文章编号:0253-2778(2016)08-0636-06

具有毒物影响和反馈控制的非自治竞争系统的全局吸引性

傅金波[1],陈兰荪[1,2],程荣福[1]

(1. 福建师范大学闽南科技学院, 福建泉州 362332;
2. 中国科学院数学与系统科学研究院数学研究所,北京 100080)

摘要:根据种群动力学原理建立了具有毒物影响和反馈控制的非自治多种群竞争 Lotka-Volterra 系统,在反馈控制变量的构造上采用了高次非线性函数形式.利用重合度理论中 Gaines 和 Mawhin 延拓定理,Barbalat 引理以及构造适当的 Lyapunov 函数,获得了该系统正周期解的存在唯一性和全局吸引性的充分条件.

关键词:Lotka-Volterra 系统;重合度理论;正周期解;全局吸引性

中图分类号:O175.14 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2016.08.003

2010 Mathematics Subject Classification: 34D05; 34D20

引用格式: FU Jinbo, CHEN Lansun, CHENG Rongfu. Global attractivity of multiple species competition Lotka-Volterra system with toxicants effect and feedback controls[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2016,46(8):636-641,664.
傅金波,陈兰荪,程荣福. 具有毒物影响和反馈控制的非自治竞争系统的全局吸引性[J]. 中国科学技术大学学报,2016,46(8):636-641,664.

Global attractivity of multiple species competition Lotka-Volterra system with toxicants effect and feedback controls

FU Jinbo[1], CHEN Lansun[1,2], CHENG Rongfu[1]

(1. *Minnan Science and Technology Institute, Fujian Normal University, Quanzhou* 362332, *China*;
2. *Institute of Mathematics, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080, *China*)

Abstract: By means of species dynamic theory, a nonautonomous Lotka-Volterra multiple species competition system with toxicants effect and feedback controls was established, and the high order nonlinear function was used in the construction of the feedback control variables. By means of Continuation Theorem based on Gaines and Mawhin coincidence degree theory, Barbalat Lemma and constructing an appropriate Lyapunov function, the sufficient conditions for the uniqueness and global attractivity of positive periodic solutions of the system were obtained.

Key words: Lotka-Volterra system; coincidence degree theory; positive periodic solution; global attractivity

---

收稿日期:2015-10-15;**修回日期**:2016-05-28

基金项目:国家自然科学基金(11371306),福建省教育厅自然科学基金(JA13370,JAT160676),福建师范大学闽南科技学院青年骨干教师重点培养对象项目(mkq201006)资助.

作者简介:傅金波(通讯作者),男,1978年生,硕士/副教授. 研究方向:生物数学. E-mail: fujinbomnkjxy@sina.com

0　引言

不同生物种群之间的相互竞争、互惠共存、捕食与被捕食等关系是自然界中普遍存在的物种间相互作用的基本关系．近年来，许多学者借助于描述物种间相互作用基本关系的经典 Lotka-Volterra 系统，利用微分方程定性与稳定性理论及重合度理论中的延拓定理，建立和分析了大量相关的生物动力系统[1-8]．1993 年，Gopalsamy[9]提出控制生物动力系统的一种有效办法就是引入反馈控制变量，并且建立了反馈控制系统模型，给出了该系统全局渐近稳定的充分条件．根据 Gopalsamy 的建模机理，一些学者相继建立了基于反馈原理的生物动力学模型[10-12]．所谓反馈原理即依据现有生物动力系统输出变化的信息来进行人为控制，加入干预借以消除系统种群增长中的偏差，以获得预期的系统性能并从中获益．最近，陈凤德等[13]围绕单种群模型详细论述了自治的反馈控制模型和非自治的反馈控制模型的已有工作及有待进一步研究解决的问题．然而，在已有的带有反馈控制生物动力系统中，既考虑生物种群受非密度制约影响(如有毒物影响)又采用高次非线性函数作为反馈控制变量的尚不多见．据此，本文研究具有毒物影响和反馈控制的多种群竞争 Lotka-Volterra 系统，其数学模型如下：

$$\left.\begin{aligned}&N_i'(t)=\\&\quad N_i(t)\Big[r_i(t)-a_i(t)N_i(t)-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}b_j(t)N_j(t)\\&\quad -c_i(t)\int_{-\tau_i}^{0}K_i(s)N_i(t+s)\mathrm{d}s-d_i(t)P(t)\Big],\\&\qquad i=1,2,\cdots,n;\\&P'(t)=P(t)\Big[\sum_{i=1}^{n}h_i(t)N_i(t-\tau_i^*)-D(t)P(t)\Big]\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式中，$N_i(t)$表示第 i 个生物种群在时刻 t 的密度，$P(t)$表示反馈控制变量在时刻 t 的密度，常数时滞 $\tau_i\geqslant 0,\tau_i^*\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n$.

系统(1)的模型建立，基于如下假设：

(A_1) 第 i 个生物种群遵循 Logistic 增长，$r_i(t)$为内禀增长率，$a_i(t)$为密度制约系数，$c_i(t)$为有毒物影响比例系数，竞争率为 $b_j(t)(j\neq i)$；

(A_2) 控制变量遵循 Logistic 增长，$D(t)$为密度制约系数，$d_i(t)$，$h_i(t)$分别为对第 i 个生物种群的捕获率和转化率；

(A_3) $R^+=[0,+\infty)$，核函数 $K_i(s):R^+\to R^+$ 为分段连续函数，满足$\int_{-\tau_i}^{0}K_i(s)\mathrm{d}s=1$；

(A_4) $r_i(t),a_i(t),b_j(t),c_i(t),d_i(t),h_i(t),D(t)\in C(R,R^+)$都是关于 t 的连续 ω 周期函数且均为非负的；

(A_5) 记 $R_+^{n+1}=\{(N_1(t),\cdots,N_n(t),P(t))^{\mathrm{T}}\in R^{n+1}:N_i(t)\geqslant 0,P(t)\geqslant 0\}$，由$[-\tau,0]$到 R_+^{n+1} 的连续向量函数的全体记为 $C^+=C([-\tau,0],R_+^{n+1})$，$\tau=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\tau_i,\tau_i^*\}$.

由系统(1)的可应用性，设初值条件为

$$\varphi_i,\psi\in C^+,N_i(\theta)=\varphi_i(\theta)\geqslant 0,P(\theta)=\psi(\theta)\geqslant 0,\\\theta\in[-\tau,0],\varphi_i(0)>0,\psi(0)>0,i=1,2,\cdots,n\tag{2}$$

为方便起见，本文采用记号：

$$\bar{g}=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}g(t)\mathrm{d}t,\ g^l=\min_{t\in[0,\omega]}\{g(t)\},$$

$$g^u=\max_{t\in[0,\omega]}\{g(t)\},$$

$$M_i=\frac{r_i^u}{a_i^l},\ M_{n+1}=\frac{1}{D^l}\sum_{i=1}^{n}h_i^uM_i,$$

$$m_i=\frac{1}{a_i^u}\Big[r_i^l-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}b_j^uM_j-c_i^uM_i-d_i^uM_{n+1}\Big],$$

$$m_{n+1}=\frac{1}{D^u}\sum_{i=1}^{n}h_i^lm_i,i=1,2,\cdots,n.$$

其中，$g(t)$为连续 ω 周期函数.

在本文中，我们首先估计解的先验界，利用重合度理论中延拓定理，给出系统至少存在一个正周期解的充分条件；然后通过构造适当的 Lyapunov 泛函，运用 Barbalat 引理，建立系统的唯一正周期解全局吸引性的代数判据.

1　预备知识

定义 1.1[14]　如果系统(1)任意正解$(N_1(t),\cdots,N_n(t),P(t))^{\mathrm{T}}$ 和它的一个 ω 周期正解$(\widetilde{N}_1(t),\cdots,\widetilde{N}_n(t),\widetilde{P}(t))^{\mathrm{T}}$ 既满足 Lyapunov 意义下的稳定，又有

$$\lim_{t\to+\infty}\Big(\sum_{i=1}^{n}|N_i(t)-\widetilde{N}_i(t)|+|P(t)-\widetilde{P}(t)|\Big)=0,$$

则称 ω 周期正解$(\widetilde{N}_1(t),\cdots,\widetilde{N}_n(t),\widetilde{P}(t))^{\mathrm{T}}$ 是全局吸引的.

定义 1.2[14]　设

$$\widetilde{Y}(t)=(\widetilde{N}_1(t),\cdots,\widetilde{N}_n(t),\widetilde{P}(t))^{\mathrm{T}}$$

是系统(1)的一个 ω 周期正解，称 $\widetilde{Y}(t)$ 是全局吸引的，如果系统(1)满足初值条件(2)的任意正解 $Y(t)=(N_1(t),\cdots,N_n(t),P(t))^{\mathrm{T}}$ 均满足

$$\lim_{t\to+\infty}\Big(\sum_{i=1}^{n}\mid N_i(t)-\widetilde{N}_i(t)\mid+\mid P(t)-\widetilde{P}(t)\mid\Big)=0.$$

由定义可知，若

$$\widetilde{Y}(t)=(\widetilde{N}_1(t),\cdots,\widetilde{N}_n(t),\widetilde{P}(t))^{\mathrm{T}}$$

是全局吸引的，则系统(1)的正周期解必是唯一的. 类似于文献[4-5]的证明，易于得到如下的引理 1.1 和引理 1.2.

引理 1.1 R_{+}^{n+1} 是系统(1)的正向不变集.

引理 1.2 设代数方程组

$$\left.\begin{aligned}&\bar{r}_i-\bar{a}_i\mathrm{e}^{x_i}-\upsilon\Big[\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\bar{b}_j\mathrm{e}^{x_j}+\bar{c}_i\mathrm{e}^{x_i}+\bar{d}_i\mathrm{e}^{x_{n+1}}\Big]=0,\\&\quad i=1,2,\cdots,n,\\&\sum_{i=1}^{n}\bar{h}_i\mathrm{e}^{x_i}-\overline{D}\mathrm{e}^{x_{n+1}}=0\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

参数 $\upsilon\in[0,1]$，$x=(x_1,\cdots,x_{n+1})^{\mathrm{T}}\in R^{n+1}$. 如果

$$\bar{r}_i>\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\bar{b}_j\overline{M}_j+\bar{c}_i\overline{M}_i+\bar{d}_i\overline{M}_{n+1},i=1,2,\cdots,n,$$

则方程组(3)存在与参数 υ 无关的常数 $B_{0k}>0$，使得 $\|x\|=\sum_{k=1}^{n+1}|x_k|\leqslant\sum_{k=1}^{n+1}B_{0k}$. 其中，

$$\overline{M}_i=\frac{\bar{r}_i}{\bar{a}_i},$$

$$\bar{m}_i=\frac{1}{\bar{a}_i}\Big[\bar{r}_i-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\bar{b}_j\overline{M}_j+\bar{c}_i\overline{M}_i+\bar{d}_i\overline{M}_{n+1}\Big],\quad i=1,2,\cdots,n;$$

$$\overline{M}_{n+1}=\frac{1}{\overline{D}}\sum_{i=1}^{n}\bar{h}_i\overline{M}_i,\ \bar{m}_{n+1}=\frac{1}{\overline{D}}\sum_{i=1}^{n}\bar{h}_i\bar{m}_i,$$

$$B_{0k}=\max\{|\ln\bar{m}_k|,|\ln\overline{M}_k|\}>0,\quad k=1,2,\cdots,n+1.$$

引理 1.3(Gaines-Mawhin 延拓定理[15]) 设 X,Z 是 Banach 空间，设 L 是指标为零 Fredholm 算子，$N:X\to Z$ 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L 紧的，其中 Ω 是 X 的有界开集，如果

(a) $Lx\neq\lambda Nx$，$\forall x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Dom}\,L$，$\lambda\in(0,1)$；

(b) $QNx\neq0$，$\forall x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L$；

(c) $\deg\{JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L,0\}\neq0$，

则方程 $Lx=Nx$ 在 $\mathrm{Dom}\,L\cap\overline{\Omega}$ 内至少存在一个解.

引理 1.4(Barbalat 引理[16]) 设 f 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的非负函数，在 $[0,+\infty)$ 上可积，而且在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，则 $\lim_{t\to+\infty}f(t)=0$.

2 存在性

定理 2.1 如果系统(1)除满足初值条件(2)外，还满足条件

$$r_i^l>\sum_{j=1,j\neq i}^{n}b_j^uM_j+c_i^uM_i+d_i^uM_{n+1},\ i=1,2,\cdots,n,$$

则系统(1)至少存在一个 ω 周期正解.

证明 作变换 $N_i(t)=\mathrm{e}^{x_i(t)}$，$i=1,2,\cdots,n$，$P(t)=\mathrm{e}^{x_{n+1}(t)}$，将系统(1)化为

$$\left.\begin{aligned}&x_i'(t)=r_i(t)-a_i(t)\mathrm{e}^{x_i(t)}-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}b_j(t)\mathrm{e}^{x_j(t)}-\\&\quad c_i(t)\int_{-\tau_i}^{0}K_i(s)\mathrm{e}^{x_i(t+s)}\mathrm{d}s-d_i(t)\mathrm{e}^{x_{n+1}(t)}:=\Lambda_i(x,t),\\&x_{n+1}'(t)=\sum_{i=1}^{n}h_i(t)\mathrm{e}^{x_i(t-\tau_i^*)}-D(t)\mathrm{e}^{x_{n+1}(t)}:=\\&\quad\Lambda_{n+1}(x,t),i=1,2,\cdots,n.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

记 $x(t)=(x_1(t),\cdots,x_{n+1}(t))^{\mathrm{T}}$，$x'(t)=(x_1'(t),\cdots,x_{n+1}'(t))^{\mathrm{T}}$，选取

$$X=Z=\{(x_1(t),\cdots,x_{n+1}(t))^{\mathrm{T}}\in C(R,R^{n+1})\mid x_k(t+\omega)=x_k(t),k=1,2,\cdots,n+1\},$$

定义范数 $\|x\|=\|(x_1(t),\cdots,x_{n+1}(t))^{\mathrm{T}}\|=\sum_{k=1}^{n+1}\max_{t\in[0,\omega]}|x_k(t)|$，则在范数 $\|\cdot\|$ 下 X 是 Banach 空间. 令

$$\mathrm{Dom}\,L=\{x\in X:x\in C^1(R,R^{n+1})\}\subset X\to X,$$

$$Lx=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

$$N:X\to X:\ Nx=(\Lambda_1(x,t),\cdots,\Lambda_{n+1}(x,t))^{\mathrm{T}}.$$

定义两个投影为

$$Px=Qx=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}x(t)\mathrm{d}t,\ x\in X.$$

可见 $\mathrm{Ker}\,L=\mathrm{Im}\,P=R^{n+1}$，$\mathrm{Im}\,L=\mathrm{Ker}\,Q=\{x(t)\in X:\bar{x}_k=0,k=1,2,\cdots,n+1\}$ 是 X 的闭子集，而且 $\dim\mathrm{Ker}\,L=n+1=\dim(Z/\mathrm{Im}\,L)$，故 L 是指标为零 Fredholm 算子. 定义 L 的广义逆为 $K_P:\mathrm{Im}\,L\to\mathrm{Dom}\,L\cap\mathrm{Ker}\,P$ 为

$$K_P(z)=\int_0^t z(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\int_0^t z(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

由 Lebesgue 收敛定理易于证明 QN 及 $K_p(I-Q)N$ 是连续的. 利用 Arzela-Ascoli 定理可以证明对 X 中的任何开的有界的子集 Ω，$QN(\overline{\Omega})$ 及

$\overline{K_p(I-Q)N(\overline{\Omega})}$是相对紧的．据此，对 X 的任何开的有界子集Ω，N 在$\overline{\Omega}$ 上是 L 紧的．对应算子方程 $Lx=\lambda Nx$，$\lambda\in(0,1)$，有

$$\left.\begin{aligned}&x_i'(t)=\lambda[r_i(t)-a_i(t)e^{x_i(t)}-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}b_j(t)e^{x_j(t)}-\\&\quad c_i(t)\int_{-\tau_i}^{0}K_i(s)e^{x_i(t+s)}ds-d_i(t)e^{x_{n+1}(t)}]:=\\&\quad\lambda\Lambda_i(x,t),\ i=1,2,\cdots,n;\\&x_{n+1}'(t)=\lambda[\sum_{i=1}^{n}h_i(t)e^{x_i(t-\tau_i^*)}-D(t)e^{x_{n+1}(t)}]:=\\&\quad\lambda\Lambda_{n+1}(x,t)\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

设 $x(t)=(x_1(t),\cdots,x_{n+1}(t))^{\mathrm{T}}$ 是系统(5)的 ω 周期解，则有 $\xi_k,\eta_k\in[0,\omega]$，使得

$$x_k(\xi_k)=\min_{t\in[0,\omega]}x_k(t),x_k(\eta_k)=\max_{t\in[0,\omega]}x_k(t),\quad k=1,2,\cdots,n+1\tag{6}$$

一方面，由式(5)和(6)得 $x_k'(\eta_k)=0$，$k=1,2,\cdots,n+1$，即

$$r_i(\eta_i)-a_i(\eta_i)e^{x_i(\eta_i)}-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}b_j(\eta_i)e^{x_j(\eta_i)}-c_i(\eta_i)\int_{-\tau_i}^{0}K_i(s)e^{x_i(\eta_i+s)}ds-d_i(\eta_i)e^{x_{n+1}(\eta_i)}=0\tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n}h_i(\eta_{n+1})e^{x_i(\eta_{n+1}-\tau_i^*)}-D(\eta_{n+1})e^{x_{n+1}(\eta_{n+1})}=0\tag{8}$$

利用式(6)，由式(7)有

$$a_i^l e^{x_i(\eta_i)}\leqslant a_i(\eta_i)e^{x_i(\eta_i)}+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}b_j(\eta_i)e^{x_j(\eta_i)}+c_i(\eta_i)\int_{-\tau_i}^{0}K_i(s)e^{x_i(\eta_i+s)}ds+d_i(\eta_i)e^{x_{n+1}(\eta_i)}=r_i(\eta_i)$$

即

$$e^{x_i(\eta_i)}\leqslant\frac{r_i^u}{a_i^l}:=M_i,\ i=1,2,\cdots,n\tag{9}$$

利用式(6)和(9)，由式(8)有

$$D^l e^{x_{n+1}(\eta_{n+1})}\leqslant D(\eta_{n+1})e^{x_{n+1}(\eta_{n+1})}=\sum_{i=1}^{n}h_i(\eta_{n+1})e^{x_i(\eta_{n+1}-\tau_i^*)}\leqslant\sum_{i=1}^{n}h_i^u e^{x_i(\eta_i)}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i^u\bar{r}_i}{a_i^l},$$

从而

$$e^{x_{n+1}(\eta_{n+1})}\leqslant\frac{1}{D^l}\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i^u\bar{r}_i}{a_i^l}:=M_{n+1}\tag{10}$$

另一方面，由式(5)和(6)得 $x_k'(\xi_k)=0$，$k=1,2,\cdots,n+1$，即

$$r_i(\xi_i)-a_i(\xi_i)e^{x_i(\xi_i)}-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}b_j(\xi_i)e^{x_j(\xi_i)}-c_i(\xi_i)\int_{-\tau_i}^{0}K_i(s)e^{x_i(\xi_i+s)}ds-d_i(\xi_i)e^{x_{n+1}(\xi_i)}=0\tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{n}h_i(\xi_{n+1})e^{x_i(\xi_{n+1}-\tau_i^*)}-D(\xi_{n+1})e^{x_{n+1}(\xi_{n+1})}=0\tag{12}$$

利用式(9)和(10)，由式(11)有

$$\begin{aligned}r_i(\xi_i)&=a_i(\xi_i)e^{x_i(\xi_i)}+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}b_j(\xi_i)e^{x_j(\xi_i)}+c_i(\xi_i)\int_{-\tau_i}^{0}K_i(s)e^{x_i(\xi_i+s)}ds+d_i(\xi_i)e^{x_{n+1}(\xi_i)}\leqslant\\&a_i^u e^{x_i(\xi_i)}+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}b_j^u e^{x_j(\eta_j)}+c_i^u e^{x_i(\eta_i)}+d_i^u e^{x_{n+1}(\eta_{n+1})}\leqslant\\&a_i^u e^{x_i(\xi_i)}+\sum_{j=1,j\neq i}^{n}b_j^u M_j+c_i^u M_i+d_i^u M_{n+1}\end{aligned}$$

由此可得

$$e^{x_i(\xi_i)}\geqslant\frac{1}{a_i^u}[r_i^l-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}b_j^u M_j-c_i^u M_i-d_i^u M_{n+1}]:=m_i\tag{13}$$

利用式(13)，由式(12)有

$$D^u e^{x_{n+1}(\xi_{n+1})}\geqslant D(\xi_{n+1})e^{x_{n+1}(\xi_{n+1})}=\sum_{i=1}^{n}h_i(\xi_{n+1})e^{x_i(\xi_{n+1}-\tau_i^*)}\geqslant\sum_{i=1}^{n}h_i^l e^{x_i(\xi_i)}\geqslant\sum_{i=1}^{n}h_i^l m_i^*.$$

即

$$e^{x_{n+1}(\xi_{n+1})}\geqslant\frac{1}{D^u}\sum_{i=1}^{n}h_i^l m_i:=m_{n+1}\tag{14}$$

综上，由式(9)，(10)，(13)和(14)获得

$$\max_{t\in[0,\omega]}|x_k(t)|\leqslant\max\{|\ln M_k|,|\ln m_k|\}:=B_k,\quad k=1,2,\cdots,n+1.$$

据此，根据引理 1.3，取 $B=\sum_{k=1}^{n+1}(B_k+B_{0k})$，令 $\Omega=\{x\in X:\|x\|<B\}$，则$\Omega$满足引理1.3的条件(a)．当 $x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L=\partial\Omega\cap R^{n+1}$ 时，x 是R^{n+1} 的一个常向量且满足 $\|x\|=B$，$QNx\neq0$，这样 Ω 满足引理 1.3 的条件(b)．构造如下映射：

$$H_\upsilon(x)=\upsilon QNx+(1-\upsilon)G_x,\ \upsilon\in[0,1],$$

$$G_x=(\bar{r}_1-\bar{a}_1e^{x_1},\cdots,\bar{r}_n-\bar{a}_ne^{x_n},\sum_{i=1}^{n}\bar{h}_ie^{x_i}-\overline{D}e^{x_{n+1}})^{\mathrm{T}}.$$

由引理 1.2 知，对于 $\upsilon\in[0,1]$，$x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L$，$H_\upsilon(x)\neq0$，故 $H_\upsilon(x)$是一个同伦映射．根据同伦不变性，选取恒同映射 $J=I$ 有

$$\begin{aligned}&\deg\{JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L,0\}=\\&\deg\{H_1(x),\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L,0\}=\\&\deg\{H_0(x),\Omega\cap\mathrm{Ker}\,L,0\}.\end{aligned}$$

由于方程组：$\bar{r}_i-\bar{a}_i e^{x_i}=0,\ \sum_{i=1}^{n}\bar{h}_i e^{x_i}-\bar{D}e^{x_{n+1}}=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 存在唯一解 $(x_1^*,\cdots,x_{n+1}^*)^{\mathrm{T}}$，所以直接计算得

$$\deg\{JQN,\partial\Omega\cap\operatorname{Ker}L,0\}=\operatorname{sgn}\{(-1)^{n+1}\bar{D}e^{\sum_{k=1}^{m+1}x_k^*}\prod_{i=1}^{n}\bar{a}_i\}=(-1)^{n+1}\neq 0,$$

从而 Ω 满足引理 1.3 中的条件(c)．由引理 1.3，方程 $Lx=Nx$ 在 $\operatorname{Dom}L\cap\bar{\Omega}$ 中至少有一个解，进而由变换 $N_i(t)=e^{x_i(t)}$，$P(t)=e^{x_{n+1}(t)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 知，系统(1)至少存在一个 ω 周期正解． □

3 全局吸引性

定理 3.1 如果系统(1)除满足定理 2.1 所有条件外，还满足条件

① $a_i^l-c_i^u-h_i^u-(n-1)b_i^u>0, i=1,2,\cdots,n$，

② $D^l-\sum_{i=1}^{n}d_i^u>0$，

则系统(1)的 ω 周期正解是全局吸引的．

证明 设 $Y(t)=(N_1(t),\cdots,N_n(t),P(t))^{\mathrm{T}}$，$\tilde{Y}(t)=(\tilde{N}_1(t),\cdots,\tilde{N}_n(t),\tilde{P}(t))^{\mathrm{T}}$ 分别为系统(1)的任意正解和一个 ω 周期正解，定义 Lyapunov 函数：

$$V_0(t)=|\ln P(t)-\ln\tilde{P}(t)|+\sum_{i=1}^{n}h_i^u\int_{t-\tau_i^*}^{t}|N_i(u)-\tilde{N}_i(u)|\,\mathrm{d}u,$$

沿着系统(1)的正半轨线计算 $V_0(t)$ 的导数有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V_0(t)}{\mathrm{d}t}&=\operatorname{sgn}\{P(t)-\tilde{P}(t)\}\cdot\\&\{\sum_{i=1}^{n}h_i(t)[N_i(t-\tau_i^*)-\tilde{N}_i(t-\tau_i^*)]-\\&D(t)[P(t)-\tilde{P}(t)]\}+\\&\sum_{i=1}^{n}h_i^u[|N_i(t)-\tilde{N}_i(t)|-\\&|N_i(t-\tau_i^*)-\tilde{N}_i(t-\tau_i^*)|]\leqslant\\&\sum_{i=1}^{n}h_i^u|N_i(t)-\tilde{N}_i(t)|-D^l|P(t)-\tilde{P}(t)|\end{aligned}\tag{15}$$

再定义 Lyapunov 函数：

$$V_i(t)=|\ln N_i(t)-\ln\tilde{N}_i(t)|+c_i^u\int_{-\tau_i}^{0}K_i(s)\int_{t+s}^{t}|N_i(u)-\tilde{N}_i(u)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

沿着系统(1)的正半轨线计算 $V_i(t)$ 的导数有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V_i(t)}{\mathrm{d}t}&=\\&\operatorname{sgn}\{N_i(t)-\tilde{N}_i(t)\}\{-a_i(t)[N_i(t)-\tilde{N}_i(t)]-\\&\sum_{j=1,j\neq i}^{n}b_j(t)[N_j(t)-\tilde{N}_j(t)]-\\&c_i(t)\int_{-\tau_i}^{0}K_i(s)[N_i(t+s)-\tilde{N}_i(t+s)]\mathrm{d}s-\\&d_i(t)[P(t)-\tilde{P}(t)]+\\&c_i^u\int_{-\tau_i}^{0}K_i(s)[|N_i(t)-\tilde{N}_i(t)|-\\&|N_i(t+s)-\tilde{N}_i(t+s)|]\mathrm{d}s\}\leqslant\\&-(a_i^l-c_i^u)|N_i(t)-\tilde{N}_i(t)|+\\&\sum_{j=1,j\neq i}^{n}b_j^u|N_j(t)-\tilde{N}_j(t)|+d_i^u|P(t)-\tilde{P}(t)|\end{aligned}\tag{16}$$

根据上述讨论，构造 Lyapunov 泛函：$V(t)=V_0(t)+\sum_{i=1}^{n}V_i(t)$，沿着系统(2)的正半轨线估计 $V(t)$ 的导数，利用式(15)和(16)可得

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant-\sum_{i=1}^{n}[a_i^l-c_i^u-h_i^u-(n-1)b_i^u]\cdot|N_i(t)-\tilde{N}_i(t)|-(D^l-\sum_{i=1}^{n}d_i^u)|P(t)-\tilde{P}(t)|\tag{17}$$

由定理条件①选取 $\eta=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_i^l-c_i^u-h_i^u-(n-1)b_i^u\}$，式(17)可化为

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant-\eta\sum_{i=1}^{n}|N_i(t)-\tilde{N}_i(t)|-(D^l-\sum_{i=1}^{n}d_i^u)|P(t)-\tilde{P}(t)|\tag{18}$$

由定理条件②选取 $\sigma=\min\{\eta,D^l-\sum_{i=1}^{n}d_i^u\}$，将式(18)化为

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant-\sigma[\sum_{i=1}^{n}|N_i(t)-\tilde{N}_i(t)|+|P(t)-\tilde{P}(t)|]\tag{19}$$

将式(19)从 0 到 t 积分有

$$V(t)+\sigma\int_0^t(\sum_{i=1}^{n}|N_i(s)-\tilde{N}_i(s)|+|P(s)-\tilde{P}(s)|)\mathrm{d}s<V(0)<+\infty,$$

$(\sum_{i=1}^{n} |N_i(t)-\widetilde{N}_i(t)|+|P(t)-\widetilde{P}(t)|) \in L^1[0,+\infty)$,

$\sup\int_0^t(\sum_{i=1}^{n}|N_i(s)-\widetilde{N}_i(s)|+|P(s)-\widetilde{P}(s)|)\mathrm{d}s< \frac{V(0)}{\sigma}<+\infty.$

由周期解的有界性可知在$[0,+\infty)$上

$$\sum_{i=1}^{n}|N_i(t)-\widetilde{N}_i(t)|+|P(t)-\widetilde{P}(t)|$$

是一致连续的,由引理 1.4,

$\lim_{t\to+\infty}(\sum_{i=1}^{n}|N_i(t)-\widetilde{N}_i(t)|+|P(t)-\widetilde{P}(t)|)=0$,

故系统(1)的 ω 周期正解 $\widetilde{Y}(t)$是全局吸引的. □

4　结论

综上讨论,当满足定理 2.1 的条件时,该系统各种群密度和控制变量密度将产生多周期性变化;当满足定理 3.1 的条件时,该系统各种群密度和控制变量密度将产生一个稳定的周期性变化. 这一结果仅限于带有反馈控制变量情形,对于多因素影响下的生物动力系统,还有待于学者们共同探讨和揭示其演变规律性.

参考文献(References)

[1] CUI Jingan. Permanence and periodic solution of Lotka-Volterra system with time delay[J]. Acta Mathmatica Sinia, 2000, 47(1):511-519.
崔景安. 时滞 Lotka-Volterra 系统的持久性和周期解[J]. 数学学报, 2000, 47(1):511-519.

[2] HUI Jing, CHEN Lansun. Periodity and stability in impulsive equation with delay[J]. Acta Mathmatica Sinia, 2005, 48(6):1 137-1 144.
惠静,陈兰荪. 脉冲时滞微分方程的周期性和稳定性[J]. 数学学报,2005,48(6): 1 137-1 144.

[3] CHEN Fengde, SHI Jinlin, CHEN Xiaoxing. Periodicity in a Lotka-Volterra facultative mutualism system with several delays[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2004, 21(3): 403-409.

[4] CHENG Yongkuan, DOU Dou. On almost automorphic solutions of the competing species problems[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2006,36(9):956-959.
程永宽,窦斗. 竞争系统的几乎自守解[J]. 中国科学技术大学学报,2006,36(9):956-959.

[5] ZHAO Ming, CHENG Rongfu. Existence of periodic solution of a food chain system with biocontrol and ratio functional response[J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2009, 47(4): 730-736.
赵明,程荣福. 一类具生物控制和比率型功能反应的食物链系统周期解的存在性[J]. 吉林大学学报(理学版), 2009, 47(4): 730-736.

[6] SHAO Yuanfu, DAI Binxiang. Multiple positive periodic solutions of a delayed ratio-dependent predator-prey model with functional response and impulse[J]. Mathem Atica Applicata, 2011, 24(1): 30-39.
邵远夫,戴斌祥. 一类含功能反应与脉冲的时滞比率依赖捕食者捕食者-食饵模型的多重正周期解[J]. 应用数学,2011, 24(1): 30-39.

[7] LIU Kaili, DOU Jiawei. The periodic solutions and globally asymptotic properties of L-V system with impulsive effects[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2012,28(2): 235-239.
刘凯丽,窦家维. 一类脉冲 L-V 系统的周期解和全局渐近性质[J]. 西安理工大学学报,2012,28(2): 235-239.

[8] WEI F Y, WANG S H. Positive periodic solutions of nonautonomous competitive systems with infinite delay and diffusion [J]. Journal of Biomathematics, 2012, 27(2): 193-202.

[9] GOPALSAMY K, Weng P X. Feedback regulation of logistic growth[J]. Internat Math and Math Sci, 1993, 16: 177-192.

[10] HUANG Zhenkun, CHEN Fengde. Almost periodic solution in two species competitive system with feedback controls [J]. Journal of Biomathematics, 2005, 20(1): 28-32.
黄振坤,陈凤德. 具有反馈控制的两种群竞争系统的概周期解[J]. 生物数学学报, 2005, 20(1): 28-32.

[11] DING Xiaoquan, CHENG Shuhan. The stability of delayed stage-structured population growth model with feedback controls [J]. Journal of Biomathematics, 2006, 21(2): 225-232.
丁孝全,程述汉. 具反馈控制的时滞阶段结构种群模型[J]. 生物数学学报, 2006, 21(2): 225-232.

[12] LI Hui, WANG Yifei. Stability of a delayed stage structured population growth model with feedback controls [J]. Journal of Beihua University (Natural Science), 2008, 9(5): 391-395.
李辉,王艺霏. 一个具反馈控制的时滞阶段结构种群模型的稳定性[J]. 北华大学学报(自然科学版), 2008, 9(5): 391-395.

(下转第 664 页)