文章编号:0253-2778(2015)09-0737-08

具有一般形式接触率的SEIR模型的稳定性分析

马艳丽[1],徐文雄[2],张仲华[3]

(1. 安徽新华学院公共课教学部,安徽合肥 230088;2. 西安交通大学数学与统计学院,陕西西安 710049;
3. 西安科技大学理学院,陕西西安 710049)

摘要:研究了一类具有不同一般形式的接触率 $\beta_1(N)$,$\beta_2(N)$和$\beta_3(N)$且潜伏者,染病者和移出者均具有传染力的SEIR传染病模型,得到疾病流行与否的阈值——基本再生数R_0. 运用Liapunov函数方法,证明了当$R_0<1$时,无病平衡点E_0全局渐近稳定,疾病最终消失;利用Hurwitz判据定理,证明了当$R_0>1$时,E_0不稳定,地方病平衡点E^*局部渐近稳定;当因病死亡率和剔除率为零时,地方病平衡点E^*全局渐近稳定,疾病持续存在.

关键词:一般形式接触率;基本再生数;平衡点;全局渐近稳定性;Liapunov函数;Hurwitz判据

中图分类号:O175 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2015.09.006

2010 Mathematics Subject Classification: 92D25

引用格式:Ma Yanli, Xu Wenxiong, Zhang Zhonghua. Stability analysis of SEIR model with general contact rate [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2015,45(9):737-744,783.
马艳丽,徐文雄,张仲华. 具有一般形式接触率的SEIR模型的稳定性分析[J]. 中国科学技术大学学报,2015,45(9):737-744,783.

Stability analysis of SEIR model with general contact rate

MA Yanli[1], XU Wenxiong[2], ZHANG Zhonghua[3]

(1. *Public Curriculum Department, Anhui Xinhua University, Hefei* 230088, *China*;
2. *School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049, *China*;
3. *School of Sciences, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an* 710049, *China*)

Abstract: A type of SEIR epidemic model with different general contact rates $\beta_1(N)$, $\beta_2(N)$ and $\beta_3(N)$, having infective force in all the latent, infected and immune periods, was studied. And the threshold, basic reproductive number R_0 which determines whether a disease is extinct or not, was obtained. By using the Liapunov function method, it was proved that the disease-free equilibrium E_0 is globally asymptotically stable and the disease eventually goes away if $R_0<1$. It was also proved that in the case where $R_0>1$, E_0 is unstable and the unique endemic equilibrium E^* is locally asymptotically stable by Hurwitz criterion theory. It is shown that when disease-induced death rate and elimination rate are zero, the unique endemic equilibrium E^* is globally asymptotically stable and the disease persists.

Key words: general contact rate; basic reproductive number; equilibrium; global stability; Liapunov function; Hurwitz criterion

收稿日期:2015-03-19;**修回日期**:2015-07-24

基金项目:国家自然科学基金(11201277,11402054)资助.

作者简介:马艳丽(通讯作者),女,1983年生,硕士/讲师. 研究方向:生物数学. E-mail: linda-mayanli@163.com

0 引言

随着环境的污染、生态的破坏以及国家交流的频繁,人类正面临着传染病长期且严峻的威胁. 因此,越来越多的数学家正在对不同的疾病、不同种群和环境,根据出生、死亡、传播、患病、治愈等规律,建立各种各样的传染病模型.

众所周知,很多传染病在易感者被感染后成为患病者之前存在病菌潜伏期,相应的传染病模型有SEI, SEIR 或 SEIRS 等. 有些疾病的潜伏者或移出者也具有传染力,如丙型肝炎治愈后仍具有一定的传染力[1], 尖锐湿疣在潜伏期也具有较弱的传染力[2]. 然而,考虑潜伏者或移出者具有传染力的研究还鲜见报道. 而且,传统的传染病模型都是考虑传染率是双线性发生率[3-4],标准发生率[5-6]和特殊非线性发生率[7-8]等,本文将一般形式的接触率引入模型,更具有广泛性.

针对上述情况,本文研究了具有不同一般形式接触率$\beta_1(N)$,$\beta_2(N)$和$\beta_3(N)$且潜伏者和移出者也具有传染力的 SEIR 传染病模型,其中,$\beta_i(N)$($i=1,2,3$)满足:① $\beta_i(N)>0$;② $\beta_i'(N)\leqslant 0$;③$(N\beta_i(N))'\geqslant 0$,讨论了无病平衡点和地方病平衡点的全局稳定性,利用 Matlab 软件进行了数值模拟,最后,分析了潜伏者和移出者都具有传染力对疾病控制与消除的影响.

1 模型建立及意义

将所研究的种群分为易感者 S,潜伏者 E,染病者 I 和移出者 R,记 $N=S+E+I+R$,建立 S,I 和 R 分别具有不同接触率的 SEIR 流行病模型仓室结构,如图1所示. 其中,A 为种群的常数输入率,并假设新生儿均为易感者;$\beta_1(N)SE$,$\beta_2(N)SI$ 和 $\beta_3(N)SR$ 分别表示潜伏者,染病者和移出者的一般接触率;α_1,α_2 分别表示潜伏者与染病者的因病死亡率,d 为自然死亡率;k_1,k_2 分别表示潜伏者与染病者的剔除率;γ 表示潜伏者发病的比例,即是由潜伏者到染病者的转换率,$1/\gamma$ 是平均潜伏期;ε 表示从染病者中被移出的比例,$1/\varepsilon$ 为平均患病期. 假设 A,α_1,α_2,γ,ε,k_1,k_2,d 均为正常数.

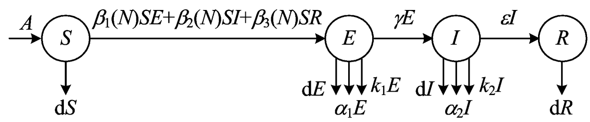

图1 SEIR 流行病模型仓室结构

Fig. 1 Compartment structure of SEIR epidemic model

根据流行病动力学仓室建模思想得到如下 SEIR 模型:

$$\left.\begin{aligned}
S' &= A-\beta_1(N)SE-\beta_2(N)SI-\beta_3(N)SR-dS,\\
E' &= \beta_1(N)SE+\beta_2(N)SI+\\
&\quad \beta_3(N)SR-(\gamma+d+\alpha_1+k_1)E,\\
I' &= \gamma E-(d+\varepsilon+\alpha_2+k_2)I,\\
R' &= \varepsilon I-dR
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式中,$N(t)=S(t)+E(t)+I(t)+R(t)$ 为 t 时刻总人口的数量,总人口方程

$$N'=A-dN-(\alpha_1+k_1)E-(\alpha_2+k_2)I.$$

显然,$N'\leqslant A-dN$,则根据系统(1)的生物学意义,只需要在闭集 $\Gamma=\{(S,E,I,R)\in R_+^4 \mid 0\leqslant S+E+I+R=N\leqslant A/d\}$ 内研究系统(1),其中,R_+^4 表示 R^4 中的正锥. 在考虑到系统(1)的实际意义,各种初值均在 Γ 内,即 Γ 是系统(1)的一个正向最大不变集. 通过计算可得

$$\left.\begin{aligned}
S &= \frac{A((\delta-d)\omega-\gamma(d+\varepsilon))}{\left(\beta_1(N)\omega+\beta_2(N)\gamma+\beta_3(N)\dfrac{\varepsilon\gamma}{d}\right)(A-dN)+d((\delta-d)\omega-\gamma(d+\varepsilon))},\\
E &= \frac{\omega(A-dN)}{(\delta-d)\omega-\gamma(d+\varepsilon)},\\
I &= \frac{\gamma(A-dN)}{(\delta-d)\omega-\gamma(d+\varepsilon)},\\
R &= \frac{\dfrac{\varepsilon\gamma}{d}(A-dN)}{(\delta-d)\omega-\gamma(d+\varepsilon)}
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

式中，$\delta=d+\alpha_1+k_1+\gamma$，$\omega=d+\alpha_2+k_2+\varepsilon$. 且得到关于 N 的方程

$$F(N)(A-dN)=0.$$

其中，

$$F(N)=-Ad(\beta_1(N)\omega+\beta_2(N)\gamma+\beta_3(N)\varepsilon\gamma/d)\cdot(\omega+\gamma+\varepsilon\gamma/d)-\delta\omega d((\delta-d)\omega-\gamma(d+\varepsilon))+\delta\omega dN(\beta_1(N)\omega+\beta_2(N)\gamma+\beta_3(N)\varepsilon\gamma/d).$$

系统(1)在区间$(0,A/d)$上总存在无病平衡点 $E_0(A/d,0,0,0)$. 因为

$$F(0)=-Ad(\beta_1(0)\omega+\beta_2(0)\gamma+\beta_3(0)\varepsilon\gamma/d)\cdot(\omega+\gamma+\varepsilon\gamma/d)-\delta\omega d((\delta-d)\omega-\gamma(d+\varepsilon))<0,$$

$$F(A/d)=\delta\omega d((\delta-d)\omega-\gamma(d+\varepsilon))(R_0-1).$$

取基本再生数为

$$R_0=\frac{(\beta_1(A/d)\omega+\beta_2(A/d)\gamma+\beta_3(A/d)\varepsilon\gamma/d)}{\delta\omega}\frac{A}{d}.$$

当 $R_0>1$ 时，$F(A/d)>0$，$F(0)<0$. 又因为 $\beta_i(N)$ $(i=1,2,3)$满足：①$\beta_i'(N)\leqslant 0$；②$(N\beta_i(N))'\geqslant 0$，所以

$$F'(N)=-Ad(\omega+\gamma)\cdot(\beta_1'(N)\omega+\beta_2'(N)\gamma+\beta_3'(N)\varepsilon\gamma/d)+\delta\omega d((N\beta_1(N))'\omega+(N\beta_2(N))'\gamma+(N\beta_3(N))'\varepsilon\gamma/d)\geqslant 0.$$

从而得到 $F(N)$ 在区间$(0,A/d)$上为单调递增函数，故 $F(N)=0$ 在区间$(0,A/d)$上存在唯一的根 N^*，即系统(1)存在唯一的地方病平衡点 $E^*(S^*,E^*,I^*,R^*)$，其中 S^*,E^*,I^*,R^* 由(2)决定.

2 无病平衡点的全局稳定性

定理 1 当 $R_0\leqslant 1$ 时，无病平衡点 E_0 全局渐近稳定；当 $R_0>1$ 时，无病平衡点 E_0 不稳定，并且除 S 轴外，从 Γ 内充分靠近 E_0 点出发的解都远离 E_0.

证明 取 Liapunov 函数

$$V=\frac{\beta_1(N)\omega+\beta_2(N)\gamma+\beta_3(N)\varepsilon\gamma/d}{\delta\omega}E+\frac{\beta_2(N)+\varepsilon/d\beta_3(N)}{\omega}I+\frac{\beta_3(N)}{d}R.$$

它沿系统(1)解的导数为

$$\begin{aligned}V'|_{(1)}=&\frac{\beta_1(N)\omega+\beta_2(N)\gamma+\beta_3(N)\varepsilon\gamma/d}{\delta\omega}\cdot\\&(\beta_1(N)SE+\beta_2(N)SI+\beta_3(N)SR-\delta E)+\\&\frac{\beta_2(N)+\varepsilon/d\beta_3(N)}{\omega}(\gamma E-\omega I)+\\&\frac{\beta_3(N)}{d}(\varepsilon I-dR)=\\&(\beta_1(N)E+\beta_2(N)I+\beta_3(N)R)\cdot\\&\left(\frac{\beta_1(N)\omega+\beta_2(N)\gamma+\beta_3(N)\varepsilon\gamma/d}{\delta\omega}S-1\right)\leqslant\\&(\beta_1(N)E+\beta_2(N)I+\beta_3(N)R)\cdot\\&\left(\frac{\beta_1(N)\omega+\beta_2(N)\gamma+\beta_3(N)\varepsilon\gamma/d}{\delta\omega}N-1\right)=\\&(\beta_1(N)E+\beta_2(N)I+\beta_3(N)R)\cdot\\&\left(\frac{N\beta_1(N)\omega+N\beta_2(N)\gamma+N\beta_3(N)\varepsilon\gamma/d}{\delta\omega}-1\right)\leqslant\\&(\beta_1(N)E+\beta_2(N)I+\beta_3(N)R)\cdot\\&\left(\frac{\frac{A}{d}\beta_1(\frac{A}{d})\omega+\frac{A}{d}\beta_2(\frac{A}{d})\gamma+\frac{A}{d}\beta_3(\frac{A}{d})\frac{\varepsilon\gamma}{d}}{\delta\omega}-1\right)=\\&(\beta_1(N)E+\beta_2(N)I+\beta_3(N)R)(R_0-1).\end{aligned}$$

当 $R_0\leqslant 1$ 时，$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t\leqslant 0$ 且 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t=0$ 当且仅当 $E=I=R=0$或 $R_0=1$. 所以$\{(S,E,I,R)\in R_+^4\mid \mathrm{d}V/\mathrm{d}t=0\}$的最大不变集 $M=\{E_0\}$. 根据 LaSalle 不变集原理[9]可知，当 $R_0\leqslant 1$ 时，无病平衡点 E_0 全局渐近稳定；当 $R_0>1$ 时，则除 $E=I=R=0$ 外，当 S 充分靠近 A/d 时，有 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t>0$. 故除 $E=I=R=0$ 外，从 Γ 内充分靠近 E_0 点出发的解都远离 E_0. □

3 地方病平衡点的局部稳定性

定理 2 如果 $R_0>1$，则系统(1)的地方病平衡点 E^* 是局部渐近稳定的.

证明 系统(1)在 E^* 处的 Jacobian 矩阵为

$$J(E^*)=\begin{pmatrix}a_1-d & a_2 & a_3 & a_4\\ -a_1 & -a_2-\delta & -a_3 & -a_4\\ 0 & \gamma & -\omega & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon & -d\end{pmatrix},$$

该矩阵的特征方程为

$$\det(\lambda I-J(E^*))=0.$$

其中，I 为四阶单位矩阵，

$$S^*=\frac{\delta\omega}{\beta_1(N^*)\omega+\beta_2(N^*)\gamma+\beta_3(N^*)\varepsilon\gamma/d},$$

$$E^*=\frac{\omega}{\gamma}I^*,\ R^*=\frac{\varepsilon}{d}I^*,$$

$$a_1=-\beta_1(N^*)E^*-\beta_1'(N^*)S^*E^*-\beta_2(N^*)I^*-\beta_2'(N^*)S^*I^*-\beta_3(N^*)R^*-\beta_3'(N^*)S^*R^*,$$

$$a_2=-\beta_1(N^*)S^*-\beta_1'(N^*)S^*E^*-\beta_2'(N^*)S^*I^*-\beta_3'(N^*)S^*R^*,$$

$$a_3=-\beta_1'(N^*)S^*E^*-\beta_2(N^*)S^*-\beta_2'(N^*)S^*I^*-\beta_3'(N^*)S^*R^*,$$

$$a_4=-\beta_1'(N^*)S^*E^*-\beta_2'(N^*)S^*I^*-\beta_3(N^*)S^*-\beta_3'(N^*)S^*R^*.$$

通过计算得

$$(\lambda+d)(\lambda^3+b_1\lambda^2+b_2\lambda+b_3+\varepsilon\gamma a_4)=0.$$

式中，

$$b_1=\omega+d+\beta_1(N^*)E^*+\beta_2(N^*)I^*+\beta_3(N^*)R^*+\frac{\delta(\beta_2(N^*)\gamma+\beta_3(N^*)\varepsilon\gamma/d)}{\beta_1(N^*)\omega+\beta_2(N^*)\gamma+\beta_3(N^*)\varepsilon\gamma/d}>0,$$

$$\begin{aligned}b_2={}&d\omega-(\omega+d+\gamma)(\beta_1'(N^*)S^*E^*+\beta_2'(N^*)S^*I^*+\beta_3'(N^*)S^*R^*)+(\delta+\omega)\cdot\\&(\beta_1(N^*)E^*+\beta_1'(N^*)S^*E^*+\beta_1(N^*)E^*+\beta_2'(N^*)S^*I^*+\beta_3(N^*)R^*+\beta_3'(N^*)S^*R^*)+\\&\frac{d\delta(\beta_2(N^*)\gamma+\beta_3(N^*)\varepsilon\gamma/d)}{\beta_1(N^*)\omega+\beta_2(N^*)\gamma+\beta_3(N^*)\varepsilon\gamma/d}>0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_3={}&d\omega\delta+\omega\delta(\beta_1(N^*)E^*+\beta_1'(N^*)S^*E^*+\beta_2(N^*)I^*+\beta_2'(N^*)S^*I^*+\beta_3(N^*)R^*+\\&\beta_3'(N^*)S^*R^*)-(\omega+\gamma)d(\beta_1'(N^*)S^*E^*+\beta_2'(N^*)S^*I^*+\beta_3'(N^*)S^*R^*)>0.\end{aligned}$$

通过分析得到 $b_1b_2-(b_3+\varepsilon\gamma a_4)>0$，根据 Hurwitz 判据可知，系统(1)的地方病平衡点 E^* 是局部渐近稳定的. □

4 地方病平衡点的全局稳定性

以下结论[10]将用于地方病平衡点 E^* 全局渐近稳定性证明.

考虑以下系统

$$\dot{x}=f(t,x)\tag{3}$$

和

$$\dot{y}=g(y)\tag{4}$$

其中，f 和 g 都是连续函数且满足局部 Lipschitz 条件，对任意 $t>0$，其解都存在. 若 $t\to\infty$时，对任意 $x\in R^n$，都有 $f(t,x)\to g(x)$，则称系统(4)为渐近自治系统(3)的极限系统.

引理 1 设 P 是系统(4)的局部渐近稳定平衡点，ω 是系统(3)的有界解 $x(t)$的一个 ω 极限集. 如果 $y_0\in\omega$ 且满足初始条件 $y(0)=y_0$ 的解 $y(t)\to P(t\to\infty)$，则 $\omega=\{P\}$，即 $x(t)\to P(t\to\infty)$.

推论 1 如果系统(3)的解是有界的且其极限系统(4)的平衡点 P 是全局渐近稳定的，则系统(3)的任意解 $x(t)$满足 $x(t)\to P(t\to\infty)$.

令 $\tau=dt$，系统(1)可以改成如下等价形式

$$\left.\begin{aligned}\frac{dS}{d\tau}&=A/d-\beta_{10}(N)SE-\beta_{20}(N)SI-\beta_{30}(N)SR-S,\\\frac{dE}{d\tau}&=\beta_{10}(N)SE+\beta_{20}(N)SI+\beta_{30}(N)SR-\delta E,\\\frac{dI}{d\tau}&=\gamma_0E-\omega I,\\\frac{dR}{d\tau}&=\varepsilon_0I-R\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

式中，

$$\beta_{10}=\beta_1(N)/d,\ \beta_{20}=\beta_2(N)/d,$$
$$\beta_{30}=\beta_3(N)/d,\ \delta=1+\gamma_0+\alpha_{10}+k_{10},$$
$$\omega=1+\varepsilon_0+\alpha_{20}+k_{20}\gamma_0=\gamma/d,$$
$$\varepsilon_0=\varepsilon/d,\ \alpha_{10}=\alpha_1/d,\ \alpha_{20}=\alpha_2/d,$$
$$k_{10}=k_1/d,k_{20}=k_2/d.$$

总人口方程为

$$\frac{dN}{d\tau}=A/d-N-(\alpha_{10}+k_{10})E-(\alpha_{20}+k_{20})I.$$

由 $N=S+E+I+R$，系统(5)的等价系统为

$$\begin{aligned}\frac{dE}{d\tau}&=(\beta_{10}(N)E+\beta_{20}(N)I+\beta_{30}(N)R)(N-E-I-R)-\delta E,\\\frac{dI}{d\tau}&=\gamma_0E-\omega I,\\\frac{dR}{d\tau}&=\varepsilon_0I-R,\\\frac{dN}{d\tau}&=A/d-N-(\alpha_{10}+k_{10})E-(\alpha_{20}+k_{20})I\end{aligned}\tag{6}$$

则 $T=\{(E,I,R,N)\in R_+^4\mid 0\leqslant E+I+R\leqslant N\leqslant A/d\}$为系统(6)的一个正向最大不变集.

对系统(6)，当 $\alpha_{10}=\alpha_{20}=k_{10}=k_{20}=0$ 时，来证明地方病平衡点 E^* 的全局渐近稳定性. 由 $\frac{dN}{d\tau}=A/d-N$可知，当 $\tau\to\infty$时，$N\to A/d$. 得到系统(6)的极限系统为

$$\left.\begin{aligned}\frac{dE}{d\tau}&=(\beta_{10}(A/d)E+\beta_{20}(A/d)I+\beta_{30}(A/d)R)\cdot(A/d-E-I-R)-\delta E,\\\frac{dI}{d\tau}&=\gamma_0E-\omega I,\\\frac{dR}{d\tau}&=\varepsilon_0I-R\end{aligned}\right\}$$

令 $x=A/d-E-I-R$，$y=E$，$z=I$，则上述极限系统等价于以下系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=A/d-x-(\beta_{30}(A/d)A/d+(\beta_{10}(A/d)-\beta_{30}(A/d))y+(\beta_{20}(A/d)-\beta_{30}(A/d))z-\beta_{30}(A/d)x)x,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=(\beta_{30}(A/d)A/d+(\beta_{10}(A/d)-\beta_{30}(A/d))y+(\beta_{20}(A/d)-\beta_{30}(A/d))z-\beta_{30}(A/d)x)x-\delta y,$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}=\gamma_0 y-\omega z \tag{7}$$

定理 3[11-12] 考虑以下系统

$$\dot{x}=f(x),f\in R^n\ \text{是}\ C^1\ \text{的函数},\ x\in T\subset R^n \tag{8}$$

其中,T 为一开集. 若系统满足以下条件:①在 T 内存在一个紧吸引子集 $K\subset T$;②在 T 内存在唯一的平衡点 P 且是局部渐近稳定的;③满足 Poincaré-Bendixson 性质;④每一个周期轨道是轨道渐近稳定的. 则 P 在 T 内是全局渐近稳定的.

定理 4[14] 系统(8)存在周期轨道 $P=\{P(t):0\leqslant t\leqslant\tau\}$且线性系统 $z'(t)=\frac{\partial f^{[2]}}{\partial t}(P(t))z(t)$是渐近稳定的,其中$\frac{\partial f^{[2]}}{\partial t}$是 f 的 Jacobian 矩阵$\frac{\partial f}{\partial t}$的第二加复合矩阵,系统 $z'(t)=\frac{\partial f^{[2]}}{\partial t}(P(t))z(t)$称为系统(8)关于 $P(t)$的二阶复合系统.

引理 2 系统(7)的任意周期解,若存在,则是轨道渐近稳定的.

证明 设$(x(t),y(t),z(t))$是系统(7)的具有最小正周期 τ 的周期解且满足$(x(0),y(0),z(0))$在 T 内部,周期轨道 $P=\{P(t):0\leqslant t\leqslant\tau\}$. 从而得到微分方程 $y'=J(P)y$ 在周期解内的二阶复合系统 $x'=J^{[2]}(P)x$ 是如下周期线性系统

$$\left.\begin{aligned}X'&=a_{11}X+(\beta_{20}(A/d)-\beta_{30}(A/d))x(Y+Z),\\Y'&=\gamma_0X+a_{22}Y-(\beta_{10}(A/d)-\beta_{30}(A/d))xZ,\\Z'&=a_{32}Y-(\delta+\omega-(\beta_{10}(A/d)-\beta_{30}(A/d))x)Z\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中,

$$\begin{aligned}a_{11}&=-1+\beta_{30}(A/d)x-(\beta_{30}(A/d)A/d+(\beta_{10}(A/d)-\beta_{30}(A/d))y+\\&\quad(\beta_{20}(A/d)-\beta_{30}(A/d))z-\beta_{30}(A/d)x)-\delta,\\a_{22}&=-(1+\omega+(\beta_{10}(A/d)-\beta_{30}(A/d))x-\beta_{30}(A/d)x+\beta_{30}(A/d)A/d+\\&\quad(\beta_{10}(A/d)-\beta_{30}(A/d))y)+((\beta_{20}(A/d)-\beta_{30}(A/d))z-\beta_{30}(A/d)x),\\a_{32}&=-\beta_{30}(A/d)x+\beta_{30}(A/d)A/d+(\beta_{10}(A/d)-\beta_{30}(A/d))y+\\&\quad(\beta_{20}(A/d)-\beta_{30}(A/d))z-\beta_{30}(A/d)x,\end{aligned}$$

$$J(P)=\begin{pmatrix}a_{11}+\delta & -(\beta_{10}(A/d)-\beta_{30}(A/d))x & -(\beta_{20}(A/d)-\beta_{30}(A/d))x\\ a_{32} & (\beta_{10}(A/d)-\beta_{30}(A/d))x-\delta & (\beta_{20}(A/d)-\beta_{30}(A/d))x\\ 0 & \delta & -\omega\end{pmatrix},$$

$$J^{[2]}(P)=\begin{pmatrix}a_{11} & (\beta_{20}(A/d)-\beta_{30}(A/d))x & (\beta_{20}(A/d)-\beta_{30}(A/d))x\\ \gamma_0 & a_{22} & -(\beta_{10}(A/d)-\beta_{30}(A/d))x\\ 0 & a_{32} & -\delta-\omega+(\beta_{10}(A/d)-\beta_{30}(A/d))x\end{pmatrix}.$$

设$(X(t),Y(t),Z(t))$是系统(9)的一个解. 考虑 Liapunov 函数

$$V(X,Y,Z,x,y,z)=\sup\{|X|,y/z(|Y|+|Z|)\}$$

由定理 3 的条件(1)知,存在常数 $\eta>0$ 使得

$$V(X,Y,Z,x,y,z)\geqslant\eta|(X,Y,Z)|,\quad\forall(X,Y,Z)\in R^3,(x,y,z)\in P.$$

通过计算 V 的右导数,得到以下微分不等式

$$D_+|X(t)|\leqslant a_{11}|X(t)|+(\beta_{20}(A/d)-\beta_{30}(A/d))x(|Y(t)|+|Z(t)|) \tag{10}$$

$$D_+|Y(t)|\leqslant\gamma_0|X(t)|+a_{22}|Y(t)|-(\beta_{10}(A/d)-\beta_{30}(A/d))x|Z(t)| \tag{11}$$

$$D_+|Z(t)|\leqslant a_{32}|Y(t)|-(\delta+\omega-((\beta_{10}(A/d)-\beta_{30}(A/d))x))|Z(t)| \tag{12}$$

由式(11)和式(12)得

$$D_+\frac{y}{z}(|Y(t)|+|Z(t)|)=\frac{y\gamma_0}{z}|X(t)|+\left(\frac{y'}{y}-\frac{z'}{z}-\omega-1\right)\frac{y}{z}(|Y(t)|+|Z(t)|) \tag{13}$$

由式(10)～(13)得到

$$D_+ V(t) \leqslant \sup\{g_1, g_2\} V(t) \tag{14}$$

式中，

$$g_1 = -1-\delta+\beta_{10}(A/d)x-\beta_{30}(A/d)A/d- (\beta_{10}(A/d)-\beta_{30}(A/d))y- (\beta_{20}(A/d)-\beta_{30}(A/d))z+\beta_{30}(A/d)x+ \frac{(\beta_{20}(A/d)-\beta_{30}(A/d))xz}{y} \tag{15}$$

$$g_2 = \frac{y\gamma_0}{z}+\left(\frac{y'}{y}-\frac{z'}{z}-\omega-1\right) \tag{16}$$

把系统(7)的后两个方程改为

$$\frac{(\beta_{20}(A/d)-\beta_{30}(A/d))xz}{y} = \frac{y'}{y}+\delta-\beta_{30}(A/d)A/d\,\frac{x}{y}- (\beta_{10}(A/d)-\beta_{30}(A/d))x+\beta_{30}(A/d)x^2/y \tag{17}$$

$$\frac{y\gamma_0}{z} = \omega+\frac{z'}{z} \tag{18}$$

把式(17)代入式(15)和式(18)代入式(16)得

$$g_1 = \frac{y'}{y}-1-\beta_{30}(A/d)\left(\frac{A}{d}-x-y-z\right)- \beta_{30}(A/d)x\left(\frac{A}{d}-x-y\right)-\beta_{10}(A/d)y-\beta_{20}(A/d)z \tag{19}$$

$$g_2 = \frac{y'}{y}-1 \tag{20}$$

所以

$$\sup\{g_1(t), g_2(t)\} \leqslant y'/y-1$$

且

$$\int_0^\tau \sup\{g_1(t), g_2(t)\} \leqslant \ln y(t)\,|_0^\tau-\tau=-\tau.$$

从上式及式(14)，可得到$\lim\limits_{t\to\infty} V(t)=0$，故由

$$V(X,Y,Z,x,y,z) \geqslant \eta\,|(X,Y,Z)|$$

可知，当$t\to\infty$时，$(X(t),Y(t),Z(t))\to 0$，即二阶复合系统(9)是渐近稳定的，且根据定理 3 知系统(7)周期解$(x(t),y(t),z(t))$是轨道渐近稳定的. 因此，根据推论 1 可知$(E(t),I(t),R(t))$是轨道渐近稳定的，这样就验证了定理 3 的条件④满足. □

引理 3 当$R_0>1$时，系统(7)是一致持续的.

证明 若定理 3 的条件都成立时，则其结论显然成立.

首先，根据定理 3 的条件①可知，系统(7)是一致持续的. 事实上，设$G=\{P_0\}$，由定理 3 可知，当$R_0>1$时，稳定集G^s仅包含在S轴上，因此它是Γ的边界，故稳定集G^s在T中是孤立的. 则当$R_0>1$时，系统(7)满足定理 2[14] 的条件，即①最大不变紧集G在T的边界是孤立的；②G的稳定集$G^s\subseteq\partial T$(T的边界). 因此，若$R_0>1$，则系统(7)在内是一致持续的. □

注 系统的一致持续性等价于定理 3 的条件③.

引理 4 当$R_0>1$且$\alpha_{10}=\alpha_{20}=k_{10}=k_{20}=0$时，系统(5)是四维竞争系统.

证明 记T的内部为

$$\overset{0}{T}=\{(E,I,R,N)\in R_+^4 \mid 0<E+I+R\leqslant N<A/d\}.$$

令$x_1=S, x_2=E, x_3=I, x_4=R$. 可以把系统(5)改成如下等价形式

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= A/d-\beta_{10}(N)S(A/d-x_1-x_3-x_4)- \beta_{20}(N)S(A/d-x_1-x_2-x_4)- \beta_{30}(N)S(A/d-x_1-x_2-x_3)-x_1,\\ x_2' &= \beta_{10}(N)Sx_2+\beta_{20}(N)Sx_3+\beta_{30}(N)Sx_4-\delta x_2,\\ x_3' &= \gamma_0 x_2-\omega x_3,\\ x_4' &= \varepsilon_0 x_3-x_4.\end{aligned}\right\}$$

而且上述系统还可以写成如下形式

$$X'=(A(t)-I)X+C(t).$$

其中，$X=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in R^4$，$I$为 4 阶单位矩阵，$C(t)$是一个向量函数，在这里无需要知道其具体形式，且矩阵

$$A(t)=\begin{pmatrix} (\beta_{10}(N)+\beta_{20}(N)+\beta_{30}(N))S & (\beta_{20}(N)+\beta_{30}(N))S & (\beta_{10}(N)+\beta_{30}(N))S & (\beta_{10}(N)+\beta_{20}(N))S\\ 0 & \beta_{10}(N)S-\gamma_0 & \beta_{20}(N)S & \beta_{30}(N)S\\ 0 & \gamma_0 & -\varepsilon_0 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_0 & 0 \end{pmatrix},$$

该矩阵的非对角线元素非负，按照文献[15-16]类似的方法可以断定上述系统是拟单调的，故系统(5)关于定义在$K=\{(S,E,I,R)\in R^4 \mid S\geqslant 0, E\geqslant 0, I\geqslant 0, R\geqslant 0\}$内的偏序是竞争的. 又$\overset{0}{T}$为凸集，系统

(5)在 $\overset{0}{T}$ 内满足 Poincaré-Bendixson 性质. □

定理 5 如果 $R_0>1$,则系统(1)的地方病平衡点 E^* 在 $\alpha_1=\alpha_2=k_1=k_2=0$ 时是全局渐近稳定的.

5 数值模拟

选取 $\beta_1(N)=\beta_1/(1+N)$,$\beta_2(N)=\beta_2/(3+N)$,$\beta_3(N)=\beta_3/(2+N)$($\beta_i\geqslant 0(i=1,2,3)$)和 $A=0.6$,$d=0.05$,$\varepsilon=0.07$,$\gamma=0.15$,$\alpha_1=0.08$,$\alpha_2=0.1$,$k_1=0.04$和 $k_2=0.08$. 取 5 组初值(1,2.5,3,4.6),(7,1,0.5,2),(5,0.7,3,1.5),(2.8,2.6,2.1,3.3),(4.2,1.5,2,2.1).

当 $\beta_1=0.08$,$\beta_2=0.15$,$\beta_3=0.03$ 时,$R_0=0.475$,如图 2 所示,$E_0=(12,0,0,0)$在
$\Gamma=\{(S,E,I,R)\in R_+^4 \mid 0\leqslant S+E+I+R\leqslant 12\}$
内全局渐近稳定.

当 $\beta_1=0.1$,$\beta_2=0.2$,$\beta_3=0.05$ 时,$R_0=1.836$. 当 $\alpha_1=\alpha_2=k_1=k_2=0$ 时,如图 3 所示,$E^*=(6.534,1.367,1.708,2.389)$在
$\Gamma=\{(S,E,I,R)\in R_+^4 \mid 0\leqslant S+E+I+R\leqslant 12\}$
内全局渐近稳定.

6 结论

本文建立和研究了一类具有不同一般形式接触率 $\beta_1(N)$,$\beta_2(N)$和 $\beta_3(N)$且潜伏者和移出者均具有传染力的 SEIR 传染病模型,得到了决定疾病绝灭与否的阈值——基本再生数 R_0. 运用传统的 Hurwitz 判据及 Liapunov-LaSalle 不变集原理通过分析得到如下结果:当 $R_0<1$ 时,仅存在无病平衡点 E_0 且是全局渐近稳定的,疾病灭绝;当 $R_0>1$ 时,存在唯一的地方病平衡点 E^* 和无病平衡点 E_0,其中无病平衡点 E_0 不稳定而地方病平衡点 E^* 是局部渐近稳定的,而当 $\alpha_1=\alpha_2=k_1=k_2=0$ 时,证明了地方病平衡点 E^* 的全局渐近稳定性,疾病持续. 基本再生数越小越有利于传染病的控制和消除. 若疾病在潜伏者和移出者的传染力越小,即本文模型中的 $\beta_1(A/d)$和 $\beta_3(A/d)$越小,则基本再生数越小,越有利于疾病的消除. 因此,对于潜伏者和移出者均

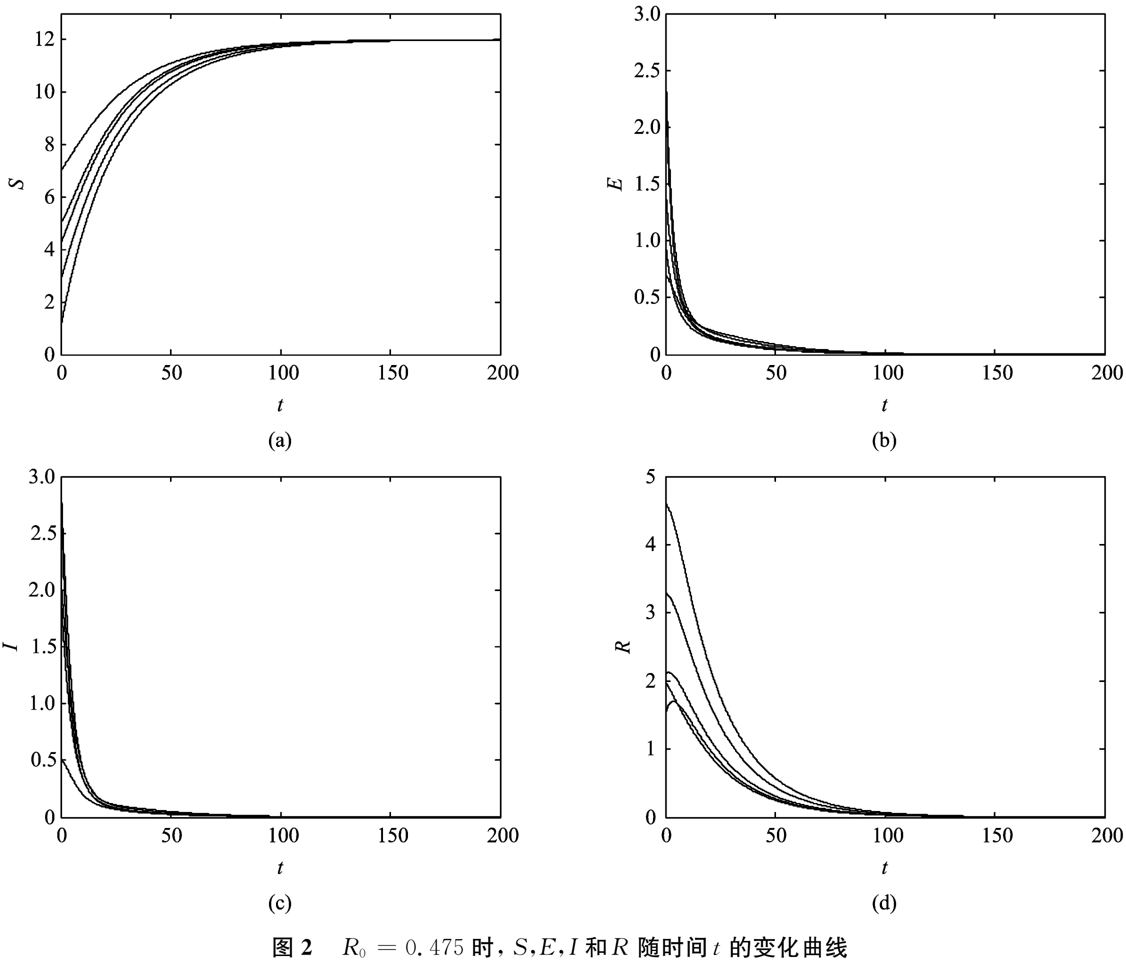

图 2 $R_0=0.475$ 时,S,E,I 和 R 随时间 t 的变化曲线

Fig. 2 Variational curves of S, E, I and R with t when $R_0=0.475$

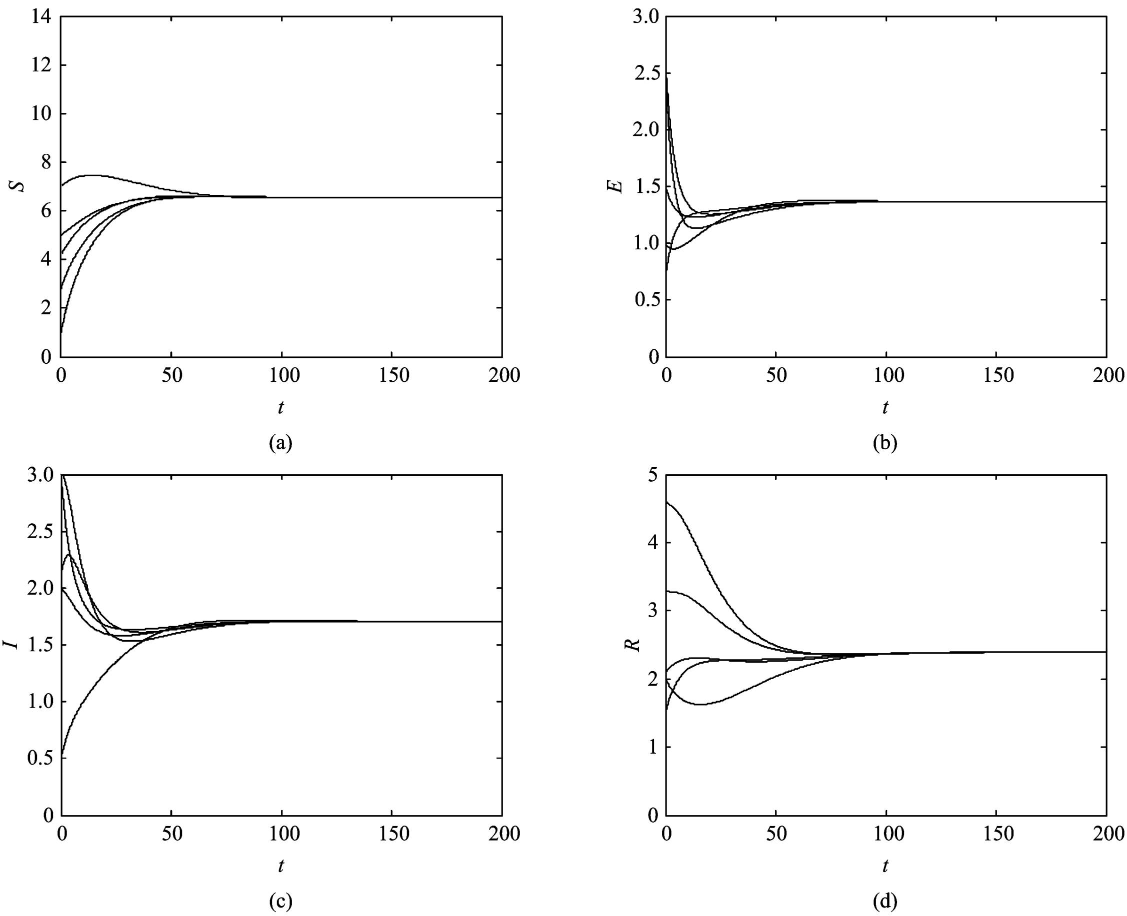

图 3 $R_0 = 1.836$ 时，S, E, I 和 R 随时间 t 的变化曲线

Fig. 3 Variational curves of S, E, I and R with t when $R_0 = 1.836$

具有传染力的疾病，不仅要控制染病期的病人，也要控制潜伏期和恢复期的病人，从而更有效地控制和消除疾病的蔓延. 本文通过对具有一般形式接触率且潜伏者和移出者均具有传染力的 SEIR 传染病模型的稳定性研究，为该类传染病的防治决策提供了理论基础和数量依据. 本文在传染病模型中考虑了一般形式的接触率，对其他具体形式的发生率如标准或非线性等问题有待进一步研究.

参考文献(References)

[1] 刘丽君，魏来. 丙型肝炎病毒的流行病学[J]. 传染病信息，2007，20(5)：261-264.

[2] 方春红，梁虹，刘美琳. 1 850 例尖锐湿疣形态与分布特点的临床分析[J]. 中国麻风皮肤病杂志，2002，18(2)：138-139.

[3] Fan M, Li M Y, Wang K. Global stability of an SEIS epidemic model with recruitment and a varying total population size[J]. Mathematical Biosciences, 2001, 170(2): 199-208.

[4] Xu Wenxiong, Zhang Tailei. Global stability for the model with quarantine in epidemiology[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2005, 39(2): 210-213.
徐文雄，张太雷. 具有隔离仓室流行病传播数学模型的全局稳定性[J]. 西安交通大学学报，2005，39(2)：210-213.

[5] Liu W M, van den Driessche P. Epidemiological models with varying total population size and dose-dependent latent period[J]. Mathematical Biosciences, 1995, 128(1-2): 57-69.

[6] Li M Y, Graef J R, Wang L C, et al. Global dynamics of an SEIR model with varying total population size[J]. Mathematics Biosciences, 1999, 160(2): 191-213.

[7] Xu Wenxiong, Zhang Tailei, Xu Zongben. Global stability for a non-linear high dimensional autonomous differential system SEIQR model mi epidemiology[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2007, 24(1): 79-86.
徐文雄，张太雷，徐宗本. 非线性高维自治微分系统 SEIQR 流行病模型全局稳定性[J]. 工程数学学报，2007，24(1)：79-86.

(下转第 783 页)