文章编号:0253-2778(2016)08-0625-04

关于 $S^m(1)\times R$ 中具有平行平均曲率向量场子流形的一个刚性定理

周俊东[1,2]

(1. 阜阳师范学院数学与统计学院,安徽阜阳 236037;2. 中国科学技术大学数学科学学院,安徽合肥 230026)

摘要:研究了积空间 $S^m(1)\times R$ 中具有平行平均曲率向量场的子流形,通过选择适当活动标架,运用一些代数不等式,得到一个刚性定理,推广了相关文献的结果.

关键词:积空间;第二基本形式模长;平均曲率

中图分类号:O186.1　　**文献标识码**:A　　doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2016.08.001

2010 Mathematics Subject Classification: 53C42

引用格式: ZHOU Jundong. A rigidity theorem for submanifolds with parallel mean curvature vector field in $S^m(1)\times R$[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2016, 46(8): 625-628.
周俊东. 关于 $S^m(1)\times R$ 中具有平行平均曲率向量场子流形的一个刚性定理[J]. 中国科学技术大学学报, 2016, 46(8): 625-628.

A rigidity theorem for submanifolds with parallel mean curvature vector field in $S^m(1)\times R$

ZHOU Jundong[1,2]

(1. *School of Mathematics and Statistics*, *Fuyang Teacher's College*, *Fuyang* 236037, *China*;
2. *School of Mathematical Sciences*, *University of Science and Technology of China*, *Hefei* 230026, *China*)

Abstract: Submanifolds with parallel mean curvature vector field in $S^m(1)\times R$ were studied. By using the moving-frame method and some algebraic inequalities, a rigidity theorem was obtained, which generalizes the result in the relevant literatures.

Key words: product space; the length of the second fundamental form; mean curvature

0 引言

近几年,关于积空间 $S^m(1)\times R$ 中的子流形得到了广泛研究. 文献[1]中研究了 $S^2\times R$ 中具有定角曲面,给出了此曲面的完全分类. Daniel[2]给出了 $S^n\times R$ 和 $H^n\times R$ 中存在等距浸入子流形的充分和必要条件. Batista[3]给出了 $S^2\times R$ 和 $H^2\times R$ 中具有常平均曲率曲面上的一个 Simons 型方程. Chen 等[4]得到 $S^m\times R$ 和 $H^m\times R$ 中子流形上的一个不等式和紧致极小子流形上一个 pinching 定理. Chen 等[5]研究了 $S^m\times R$ 中的极小子流形,得到关于 Ricci 曲率、截面曲率和第二基本形式模长平方的一

收稿日期:2015-02-28;**修回日期**:2015-09-22

基金项目:安徽省教育厅自然科学基金研究重点项目(KJ2014A196),安徽省教育厅自然科学基金一般项目(2014KJ013),阜阳师范学院科研项目(2016FSKJ04),阜阳师范学院质量工程项目(2014JYXM40)资助.

作者简介:周俊东,男,1983 年生,硕士/讲师. 研究方向:微分几何. E-mail: zhoujundong109@sina.com

些 pinching 定理. Fetcu 等[6]研究了 $S^m\times R$ 中具有平行平均曲率向量场的 2 调和子流形,得到一个关于平均曲率的间隙定理.

本文研究了 $S^m(1)\times R$ 中具有平行平均曲率向量场的子流形,运用活动标架法以及一些代数不等式,得到一个关于第二基本形式模长平方的刚性定理,推广了文献[4-5]中的定理.

1 预备知识

设 M^n 是 $\widetilde{M}=S^m(1)\times R$ 中 n 维子流形. 在 $\widetilde{M}$ 选择局部标架 $e_1,\cdots,e_n,e_{n+1},\cdots,e_{m+1}$,当限制在 M^n 上时,$e_1,\cdots,e_n$ 与 M^n 相切和 $e_{n+1},\cdots,e_{m+1}$ 与 M^n 垂直. 我们对各类指标范围约定如下:

$$1\leqslant A,B,C,\cdots\leqslant m+1;\ 1\leqslant i,j,k,\cdots\leqslant n;$$
$$n+1\leqslant \alpha,\beta,\gamma,\cdots\leqslant m+1.$$

设 $\omega_1,\cdots,\omega_{m+1}$ 是对偶标架场,$h=\sum\limits_{ij\,\alpha}h^{\alpha}_{ij}\omega_i\otimes\omega_j\otimes e_\alpha$ 是 M^n 的第二基本形式,$\xi=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{\alpha}(\sum\limits_{i}h^{\alpha}_{ii})e_\alpha$ 表示平均曲率向量场. 用 t 表示 R 的坐标,$\partial_t=\dfrac{\partial}{\partial t}$ 表示 R 的切标架. ∂_t 可以作如下分解:

$$\partial_t=\sum_i T_ie_i+\sum_\alpha \eta_\alpha e_\alpha=T+\eta.$$

因为∂_t 在 $\widetilde{M}$ 中是平行的, 可以得到(参照文献[5])

$$T_{i,j}=\sum_\alpha h^{\alpha}_{ij}\eta_\alpha,\ \eta_{\alpha,i}=-\sum_j h^{\alpha}_{ij}T_j \tag{1}$$

用 $\pi:\widetilde{M}=S^m(1)\times R\to S^m$ 表示投射,则 $\widetilde{M}$ 的曲率张量为

$$\langle\widetilde{R}(X,Y)Z,W\rangle=\langle d\pi X,d\pi W\rangle\langle d\pi Y,d\pi Z\rangle-\langle d\pi X,d\pi Z\rangle\langle d\pi Y,d\pi W\rangle,$$

在局部标架下,直接计算可以得到

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_{ijkl}=&\ \delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}+\\&T_jT_k\delta_{il}+T_iT_l\delta_{jk}-T_iT_k\delta_{jl}-T_jT_l\delta_{ik}\end{aligned}\tag{2}$$

$$\widetilde{R}_{\alpha\beta kl}=0,\ \widetilde{R}_{\alpha ijk}=\eta_\alpha(T_j\delta_{ik}-T_k\delta_{ij})\tag{3}$$

本文中我们选取 e_{n+1} 平行于平均曲率向量场 ξ,则 $\xi=|\xi|\ e_{n+1}=H\ e_{n+1}$. 定义符号

$$S=|h|^2=\sum_{i,j,\alpha}(h^{\alpha}_{ij})^2,$$
$$S_I=\sum_{i,j}\sum_{\alpha>n+1}(h^{\alpha}_{ij})^2,$$
$$H_\alpha=(h^{\alpha}_{ij})_{n\times n},\ |T|^2=\sum_i T_i^2.$$

M^n 的 Ricci 曲率和数量曲率分别为

$$\left.\begin{aligned}R_{ij}=&((n-1)-|T|^2)\delta_{ij}-(n-2)T_iT_j+\\&\sum_{\alpha,k}h^{\alpha}_{kk}h^{\alpha}_{ij}-\sum_{\alpha,k}h^{\alpha}_{ik}h^{\alpha}_{kj},\\\rho=&\ n(n-1)-2(n-1)|T|^2+n^2H^2-S\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

由式(2),(3)和 Ricci 恒等式计算可得

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k}h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{ijkk}=&\sum_{i,j,k}h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{kkij}+\\&\sum_{i,j,k,m}h^{\alpha}_{ij}(h^{\alpha}_{km}R_{mijk}+h^{\alpha}_{mi}R_{mkjk})+\sum_{\beta,i,j,k}h^{\alpha}_{ij}h^{\alpha}_{ki}R^{\perp}_{\beta\alpha jk}+\\&\sum_{i,j,k}h^{\alpha}_{ij}((T_j\delta_{ik}-T_k\delta_{ij})\eta_\alpha)_{,k}+\\&\sum_{i,j,k}h^{\alpha}_{ij}((T_i\delta_{kk}-T_k\delta_{ik})\eta_\alpha)_{,j}\end{aligned}\tag{5}$$

引理 1[7] 设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是一组对称的$(n\times n)$矩阵. 则

$$\begin{aligned}&-2\sum_{\alpha\beta=1}^{m}[\mathrm{tr}(A_\alpha^2B_\beta^2)-\mathrm{tr}(A_\alpha A_\beta)^2]-\\&\sum_{\alpha\beta=1}^{m}[\mathrm{tr}(A_\alpha A_\beta)]^2\geqslant\\&-(1+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(m-1))(\sum_{\alpha=1}^{m}\mathrm{tr}(A_\alpha^2))^2.\end{aligned}$$

引理 2 设 M^n 是 $\widetilde{M}=S^m(1)\times R$ 中的子流形,则在 M^n 上有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\eta_{n+1}|^2=&-\sum_{ij}h^{n+1}_{iij}T_j\eta_{n+1}-\\&(n-1)|\eta_{n+1}|^2|T|^2-\\&\sum_{\beta,ij}h^{n+1}_{ij}h^{\beta}_{ij}\eta_{n+1}\eta_\beta+\sum_i(\eta_{n+1,i})^2.\end{aligned}$$

证明 由式(1)和式(3)直接计算可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\Delta|\eta_{n+1}|^2=\sum_i(\eta_{n+1,i})^2+\sum_i\eta_{n+1}\eta_{n+1,ii}=\\&\sum_i(\eta_{n+1,i})^2-\sum_{i,j}\eta_{n+1}(h^{n+1}_{ij}T_j)_i=\\&\sum_i(\eta_{n+1,i})^2-\sum_{i,j}\eta_{n+1}(h^{n+1}_{iij}+\eta_{n+1}(T_j\delta_{ii}-T_i\delta_{ij}))T_j-\\&\sum_{\beta,ij}h^{n+1}_{ij}h^{\beta}_{ij}\eta_{n+1}\eta_\beta=\\&\sum_i(\eta_{n+1,i})^2-\sum_{ij}h^{n+1}_{iij}T_j\eta_{n+1}-\\&(n-1)|\eta_{n+1}|^2|T|^2-\sum_{\beta,ij}h^{n+1}_{ij}h^{\beta}_{ij}\eta_{n+1}\eta_\beta.\end{aligned}$$

引理 3[8] 设 $a_1,\cdots,a_n;b_1,\cdots b_n(n\geqslant 2)$ 都是实数,若 $\sum\limits_i b_i=0$,则

$$\sum_{i,j}a_ia_j(b_i-b_j)^2\geqslant-\frac{n}{\sqrt{n-1}}(\sum_i a_i^2)(\sum_i b_i^2).$$

2 主要定理和证明

定理 1　设 M^n 是 $\widetilde{M}=S^m(1)\times R$ 中的具有平行平均曲率向量场的紧致子流形，$m>n\geqslant 3$，M^n 的平均曲率向量场 ξ 与 ∂_t 的夹角是常值，

（Ⅰ）如果 $n\geqslant 8$ 或者 $n\geqslant 3$ 且 $m\leqslant n+1$，当

$$S\leqslant 2\sqrt{n-1}-2\left(2+\frac{1}{n}\right)\sqrt{n-1}\,|T|^2$$

时，M^n 是全测地的子流形；

（Ⅱ）如果 $7\geqslant n\geqslant 3$ 且 $m\geqslant n+2$，当

$$S\leqslant\frac{2}{3}(n-(2n+1)\,|T|^2)$$

时，M^n 是全测地的子流形.

证明　由于平均曲率向量场 $\xi=He_{n+1}$，则

$$\mathrm{tr}H_{n+1}=nH,\ \mathrm{tr}H_\alpha=0,\ \alpha\neq n+1 \tag{6}$$

由条件可得 e_{n+1} 在法丛中平行，通过计算可得

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_i h_{iij}^\alpha=0,\ \sum\limits_k h_{kkij}^\alpha=0,\ \omega_{\alpha,n+1}=0,\\ H_\alpha H_{n+1}=H_{n+1}H_\alpha,\ H=\mathrm{const}\end{array}\right\} \tag{7}$$

由式(5)和式(7)计算可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S_I=&\sum_{\alpha>n+1,\,i,j,k}(h_{ijk}^\alpha)^2+\\&\sum_{\alpha>n+1,i,j,k,m}h_{ij}^\alpha(h_{km}^\alpha R_{mijk}+h_{mi}^\alpha R_{mkjk})+\\&\sum_{\alpha>n+1,\beta,i,j,k}h_{ij}^\alpha h_{ki}^\alpha R_{\beta\alpha jk}^\perp+\\&\sum_{\alpha>n+1,i,j,k}h_{ij}^\alpha((T_j\delta_{ik}-T_k\delta_{ij})\eta_\alpha)_{,k}+\\&\sum_{\alpha>n+1,i,j,k}h_{ij}^\alpha((T_i\delta_{kk}-T_k\delta_{ik})\eta_\alpha)_{,j}\end{aligned} \tag{8}$$

通过式(1)～(3)和式(6)，直接计算可得

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha>n+1,i,j,k}h_{ij}^\alpha((T_j\delta_{ik}-T_k\delta_{ij})\eta_\alpha)_{,k}+\\&\sum_{\alpha>n+1,i,j,k}h_{ij}^\alpha((T_i\delta_{kk}-T_k\delta_{ik})\eta_\alpha)_{,j}=\\&-\sum_{\alpha>n+1,\beta,i,j}h_{ii}^\alpha h_{jj}^\beta\eta_\alpha\eta_\beta-\sum_{\alpha>n+1,i,j,k}nh_{ij}^\alpha h_{jk}^\alpha T_iT_k+\\&\sum_{\alpha>n+1,\beta,i,j}nh_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta\eta_\alpha\eta_\beta+\sum_{\alpha>n+1,i,j,k}h_{ii}^\alpha h_{jk}^\alpha T_jT_k=\\&-\sum_{\alpha>n+1,i,j,k}nh_{ij}^\alpha h_{jk}^\alpha T_iT_k+\sum_{\alpha,\beta,i,j}nh_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta\eta_\alpha\eta_\beta-\\&\sum_{\beta,i,j}nh_{ij}^{n+1}h_{ij}^\beta\eta_{n+1}\eta_\beta\end{aligned} \tag{9}$$

通过 Gauss，Codazzi，Ricci 方程和式(7)计算得

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha>n+1,i,j,k,m}h_{ij}^\alpha(h_{km}^\alpha R_{mijk}+h_{mi}^\alpha R_{mkjk})=\\&\sum_{\alpha>n+1,\beta>n+1}[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)^2-\mathrm{tr}(H_\alpha^2H_\beta^2)]-\\&\sum_{\alpha>n+1,\beta>n+1}[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2-\sum_\alpha[\mathrm{tr}(H_\alpha H_{n+1})]^2+\\&\sum_{\alpha>n+1,\beta}\mathrm{tr}(H_\alpha^2H_\beta)\mathrm{tr}H_\beta+(n-|T|^2)S_I-\\&\sum_{\alpha>n+1,i,j,k}nh_{ij}^\alpha h_{ik}^\alpha T_jT_k\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha>n+1,\beta,i,j,k}h_{ij}^\alpha h_{ki}^\beta R_{\beta\alpha jk}^\perp=\\&\sum_{\alpha>n+1,\beta>n+1}[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)^2-\mathrm{tr}(H_\alpha^2H_\beta^2)]\end{aligned} \tag{11}$$

把式(9)～(11)代入式(8)，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S_I=&\sum_{\alpha>n+1,\,i,j,k}(h_{ijk}^\alpha)^2+\\&\sum_{\alpha>n+1,\beta>n+1}2[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)^2-\mathrm{tr}(H_\alpha^2H_\beta^2)]-\\&\sum_{\alpha>n+1,\beta>n+1}[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2+\sum_{\alpha>n+1,\beta}\mathrm{tr}(H_\alpha^2H_\beta)\mathrm{tr}H_\beta-\\&\sum_\alpha[\mathrm{tr}(H_\alpha H_{n+1})]^2+(n-|T|^2)S_I-\\&\sum_{\alpha>n+1,i,j,k}2nh_{ij}^\alpha h_{ik}^\alpha T_jT_k+\sum_{\alpha,\beta,i,j}nh_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta\eta_\alpha\eta_\beta-\\&\sum_{\beta,i,j}nh_{ij}^{n+1}h_{ij}^\beta\eta_{n+1}\eta_\beta\end{aligned} \tag{12}$$

下面我们对式(12)中的一些项的下界进行估计，

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{\alpha,\beta}\sum\limits_{i,j}nh_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta\eta_\alpha\eta_\beta\geqslant 0,\\ -\sum\limits_{\alpha>n+1}\sum\limits_{i,j,k}2nh_{ij}^\alpha h_{ik}^\alpha T_jT_k\geqslant -2n\,|T|^2S_I\end{array}\right\} \tag{13}$$

由于 M^n 的平均曲率向量场 ξ 与 ∂_t 的夹角是常值，即

$$\langle\xi,\partial_t\rangle=\langle He_{n+1},\partial_t\rangle=H\eta_{n+1}=\mathrm{const},$$

另外 H 是常值，所以 η_{n+1} 也是常值，结合引理 2 可得

$$-\sum_{\beta,i,j}h_{ij}^{n+1}h_{ij}^\beta\eta_{n+1}\eta_\beta=(n-1)\,|\eta_{n+1}|^2\,|T|^2\geqslant 0 \tag{14}$$

由引理 1 可得

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha>n+1,\beta>n+1}2[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)^2-\mathrm{tr}(H_\alpha^2H_\beta^2)]-\\&\sum_{\alpha>n+1,\beta>n+1}[\mathrm{tr}(H_\alpha H_\beta)]^2\geqslant\\&-\left(1+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(m-n-1)\right)S_I^2\end{aligned} \tag{15}$$

由于 M^n 具有平行平均曲率向量场 ξ，即

$$\begin{aligned}D^\perp\xi=&dH\cdot e_{n+1}+H\cdot D^\perp e_{n+1}=\\&dH\cdot e_{n+1}+H\sum_\alpha\omega_{n+1\alpha}\cdot e_\alpha=0,\end{aligned}$$

所以有 $\omega_{n+1\alpha}=0$，$\forall\alpha$. 对 $\omega_{n+1\alpha}$ 进行外微分得到

$$0=d\omega_{n+1\alpha}=$$

$$\sum_i \omega_{n+1i} \wedge \omega_{i\alpha} + \sum_\beta \omega_{n+1\beta} \wedge \omega_{\beta\alpha} = \sum_i \omega_{n+1i} \wedge \omega_{i\alpha} = -\sum_{ijk} h_{ij}^{n+1} h_{ik}^{\alpha} \omega_j \wedge \omega_k = -\sum_{j<k}\sum_i (h_{ij}^{n+1}h_{ik}^{\alpha} - h_{ik}^{n+1}h_{ij}^{\alpha})\omega_j \wedge \omega_k.$$

所以 $H_\alpha H_{n+1} = H_{n+1} H_\alpha$，矩阵 H_α，H_{n+1} 可以同时对角化，设 λ_i^α，λ_i 分别是它们的特征值，则

$$\sum_\beta \mathrm{tr}(H_\alpha^2 H_\beta)\mathrm{tr}H_\beta - [\mathrm{tr}(H_\alpha H_{n+1})]^2 = (\sum_i \lambda_i)(\lambda_j(\lambda_j^\alpha)^2) - (\sum_i \lambda_i\lambda_i^\alpha)(\sum_j \lambda_j\lambda_j^\alpha) = \frac{1}{2}\sum_{ij}\lambda_i\lambda_j(\lambda_i^\alpha - \lambda_j^\alpha)^2,$$

结合引理3可得

$$\sum_{\alpha>n+1,\beta} \mathrm{tr}(H_\alpha^2 H_\beta)\mathrm{tr}H_\beta - \sum_\alpha [\mathrm{tr}(H_\alpha H_{n+1})]^2 \geqslant -\frac{n}{2\sqrt{n-1}}(S-S_I)S_I \tag{16}$$

把式(13)～(16)代入式(12)可得

$$\frac{1}{2}\Delta S_I \geqslant \Big[n-(2n+1)\,|\,T\,|^2 - \frac{n}{2\sqrt{n-1}}(S-S_I) - \Big(1+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(m-n-1)\Big)S_I\Big]S_I \tag{17}$$

（Ⅰ）如果 $n\geqslant 8$ 或者 $n\geqslant 3$ 且 $m\leqslant n+1$，则

$$-\Big(1+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(m-n-1)\Big)S_I \geqslant -\frac{n}{2\sqrt{n-1}}S_I \tag{18}$$

由式(17)和式(18)可得

$$\frac{1}{2}\Delta S_I \geqslant \Big[n-(2n+1)\,|\,T\,|^2 - \frac{n}{2\sqrt{n-1}}S\Big]S_I \tag{19}$$

当 $S\leqslant 2\sqrt{n-1} - 2\Big(2+\frac{1}{n}\Big)\sqrt{n-1}\,|\,T\,|^2$ 时，由 M^n 的紧致性，有 $\Delta S_I = 0$. 则式(13)～(18)中的等号成立，其中由式(18)的等式可得 $S_I = 0$，进一步由式(16)的等号成立，可得 $\mathrm{tr}H_{n+1}^2 = 0$，因此 $S=0$，M^n 是全测地的子流形.

（Ⅱ）如果 $7\geqslant n\geqslant 3$ 且 $m\geqslant n+2$，则

$$-\frac{n}{2\sqrt{n-1}}(S-S_I) \geqslant -\frac{3}{2}(S-S_I) \tag{20}$$

由式(17)和式(20)可得

$$\frac{1}{2}\Delta S_I \geqslant \Big[n-(2n+1)\,|\,T\,|^2 - \frac{3}{2}S\Big]S_I \tag{21}$$

当 $S\leqslant\frac{2}{3}(n-(2n+1)\,|\,T\,|^2)$，由 M^n 的紧致性，有 $\Delta S_I = 0$. 式(13)～(17)和式(20)～(21)中的等号成立. 式(20)中的等号成立时，则有 $S=S_I$，$\mathrm{tr}H_{n+1}^2 = 0$. 而 $\mathrm{tr}H_{n+1}^2 \geqslant nH^2$，因此 M^n 是极小子流形，由文献[4]中的推论1.2或者文献[5]中定理5.2可得，当

$$S\leqslant\frac{2}{3}(n-(2n+1)\,|\,T\,|^2)$$

时，M^n 是全测地的子流形. □

注 定理1中的紧致条件可以换成完备的，因为由 M^n 的第二基本形式模长平方的上界条件可以推出 Ricci 曲率有下界，再由 Omori-Yao 极值原理，得出证明.

致谢 本文是在中国科学技术大学访学期间完成的，感谢麻希南教授的鼓励和指导！

参考文献(References)

[1] DILLEN F, FASTENAKELS J, VAN DER VEKEN J, et al. Constant angle surfaces in $S^2\times R$ [J]. Monatsh Math, 2007, 152:89-96.

[2] DANIEL B. Isometric immersions into $S^n\times R$ and $H^n\times R$ and applications to minimal surfaces[J]. Trans Amer Math Soc, 2009, 361: 6 255-6 282.

[3] BATISTA M. Simons type equation in $S^2\times R$ and $H^2\times R$ and applications [J]. Ann Inst Fourier (Grenoble), 2011, 61: 1 299-1 322.

[4] CHEN Q, CUI Q. Normal scalar curvature and a pinching theorem in $S^m\times R$ and $H^m\times R$ [J]. Sci China Math, 2011, 54:1 977-1 984.

[5] CHEN H, CHEN G Y, LI H Z. Some pinching theorems for minimal submanifolds in $S^m\times R$[J]. Sci China Math, 2013, 56: 1 679-1 688.

[6] FETCU D, ONICIUC C, ROSENBERG H. Biharmonic submanifolds with parallel mean curvature in $S^m\times R$[J]. J Geeom Anal, 2013, 23: 2 158-2 176.

[7] LI A M, LI J M. An intrinsic rigidity theorem for minimal submanifolds in a sphere [J]. Arch Math (Basel), 1992, 58(6): 582-594.

[8] ZHANG J F. A rigidity theorem for submanifolds in S^{n+p} with constant scalar curvature [J]. Journal of Zhejiang University SCIENCE, 2005, 6A (4): 322-328.