

非欧弹性圆盘的形貌

田忠良, 梁海弋

(中国科学技术大学近代力学系, 中国科学院材料力学行为和设计重点实验室, 安徽合肥 230027)

摘要: 不均匀温度膨胀会导致平板发生面外变形, 这对应于非欧弹性板理论中板壳在目标度量张量作用下的空间变形. 利用经典的弹簧网络模型模拟了一系列不同膨胀函数作用下的非欧弹性圆板变形, 得到了目标高斯曲率 \bar{K} 正负不同的特征变形. 针对 $\bar{K} < 0$ 的圆盘, 分析了不同厚度 t 情况下波数随膨胀强度提高的演化. 研究了 t 恒定时圆盘在不同膨胀强度和应变梯度作用下弯曲能占总能量比例的变化, 当圆盘变形后波数变化时, 弯曲能比例急剧变化. 同一膨胀函数作用下, 得到了圆盘拉伸能和弯曲能对厚度的标度率, 当 $\bar{K} > 0$ 时拉伸能和弯曲能均和 $t^{2.5}$ 相关, 当 $\bar{K} < 0$ 时弯曲能和 $t^{2.5}$ 相关, 拉伸能和 t^4 相关.

关键词: 非欧弹性板; 目标度量张量; 目标高斯曲率; 弯曲能; 拉伸能

中图分类号: O34 **文献标识码:** A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2015.09.009

引用格式: Tian Zhongliang, Liang Haiyi. Morphology of non-Euclidean disks[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2015, 45(9):757-762.

田忠良, 梁海弋. 非欧弹性圆盘的形貌[J]. 中国科学技术大学学报, 2015, 45(9):757-762.

Morphology of non-Euclidean disks

TIAN Zhongliang, LIANG Haiyi

(Department of Modern Mechanics, CAS Key Laboratory of Mechanical Behavior and Design of Materials, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China)

Abstract: The out-of-plane displacements of plates are influenced by factors such as nonuniform thermal expansion which corresponds the research of 3D deformation of elastomer controlled by the target metric in non-Euclidean plates. The well-known mass-spring model was used to simulate the deformation of disks driven by given swelling functions corresponding positive and negative target Gaussian curvature \bar{K} . The evolution of waves under negative target Gaussian curvature was analyzed with different thickness t . The impact of swelling factor and strain gradient on the ratio of bending energy to strain energy was studied with the same thicknesses. The ratio transforms rapidly when the number of waves changes for $\bar{K} < 0$. Scaling of stretching and bending energy about thickness was obtained while disks were driven by the same swelling function. Stretching and bending energy both vary like $t^{2.5}$ with $\bar{K} > 0$, compared with t^4 of bending energy in disks with $\bar{K} < 0$.

Key words: non-Euclidean plate; target metric; target Gaussian curvature; bending energy; stretching energy

0 引言

自然界中经常可以观察到生物叶片或花瓣在组织不均匀生长产生的内应力作用下呈现出优美的形状,如螺旋生长的海带、边缘波浪起伏的树叶以及马鞍状的百合花瓣^[1]等.而在工业制造薄钢板等过程中,工程师们一直在努力探究如何消除或控制残余应变所导致的翘曲.显然,生物在漫长的进化过程中早于人类学会了这些形状控制技术.数学上,残余应变、自然生长或温度膨胀等因素均可使用目标度量张量加以描述,而弹性体在目标度量张量作用下的空间变形正是非欧弹性理论的核心研究内容.

近 5 年来,非欧弹性理论和相关实验研究发展十分迅速. Sharon 等^[2-4]首先建立了非欧弹性板(non-Euclidean plate, NEP)的大变形理论框架,得到了相应的控制方程. Santangelo 等^[5-6]成功利用半导体光刻技术制作了膨胀区域可控的水凝胶薄板,设计了不同面内膨胀函数并获得预期的椭球面和双曲面等极小曲面.然而,前人的工作大多集中在非欧弹性板的理论推导和实验及其测量,对非欧弹性板变形的数值模拟少有研究.这主要是因为非欧弹性板变形过程中涉及了非线性大变形以及不均匀应变场的施加,其模拟相对复杂.本文使用经典的弹簧网络模型,成功模拟了非欧弹性板的变形,从数值模拟的角度进一步探究其变形机制.

本文首先简介了非欧弹性板的理论框架,然后利用弹簧网络模型模拟薄圆板在给定面内梯度膨胀函数作用下失稳产生三维变形,分析了膨胀强度、梯度和板厚对变形的影响,探究了变形后拉伸能和弯曲能的变化趋势.

1 非欧弹性板理论

非欧弹性理论^[2]引入了目标度量张量 \bar{g} 来描述材料点与点之间的本征长度,当弹性体的当前度量张量 g 和目标度量张量相等时,局部弹性能量密度能最小.现实情况中,目标度量张量通常取决于结构中的残余应变、生长或不均匀温度膨胀等因素.度量张量可表示为

$$g_{ij}(x) = [(\nabla f)^T (\nabla f)]_{ij} = \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^j} \right\} \quad (1)$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

式中, f 表示弹性体在当前坐标和初始坐标的映射,对于不同的坐标系, g_{ij} 值会相应地改变.对于二维

板壳,其厚度远小于其他两个方向的尺寸,可以用中性层来描述整个壳体,厚度方向采用基尔霍夫假设^[7].因此对于一个厚度均匀的非欧弹性板,目标度量张量相应退化为

$$\bar{g}(x^1, x^2, x^3) = \begin{pmatrix} \bar{a}(x^1, x^2) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中, $\bar{a} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 为中性层的目标度量张量.结合超弹性体相关理论^[8],非欧弹性板的弹性体能量可写为

$$E = \int_S \mathcal{W}(x^1, x^2) \sqrt{|\bar{a}|} dx^1 dx^2 \quad (3)$$

对应的应变张量为 $e_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - \bar{a}_{ij})$, $\mathcal{W}(x^1, x^2)$ 为能量密度.弹性能可相应地分解为弯曲能和拉伸能^[4],即 $E = E_b + E_s$.

非欧弹性板的曲率同样可用中性层的曲率来替代,而中性层的曲率又由其上每点的两个主曲率 κ_1 和 κ_2 决定,对应每点的高斯曲率^[9]为 $K = \kappa_1 \kappa_2$,平均曲率^[10]为 $H = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$.当中性层内任何一点的高斯曲率都为零时,表明该中性层为一个平面;当 $K > 0$ 时,对应的中性层为椭球面;当 $K < 0$ 时,对应的中性层为双曲面.非欧弹性板的目标高斯曲率 \bar{K} 由目标度量张量 \bar{g} 决定,对应着无厚度的理想数学曲面.在实验中,通常使用热膨胀来实现非欧弹性板的目标度量张量,对应的目标高斯曲率为^[5]

$$\bar{K} = -\frac{\nabla^2 \ln \eta(r)}{\eta^2(r)} \quad (4)$$

式中, $\eta(r)$ 为柱坐标系下板的膨胀函数.虽然度量张量的表现形式随着坐标系选取的不同而改变,但高斯曲率不会因此发生变化.一个存在目标高斯曲率 \bar{K} 的板若达到无内力的状态,变形后其实际高斯曲率 K 必须与目标高斯曲率 \bar{K} 相同^[11].而在大多数情况下,由于厚度的存在,两者并不完全相等,实际高斯曲率只是尽可能地趋近目标高斯曲率.在模拟和实验中,不同的生长膨胀函数对应着不同的目标度量张量,但可能对应着相同的目标高斯曲率,而相同的高斯曲率并非对应唯一的曲面.当高斯曲率固定时,主曲率和其方向的选取依旧有很多种可能,因此许多不同的表面往往会具有相同的高斯曲率,即同一膨胀函数可能导致不同变形结果.

2 非欧弹性圆盘模拟

模拟过程中取一个半径为 R 厚度为 t 的圆盘,圆盘受到函数形式为 η 的面内膨胀.由式(4)可知,若膨胀函数取 $\eta(r) = c(r/R)^\beta$,则对应的目标高斯曲

率 $\bar{K}=0$, 即这种膨胀函数作用下圆盘不会发生面外变形; 若膨胀函数为 $\eta(r)=c/(1+(r/R)^2)$, 则对应的目标高斯曲率为常数 $\bar{K}=4/(cR)^2$, 圆盘将会变形为椭球面. 由此可知, 并不是所有的膨胀形式都会导致圆盘的面外变形. 本文考虑圆盘的膨胀/收缩函数为

$$\eta(r) = c \left(1 + \left(\frac{r}{R} \right)^{2(n-1)} \right) \quad (5)$$

式中, c 为膨胀强度, 其对应的应变为 $e=1+\eta(r)$. 当 $c>0$ 时, 圆盘沿径向膨胀率递增, 由式(4)可得 $\bar{K}<0$, 圆盘会变形为双曲面; 当 $c<0$ 时, 圆盘沿径向收缩率递增, 目标高斯曲率 $\bar{K}>0$, 圆盘会变形为椭球面.

2.1 弹簧模型

本文使用弹簧网络模型^[12]模拟非欧弹性板的变形, 将圆盘离散为单层三角网络, 质量集中于每个离散点上. 相连离散点间使用线性弹簧连接, 相邻三角单元的法线方向上添加了角弹簧模拟弯曲. 整个体系的能量可以分解为拉伸能和弯曲能:

$$U = U_s + U_b \quad (6)$$

$$U_s = \sum_{[x_i, x_j] \in D} \frac{1}{2} K_s (\|x_i - x_j\| - L_{ij}^0)^2 \quad (7)$$

$$U_b = \sum_{[x_i, x_j] \in D_i} \frac{1}{2} K_b (1 - \cos(\theta_{ij} - \theta_{ij}^0)) \quad (8)$$

式中, $\mathbf{X} = \{x_i, i = 1, 2, \dots\}$ 为节点位置, L_{ij}^0 为边 $[x_i, x_j]$ 的原长, θ_{ij} 是边 $[x_i, x_j]$ 两侧相邻三角单元的二面角, θ_{ij}^0 为其初始角度. K_s 和 K_b 分别为拉伸和弯曲刚度, D 为所有的边, D_b 是模型边界处的边, $D_i = D - D_b$. 则每个节点加速度为

$$M\ddot{\mathbf{X}} = -\nabla U(\mathbf{X}) \quad (9)$$

式中, M 为质量矩阵. 本文使用 Fortran 编程, 以时间为步长, 实现了弹簧网络模型, 从而模拟非欧弹性圆盘的变形, 模拟过程中的面内膨胀对应于模型中线性弹簧原长的改变.

2.2 圆盘变形模拟

实际模拟过程中, 圆盘半径取 $R=30$, 离散为 1 401 个点、2 647 条边和 4 047 个面的三角网络, 所有离散边的平均长度为 1.57. 对不同板厚和式(5)中不同 n 作用下的圆盘进行模拟, 膨胀强度 c 的数值随时间步的增加不断增大. 当 $c<0$ 时, 圆盘变形后的构型都为椭球面, 如图 1(a) 所示; 当 $c>0$ 时, 圆盘变形后为双曲面, 在边界处形成波纹, 如图 1(b)~(f) 所示. 图 1 为圆盘变形后的渲染图, (b)~(f) 分

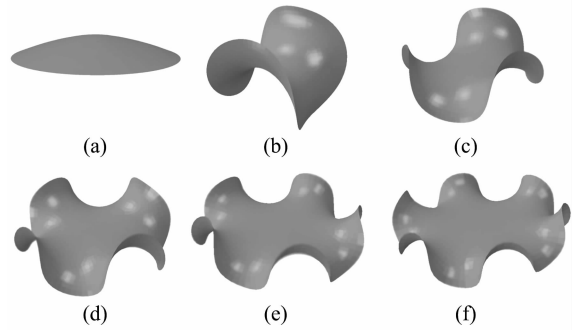


图 1 圆盘变形后的不同构型
Fig. 1 Variation of configurations with different swelling functions

别对应着波数 $m=2\sim 6$ 的情况(模拟中取 $t=0.4$, $c=0.2$, $n=2\sim 6$).

当作用的膨胀函数为式(5)且 $c>0$ 时, 圆盘理论上会形成含 n 个波的 Enneper 极小曲面, 但实际模拟中圆盘变形后波数还会随 c 和 t 的不同而改变. Sharon 等在实验中也观测到了在同一目标高斯曲率情况下, 圆盘因厚度不同产生不同波数的情况^[3]. 当作用的膨胀函数为式(5)且 $n=4$ 时, 对不同厚度圆盘的变形进行模拟, 分析在膨胀强度 c 增大的过程中圆盘变形所产生波数的演化, 其结果如图 2 所示. 图 2 中为了区分各曲线, 将曲线水平重合部分作了少量的偏移.

由图 2 可知, 当膨胀强度 $0<c<0.01$ 时, 圆盘处于生长萌芽阶段, 对较厚的圆盘($t=0.5\sim 1.5$), 变形没有产生明显的波纹; 而对较薄的圆盘($t=$

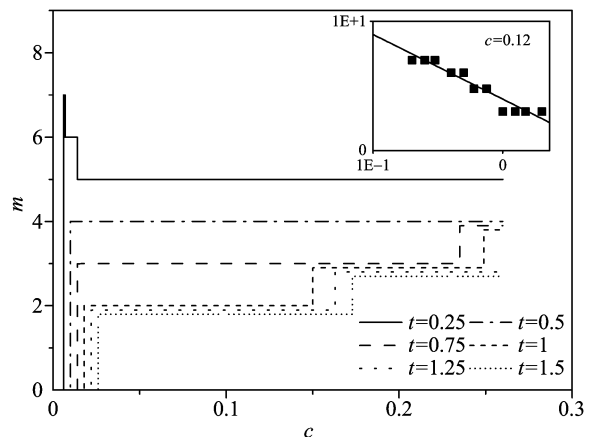


图 2 圆盘变形产生的波数随膨胀强度的改变, 小图为不同厚度对应的波数

Fig. 2 The number of corrugations changes with increasing swelling factor.

The inset is the number as a function of thickness

0.25), 含不同波数的形态能量接近, 变形产生了 7 个波纹的情况, 但随着膨胀强度增加, 不同形态能量逐渐区分, 其波数逐渐减少. 当膨胀强度 $c > 0.004$ 时, 圆盘变形相对稳定, 各个厚度的圆盘变形将在一定时间步内保持相同的波数. 但对于较厚的圆盘 ($t = 0.75 \sim 1.5$), 随着 c 的继续增大, 圆盘会失稳增加一个波数来释放能量使得自己处于新的稳态. 随着圆盘厚度的增加, 圆盘失稳变形到新的稳态所需要的膨胀强度也相应地增加, 而变形产生的波数也会有所减少. 图 2 中的小图为 $c = 0.12$ 时波数和厚度的 $\log\text{-}\log$ 曲线图, 由此可得出其关系近似为 $m \sim t^{-1/2}$, 这一结果和 Sharon 的实验一致.

因此, 圆盘变形后的波数不仅仅由膨胀函数决定, 还取决于其厚度. 其厚度越小, 越容易产生更多的波纹, 甚至可以超过理论的波数, 如 $t = 0.25$ 时, $m > 4$; 而厚度越大, 其失稳产生波纹所需的临界膨胀强度相应提高, 且初始产生的波纹数减少, 随膨胀强度的不断增加, 波纹数会有所恢复.

3 非欧弹性板变形机制

由式(4)可知, 非欧弹性板的变形和给定的膨胀函数有直接的关系, 即其变形结果受膨胀函数的形式以及膨胀强度 c 和梯度 n 的取值影响. 而另一方面, 板厚对变形的影响也是不可忽略的. 非欧几何板的变形理论假设板壳是与厚度无关的理想数学曲面, 给出的变形结果都是由无厚度的中性层的度量张量推导得出. 但在实验和实际工程应用中, 板壳厚度的存在是不可避免的. 弯曲变形时, 板中性层一侧处于拉伸状态, 另一侧处于压缩状态, 而这两种状态都有阻止其继续弯曲的趋势, 板厚越厚的时候, 这种阻止也就越明显.

本文从拉伸能和弯曲能的竞争和转化去理解圆盘变形的结果, 研究圆盘变形过程中拉伸能和弯曲能与 c, n 以及 t 的关系, 探讨圆盘在不同情况下产生不同波数形态的过程中两种能量的变化.

3.1 膨胀函数对变形的影响

膨胀函数主要通过膨胀强度 c 和梯度 n 对圆盘的变形产生影响. 在相同厚度 ($t = 0.5$) 情况下, 对膨胀函数式(5)不同 n 作用下的圆盘进行模拟. 由于 n 不同时施加在圆盘的能量不同, 所以在对比时取 E_b/E 表征弯曲能占总能量的比例, 相应的拉伸能比例为 $1 - E_b/E$. 观测 E_b/E 随 n 取值不同的变化, 如图 3 所示.

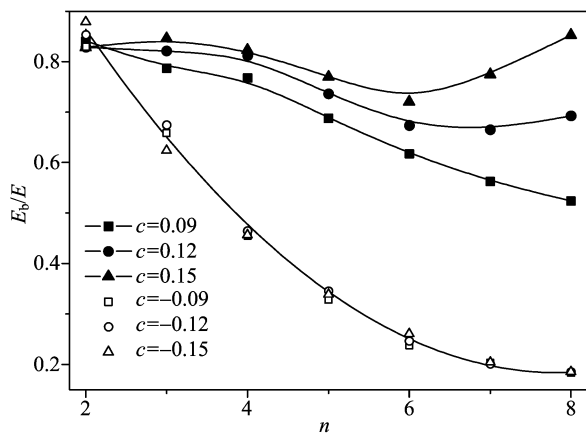


图 3 E_b/E 随 n 取值不同的变化

Fig. 3 E_b/E as a function of n

由图 3 可知, 当 $c < 0$ 时, 弯曲能比例随 n 的增大呈抛物线递减, 且和 c 的取值基本无关. 这是由于此时圆盘目标高斯曲率 $\bar{K} > 0$, 其变形结果仅有一个形态(椭球面). 对于相同的 c , 圆盘应变梯度随 n 增大而增大, 在构型无法改变的情况下拉伸能比例提高, 导致弯曲能逐渐下降; 对于相同的 n , 圆盘变形后由于构型无法改变, 弯曲能和拉伸能随 c 数值的增大都相应地增加, 各自的比例基本不变. 当 $c > 0$ 时, 圆盘变形后的弯曲能比例和 n 与 c 的关系相对复杂. 当圆盘随 n 增大其变形后构型不变 ($c = 0.09, n = 4 \sim 8, m = 4$) 时, 弯曲能比例和 $c < 0, n$ 增大的情况类似, 呈抛物线递减; 当圆盘变形后波数 m 和目标波数 n 一致 ($n = 2 \sim 4$) 时, 弯曲能比例基本相同, 和 n 与 c 的取值无太大的关联; 当圆盘变形后波数随 c 的增大而改变 ($n = 7 \sim 8$) 时, 其弯曲能比例增加. 图 4 为 $n = 7$ 时, 弯曲能比例随膨胀强度 $c =$

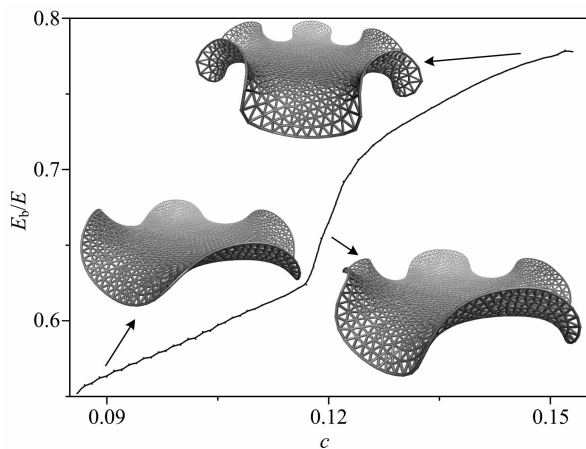


图 4 $n = 7$ 时 E_b/E 随 c 的变化

Fig. 4 E_b/E as a function of c while $n = 7$

0.085~0.155 的变化,可将其分为 3 个阶段. 在第一个阶段,圆盘变形后的波数为 4,弯曲能比例缓慢上升;第二个阶段,波数由 4 向 5 演化,弯曲能比例急剧上升;第三个阶段波数为 5,弯曲能比例和第一阶段一样缓慢上升. 对于第一和第三阶段,其结果和 $c < 0, n$ 不变的情况类似,可认为其弯曲能比例基本不变. 对于第二阶段,波数发生变化,弯曲能发生突跳,这也解释了图 3 中 $c > 0$ 时 3 条曲线变化趋势的改变. 对于某些特定的 n 和 t ,波数随 c 的增大没有变化(如图 2 中 $t = 0.5, n = 4$),则其对应的 $E_b/E \sim c$ 图将只剩一个缓慢增长的阶段.

因此对于圆盘厚度 t 不变的情况,当 n 不变、 c 数值的增大时,变形后的构型不发生改变等价于弯曲能比例不发生改变,构型发生改变等价于弯曲能比例发生跳跃;当 c 不变、 n 增大时,变形后的构型不发生改变等价于弯曲能比例呈抛物线递减,构型发生改变等价于这一趋势的破坏.

3.2 板厚对变形的影响

由图 2 可知,不同厚度情况下,圆盘在相同的膨胀函数作用下可能会产生不同的波数,则其对应的拉伸能和弯曲能也会发生相应的变化. 当作用的膨胀函数为式(5)且 $n = 4, c = \pm 0.15$ 时,对不同厚度的圆盘进行模拟,厚度的取值范围 $t = 0.2 \sim 2$. 图 5 为不同厚度下, $\bar{K} < 0$ 和 $\bar{K} > 0$ 时弯曲能和拉伸能分别对厚度的标度率.

当 $c = 0.15$ 时,圆盘目标高斯曲率 $\bar{K} < 0$,由图 5(a)可得拉伸能和厚度的关系近似为 $E_s \sim t^4$,弯曲能为 $E_b \sim t^{2.5}$;当 $c = -0.15$ 时,圆盘目标高斯曲率 $\bar{K} > 0$,由图 5(b)可得拉伸能和弯曲能随厚度变化

的趋势基本一致,即 $E_s \sim t^{2.5}, E_b \sim t^{2.5}$. 对 $\bar{K} > 0$ 的情况,圆盘变形为椭球面,且构型不会发生明显变化,故弯曲能和拉伸能关于厚度的变化趋势一致;而对 $\bar{K} < 0$ 的情况,随着板厚的增加,圆盘变形后曲面的波数会随之减少,拉伸能会相应地提高,导致 $E_s \sim t^4$,又由于目标高斯曲率的限制,故弯曲能随厚度的变化趋势和 $\bar{K} > 0$ 时一致.

本文得到的弯曲能和拉伸能对厚度的标度率与 Sharon 的结果有一定的出入,可能原因是 Sharon 的实验中水凝胶变形的作用函数和本文膨胀函数式(5)并非完全一致. 另外,Sharon 实验中将圆盘中心处挖去从而利于圆盘变形,中心的缺失便于圆盘变形过程中释放拉伸应变,故其得到的拉伸关于厚度的标度小于本文的结果.

4 结论

本文简介了非欧弹性板理论,并使用弹簧网络模型模拟非欧弹性板在不同条件下的变形. 针对同一类型的膨胀函数,对目标高斯曲率正负的情况分别进行模拟,得到了椭球面和含有不同波数曲面的形貌. 统计了曲面波数在不同厚度情况下随膨胀强度增加的变化情况,结果表明厚度增加时波数会相应地减少,而较厚的圆盘随膨胀强度增加波数会有所恢复. 本文得到的波数随厚度的标度率和 Sharon 的实验结果一致,即 $m \sim t^{-1/2}$.

本文还探究了圆盘变形后的弯曲能和拉伸能随膨胀强度、梯度和板厚的变化. 对构型不变的情况,弯曲能比例和膨胀强度关联较小,而随梯度 n 呈抛物线衰减. 构型改变的情况对应于圆盘通过增加波

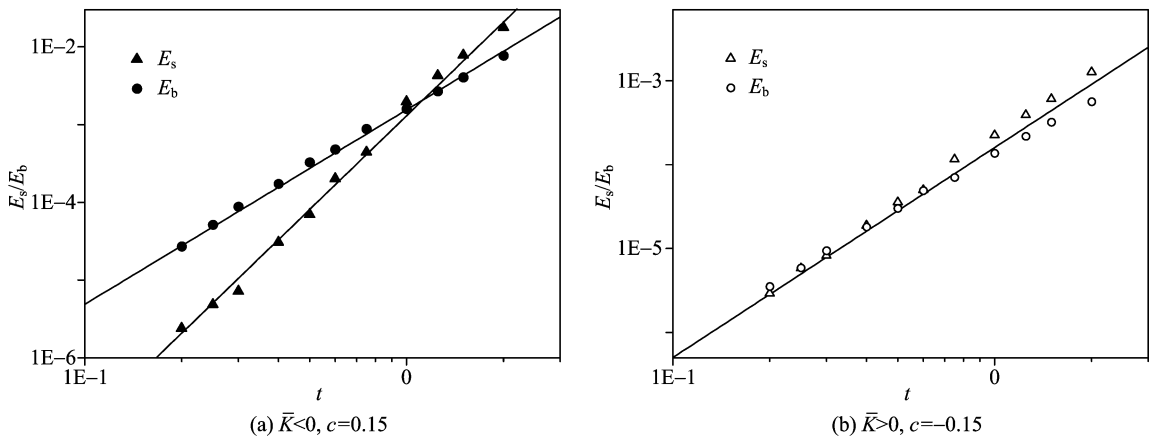


图 5 拉伸能和弯曲能对厚度的标度率

Fig. 5 Scaling of bending and stretching energy with different thickness while

数释放能量从而达到新的稳态,弯曲能上升,其比例在波数增加时发生跳跃.对目标高斯曲率为正的圆盘,其拉伸能和弯曲能与厚度关系一致,即正比于 $t^{2.5}$;对目标高斯曲率为负的圆盘,拉伸能和厚度关系为 $E_s \sim t^4$,弯曲能为 $E_b \sim t^{2.5}$.

本文通过对模拟结果的分析揭示了非欧弹性圆盘变形和各影响因素之间可能的关系,这对非欧弹性板领域的发展和应用在数值上提供了依据和参考,而本文所采用的数值模拟方法对该领域今后进一步的实验和探究也具有指导意义.在本文的模拟过程中,模型都选用的简单圆盘,而在一些实验和工程中,会遇到含缺陷的薄板模型,这也是本文下一步的工作方向,即模拟带缺陷的薄板变形,探究缺陷对变形的影响.

参考文献(References)

- [1] Liang H Y, Mahadevan L. Growth, geometry, and mechanics of a blooming lily[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2011, 108(14): 5 516-5 521.
- [2] Sharon E, Efrati E. The mechanics of non-Euclidean plates[J]. Soft Matter, 2010, 6(22): 5 693-5 704.
- [3] Klein Y, Venkataramani S, Sharon E. Experimental study of shape transitions and energy scaling in thin non-Euclidean plates [J]. Physical Review Letters, 2011, 106(11): 118303.
- [4] Efrati E, Sharon E, Kupferman R. Non-Euclidean plates and shells[EB/OL]. [2015-01-01] <http://math.huji.ac.il/~razk/Publications/PDF/ESK09b.pdf>.
- [5] Kim J, Hanna J A, Byun M, et al. Designing responsive buckled surfaces by halftone gel lithography [J]. Science, 2012, 335(6 073): 1 201-1 205.
- [6] Byun M, Santangelo C D, Hayward R C. Swelling-driven rolling and anisotropic expansion of striped gel sheets[J]. Soft Matter, 2013, 9:8 264-8 273.
- [7] Kirchhoff G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe[J]. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1850, 40: 51-88.
- [8] Truesdell C. The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics [M]. New York: Gordon & Breach Science Pub, 1966.
- [9] O'Neill B. Elementary Differential Geometry[M]. New York: Academic Press, 1966.
- [10] Spivak M. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Volume I [M]. Berkeley: Publish or Perish, 1979.
- [11] Efrati E, Sharon E, Kupferman R. Buckling transition and boundary layer in non-Euclidean plates [J]. Physical Review E, 2009, 80(1): 016602.
- [12] Li J, Liu M, Xu W, et al. Boundary-dominant flower blooming simulation [J]. Computer Animation and Virtual Worlds, 2015, 26: 433-443.