第45卷第6期 中国科学技术大学学报 Vol. 45, No. 6
2015年6月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Jun. 2015

文章编号:0253-2778(2015)06-0460-05

矩条件下NA随机变量的强极限定理

夏凤熙,邓　新,郑璐璐,王学军

(安徽大学数学科学学院,安徽合肥 230601)

摘要: 令$\{X,X_n,n\geqslant 1\}$为同分布的NA随机变量序列,$\{a_n,n\geqslant 1\}$是一正常数序列且$a_n/n\uparrow$. 讨论了$\{X,X_n,n\geqslant 1\}$的强大数定律和完全收敛性,得到了与条件$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X|>a_n)<\infty$等价的结果. 另外,该结果推广了关于两两独立同分布序列的相应结果.

关键词: 强大数定律;NA随机变量;完全收敛性

中图分类号: O211.4　**文献标识码:** A　doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2015.06.005

2010 Mathematics Subject Classification: 60F15

引用格式: Xia Fengxi, Deng Xin, Zheng Lulu, et al. Strong limit theorems for negatively associated random variables with general moment conditions[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2015,45(6):460-464.

夏凤熙,邓新,郑璐璐,等. 矩条件下NA随机变量的强极限定理[J]. 中国科学技术大学学报,2015,45(6):460-464.

Strong limit theorems for negatively associated random variables with general moment conditions

XIA Fengxi, DENG Xin, ZHENG Lulu, WANG Xuejun

(*School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei* 230601, *China*)

Abstract: Let $\{X, X_n, n\geqslant 1\}$ be a sequence of negatively associated random variables with identical distribution, $\{a_n, n\geqslant 1\}$ be a sequence of positive constants with $a_n/n\uparrow$. The strong law of large numbers and complete convergence for $\{X, X_n, n\geqslant 1\}$ were obtained. These results are equivalent to the general moment condition $\sum_{n=1}^{\infty}P(|X|>a_n)<\infty$. On the other hand, the results extend the corresponding ones for pairwise independent random variables with identical distribution.

Key words: strong law of large numbers; negatively associated random variables; complete convergence

0 引言

令$\{X,X_n,n\geqslant 1\}$为独立同分布的随机变量序列,$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$, $n\geqslant 1$, $0<p<2$. 易见(参考文献[1]),下列条件等价:

收稿日期: 2014-06-04;**修回日期:** 2014-09-22

基金项目: 国家自然科学基金项目(11201001),安徽省自然科学基金项目(1508085J06),安徽大学研究性教学示范课程(xjyjkc1407),安徽大学研究生创新项目资助.

作者简介: 夏凤熙,女,1989年生,硕士. 研究方向:概率极限理论. E-mail: 1046549063@qq.com

通讯作者: 王学军,博士/副教授. E-mail: wxjahdx2000@126.com

$$E|X|^p<\infty\text{，其中当 } p\geqslant 1 \text{ 时 } EX=0 \quad (1)$$

$$S_n/n^{1/p}\to 0,\text{a. s.} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P(|S_n|>n^{1/p}\epsilon)<\infty,\ \epsilon>0 \quad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|>n^{1/p}\epsilon)<\infty,\ \epsilon>0 \quad (4)$$

鉴于此，本文主要讨论在 NA(negatively associated)随机变量序列下上述 4 个等价条件是否成立. 首先，我们给出 NA 随机变量序列的定义：

定义 0.1　称随机变量 $X_1, X_2,\cdots, X_n$，$n\geqslant 2$，是 NA 的,若对$\{1,2,\cdots,n\}$的任意 2 个非空不交子集 A_1，A_2，均有

$$\mathrm{Cov}(f_1(X_i,i\in A),\ f_2(X_j,j\in B))\leqslant 0 \quad (5)$$

式中，f_i，$i=1,2$,是使上式有意义且对各变元不降的函数.

称随机变量序列$\{X_n,n\geqslant 1\}$是 NA 的，如果对任意的 $n\geqslant 2$，$X_1,X_2,\cdots$，X_n 是 NA 的.

这一概念是由 Alam 等[2]首先提出的，之后 Joag-Dev 等[3]对 NA 变量的极限性质进行了仔细的研究,由于在可靠性理论、渗透理论和多元统计分析理论中都有广泛运用,NA 序列引起了许多学者的广泛兴趣. 近年来,有关 NA 序列性质的研究已取得了不少成果. 例如,Joag-Dev 等[3]指出许多多元分布都具有 NA 序列的性质,例如多元超几何分布、Dirichlet 分布等等,Cai[4]研究了 NA 随机变量序列的强大数定律,Ling[5]给出了 NA 随机变量序列的 Bahadur 表示,Shao[6]比较了 NA 随机变量序列和独立随机变量序列的矩不等式的异同点,Liang 等[7]给出了 NA 随机变量序列加权和的强收敛性,Wu 等[8-9]建立了 NA 随机变量序列的重对数律,文献[10-13]给出了矩条件下随机变量序列收敛性的一些结论,Shen 等[14]建立了一类随机变量的概率不等式并给出了相关应用,Yang[15]中研究了关于 NA 随机变量加权回归估计的渐近正态性,Matula[16]获得了 NA 随机变量和的几乎处处收敛性的结论. 有关 NA 序列的更多结果可参考文献[17].

本文中,C 为与 n 无关的正常数，在不同的地方可代表不同的值. 令$\{a_n,n\geqslant 1\}$是正常数序列且 $a_n/n\uparrow$，$a_0=0$. $\{X,X_n,n\geqslant 1\}$为同分布的 NA 随机变量序列.

1　引理

为了本文论证的需要，先给出几个重要的引理.

引理 1.1[18]　设$\{a_n,n\geqslant 1\}$为一正常数序列且 $a_n/n\uparrow$,则

(ⅰ) $\{a_n,n\geqslant 1\}$ 为严格单调递增的序列；

(ⅱ) $\sum_{n=1}^{\infty}P(X>a_n)<\infty\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}P(X>2a_n)<\infty$；

(ⅲ) $\sum_{n=1}^{\infty}P(X>a_n)<\infty\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}P(X>\alpha a_n)<\infty$，$\forall\alpha>0$.

引理 1.2[18]　设$\{a_n,n\geqslant 1\}$为一正常数序列且 $a_n/n\uparrow\infty$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}P(X>a_n)<\infty$，则

$$\frac{nE|X|I(|X|\leqslant a_n)}{a_n}\to 0,\ n\to\infty.$$

引理 1.3[19]　设$\{X_n,n\geqslant 1\}$为 NA 随机变量序列. 则对任意的 $\epsilon>0$，

$$X_n\to 0\ \text{a. s.}\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|>\epsilon)<\infty.$$

引理 1.4　设$\{a_n,n\geqslant 1\}$为一正常数序列且 $a_n/n\uparrow$,$\{X,X_n,n\geqslant 1\}$为同分布的 NA 随机变量序列,则

$$X_n/a_n\to 0\ \text{a. s.}\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}P(|X|>a_n)<\infty \quad (6)$$

证明　由于$\{a_n,n\geqslant 1\}$为一正常数序列且$\{X_n,n\geqslant 1\}$为 NA 随机变量序列,故$\{X_n/a_n,n\geqslant 1\}$仍为 NA 随机变量序列. 从而由引理 1.3 知,对任意的$\epsilon>0$，$X_n/a_n\to 0$ a. s. $\Leftrightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n/a_n|>\epsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}P(|X|>\epsilon a_n)<\infty \quad (7)$$

又根据引理 1.1 得，

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X|>\epsilon a_n)<\infty\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}P(|X|>a_n)<\infty \quad (8)$$

结合式(7)和式(8)，即可得到式(6). 故引理得证. □

2　主要结果及其证明

本节给出本文的主要结果. 首先我们给出一个关于同分布的 NA 随机变量的完全收敛性的结论.

定理 2.1　设$\{a_n,n\geqslant 1\}$为一正常数序列且 $a_n/n\uparrow$，$\{X,X_n,n\geqslant 1\}$为同分布的 NA 随机变量序列. 若$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X|>a_n)<\infty$，则

$$I \doteq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P(|\sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i I(|X_i| \leqslant a_n))| > a_n \epsilon) < \infty,\ \forall \epsilon > 0 \tag{9}$$

证明 注意到 $a_n/n\uparrow$，由此可得

$$\sum_{n=i}^{\infty} \frac{1}{a_n{}^2} \leqslant \sum_{n=i}^{\infty} \frac{i^2}{a_i^2 n^2} \leqslant \frac{i^2}{a_i^2} \sum_{n=i}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{i^2}{a_i^2} \cdot \frac{2}{i} = \frac{2i}{a_i^2} \tag{10}$$

令

$$Y_i = -a_n I(X_i < -a_n) + X_i I(|X_i| \leqslant a_n) + a_n I(X_i > a_n),\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ n \geqslant 1.$$

易得，

$$\begin{aligned} I \leqslant & \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| > a_n) + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P(|\sum_{i=1}^{n}(Y_i - EY_i + EY_i - EX_i I(|X_i| \leqslant a_n))| > a_n\epsilon) \leqslant \\ & \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| > a_n) + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P\Big(|\sum_{i=1}^{n}(Y_i - EY_i)| > \frac{a_n\epsilon}{2}\Big) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P\Big(|\sum_{i=1}^{n}(EY_i - EX_i I(|X_i| \leqslant a_n))| > \frac{a_n\epsilon}{2}\Big) \doteq \\ & I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

由假设条件易得 $I_1<\infty$，接下来只需证明 $I_2<\infty$和 $I_3<\infty$即可. 由 Markov 不等式，

$$\begin{aligned} I_2 \leqslant & C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} a_n^{-2} (\sum_{i=1}^{n} EY_i^2) \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-2} EY_1^2 = \\ & C\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-2} EX^2 I(|X| \leqslant a_n) + C\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| > a_n) \doteq \\ & CI_{21} + CI_{22}. \end{aligned}$$

由假设条件易得 $I_{22}<\infty$，因此只需证明 $I_{21}<\infty$. 根据式(10)，可得

$$\begin{aligned} I_{21} = & \sum_{i=1}^{\infty} E|X|^2 I(a_{i-1} < |X| \leqslant a_i) \sum_{n=i}^{\infty} a_n^{-2} \leqslant \\ & 2\sum_{i=1}^{\infty} E|X|^2 I(a_{i-1} < |X| \leqslant a_i) i a_i^{-2} \leqslant \\ & 2\sum_{i=1}^{\infty} (\sum_{j=1}^{i} P(a_{i-1} < |X| \leqslant a_i)) = \\ & 2\sum_{j=0}^{\infty} P(|X| > a_j) < \infty \end{aligned} \tag{11}$$

因此 $I_2<\infty$. 最后，证明 $I_3<\infty$. 注意到，

$$\begin{aligned} I_3 \leqslant & \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P\Big(\sum_{i=1}^{n} a_n P(|X_i| > a_n) > \frac{a_n\epsilon}{2}\Big) = \\ & \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P\Big(nP(|X| > a_n) > \frac{\epsilon}{2}\Big). \end{aligned}$$

接下来只需证明 $nP(|X|>a_n)\to 0$ 即可. 事实上，根据 $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X|>a_n)<\infty$，$0\leqslant P(|X|>a_n)\downarrow$ 得，$\lim\limits_{n\to\infty} nP(|X|>a_n)=0$. 从而 $I_3<\infty$. 得证. □

注 2.1 若定理 2.1 的条件 $a_n/n\uparrow$ 由条件 $a_n/n\uparrow\infty$替换，则易得如下的结果：若

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| > a_n) < \infty,$$

则

$$J \doteq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| > a_n\epsilon) < \infty,\ \forall \epsilon > 0 \tag{12}$$

证明过程与定理 2.1 的证明类似，故省略.

下面我们给出关于同分布 NA 随机变量序列的强大数定律的一些结果.

定理 2.2 令$\{a_n, n\geqslant 1\}$ 为一正常数序列且 $a_n/n\uparrow$，$\{X, X_n, n\geqslant 1\}$为同分布的 NA 随机变量序列，则下列命题等价：

(ⅰ) $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| > a_n) < \infty$;

(ⅱ) $\sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i I(|X_i| \leqslant a_i))/a_n \to 0$ a. s..

证明 首先证明(ⅰ)⇒(ⅱ).

令

$$\begin{aligned} Y_n = & -a_n I(X_n < -a_n) + \\ & X_n I(|X_n| \leqslant a_n) + a_n I(X_n > a_n),\ n \geqslant 1. \end{aligned}$$

利用式(11)，

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-2} \mathrm{Var}(Y_n) \leqslant & \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-2} E|X_n|^2 I(|X_n| \leqslant a_n) + \\ & \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| > a_n) \leqslant C\sum_{n=0}^{\infty} P(|X| > a_n) < \infty, \end{aligned}$$

其中，C 为一正常数. 根据 Kolmogorov 收敛定理[16]，有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}(Y_n-EY_n)$ a. s. 收敛. 再由 Kronecker 引理，知

$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-EY_i)\to 0\quad \text{a. s.}\tag{13}$$

又因为

$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-EY_i)=$$
$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}(X_iI(|X_i|\leqslant a_i)-EX_iI(|X_i|\leqslant a_i))+$$
$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}(a_iI(X_i>a_i)-a_iI(X_i<-a_i)-$$
$$a_iP(X_i>a_i)+a_iP(X_i<-a_i))\tag{14}$$

根据 B-C 引理和(i)可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X|>a_n)<\infty\Leftrightarrow$$
$$P(|X_i|\leqslant a_i,\ i\text{ 充分大})=1\tag{15}$$

从而，

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}(a_nI(X_n>a_n)-a_nI(X_n<-a_n)-\right.$$
$$a_nP(X_n>a_n)+a_nP(X_n<-a_n))|\leqslant$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}I(|X_n|>a_n)+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|>a_n)<\infty\quad \text{a. s.}.$$

故有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}(a_nI(X_n>a_n)-a_nI(X_n<-a_n)-$$
$$a_nP(X_n>a_n)+a_nP(X_n<-a_n))\quad \text{a. s. 收敛.}$$

根据 Kronecker 引理，

$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}(a_iI(X_i>a_i)-a_iI(X_i<-a_i)-$$
$$a_iP(X_i>a_i)+a_iP(X_i<-a_i))\to 0\quad \text{a. s.}\tag{16}$$

所以，结合式(13),(14)和(16)可得

$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}(X_iI(|X_i|\leqslant a_i)-EX_iI(|X_i|\leqslant a_i))\to 0\quad \text{a. s.}\tag{17}$$

根据式(15)可得

$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}X_iI(|X_i|>a_i)\to 0\quad \text{a. s.}\tag{18}$$

所以结合式(17)和(18)可得(ii) 成立.

接下来证明(ii)⇒(i). 假设

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-EX_iI(|X_i|\leqslant a_i)}{a_n}\to 0\quad \text{a. s.},$$

则

$$\frac{X_n-EX_nI(|X_n|\leqslant a_n)}{a_n}=$$
$$\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-EX_iI(|X_i|\leqslant a_i))-$$
$$\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{a_{n-1}}\sum_{i=1}^{n-1}(X_i-EX_iI(|X_i|\leqslant a_i))\to 0\quad \text{a. s.}.$$

又因为 $EX_nI(|X_n|\leqslant a_n)/a_n\to 0$，$n\to\infty$，事实上

$$\frac{E|X|I(|X|\leqslant a_n)}{a_n}\leqslant$$
$$\frac{a_N}{a_n}P(|X|\leqslant a_N)+P(a_N<|X|\leqslant a_n)\leqslant$$
$$\frac{a_N}{a_n}+P(|X|>a_N)\xrightarrow{n\to\infty}$$
$$P(|X|>a_N)\to 0,N\to\infty.$$

因此 $X_n/a_n\to 0$ a. s.，由引理 1. 4 即证明了(ii)⇒(i). 定理得证. □

若定理 1. 2 的条件 $a_n/n\uparrow$ 由条件 $a_n/n\uparrow\infty$ 替换，则易得如下定理：

定理 2. 3　设$\{a_n,n\geqslant 1\}$为一正常数序列且 $a_n/n\uparrow\infty$，$\{X,X_n,n\geqslant 1\}$为同分布的 NA 随机变量序列，则下列命题等价：

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}P(|X|>a_n)<\infty$；

(ii) $S_n/a_n\to 0$ a. s. ；

(iii) $\sum_{i=1}^{n}|X_i|/a_n\to 0$ a. s. .

证明　首先证明 (ii)⇒(i)，因为

$$\frac{X_n}{a_n}=\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{a_{n-1}}\sum_{i=1}^{n-1}X_i\to 0\quad \text{a. s.}.$$

根据引理 1. 4 得，$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X|>a_n)<\infty$. 另一方面，根据定理 2. 2 和引理 1. 2 即可证明(i)⇒(ii). 所以 (i)⇔(ii)，接下来我们证明(i)⇔(iii). 根据引理 1. 1 有，

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X|>a_n)<\infty\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}P(|X|>a_{n^{(}})<\infty.$$

注意到，

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X|>a_{n^{(}})<\infty\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}P(X^{\pm}>a_{n^{(}})<\infty.$$

再次利用引理 1. 1 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(X^{\pm}>a_{n\epsilon})<\infty\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}P(X^{\pm}>a_n)<\infty.$$

另一方面，我们已证明(ⅰ)⇔(ⅱ)，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(X^{\pm}>a_n)<\infty\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^{\pm}}{a_n}\to 0 \quad \text{a. s.}.$$

所以(ⅰ)⇔(ⅲ). 定理得证. □

推论 2.1 设$\{a_n,n\geqslant 1\}$为一正常数序列且$a_n/n\uparrow\infty$,$a_{2n}/a_n=O(1)$，$\{X,X_n,n\geqslant 1\}$为同分布的 NA 随机变量序列，则下列命题等价：

(ⅰ) $\sum_{n=1}^{\infty}P(|X|>a_n)<\infty$;

(ⅱ) $S_n/a_n\to 0$ a. s.;

(ⅲ) $\sum_{i=1}^{n}|X_i|/a_n\to 0$ a. s.;

(ⅳ) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}P(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|>a_n\epsilon)<\infty$, $\forall\epsilon>0$.

证明 根据注 2.1，易得(ⅰ)⇒(ⅳ)，且根据定理 2.3 可得(ⅰ)～(ⅲ)是等价的，所以我们只需证明(ⅳ)⇒(ⅱ)即可. 因为 $0<a_n\uparrow$，所以

$$\infty>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i|>a_n\epsilon)=$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}\frac{1}{n}P(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i|>a_n\epsilon)\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}P(\max_{1\leqslant i\leqslant 2^k}|S_i|>a_{2^{k+1}}\epsilon),$$

根据 B-C 引理得，$\max_{1\leqslant i\leqslant 2^k}\frac{|S_i|}{a_{2^{k+1}}}\to 0$ a. s.. 根据条件 $a_{2n}/a_n=O(1)$知，$\frac{1}{a_{2^k}}\max_{1\leqslant i\leqslant 2^{k+1}}|S_i|\to 0$ a. s.. 所以(ⅳ)⇒(ⅱ). 故推论得证. □

参考文献(References)

[1] Baum L E, Katz M. Convergence rates in the law of large numbers [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1965, 120: 108-123.

[2] Alam K, Saxena K M L. Positive dependence in multivariate distributions [J]. Communications in Statistics: Theory and Methods, 1981, 12: 1 183-1 196.

[3] Joag-Dev K, Proschan F. Negative association of random variables with applications[J]. The Annals of Statistics, 1983, 11: 286-295.

[4] Cai G H. Strong laws of weighted sums of NA random variables[J]. Metrika, 2008, 68: 323-331.

[5] Ling N X. The Bahadur representation for sample quantiles under negatively associated sequence [J]. Statistics and Probability Letters, 2008, 78: 2 660-2 663.

[6] Shao Q M. A comparison theorem on moment inequalities between negatively associated and independent random variables[J]. Journal Theoretical Probability, 2000, 13: 343-356.

[7] Liang H Y, Zhang J J. Strong convergence for weighted sums of negatively associated arrays [J]. Chinese Annals of Mathematics, Series B, 2010, 31(2): 273-288.

[8] Wu Q Y, Jiang Y Y. Chover's law of the iterated logarithm for negatively associated sequences [J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2010, 23: 293-302.

[9] Wu Q Y, Jiang Y Y. A law of the iterated logarithm of partial sums for negatively associated random variables [J]. Journal of the Korean Statistical Society, 2010, 39: 199-206.

[10] Wang X J, Hu S H, Yang W Z. Some convergence results for arbitrary sequences under moment condition [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2011, 26 (4): 585-589.

[11] Wang Z Z. On strong law of large numbers for random sequence [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2010, 25 (4): 475-480.

[12] Shen A T. On strong convergence for weighted sums of a class of random variables [J]. Abstract and Applied Analysis, 2013, 2013: Article ID 216236.

[13] Shen A T. Bernstein-type inequality for widely dependent sequence and its application to nonparametric regression models[J]. Abstract and Applied Analysis, 2013, 2013: Article ID 862602.

[14] Shen A T, Wu R C. Some probability inequalities for a class of random variables and their applications [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2013, 2013: 57.

[15] Yang S. Uniformly asymptotic normality of the regression weighted estimator for negatively associated samples[J]. Statistics and Probability Letters, 2003, 2: 101-110.

[16] Matula P. A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables [J]. Statistics and Probability Letters, 1992, 15: 209-213.

[17] 吴群英. 混合序列的概率极限理论[M]. 北京：科学出版社，2006.

[18] Sung S H. On the strong law of large numbers for pairwise i. i. d. random variables with general moment conditions [J]. Statistics and Probability Letters, 2013, 83: 1 963-1 968.

[19] Wang X J, Li X Q, Hu S H, et al. Strong limit theorems for weighted sums of negatively associated random variables [J]. Stochastic Analysis and Applications, 2011, 29 (1): 1-14.