文章编号:0253-2778(2016)08-0652-05

描述介观持久电流环的纠缠态表象和角动量-相角量子化

吴卫锋[1,2],范洪义[2]

(1.池州学院机电工程学院,安徽池州 247000;2.中国科学技术大学材料科学与工程系,安徽合肥 230026)

摘要:通过建立纠缠态表象,给出了介观持久电流环的玻色子型相位算符与角动量算符,以实现介观持久电流环的角动量-相角量子化,并自然导出其本征能谱.最后引入角动量升降表象,发现电流环的角动量的增减对应着环中的电流增减.

关键词:介观持久电流环 ;纠缠态表象;本征能谱

中图分类号:O431.2　　**文献标识码**:A　　doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2016.08.005

引用格式:WU Weifeng, FAN Hongyi. Entangled state representation for mesoscopic persistent current ring and its phase-angular momentum[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2016, 46(8):652-656.
吴卫锋,范洪义. 描述介观持久电流环的纠缠态表象和角动量-相角量子化[J]. 中国科学技术大学学报,2016,46(8):652-656.

Entangled state representation for mesoscopic persistent current ring and its phase-angular momentum

WU Weifeng[1,2], FAN Hongyi[2]

(1. *College of Mechanical and Electrical Engineering, Chizhou University, Chizhou 247000, China*;
2. *Department of Materials Science and Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*)

Abstract: The entangled state representation was establish, in which the phase operator and the angular momentum operator have been applied, to realize the phase-angular momentum quantization of mesoscopic persistent current ring (MPCR), and derive its energy spectrum. In addition, it was revealed that the ascending/lowering of angular momentum corresponds to the current's increase/decrease through angular momentum representation for the persistent current ring.

Key words: mesoscopic persistent current ring; entangled state; energy spectrum

0 引言

随着纳米技术和纳米材料的飞速发展,尤其是在集成电路中器件的小型化和高集成度的趋势越来越显著,已达到原子尺寸的量级;当电路的尺寸小到与电子的相干长度可以比拟时,电路本身的量子效

收稿日期:2016-01-29;**修回日期**:2016-05-21

基金项目:国家自然科学基金(11574295),安徽省高校优秀青年人才基金(gxyqZD2016368)资助.

作者简介:吴卫锋,男,1976年生,博士生/讲师. 研究方向:量子光学、量子信息. E-mail: wfwu@mail.ustc.edu.cn

通讯作者:范洪义,博士/教授. E-mail: fhym@ustc.edu.cn

应就会出现,介观电流环作为一个重要的器件,它的非经典特性已成为人们研究的热点. 1959 年, Aharonov-Bohm 预言了介观环的 AB 效应[1],1985 年,Büttiker 等证实了穿有磁通的孤立一维介观金属环会因为 AB 效应而维持一恒定的持续电流[2]. 1984 年,Aharonov 和 Casher 预言介观系统的 AC 效应[3]. Reznik 以一个(2+1)维模型证明了 AC 效应是整体效应[4]. Deo 和 Juyannavar 以及 Takai 等使用量子波导理论研究了介观环中的电子输运特性[5-7]. 近年来,人们研究了多维介观环的持续电流问题[8],多个并联耦合介观环的近藤效应[9],介观环的量子自旋输运问题[10-11]以及石墨烯介观环的持续电路的特性[12].

但迄今为止尚无一个较完美的介观持久电流环的量子化理论,本文借助 Josephson 和 Lippmann 提出的电子在磁场中运动的轨道中心坐标[13],并结合文献[14-16]提供了描述电子在磁场中的运动的一种新表象,在纠缠态表象内建立介观环的相位算符,通过类比超导 Josephson 结的相位算符,求出介观环体系的以相位算符描述的哈密顿量,最后求出在相互作用绘景中介观环的本征能谱.

介观 LC 回路的量子化首先由 Louisell 提出[17],他将电量 q 和电感与电流的乘积 $\vec{L}\times\vec{I}$ 分别作量子力学中的坐标算符 Q 和动量算符 p 来处理,这样 LC 回路便可视为一个量子谐振子. 回顾一下超导 Josephson 结的一个量子化方案,根据 Feynman 的观点:一个 Cooper 电子对的行为宛如玻色子,所以在文献[15-16]中引入数差算符 $a_1^\dagger a_1-a_2^\dagger a_2$ 和相位算符 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\theta}}=\sqrt{\dfrac{a_1-a_2^\dagger}{a_1^\dagger-a_2}}$,对超导 Josephson 结进行了数-相量子化,其中 $a_k(k=1,2)$ 是玻色算符,满足 $[a_k,a_j^\dagger]=\delta_{kj}$. 受此启发,对于介观持久电流环我们尝试将电量 $q(q=en)$ 中的数 n 作为荷数算符,通过数-相量子化对易关系 $[n,\hbar\theta]=i$ 建立相算符 θ 和电流 $I\left(I=\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right)$ 的对应关系,来实现对介观持久电流环的量子化.

现设在介观持久电流环电流为 I,描述该环形系统的经典哈密顿量为

$$H=\frac{L_z^2}{2M}+I\Phi \tag{1}$$

式中,Φ 指外部磁场和环内电流产生磁场的总磁通,L_z 代表质量为 M 的电子的角动量,即

$$L_z=xp_y-yp_x \tag{2}$$

以下我们仿照对超导 Josephson 结的量子化方法,通过引入电子在磁场中运动的纠缠态表象,实现对哈密顿量(1)的量子化,量子化后的哈密顿量在纠缠态表象的投影恰好是经典哈密顿量. 这样,我们就可以用 Heisenberg 方程讨论介观持久电流环的动力学.

1　适用于描述介观电流环的纠缠态表象

对电子在均匀磁场中运动的量子理论最早由 Landau 研究,电子的机械动量并不等于其正则动量,它们之间的关系是

$$p_x=\prod\nolimits_x-eA_x,\ p_y=\prod\nolimits_y-eA_y \tag{3}$$

这里 $\vec{A}=\left(-\dfrac{1}{2}By,\dfrac{1}{2}Bx,0\right)$ 代表对称的电磁矢势,p_x,p_y 是电子的正则动量,取 $\hbar=c=1$,按照 Landau 的做法,当它们量子化为算符后,有

$$\left[\prod\nolimits_x,\prod\nolimits_y\right]=-\mathrm{i}M\Omega \tag{4}$$

这里 $\Omega=\dfrac{eB}{M}$,指电子在磁场中运动的同步旋转频率. 引入阶梯算符

$$\prod\nolimits_{\pm}=\frac{1}{\sqrt{2M\Omega}}\left(\prod\nolimits_x\pm\mathrm{i}\prod\nolimits_y\right) \tag{5}$$

就有 $[\Pi_-,\Pi_+]=1$. 此后不久,Johnson 和 Lippmann 指出还存在一对动力学变量 x_0,y_0,称之为轨道中心坐标[13]:

$$x-\frac{\prod_y}{M\Omega}=\hat{x}_0,\ y-\frac{\prod_x}{M\Omega}=\hat{y}_0,\ \hbar=C=1 \tag{6}$$

这对算符满足

$$[\hat{x}_0,\hat{y}_0]=\frac{\mathrm{i}}{M\Omega} \tag{7}$$

令

$$K_{\pm}=\sqrt{\frac{M\Omega}{2}}(\hat{x}_0\mp\mathrm{i}\hat{y}_0) \tag{8}$$

就有

$$[K_-,K_+]=1 \tag{9}$$

于是就可以将电子的角动量式(2)改写为

$$L_z=\left(x_0+\frac{\prod_y}{M\Omega}\right)\left(\prod\nolimits_y-eA_y\right)-\left(y_0-\frac{\prod_x}{M\Omega}\right)\left(\prod\nolimits_x-eA_x\right)=\prod\nolimits_+\prod\nolimits_--K_+K_- \tag{10}$$

于是我们可以构建一个态矢$|\lambda\rangle$

$$|\lambda\rangle=\exp\left[-\frac{1}{2}|\lambda|^2-\mathrm{i}\lambda\prod\nolimits_{+}+\lambda^{*}K_{+}+I\prod\nolimits_{+}K_{+}\right]|00\rangle \tag{11}$$

式中,$\lambda=\lambda_1+\mathrm{i}\lambda_2=|\lambda|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$,真空态$|00\rangle$是被消灭$\prod_{-}$和$K_{-}$湮灭,即

$$\prod\nolimits_{-}|00\rangle=0, K_{-}|00\rangle=0 \tag{12}$$

可以看出$|\lambda\rangle$满足如下的本征方程

$$\left.\begin{aligned}(K_{+}+\mathrm{i}\prod\nolimits_{-})|\lambda\rangle=\lambda|\lambda\rangle,\\ (K_{-}-\mathrm{i}\prod\nolimits_{+})|\lambda\rangle=\lambda^{*}|\lambda\rangle\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

注意到$[K_{-}-\mathrm{i}\prod_{+},K_{+}+\mathrm{i}\prod_{-}]=0$,所以$|\lambda\rangle$是一个纠缠态,它是粒子和场同时存在的结果. 比较式(6)和式(13)得

$$x|\lambda\rangle=\sqrt{\frac{2}{M\Omega}}\lambda_1|\lambda\rangle,\ y|\lambda\rangle=-\sqrt{\frac{2}{M\Omega}}\lambda_2|\lambda\rangle \tag{14}$$

可见$|\lambda\rangle$就是电子坐标x和y的本征态,为我们研究介观持久电流环提供了一种表象,用有序算符内的积分技术(IWOP)可以证明完备性

$$\int\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\pi}|\lambda\rangle\langle\lambda|=1 \tag{15}$$

由于$\Omega=eB/M$,从式(14)可见电子轨道半径和磁场B的大小有关,磁场的大小的变化可以在$|\lambda\rangle$表象中体现出来,例如积分$\mu\int\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\pi}|\mu\lambda\rangle\langle\lambda|$就可以得到压缩算符.

2 介观持久电流环的角动量算符、相位算符和磁通算符

由式(10)可知,角动量L_z在$|\lambda\rangle$表象内表示为

$$\begin{aligned}&\hat{L}_z|\lambda\rangle=\\ &\prod\nolimits_{+}(-\mathrm{i}\lambda+\mathrm{i}K_{+})|\lambda\rangle-K_{+}(\lambda^{*}-\mathrm{i}\prod\nolimits_{+})|\lambda\rangle=\\ &-\mathrm{i}|\lambda|(e^{\mathrm{i}\varphi}\prod\nolimits_{+}-\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\varphi}K_{+})\exp\left[-\frac{1}{2}|\lambda|^2+\right.\\ &\left.|\lambda|(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\prod\nolimits_{+}-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}K_{+})+\mathrm{i}\prod\nolimits_{+}K_{+}\right]|00\rangle=\\ &-\mathrm{i}|\lambda|\left(-\frac{\partial\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\prod_{+}}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}+\frac{\partial\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}K_{+}}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}\right)|\lambda\rangle=\\ &-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}|\lambda\rangle\end{aligned} \tag{16}$$

即$\hat{L}_z\rightarrow-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$,所以必有相角算符存在. 类似于对超导 Josephson 结引进相位算符的方式[17],我们定义

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\theta}}=\sqrt{\frac{K_{-}-\mathrm{i}\prod_{+}}{K_{+}+\mathrm{i}\prod_{-}}} \tag{17}$$

作为环上电子的相位算符,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\theta}}|\lambda\rangle=\sqrt{\frac{K_{-}-\mathrm{i}\prod_{+}}{K_{+}+\mathrm{i}\prod_{-}}}|\lambda\rangle=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}|\lambda\rangle \tag{18}$$

由于$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\theta}}$是幺正的,$\hat{\theta}$是厄米的,则

$$\hat{\theta}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\ln\frac{K_{-}-\mathrm{i}\prod_{+}}{K_{+}+\mathrm{i}\prod_{-}} \tag{19}$$

且由于

$$\left.\begin{aligned}&[\hat{L}_z,(K_{-}-\mathrm{i}\prod\nolimits_{+})]=(K_{-}-\mathrm{i}\prod\nolimits_{+}),\\ &[\hat{L}_z,(K_{+}+\mathrm{i}\prod\nolimits_{-})]=-(K_{+}+\mathrm{i}\prod\nolimits_{-}),\\ &[\hat{L}_z,(K_{-}-\mathrm{i}\prod\nolimits_{+})(K_{+}+\mathrm{i}\prod\nolimits_{-})]=0\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

所以角动量$\hat{L}_z$与$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\theta}}$的对易关系为

$$[\hat{L}_z,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\theta}}]=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\theta}},[\hat{L}_z,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{\theta}}]=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{\theta}} \tag{21}$$

这说明

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{\theta}}\hat{L}_z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\theta}}=-1+\hat{L}_z=\hat{L}_z+[-\mathrm{i}\hat{\theta},\hat{L}_z] \tag{22}$$

即

$$[\hat{\theta},\hat{L}_z]=-\mathrm{i} \tag{23}$$

就是角动量与相位角之间的对易关系,它们是一对共轭的算符. 若$|l\rangle$是$\hat{L}_z$的本征矢,则

$$\langle\lambda|\hat{L}_z|l\rangle=\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\langle\lambda|l\rangle,\langle\lambda|l\rangle\sim\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\varphi} \tag{24}$$

从$|\lambda\rangle$的完备性关系式(15)可得

$$|l\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\pi}|\lambda\rangle\langle\lambda|l\rangle\sim\int\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\pi}|\lambda\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\varphi} \tag{25}$$

根据相角算符和磁通算符的一般关系(见附录)

$$\hat{\varphi}=\frac{\hbar}{q}\hat{\theta} \tag{26}$$

可知电流环的经典哈密顿量(1)就量子化为

$$H=\frac{L_z^2}{2M}+I\frac{\hbar}{I_0t}\hat{\theta} \tag{27}$$

式中,$q=I_0t$,I_0为环内的基本电流.

3 介观持久电流环的本征能谱

令

$$I\frac{\hbar}{I_0t}\hat{\theta}\equiv\hat{H}_c \tag{28}$$

将它理解成相互作用哈密顿量，做幺正变换

$$e^{i\hat{H}_c t/\hbar} L_z e^{-i\hat{H}_c t/\hbar} = L_z + \left[i\frac{I}{I_0}\hat{\theta}, L_z \right] = L_z + \frac{I}{I_0} \tag{29}$$

注意到环内的永久电流 $I=I_0\dfrac{\Phi}{\Phi_0}$，且 $\Phi_0=\dfrac{\hbar c}{e}$ 为通量量子. 在相互作用表象里就有

$$\hat{H}^{\text{int}} \equiv e^{i\hat{H}_c t/\hbar}\frac{L_z^2}{2M}e^{-i\hat{H}_c t/\hbar} = \frac{1}{2M}\left[L_z+\frac{\Phi}{\Phi_0}\right]^2 \tag{30}$$

再投影到 $\langle\lambda|$ 表象得

$$\langle\lambda\mid\hat{H}^{\text{int}} = \left[\frac{1}{2M}\left(i\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)\right]\langle\lambda\mid \tag{31}$$

于是 $\hat{H}^{\text{int}}$ 的本征能谱为

$$\varepsilon_l = \frac{\hbar^2}{2M}\left(l+\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 \tag{32}$$

以上我们用纠缠态表象和玻色算符对介观持久电流环的哈密顿量实现了角动量-相角量子化.

4　介观持久电流环的角动量升降表象

在纠缠态表象的基础上，我们还可以引入角动量升降表象.

对于方程中的 $|\lambda\rangle$，$|\lambda\rangle=e^{i\varphi}$，我们通过做如下积分引入新态矢量：

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)\int_0^{2\pi}d\varphi\mid\lambda\rangle e^{-il\varphi}=\mid l,\mid\lambda\mid\rangle \tag{33}$$

根据式(16)就有本征方程

$$\hat{L}_z\mid l,\mid\lambda\mid\rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\int_0^{2\pi}d\varphi\,|-i\frac{\partial}{\partial\varphi}\mid\lambda\rangle\rangle e^{-il\varphi}l\mid l,\mid\lambda\mid\rangle \tag{34}$$

可见 $|l,|\lambda|\rangle$ 是 $\hat{L}_z$ 的本征值为 l 的本征态. 再由式(21)给出

$$\hat{L}_z e^{i\hat{\theta}}\mid l,\mid\lambda\mid\rangle = e^{i\hat{\theta}}(\hat{L}_z-1)\mid l,\mid\lambda\mid\rangle = (l-1)e^{i\hat{\theta}}\mid l,\mid\lambda\mid\rangle \tag{35}$$

可见 $e^{i\hat{\theta}}|l,|\lambda|\rangle$ 是 $\hat{L}_z$ 的本征值是 $l-1$ 的本征态. 同理可知，

$$\hat{L}_z e^{-i\hat{\theta}}\mid l,\mid\lambda\mid\rangle = e^{i\hat{\theta}}(\hat{L}_z+1)\mid l,\mid\lambda\mid\rangle = (l+1)e^{i\hat{\theta}}\mid l,\mid\lambda\mid\rangle \tag{36}$$

$e^{-i\hat{\theta}}|l,|\lambda|\rangle$ 是 $\hat{L}_z$ 的本征值是 $l+1$ 的本征态. 从式(30)又得到

$$\hat{H}^{\text{int}}\mid l,\mid\lambda\mid\rangle = \frac{1}{2M}\left[\hat{L}_z+\frac{\Phi}{\Phi_0}\right]^2\mid l,\mid\lambda\mid\rangle = \frac{1}{2M}\left[l+\frac{\Phi}{\Phi_0}\right]^2\mid l,\mid\lambda\mid\rangle \tag{37}$$

也就是说，$|l,|\lambda|\rangle$ 是介观持久电流环的角动量升降表象. 电流环的角动量的增减对应着环中的电流增减.

5　结论

本文参照对超导 Josephson 结的量子化方法，通过引入电子在磁场中运动的纠缠态表象，实现对介观持久电流环的哈密顿量的角动量-相角量子化，量子化后的哈密顿量在纠缠态表象的投影恰好是经典哈密顿量，这样，可以用 Heisenberg 方程讨论介观持久电流环的动力学问题，分析其非经典性特征，并很方便地求出其本征能谱. 另外，我们还引入角动量升降表象，求出电流环的角动量算符对应本征值的本征态，从而发现电流环的角动量的增减就对应着环中的电流增减，这对介观持久电流环中的电子输运特性的研究有着重要的意义，并为下一步研究多维介观持久电流环的量子化、并联耦合介观持久电流环的非经典性特征打下了坚实的基础.

附录

从经典的 LC 回路出发，该回路的电流方程为

$$L\frac{d^2q}{dt}+\frac{q}{C}=0 \tag{A1}$$

式(A1)的解为

$$q=Q_0\cos(\omega t+\theta_0),\ \omega=\frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{A2}$$

则回路电流为

$$I=\frac{dq}{dt}=-I_0\sin(\omega t+\theta_0) \tag{A3}$$

式中，$I_0=\omega Q_0$ 表示最大回路电流，ω 是谐振频率，θ_0 为初始相位，由电流导致电感中的磁通量为

$$LI=\Phi \tag{A4}$$

那么电感中磁通量的变化

$$-\frac{d\Phi}{dt}=V \tag{A5}$$

即为夹在电容器两极板间的电压. 由于电容器极板间的能量差为

$$E_1-E_2=qV \tag{A6}$$

从量子力学的观点看，设电容两极板上的波函数分别为

$$\psi_1=\rho_1\exp(-i\theta_1)=\rho_1\exp(-iE_1t/\hbar) \tag{A7}$$

$$\psi_2=\rho_2\exp(-i\theta_2)=\rho_2\exp(-iE_2t/\hbar) \tag{A8}$$

这里 $\theta_j=E_jt/\hbar$，$j=1,2$. 从式(A6)～(A8)可以看出

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta_1-\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t}=-\frac{qV}{\hbar} \tag{A9}$$

比较式(A5)和式(A9)得到相位和磁通的关系：

$$\theta=q\Phi/\hbar \tag{A10}$$

即为式(26).

参考文献(References)

[1] AHARONOV Y, BOHM D. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory [J]. Phys Rev, 1959, 115: 485-491.

[2] BÜTTIKER M, IMRY Y, LANDAUER R, et al. Generalized many-channel conductance formula with application to small rings [J]. Phys Rev B, 1985, 31: 6 207-6 215.

[3] AHARONOV Y, CASHER A. Topological quantum effects for neutral particles [J] Phys Rev Lett, 1984, 53: 319-321.

[4] REZNIK B, AHARINOV Y. Question of the nonlocality of the Aharonov-Casher effect [J]. Phys Rev D, 1989, 40: 4 178-4 183.

[5] DEO P S, JAYANNAVAR A M. Quantum waveguide transport in serial stub and loop structures [J]. Phys Rev B, 1994, 50: 11629.

[6] DEO P S, JAYANNAVAR A M. Persistent currents in the presence of a transport current [J]. Phys Rev B, 1995, 51: 10175.

[7] TAKAI D, OHTA K. Quantum transport through a one-dimensional ring with tunnel junctions [J]. Phys Rev B, 1995, 51: 11132.

[8] MA Mingming, DING Jianwen, CHEN Hongbo, et al. Effects of gradient disorder on persistent currents in two-dimensional mesoscopic rings [J]. Acta Phys Sin, 2009, 58(4): 2 226-2 230.
马明明，丁建文，陈宏波，等. 二维介观环中持续电流的梯度无序效应[J]. 物理学报，2009，58(4)：2 226-2 230.

[9] WU Shaoquan, HE Zhong, YAN Conghua, et al. Kondo effect in parallel double quantum dots embedded in a mesoscopic ring [J] Acta Phys Sin, 2006, 55(3): 1 413-1 418.
吴绍全，何忠，阎从华，等. 嵌入并联耦合双量子点介观环系统中的近藤效应[J]. 物理学报，2006，55(3)：1 413-1 418.

[10] FU Bang, DENG Wenji. General solutions to spin transportation of electrons through equilateral polygon quantum rings with Rashba spin-orbit interaction [J]. Acta Phys Sin, 2010, 59(4): 2 739-2 745.
付邦，邓文基. 任意正多边形量子环自旋输运的普遍解[J]. 物理学报，2010，59(4)：2 739-2 745.

[11] HUANG Rui, WU Shaoquan. Spin-polarized transport through T-shaped quantum dot system [J]. Chinese Journal of Low Temperature Physics, 2010, 32(4): 284-288.
黄睿，吴绍全. T型量子点结构中的自旋极化输运过程[J]. 低温物理学报，2010，32(4)：284-288.

[12] DAI Nan, DENG Wenji. Persistent currents in mesoscopic graphene rings with armchair edges [J]. Acta Phys Sin, 2015, 64(1): 017302.
代楠，邓文基. 扶手椅型石墨烯介观环中的持续电流[J]. 物理学报，2015，64(1)：017302.

[13] JOHNSON M H, LIPPMANN B A. Motion in a constant magnetic field [J]. Physical Review, 1946, 76: 828-832.

[14] LOUISELL W H. Quantum Statistical Properties of Radiation [M]. New York: John Wiley, 1973

[15] FAN H Y, KLAUDER J R. Eigenvectors of two particles's relative position and total momentum [J]. Phys Rev A, 1994, 49: 704-707.

[16] FAN Hongyi, FAN Yue. Representation of two-mode squeezing operator [J]. Phys Rev A, 1996, 54: 958-960.

[17] FAN Hongyi. Phase state as a cooper-pair number: Phase minimum uncertainty state for Josephson junction [J]. Inter J Mod Phys B, 2003, 17: 2 599-2 608.