本的比例划分并没有一个统一的标准, 但为了保证测试结果具有统计上的显著性, 选取前 1 731 个数据作为训练集 (即从 2005-01-21 至 2012-03-09), 后面的 500 个数据 (即从 2012-03-12 至 2014-04-04) 作为测试集.

2.2 描述性统计量与波动率差异检验

首先利用 Matlab 软件, 基于 La8 小波对收益率序列 r_t 进行 5 层分解:

$$r_t = S_5 + D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5.$$

图 2 显示了分解得到各个近似分量系数. 将上述分解得到的近似分量系数进行重构得到各个分量序列, 如图 3 所示.

使用 Matlab 软件对上述小波分解得到的平滑部分、细节部分和原始收益率序列进行统计描述与检验, 具体结果如表 1 所列.

通过图 1 可见时间序列是平稳的. 波动具有“成群”现象: 波动在一些较长时间内非常小 (2005 年), 在其他一些非常长的时间内非常大 (2008 年), 序列可能具有条件异方差性.

通过表 1 可见, 在样本区间内沪深 300 指数的对数收益率的均值为正值; 偏度小于 0, 说明负的收益率的频数大于正的收益; 峰度大于 3, 说明样本区间内, 具有尖峰的特点; 用 Matlab 作 JB 检验得出值为 1, 故序列不服从正态分布. 而 ADF 检验显示上述各序列都是平稳的. 各个分量同理易得出相同结果.

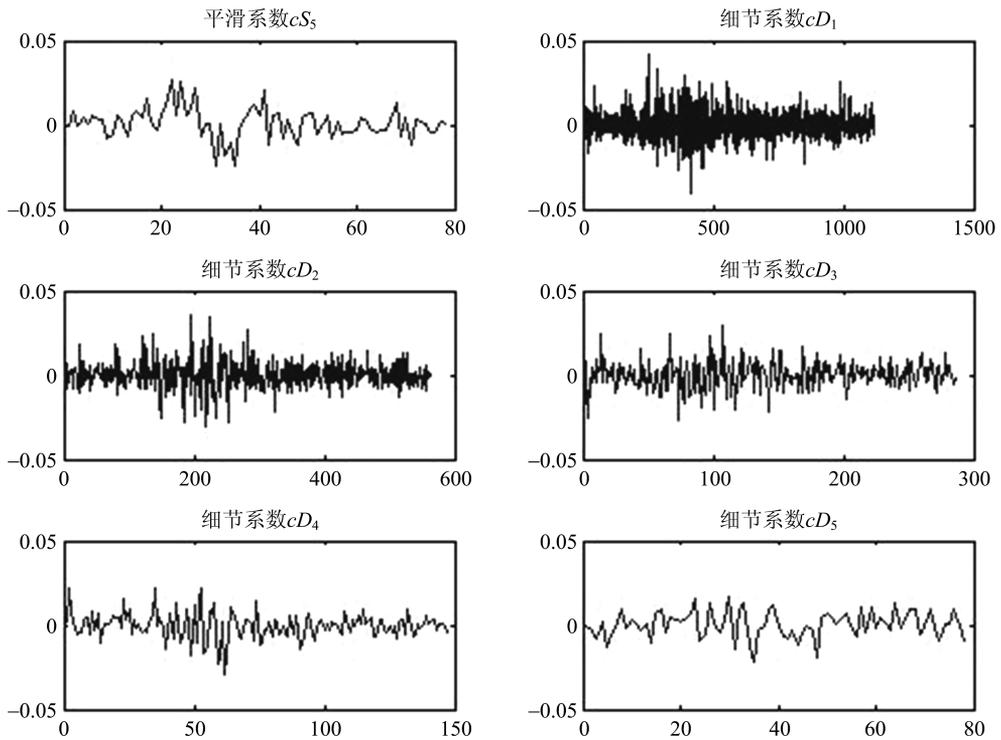


图 2 小波分解近似分量系数

Fig. 2 Wavelet approximation coefficients

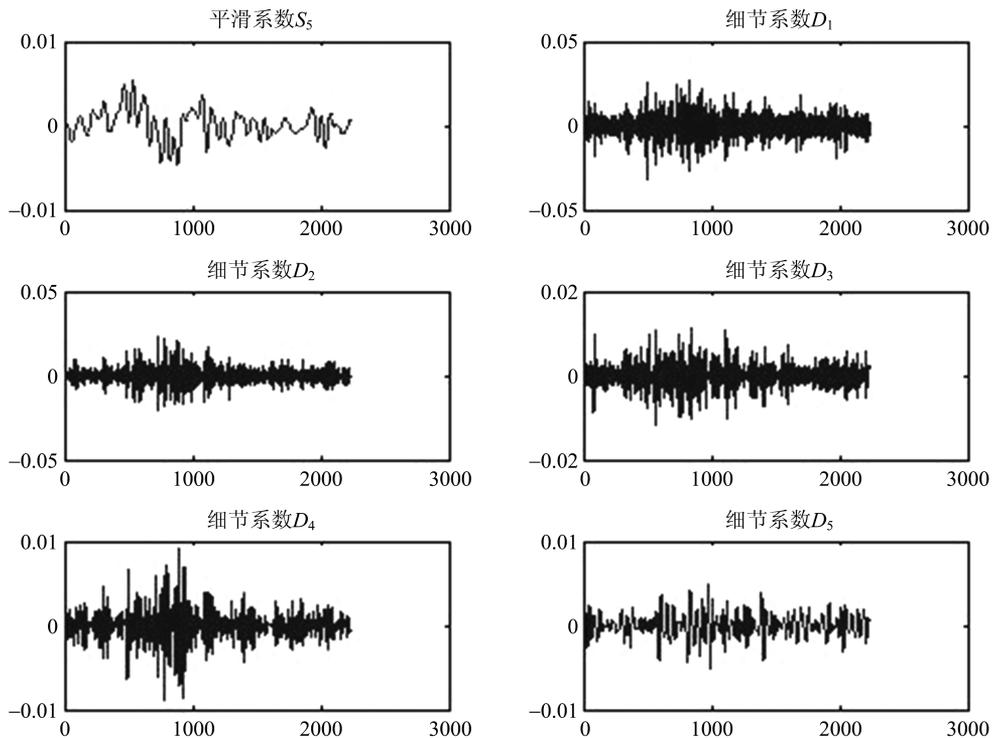


图 3 小波分解分量序列

Fig. 3 Wavelet decomposition components series

表 1 样本期内各序列统计描述与检验

Tab. 1 Statistical description and test in the sample period

	S_5	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	r_t
均值	0.000 156	-3E-7	-8.5E-7	-6.3E-7	2.71E-6	3.80E-6	0.000 159
标准差	0.001 686	0.005 662	0.003 997	0.002 823	0.001 938	0.001 419	0.008 034
偏度	0.018 479	-0.067 08	0.053 613	-0.068 35	-0.014 97	-0.078 74	-0.338 76
峰度	3.630 441	5.331 483	6.824 845	4.460 422	5.792 957	3.689 736	5.836 286
ADF	-2.765 29	-2.765 29	-21.850 32	-18.359 5	-16.047 24	-8.87	-46.251 9
Q(5)	8 384 (0.065 3)	676.427 5 (0.058 4)	1 633.2 (0.061 1)	3 038.3 (0.065 8)	3 377.0 (0.067 7)	6 636.4 (0.073 4)	9.752 7 (0.082 6)
Q(10)	15 555 (0.067 2)	691.550 7 (0.059 3)	1 646.9 (0.062 0)	4 312.3 (0.066 3)	6 709.8 (0.069 5)	7 852.5 (0.073 8)	16.567 5 (0.084 5)
Q ² (10)	8 081 (0.000)	580.719 5 (0.000)	1 654.2 (0.000)	2 029.6 (0.000)	2 518.3 (0.000)	5 246.5 (0.000)	121.258 2 (0.000)
ARCH(5)	1 725 (0.000)	621.618 3 (0.000)	906.629 4 (0.000)	1 557.4 (0.000)	1 718.6 (0.000)	1 724.9 (0.000)	83.3102 (0.222E-15)
ARCH(10)	1 720 (0.000)	638.282 8 (0.000)	979.467 1 (0.000)	1 595.9 (0.000)	1 717.7 (0.000)	1 719.9 (0.000)	138.409 0 (0.000)

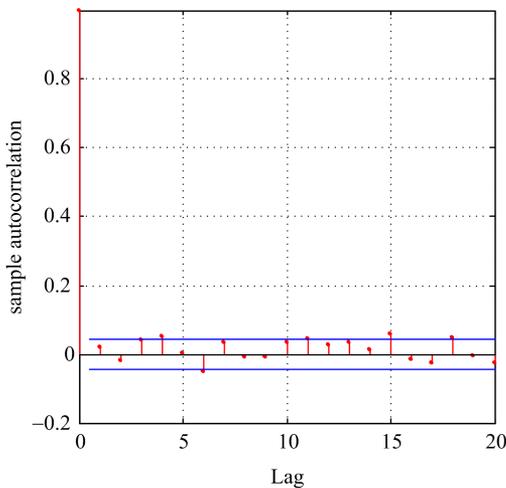
【注】括号中的数字为统计量值对应的概率值

Q(5)、Q(10)分别是 5 期、10 期 Ljung-Box 修正 Q 统计量,该统计量可以用来检验数据是否存在序列相关,由于这两个统计量对应的概率值大于 0.05,在 95%的水平下,不能拒绝 5 期、10 期收益率不是序列相关的假设,各分量同理可得.图 4 是对数收益率序列的自相关函数图和偏相关函数图,可以看出,几乎所有的自相关函数与偏关函数均在置信区间内,因此收益率序列不存在序列相关性.Q²(10)是收益率序列平方后所得序列的 10 期 Ljung-Box 修正 Q 统计量,由其对应的概率值小于 0.05 可知序列具有条件异方差性.进行滞后 5 阶和 10 阶的

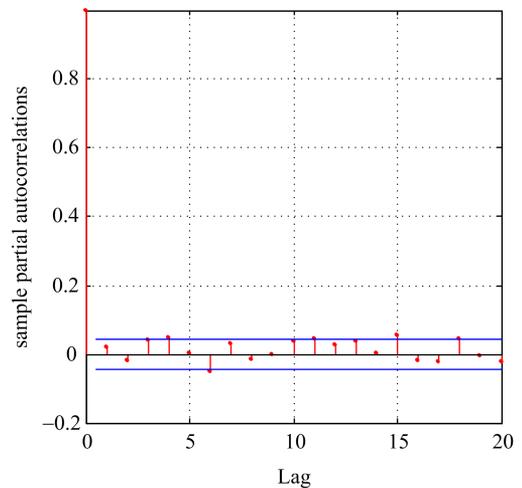
Engle 拉格朗日乘子检验,对应的概率值都小于 0.05,进一步证实了条件异方差性的存在,因此适合于 GARCH 族模型进行拟合.

综上所述,沪深 300 指数的对数收益率序列为平稳序列,其不存在自相关性,不服从标准正态分布,存在较强的高阶 ARCH 效应.由于不存在自相关性,我们可以考虑建立均值方程为 $r_t = \mu_0 + \epsilon_t$.因此,选择 GARCH 类模型来对其进行模拟是合理的.对收益率序列、平滑部分序列和细节部分序列分别建立 ARMA-GARCH 模型.

根据表 1, r_t 平均值和平滑部分 S_5 几乎大小一



(a) 收益率序列的 ACF 图



(b) 收益率序列的 PACF 图

图 4 收益率序列的 ACF 和 PACF 图

Fig. 4 Returns ACF and PACF

表 2 各尺度分量 ARMA-GARCH 模型参数估计结果

Tab. 2 ARMA-GARCH model parameter estimation results for each component series

	$\mu_{s,0}$	$a_{s,0}$	$a_{s,1}$	$b_{s,1}$	LLF	AIC
r_t	1.573 2E-4	1.620 1E-7	0.007 6	0.006 8	5.937 0E+3	-289.548 3
S_5	7.023 0E-4	2.000 0E-7	0.000 0	0.847 9	9.368 2E+3	-256.252 4
D_1	-6.236 4E-5	4.586 0E-6	0.480 9	0.451 7	6.595 8E+3	-232.899 4
D_2	4.629 3E-5	1.221 3E-7	0.030 7	0.044 2	7.458 9E+3	-213.475 3
D_3	3.809 2E-5	7.081 2E-8	0.033 6	0.061 6	8.097 2E+3	-196.387 4
D_4	2.394 1E-5	2.905 7E-8	0.018 7	0.085 6	9.068 6E+3	-182.352 4
D_5	2.162 6E-5	4.181 0E-8	0.077 3	0.144 3	9.639 8E+3	-174.918 3

样,但细节部分 D_1 到 D_5 的平均值接近于零.从平均值这一统计量上可以大概认为沪深 300 指数收益率序列的多分辨率分析为一个加性的分解.再从标准差角度看,平滑部分和细节部分的标准差明显不同,这与现实中投资者对不同的投资期限有不同的偏好相吻合.

2.3 收益率相关性与多分辨率分析结果

综上所述,我们可以考虑建立均值方程为

$$r_t = \mu_0 + \varepsilon_t \quad (5)$$

大量文献研究表明,GARCH(1,1)模型可以较好地刻画收益率序列的条件异方差性,因此本文对原收益率序列、平滑部分序列和细节部分序列分别建立以下模型:

$$\left. \begin{aligned} r_{s,t} &= \mu_{s,0} + \varepsilon_{s,t}, \\ \varepsilon_{s,t} &= \sigma_{s,t} \eta_{s,t}, \\ \sigma_{s,t}^2 &= a_{s,0} + a_{s,1} \sigma_{s,t-1}^2 + b_{s,1} \varepsilon_{s,t-1}^2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

使用 Matlab 软件对式(6)进行参数估计,得出结果如表 2 所列.从表 2 可以看出, $\mu_{s,0}$ 和 $a_{s,0}$ 的值都很小.且 D_1 的值为负,其他平滑序列和细节序列的值都是正值,显示不管市场上属于何种投资期限的投资者,他们对市场的无风险收益拥有相同的看法和态度.同时,非常小的 $a_{s,0}$ 值显示投资者给予确定性风险预计都偏向乐观,固定投资期限的投资交易行为不会引起较大的市场波动.

2.4 MRA-EVT 模型的建立

将上述得到的各个分量下的条件均值和条件方差的估计值加总得到整体的条件均值 $\hat{\mu}_{s,0}$ 为

$$\hat{\mu}_{s,0} = \hat{\mu}_{S_5,0} + \sum_{j=1}^5 \hat{\mu}_{D_j,0} = 0.000 7.$$

和 $\hat{\sigma}_t^2 = \hat{\sigma}_{S_5,t}^2 + \sum_{j=1}^5 \hat{\sigma}_{D_j,t}^2$, $\hat{\sigma}_t$ 的序列图如图 5 所示.

基于此,计算得到标准化残差序列 $z_t = \frac{r_t - \hat{\mu}_{s,0}}{\hat{\sigma}_t}$, z_t 的残差序列图如图 6 所示.

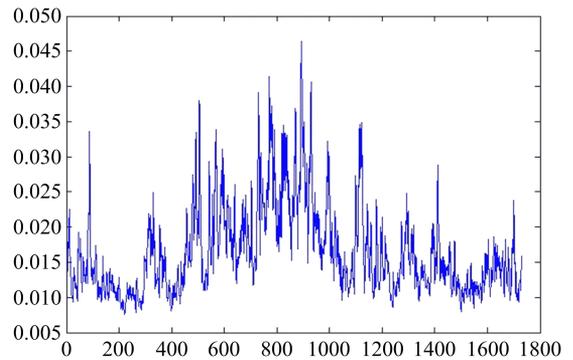
图 5 整体条件方差 $\hat{\sigma}_t$ 的序列图

Fig. 5 Overall conditional variance sequence

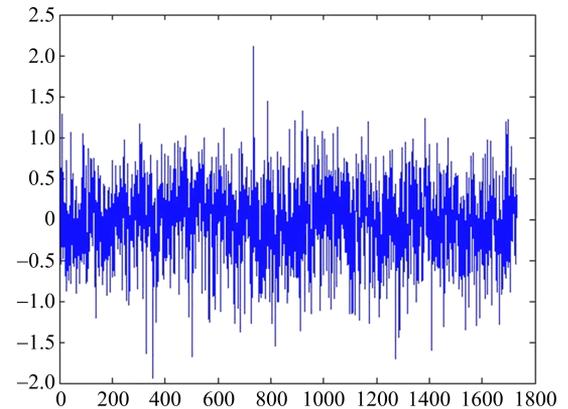


图 6 标准化后的残差序列图

Fig. 6 Standardized residuals series

首先需要考察标准化后的残差序列的基本统计性质,为此在表 3 和图 7 中分别给出该序列的基本统计量和标准化收益率的经验分位数与标准正态分布理论分位数的 Q-Q 图,从图 7 中可以看出标准化后的残差序列的经验分位数在左右尾部与标准正态分布偏离较大.由基本的统计量可以看出,标准化后的收益率序列是左偏的,且具有明显的厚尾特点,JB 检验在 1% 的显著性水平下拒绝正态假设.

表 3 标准化后残差序列统计描述与检验

Tab. 3 Statistical description and test of standardized residuals series

统计量	均值	标准差	偏度	峰度	JB 统计量
z_t	-0.025 658	0.477 935	-0.254 931	4.568 50	512.908 12

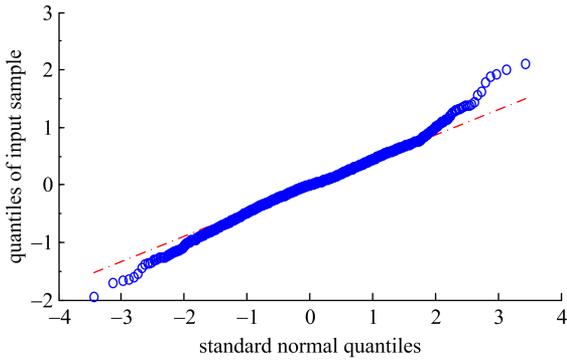


图 7 标准化后残差序列图的 Q-Q 图

Fig. 7 Q-Q plot of standardized residuals series versus standard normal

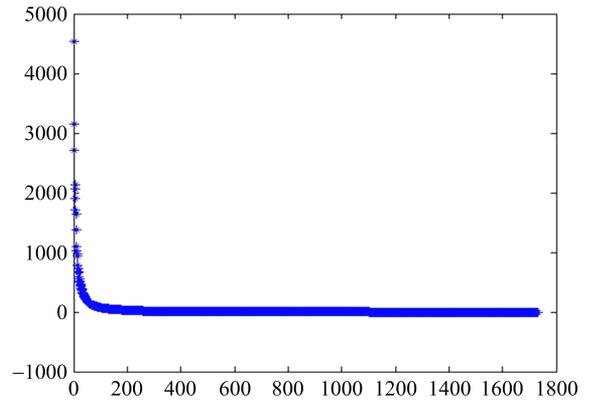


图 8 标准化残差序列 z_t 的 Hill 图

Fig. 8 z_t 's Hill figure

接下来就可以基于标准化残差序列 $z_t = \frac{r_t - \hat{\mu}_{s,0}}{\hat{\sigma}_t}$, 建立 MRA-EVT 模型. 由式(2), 推导出 GPD 的概率密度函数 $g_{\xi,\delta}(y)$ 为

$$g_{\xi,\delta}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} e^{-y/\delta} & \text{if } \xi = 0, \\ \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{\xi}{\delta} y\right)^{-(1+\frac{1}{\xi})} & \text{if } \xi \neq 0 \end{cases} \quad (7)$$

则基于上述估计得出的标准化残差序列 z_t , 对数似然函数 $L(\xi, \delta | z)$ 为

$$L(\xi, \delta | z) =$$

$$\begin{cases} -n \ln \delta - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \frac{\xi}{\delta} z_i\right), & \xi \neq 0; \\ -n \ln \delta - \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^n z_i, & \xi = 0 \end{cases} \quad (8)$$

本文使用极值理论中的 POT 模型来选取阈值 u , 只有把 u 确定之后才能对形状参数 ξ 和尺度参数 δ 进行估计. 本文根据 Hill 图和超额均值函数图法选取 u 的值. 序列的 Hill 图和超额均值图如图 8 和图 9 所示.

从图 8 可以看出, Hill 图中尾部指数稳定区域起点 $s=230$ 对应的 $z_s=0.50185$ 为阈值. 而当 $u \geq 0.5$ 时, $e(u)$ 近似为线性函数. 所以在本文中选取阈值 $u=0.5$, 当 $u=0.5$ 时, 数据超过 $u=0.5$ 有 $N_u =$

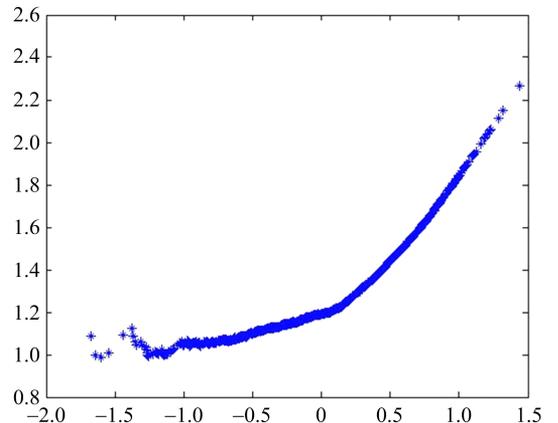


图 9 标准化残差序列 z_t 的超额均值图

Fig. 9 z_t 's mean excess function figure

230 个, 根据 Du Mouchel^[23] 在 1983 年的研究, 在选定合适的 u 情形下, 一般选用 10% 左右的数据为极值数据组, 否则将会捕捉不到所研究的时间序列尾部分布特征.

再用式(8)中的极大似然函数估计参数, 得到形状参数 ξ 和尺度参数 δ 的估计值 $\hat{\xi}$ 和 $\hat{\delta}$ 分别为 $\hat{\xi} = 0.1544, \hat{\delta} = 0.3008$.

根据无条件极值理论, 可得到置信水平为 $p = 0.95$ 和 $p = 0.99$ 下扰动项 z_t 向前一日的 VaR 预测值 ($n=1731$):

$$\text{VaR}_{t+1}^{p=0.95}(z) = u + \frac{\hat{\delta}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{n}{N_u} p \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right) = -0.0103,$$

$$\text{VaR}_{t+1}^{p=0.99}(z) = u + \frac{\hat{\delta}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{n}{N_u} p \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right) = -0.0194.$$

再根据上述估计出的条件均值 $\hat{\mu}_{s,0}$ 和条件标准差 $\hat{\sigma}_t^2$, 可得 VaR 预测值为

$$\text{VaR}_{t+1}^p(r) = \hat{\mu}_{s,0} + \hat{\sigma}_{t+1} \text{VaR}_{t+1}^p(z).$$

根据上式计算得到的 VaR 实际上是一个条件 VaR. 具体结果见图 10 和表 4.

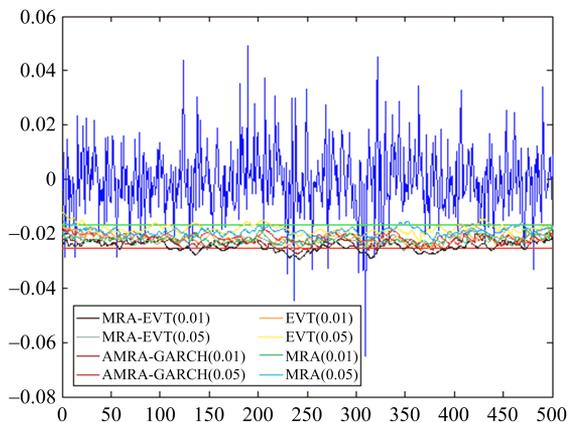


图 10 各种计算方法在 95% 和 99% 显著水平下的 VaR 与实际收益序列的比较

Fig. 10 The values of VaR calculated by different methods are compared with the actual return series at 95% and 99% significant levels

由表 4 可以看到, 在 MRA-EVT 模型下, 在 99% 置信水平, 在选择的本期内沪深 300 指数每日潜在的平均损失不超过 2.53%; 在 95% 置信水平下, 每日潜在平均亏损不超过 1.67%. 而且, 使用 MRA-EVT 模型预测的 VaR 的值普遍比单独使用其他模型得出的预测值要偏大, 说明 MRA-EVT 考虑了市场的异质性和分布的厚尾性质. 由图 10 可以很清楚地看到 MRA-EVT 模型计算的 VaR 最保守, 金融资产损失超过 VaR 的情况最少.

表 4 沪深 300 指数日 VaR 计算结果

Tab. 4 CSI 300 index's daily VaR

		均值	标准差	偏度	峰度	JB 统计量
MRA-EVT	VaR(0.01)	-0.0253	0.0152	-2.5476	12.4296	54353.2
	VaR(0.05)	-0.0167	0.0108	-2.5476	12.4296	54353.2
ARMA-GARCH	VaR(0.01)	-0.024605	0.0145	-2.5328	12.5376	56754.4
	VaR(0.05)	-0.01475	0.0096	-2.5328	12.5376	56754.4
EVT	VaR(0.01)	-0.0147	0.0165	-2.4786	12.1873	53597.6
	VaR(0.05)	-0.0108	0.0113	-2.4786	12.1873	53597.6
MRA	VaR(0.01)	-0.0223	0.0183	-2.5253	11.4457	59872.0
	VaR(0.05)	-0.0137	0.0154	-2.5253	11.4457	59872.0

传统的无条件极值理论虽然考虑了资产收益率序列的“厚尾性”特征, 但它忽略了资产收益率分布的时变特点. ARMA-GARCH 模型虽然采用了条件均值和条件方差, 但只关注整个分布, 而不是直接对风险管理所关心的尾部进行建模. 上述的 MRA-EVT 模型将这二者结合, 同时引进多分辨分析, 可以更加准确地对收益率分布进行建模, 从而提高了 VaR 估计的精度.

2.5 预测结果的后测检验

对不同 VaR 模型的准确性和可靠性进行评估和比较是一个复杂烦琐的问题. 一方面, 合适的 VaR 模型所得到的 VaR 值应该最大限度地覆盖重大损失, 从而控制风险; 而另一方面, VaR 的值越大, 所需要的交易保证金就越多, 导致成本过高. 因此, 一个有效率的 VaR 模型要准确地追踪潜在风险的演化机制, 既要控制风险又能节约成本.

VaR 模型评估的常用方法是 Kupiec 检验和 Christoffersen 检验, 均方误差 (MSE) 也常作为模型精准性的一个衡量指标. Kupiec 检验的似然比统计量定义如下:

$$LR_{cc} = -2 \ln \left[\alpha^{n_0} (1 - \alpha)^{n_1} \right] + 2 \ln \left[(1 - \pi_{01})^{n_{00}} \pi_{01}^{n_{01}} (1 - \pi_{11})^{n_{10}} \pi_{11}^{n_{11}} \right] \sim \chi^2(1).$$

VaR 模型检验的均方误差定义为

$$\text{MSE} = \frac{1}{T} \sum_{s=1}^T (\hat{\sigma}_{t+s|t+s-1}^2 - R_{t+s}^2)^2.$$

其中, R_t 表示沪深 300 指数的实际收益率, $\hat{\sigma}_{t+s|t+s-1}^2$ 代表第 $t+s$ 期资产收益率变异数的 1 期样本外预测, $s=1, 2, \dots, 500$. 将模型计算的数据依次带入即可计算出 MSE 的值.

本文采用 Kupiec 检验. 通过使用测试集对模型进行后测检验. 根据实际损失超过 VaR 的次数不是近似相等于在给定置信水平下的上限值, 来对模

型的有效性进行检验. 若模型有效, 则模拟的失败率近似等于显著性水平, 反之, 则模型不合适. 后测检验结果如表 5 所列.

表 5 模型后测检验结果

Tab. 5 Model's backtesting results

		MSE	Kupiec	P-value	失败率
MRA-EVT	(0.01)	0.001 3	0.869 3	0.684 3	0.000 8
	(0.05)	0.000 6	0.579 8	0.595 2	0.043 5
ARMA-GARCH	(0.01)	0.008 7	0.833 2	0.51 6	0.006 3
	(0.05)	0.003 5	0.479 1	0.476 3	0.046 0
EVT	(0.01)	0.004 7	1.082 4	0.575 6	0.014 2
	(0.05)	0.002 1	0.612 1	0.456 8	0.049 5
MRA	(0.01)	0.005 1	0.002 5	0.535 3	0.007 3
	(0.05)	0.002 7	0.466 3	0.957 2	0.006 9

由表 5 可以看出, MRA-EVT 相对于其他几种模型预测 VaR, 产生的 MSE 值相对较小, 而且 P 值也较大, 失败率几乎等于相应的显著性水平. 所以, 本文建立的 MRA-EVT 模型比其他几种常用的模型预测精度更高.

3 结论

本文首先基于小波分析的思想, 应用多分辨率分析理论对原始收益率序列进行多尺度分解, 得到平滑部分和细节部分; 充分考虑了金融时间序列中所包含的微观异质性和波动率的各种效应; 然后基于分解后的不同尺度分量, 分别建立 ARMA-GARCH 模型, 最后再对预测的模型应用极值理论计算风险价值. 该模型的第一个关键点是选择合适的小波类和适当的分解层数, 第二个关键是阈值的确定, 这两个关键点解决之后, 再应用 Matlab 软件即可建立预测模型. 最后对模型进行有效性检验, 结果发现, 该模型相对其他常见模型具有一定的比较优势, 预测精度更高, 具有一定的实用价值.

基于小波分析在金融领域的运用越来越受到学者们的青睐. 后续可以针对不同问题研究具体使用什么小波进行分解较合理. 在极值理论中, 目前存在的确定阈值的方法, 如常用的超额均值法和 Hill 图法, 都存在较大的主观性, 如何建立一个新的模型来较客观地确定这个阈值, 对极值理论在实际中的应用有很大基础性作用. 在预测 VaR 的各种模型中, 大部分都是事先假定服从一定的分布, 这往往导致建立的模型预测结果与实际有很大的差异, 如何解决这种问题, 目前有很多半参数方法被提出. 所以,

对半参数方法的改进也是一个很好的研究方向.

参考文献 (References)

- [1] JORION P. Value at Risk: The New Benchmark in Controlling Market Risk [M]. Chicago: Irwin Professional Publishing, 1997.
- [2] DUFFIE D, PAN J. An overview of value at risk[J]. The Journal of Derivatives, 1997, 4(3): 7-49.
- [3] BOUCHAUD J P, POTTERS M. Theory of Financial Risk[M]. Paris: Alea-Saclay, Eyrolles, 1999.
- [4] LI D. Value at Risk Based on the Volatility, Skewness and Kurtosis[EB/OL]. [2015-10-03]. <http://www.gloriamundi.org>.
- [5] CHAPPELL D, DOWD K. Confidence intervals for VaR[J]. Financial Engineering News, 1999, 9: 1-2.
- [6] FAN J, GU J. Semiparametric estimation of value at risk[J]. The Econometrics Journal, 2003, 6(2): 261-290.
- [7] 刘向丽, 成思危, 汪寿阳, 等. 参数法, 半参数法和非参数法计算我国铜期货市场 VaR 之比较[J]. 管理评论, 2008, 20(6): 3-8.
LIU Xiangli, CHENG Siwei, WANG Shouyang, et al. The comparison of Chinese copper futures market VaR estimation using parametric method, semiparametric method and nonparametric method[J]. Management Review, 2008, 20(6): 3-8.
- [8] DAVISON A C, SMITH R L. Models for exceedances over high thresholds [J]. Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological), 1990, 52(3): 393-442.
- [9] DANIELSSON J, DE VRIES C G. Tail index and quantile estimation with very high frequency data[J]. Journal of Empirical Finance, 1997, 4(2): 241-257.
- [10] NEFTCI S N. Value at risk calculations, extreme events, and tail estimation [J]. The Journal of Derivatives, 2000, 7(3): 23-37.
- [11] JONDEAU E, ROCKINGER M. Conditional volatility, skewness, and kurtosis: existence, persistence, and comovements[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2003, 27(10): 1 699-1 737.
- [12] GILLI M, KELLEZI E. An application of extreme value theory for measuring financial risk [J]. Computational Economics, 2006, 27(2): 207-228.
- [13] CHRISTOFFERSEN P, GONCALVES S. Estimation risk in financial risk management [R]. CIRANO Working Papers, 2004.
- [14] CHRISTOFFERSEN P. Evaluating interval forecasts [J]. International Economic Review, 1998, 39: 841-862.

- [15] 林宇, 黄登仕, 魏宇. 胖尾分布及长记忆下的动态 EVT-VaR 测度研究[J]. 管理科学学报, 2011, 14(7): 71-82.
LIN Yu, HUANG Dengshi, WEI Yu. Study on financial markets dynamic EVT-VaR measuring based on fated-tail distribution and long memory volatility [J]. Journal of Management Sciences in China, 2011, 14(7): 71-82.
- [16] 杨超, 李国良, 门明. 国际碳交易市场的风险度量及对我国的启示——基于状态转移与极值理论的 VaR 比较研究[J]. 数量经济技术经济研究, 2011, 28(4): 94-109.
YANG Chao, LI Guoliang, MENG Ming. Risk measurement of the international carbon trading market and enlightenment to China [J]. The Journal of Quantitative & Technical Economics, 2011, 28(4): 94-109.
- [17] CHAVEZ-DEMOULIN V, EMBRECHTS P, SARDY S. Extreme-quantile tracking for financial time series [J]. Journal of Econometrics, 2014, 181(1): 44-52.
- [18] MCNEIL A J, FREY R. Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: An extreme value approach [J]. Journal of Empirical Finance, 2000, 7(3): 271-300.
- [19] ALLEN D E, SINGH A K, POWELL R J. EVT and tail-risk modelling: Evidence from market indices and volatility series [J]. The North American Journal of Economics and Finance, 2013, 26: 355-369.
- [20] 李强, 周孝华, 张保帅. 平稳序列的 GPD 模型在风险测度中的应用[J]. 统计与决策, 2013 (11): 78-82.
- [21] BERGER T. Financial Crisis, VaR forecasts and the performance of time varying EVT-Copulas [C]// Operations Research Proceedings 2012. Springer International Publishing, 2014: 35-40.
- [22] 张冕, 万建平, 李楚进. 小波理论在 VaR 计算中的应用 [J]. 应用数学, 2002, 15(suppl): 116-119.
ZHANG Mian, WAN Jianping, LI Chujin. A application of wavelets theory in VaR [J]. Mathematica Applicata, 2002, 15(suppl): 116-119.
- [23] DU MOUCHEL W H. Estimating the stable index α in order to measure tail thickness: A critique [J]. The Annals of Statistics, 1983, 11(4): 1 019-1 031.
- [24] 彭选华. 金融风险价值量化分析的模型与实证[D]. 重庆: 重庆大学, 2011.
- [25] 严纲. 基于小波方法的系统风险多尺度分析[D]. 兰州: 兰州商学院, 2013.
- [26] HE K, WANG L, ZOU Y, et al. Value at risk estimation with entropy-based wavelet analysis in exchange markets [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2014, 408: 62-71.
- [27] MALLAT S. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation [J]. IEEE Pattern Anal and Machine Intell, 1989, 11 (7): 674-693.
- [28] PERCIVAL D B, WALDEN A T. Wavelet methods for time series analysis [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2006.
- [29] FERNANDEZ V. Risk management under extreme events [J]. International Review of Financial Analysis, 2005, 14(2): 113-148.
- [30] 许启发, 蒋翠侠, 张世英. 基于小波多分辨分析的协整建模理论与方法的扩展 [J]. 统计研究, 2007, 24(8): 92-96.
XU Qifa, JIANG Cuixia, ZHANG Shiyong. Expansion of modeling theory and method for cointegration based on wavelet multiresolution analysis [J]. Statistical Research, 2007, 24(8): 92-96.