

基于稀疏优化模型的网格逼近

胡超, 张举勇

(中国科学技术大学数学科学学院, 安徽合肥 230026)

摘要:提出了一种新的基于稀疏优化的网格逼近方法, 使得三维几何物体可以由用户指定的合理的面片数的平面多边形来近似表示. 该方法首先对输入的三维网格的面片法向进行 L_0 模优化, 然后根据优化后的面片法向信息来驱动顶点位置更新. 其次, 对现有模型进行面片聚类. 最后提出了一个基于全局顶点的稀疏优化模型. 通过约束聚类边界顶点梯度 L_0 模最小对网格进行平面多边形逼近. 大量的网格简化结果证明了所提出的优化模型与方法的有效性以及稳定性.

关键词: L_0 范数最小; 网格逼近; 稀疏优化

中图分类号: TP391.7 **文献标识码:** A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2017.09.001

2010 Mathematics Subject Classification: 65Y04

引用格式: 胡超, 张举勇. 基于稀疏优化模型的网格逼近[J]. 中国科学技术大学学报, 2017, 47(9): 713-720.

HU Chao, ZHANG Juyong. Shape approximation via sparse optimization[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2017, 47(9): 713-720.

Shape approximation via sparse optimization

HU Chao, ZHANG Juyong

(School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: A novel sparse optimization based shape approximation method to represent a 3D model using planar pieces was introduced, which enables a designer specified reasonable and fixed number of planes to be obtained. The method first gives a L_0 minimization algorithm to optimize the face normal of the input model and then updates the vertex position based on filtered normal information. Next, a simple clustering method was proposed to obtain a clustering model. To this end, a boundary vertex gradient minimization algorithm was developed for solving a global energy function to represent the input model. A large number of experiments show the validity of the model and algorithm as well as the stability of the algorithm when solving mesh simplification problems in dynamic environments.

Key words: L_0 norm minimization; mesh approximation; sparse optimization

0 引言

计算机图形学的许多应用都需要复杂的、高细节的模型来表示三维物体, 然而一个简单的并且能

很好地表达几何物体特征的方法在几何处理、3D 渲染以及 CAD/CAM 中都有广泛的需求. 近年来学者们提出了大量的几何简化和逼近的方法, 并且有了许多卓有成效的工作^[1-3]. 然而, 随着图形技术的需

收稿日期: 2017-01-14; 修回日期: 2017-06-05

基金项目: 国家重点研发计划(2016YFC0800501), 国家自然科学基金(61672481)资助.

作者简介: 胡超, 男, 1989年生, 硕士. 研究方向: 计算机图形学算法. E-mail: huchao14@mail.ustc.edu.cn

通讯作者: 张举勇, 博士/副教授. E-mail: juyong@ustc.edu.cn

求不断加强,减少网格的冗余信息,用尽可能少的面片高效地逼近原始模型,依然是科研工作者们重要的研究课题。

本文致力于使用少量的平面多边形网格去逼近三维几何物体.这里假设待处理的模型都是三角网格表示的,这个假设不失一般性,因为任意的几何表示,都可以经过一个预处理使得模型三角化.网格简化逼近是计算机图形学的经典研究课题,有着大量的相关工作,我们回顾比较有代表性的工作.文献[4]和[5]都是介绍了一种基于能量函数的边折叠方法,该方法通过优化能量函数,选择满足条件的边进行折叠,并删除与这条边相邻的面,最后对剩余的空洞进行三角化.文献[6]介绍了一种渐进网格逼近算法(progressive meshes, PM),PM算法的核心是进行边折叠和点分裂,通过记录折叠顺序信息,可以将实现互逆过程.PM对多分辨率网格的实时生成做出极大贡献.文献[7]和[9]都是对边折叠网格简化方法的改进,其中文献[7]介绍一种新的优化方法,在众多边折叠改进算法中,效果最优.文献[8]介绍了一种顶点删除的方法,选择适合删除的顶点,并删除与这个顶点相连接的边和面片,最后对产生的空洞重新三角化.文献[10],[11]均是文献[5]介绍方法的拓展,前者通过引入曲率检测获得高精度的网格逼近结果,后者将其加载到GPU,大大提升计算速率.文献[12]介绍了一种通过曲率检测自适应地删除边的方法.以上方法或者是迭代的移除顶点,或者移除边,但是由于这类方法得到的网格往往存在边度数非常高的顶点,代价大,并且对于后续的处理极其不利.还有一些工作致力于各种制造业和建筑业的需求.文献[2]介绍一种迭代分割面片并进行面片逼近的方法,该方法尽可能地避免自交,但是效率低下,难以处理

大规模的模型.文献[3]也是介绍了一种基于能量优化函数的网格逼近方法,用户控制迭代的聚类面片并重新将面片网格化到平面上,然而该算法计算量大.国内学术界也在网格简化领域开展卓有成效的研究工作,文献[13]利用八叉树对网格进行自适应的分割,提出一种基于顶点聚类的三角形折叠网格简化方法,该方法通过点到平面的距离进行误差控制.文献[14]提出一种基于三角形删除标准的网格简化方法.文献[15]将特征角准则作为误差度量引入网格简化过程中.

本文的工作近似于文献[1],文献[1]介绍了一种误差驱动的变分网格逼近方法,使用Lloyd回归(一种聚类技术),将预先指定的聚类数的替代函数去逼近拟合初始模型,最后将这些平面替代函数连接在一起形成多边形平面.然而,多边形的边界是顶点的投影结果,如果一个边界顶点被三个或者以上的多边形共享,那么这个顶点的位置是初始顶点在各个共享平面的投影平均,这样会导致最终的结果不是平面多边形.本文提出新的基于稀疏优化思想的网格逼近方法,迭代分割聚类,通过求解聚类边界顶点梯度 L_0 模最小的稀疏优化模型,使得三维几何物体可以由用户指定的合理的面片数的平面多边形网格来近似表示.

1 基于稀疏优化的网格逼近

本节介绍我们提出的新的基于稀疏优化思想的网格逼近方法.整个算法流程如图1所示.首先,对输入模型的面片法向梯度进行 L_0 模最小的稀疏优化;进而根据优化后的法向信息驱动顶点更新.这样,在一个区域内,面片的法向都接近于同一个方向,呈现出块状分明的网格,如图1(b)所示.其次,对模型进行分割聚类;再根据聚类边界顶点梯度的 L_0

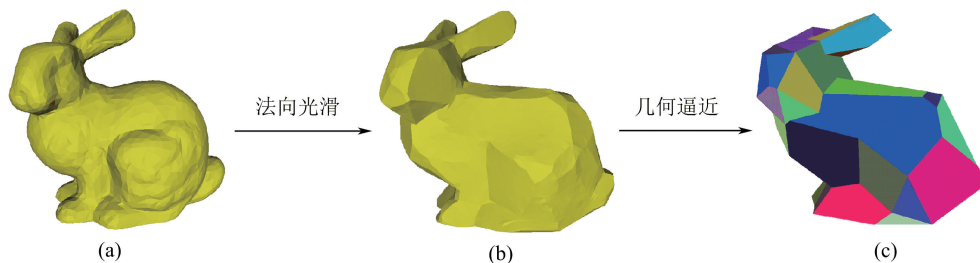


图1 使用平面多边形面片近似逼近三维模型的整体流程

(a)表示输入模型(4968个面片),(b)表示法向优化后的结果,(c)表示用平面简化的结果(60个面片),总用时13.391 s.

Fig.1 Overview of our simple mesh approximation method

(a) represent input model(4968 triangles), (b) represent the result of L_0 norm minimization,

(c) is output(60 polygons), total processing time 13.391 s

模最小, 求解一个基于顶点的带等式约束的优化模型. 通过以上操作, 可以得到由平面多边形近似表示的三维模型, 如图 1 (c) 所示. 需要说明的是, 整个算法过程, 都只是移动顶点的位置, 不删除顶点或者边、面. 最终输出和输入模型具有相同的连接关系和拓扑结构. 本文得到的结果虽然没有简化网格, 但是我们只需要提取多边形面片的边界点并重新三角化, 即可得到大量简化的模型. 这与网格简化的初衷是一致的.

1.1 L_0 法向优化及顶点更新

1.1.1 L_0 法向优化

为了使得面片法向在一个区域内分片常值的结果, 我们首先对三角网格的面片法向进行梯度 L_0 范数的稀疏优化. 由于法向梯度 L_0 模直接刻画了面片法向变化的稀疏性, 许多三角网格面片法向方向在一个区域内都很近似, 我们可以将这些法向优化为同一个方向, 那么整个三角网格优化后就只有少部分的不同方向的面片法向. 图 2 (b) 是 L_0 模稀疏优化方法作用到一维信号后的结果, 可以看到, 优化后的信号是分段常数函数, 这正是约束信号的变化尽可能少的原因. 同样的思想拓展到三角网格, 使得面片的方向是分片常值的, 仅仅只有少部分的方向变化.

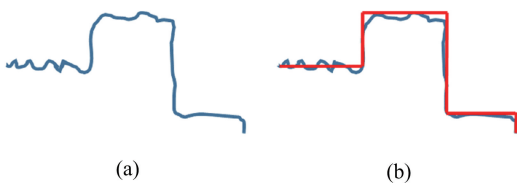


图 2 使用 L_0 模梯度最小对一维信号处理的结果, (a), (b) 分别对应输入和输出的一维信号

Fig.2 The results of L_0 gradient minimization algorithm to 1D signal.

(a), (b) represent 1D signal input and output respectively

为了方便叙述, 我们记输入网格 $M = (V, E, F)$, V, E, F 分别代表顶点, 边和面片的集合. e_{ij} 表示面 f_i 和 f_j 相交的边, N 表示面片法向的集合. 由此, 我们定义如下基于边法向梯度

$$\nabla N_{ij} = |e_{ij}| \{ (x_i - x_j), (y_i - y_j), (z_i - z_j) \} \quad (1)$$

而 L_0 法向梯度最小的优化模型定义为

$$\min_N \| N - N^* \|_2^2 + \alpha \| \nabla N \|_0. \quad (2)$$

式中, N^* 表示初始的法向集合, 参数 α 控制两项的

影响程度. α 越大, $\| \nabla N \|_0$. 在优化模型中的影响力就越大, 求模型的最小值就说明需要优化结果中 $\| \nabla N \|_0$. 尽可能的小, 这样就表现为面片的法向差异尽可能的少, 从而面片分片数量就会越少; 同理若 α 越小, 则说明优化过程中 $\| \nabla N \|_0$. 的约束比较弱, $\| \nabla N \|_0$. 值的影响对于优化模型的结果不起主要作用, 这样优化结果中面片法相之间差异量比较多, 进而使得面片分片数量就会越多. 求解式 (2), 通过引入一个新的变量, 将式 (2) 转化为

$$\begin{aligned} \min_{N, p} \| N - N^* \|_2^2 + \alpha \| p \|_0. \\ \text{s.t. } p = \nabla N \end{aligned} \quad (3)$$

求解式 (3), 采用增广拉格朗日方法 (augmented Lagrange method, ALM) 来求解这个非线性优化问题. ALM 是一种迭代求解的方法, 通过引入一个新的变量, 将优化问题分解为两个子问题交叉迭代求解. 更多关于 ALM 的介绍可查阅文献 [16-19].

1.1.2 顶点更新

通过上述法向梯度 L_0 范数最小的稀疏优化过程, 网格的法向优化成分片常值的面片法向, 然而顶点的位置并没有随之变化. 因此, 我们需要使用这些法向信息对顶点进行更新, 使得更新后的顶点所构成的面片法向和优化后的法向相匹配. 为了解决这个法向信息驱动顶点更新的问题, 可以采用网格变形 (poisson mesh deformation)^[20-21] 的思想来求解. 考虑单一的面片 f_i , 其初始法向和优化后的法向分别为 n_i 和 n_i^* , 为了使 n_i 经过旋转方向与 n_i^* 对齐, 需要定义一个局部旋转函数, 这个函数是关于旋转轴 $n_i \times n_i^*$, 使得 n_i 经过最小的旋转角度与 n_i^* 方向对齐. 得到这个旋转函数之后, 我们将这个旋转函数作用到初始面片 f_i 上. 接着计算旋转后的面片 \bar{f}_i 的顶点梯度 $\nabla \bar{f}_{ij}, j=1, 2, 3$. 那么, 顶点位置更新的问题就转化为求解如下能量函数

$$E_{\text{Poisson}} = \sum_{f_i} A_i \sum_{j=1}^3 \| \nabla g_{i,j} - \nabla \bar{f}_{i,j} \|_2^2 \quad (4)$$

式中, A_i 表示面片面积, $\nabla g_{i,j}$ 表示需要匹配的顶点梯度. 优化求解这个能量函数等价于求解一个著名的泊松方程, 可以很容易求解. 需要注意的是, 在函数 (4) 中, 如果旋转函数需要对面片进行一个大角度的旋转, 这样很容易产生面片翻转. 为了克服这样的情况发生, 对优化函数加上一个顶点梯度的正则项

$$E_{\text{Smooth}} = \sum_{e_j} l_{e_j} \sum_{k=1}^3 \|\nabla g_{i,k} - R_{ij} \nabla g_{j,k}\|_2^2 \quad (5)$$

式中, l_{e_j} 表示边的长度, R_{ij} 表示旋转矩阵, R_{ij} 将 f_j 沿着旋转轴 e_{ij} 刚好旋转到 f_i . 至此, 通过法向信息恢复顶点位置的优化能量函数可表示为

$$E_{\text{Update}} = \frac{E_{\text{Poisson}}}{\bar{A}} + \lambda \frac{E_{\text{Smooth}}}{\bar{l}_e} \quad (6)$$

式中, \bar{A} 和 \bar{l}_e 分别表示三角面片的平均面积和平均边长. 参数 λ 控制面片法向的光滑程度. E_{Update} 是一个二次优化问题, 通过稀疏优化的思想, 建立大型稀疏线性方程组可以很容易求得它的最优解. 通过法向稀疏优化得到分片常值的法向, 再根据法向信息驱动顶点更新, 图 3(b) 是由法向信息驱动顶点更新的测试结果. 可以看出, 网格通过顶点更新得到的是一个法向分片常值的网格, 这正是法向梯度 L_0 范数最小的优化效果, 使得梯度变化很稀疏.

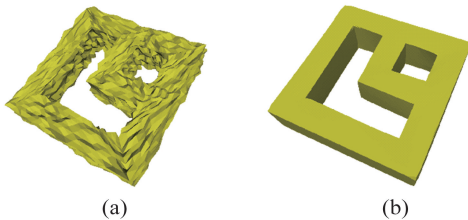


图 3 使用 L_0 模梯度最小对三维网格处理的结果, (a), (b) 分别是网格的输入和输出

Fig.3 The result of L_0 gradient minimization algorithm to triangle mesh.

(a), (b) represent triangle mesh input and output respectively

1.2 聚类和边界顶点梯度 L_0 范数最小

1.2.1 聚类

为了使用平面多边形去逼近几何物体, 我们需要对这个模型进行分割聚类. 众所周知, 已经有很多分割聚类的优秀的工作, 比如著名的 k-means^[22-23] 和顶点聚类^[24] 等聚类方法. k-means 是一种迭代的方法, 精度高, 但计算代价大. 而顶点聚类法要大量删除顶点, 改变模型的拓扑结构, 不适合此处聚类的需求. 我们的方法只是移动点的位置, 其连接关系和拓扑结构都与输入模型一致. 本文采用一种随机选择种子面片的方式进行聚类, 从而达到用户指定的合理的面片个数的聚类. 步骤如下:

Step 1 对于随机取的种子面片 f_i , 遍历其相邻的面片 f_j , $j=1, 2, 3$, 计算 f_i 与 f_j 两个面片法向的夹角. 如果面片之间的夹角高于一个用户设定的截断值, 那么就跳过此面片, 继续处理下一个面

片. 如果其夹角低于用户设定的截断值, 那么就这两个面片归为一类, 记为 C , 并把种子面片更换为 f_j .

Step 2 继续计算种子面片与其邻面法向是否相近似的时候, 只需要将当前面片的法向替换为 C 的平均法向, 计算邻面法向与平均法向之间的夹角. 当以此类推, 直到其相邻的面片遍历完毕并且邻域面片的法向和平均法向的夹角都大于截断值. 这样我们就得到一个聚类.

Step 3 在没有被归为某一类的面片中, 随机选取一个种子面片, 经过上述相同的步骤, 又可以得到一个类. 以此类推, 直到所有的面片都被遍历完全且每一个面片都被归为某一个聚类.

通过上述聚类方法, 得到了一个由截断值控制的聚类个数的模型分割. 之前提到, 我们可以用设计者指定的多边形面片数去逼近模型. 这里假设上述操作聚类的结果为 K^* , 然而, K^* 往往大于用户指定的聚类个数 K , 因此, 需要一个操作, 使得一些小数目的聚类归在一些大的聚类之中, 从而使得 K^* 减小到 K 或者小于 K . 步骤如下:

Step 1 从面片少的聚类出发, 遍历这个聚类中的所有面片, 假设当前处理的面片 f_i , 遍历其相邻的面片 f_j , $j=1, 2, 3$, 计算 f_i 的面片法向与 f_j 所在的聚类的平均法向的夹角.

Step 2 遍历面片 f_i 的邻域, 选择 f_j ($j=1, 2, 3$) 所对应的聚类中, 满足该聚类与面片 f_i 所在的聚类不同, 并且聚类的平均法向与 f_i 的面片法向最接近的这个聚类. 如果其夹角低于一个用户指定的截断值, 那么就归入 f_j 所在的类; 如果这个夹角高于一个用户指定的截断值, 那么就跳过此面片, 继续处理下一个面片. 因为如果强行将面片归为一类, 会导致逼近结果有很大的误差. 这种从小聚类出发进行整合的方法将一直操作直到聚类的个数等于或者小于用户指定的个数 K . 图 4 展示算法聚类的结果. 可以看出, 法向近似的三角面片已经被归为一类, 并且所有的三角面片, 只可以属于某一个聚类, 并不存在某一个面属于多个聚类. 而且所有的聚类都是连通的.

1.2.2 L_0 边界顶点梯度最小

用平面多边形去逼近几何物体, 需要解决的一个很重要的问题就是, 如何处理好多边形面片与面片之间相邻的边界边, 并希望逼近结果中使用的多边形的边数尽可能少. Cohen-Steiner 等^[1] 提出的方

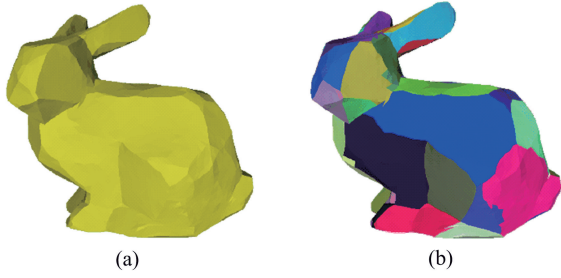


图 4 面片聚类的结果, 每一个颜色代表一个聚类.
(a)4968 个面片; 聚类结果(b)对应 60 的聚类.

Fig.4 Mesh clustering result, each color represent one cluster.
(a)4968 triangles; clustering result (b)with 60 clusters.

法可以得到由多边形面片逼近几何物体的模型. 然而, 之前也提到, 他们的最终结果有可能不是平面多边形. 为了使得最终的逼近单元是平面多边形, 我们提出一个基于聚类边界顶点梯度最小的全局稀疏优化模型, 这个模型包含一个保真项, 一个正则项和一个等式约束. 保真项使得优化后的顶点位置与初始顶点位置尽可能接近; 正则项是希望这个过程中, 聚类顶点边界梯度尽可能的小, 其等价于优化的结果中多边形的边数尽可能少; 等式约束约束所有的顶点都投影到其对应的多边形面片上. 由此我们的优化模型为

$$\begin{aligned} \min_V & \|V - V^*\|_2^2 + \alpha \|\nabla V_B\|_0 \\ \text{s.t.} & \langle N_i, V_{ij} \rangle + d_i = 0, \text{ for } V_{ij} \in V_i \end{aligned} \quad (7)$$

式中, V_i 表示聚类 i 的所有顶点的集合, 参数 N_i 和 d_i 分别代表聚类 i 的法向和一个常值(由 PCA 计算得出). 边界顶点梯度 ∇V_{Bij} 定义为

$$\nabla V_{Bij} = \frac{V_{ik} - V_{ij}}{d_2} - \frac{V_{ij} - V_{it}}{d_1}.$$

式中, d_1 和 d_2 分别为线段长度. 如图 5 所示, ∇V_{Bij} 直接刻画了两个方向向量之间的差异. 类似于一维信号处理, $\|\nabla V_{Bij}\|_0$ 则刻画了多边形边的

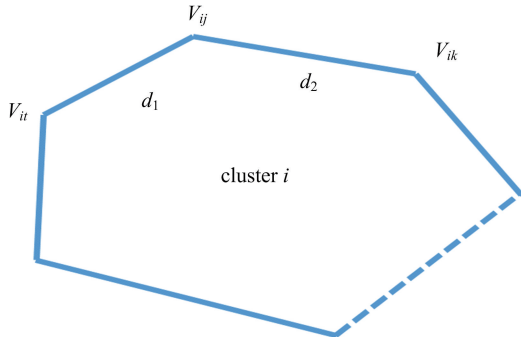


图 5 边界顶点梯度 ∇V_{Bij}

Fig.5 The gradient of boundary vertex ∇V_{Bij}

稀疏性, 约束最终得到的多边形的边数尽可能的少, 并且是不固定的. 它的边数可以由参数 α 控制. 这里 α 的作用和式(2)中 α 的作用类似. 由 ∇V_{Bij} 的定义可知, α 越大, 说明优化结果需要 $\|\nabla V_B\|_0$ 尽可能的小, $\|\nabla V_B\|_0$ 的约束比较强, 即表现为需要尽可能多的 ∇V_{Bij} 等于 0, 这样就说明需要 V_{ij} , V_{it} 和 V_{ik} 尽可能多的共线, 这样最终结果中表现为, 多边形平面的边数比较少. 同理若 α 越小, 说明优化结果中 $\|\nabla V_B\|_0$ 的约束比较弱小, 即表现为 ∇V_{Bij} 是否等于 0 对优化模型影响薄弱, 这样就说明并不需要约束 V_{ij} , V_{it} 和 V_{ik} 尽可能多的共线. 这样最终结果中表现为, 多边形平面的边数比较多. 所以参数 α 对优化结果中多边形平面片的边数有着控制的作用. 和 L_0 法向稀疏优化的方法一样, 这里同样采取 ALM 来求解此非线性优化问题. 通过引入变量 p , 将上述模型转化为以下带等式约束的优化模型:

$$\begin{aligned} \min_{V, p} & \|V - V^*\|_2^2 + \alpha \|p\|_0 \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \langle N_i, V_{ij} \rangle + d_i = 0, \text{ for } V_{ij} \in V_i; \\ p = \nabla V_B \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

求解式(8), 其增广拉格朗日函数为

$$\xi(V, p) = \|V - V^*\|_2^2 + \alpha \|p\|_0 + E_1 + E_2 \quad (9)$$

式中,

$$\begin{aligned} E_1 &= \langle \lambda_1, p - \nabla V_B \rangle + \frac{\beta_1}{2} \|p - \nabla V_B\|_2^2, \\ E_2 &= \langle \lambda_2, \langle N_i, V_{ij} \rangle + d_i \rangle + \\ & \frac{\beta_2}{2} \|\langle N_i, V_{ij} \rangle + d_i\|_2^2. \end{aligned}$$

其中, λ_1 和 λ_2 为拉格朗日乘子, β_1 和 β_2 是正的常数, \langle, \rangle 表示内积. ALM 是一种迭代的方法, 在每一步迭代过程中, 都需要求解如下两个子问题:

V 子问题: 对于给定 p , 求解 V 即是求解优化模型

$$\min_V \|V - V^*\|_2^2 + E_1 + E_2 \quad (10)$$

p 子问题: 对于给定 V , 求解 p 即是求解优化模型

$$\min_p \alpha \|p\|_0 + \langle \lambda_1, p \rangle + \frac{\beta_1}{2} \|p - \nabla V_B\|_2^2 \quad (11)$$

求解其中一个子问题的时候, 另一个变量固定看作常值. V 子问题式(10)是一个二次的优化模型, 需要求解大型稀疏线性方程组, 有很多工具都

可以处理这样的优化模型, 如 Eigen 和 MKL 等. p 子问题是一个基于顶点对顶点的优化问题, 可将其拆分为基于某一个顶点的优化函数, 因此式(11)可以简化为

$$\min_{p_v} \alpha \|p_v\|_0 + \langle \lambda_v, p_v \rangle + \frac{\beta_1}{2} \|p_v - (\nabla V_B)_v\|_2^2 \quad (12)$$

通过求解可知, 当 $\frac{2\alpha}{\beta_1} > (\frac{\lambda_v}{\beta_1} - (\nabla V_B)_v)^2$ 时, $p_v = 0$; 其他情况, $p_v = \frac{\lambda_v}{\beta_1} - (\nabla V_B)_v$. 求解稀疏优化模型, 就能得到简化的结果.

2 结果及讨论

为了验证本文提出的全局优化模型对 3D 网格进行平面多边形逼近的效果. 我们用 C++ 编码, 通过 Inter(R) Core(TM) i5-2400 CPU 3.10GHz, 测试了许多不同的模型, 效果见图 6. 模型的数据见表 1, 其中, 表中所述的误差是指在同一坐标尺度下, 初始模型的顶点到优化后所对应的平面的平均欧氏距离. 从视觉上看, 稀疏优化的结果很好地保留了输入模型的几何特征, 并且很少出现面片翻转. 从误差计算的结果也看到, 我们的方法使得优化后的顶点距离初始顶点的位置非常接近. 优化结果中, 多边形的边也是尽可能少, 这正是聚类边界顶点梯度变化尽可能少的优化效果. 我们的方法对于聚类中有空洞的模型也能很好地处理, 如图 6(b) 所示. 在优化的过程中, 我们通过种子面片聚类的方法, 得到满足用户指定的面片数的聚类, 该聚类虽不能保证聚类结果是三角面片的最佳分类, 但是

设定的截断值保证了面片法向之间不会存在大的差异, 并且其速度快, 满足我们快速获得面片分类的结果. 在求解过程中, 我们通过设定结果中多边形网格面片数, 使得优化模型在这个意义下, 得到最优的逼近结果. 这是因为, 通过全局稀疏优化模型, 计算获得的平面时, 我们策略确保了在该聚类面片的逼近过程中, 得到的该聚类的最优的平面逼

表 1 图 6 中模型简化数据统计

Tab.1 Model simplification data set in Fig.6

模型名称	输入面片数	输出面片数	运行时间/s	平均误差
Star 模型 (a)	10384	36	20.923	0.0127
Block 模型 (b)	17550	60	58.082	0.1266
Bimba 模型 (c)	17710	100	91.535	0.0184
Fandisk 模型 (d)	12946	50	29.817	0.1130
Ring 模型 (e)	4096	200	72.847	0.6601

近结果. 在优化过程设定顶点距离的二次约束, 保证了新顶点的位置与原顶点的位置尽可能接近, 当然这与参数 α 对优化模型的影响力有直接的关系. 在求解过程中, 我们通过 PCA 计算聚类的主成分作为优化的约束项. 迭代过程中也逐步更新 PCA 所计算的聚类拟合平面的法向, 直到迭代停止. 图 7 展示了设定不同的面片数对同一个几何物体的逼近效果, 数据见表 2. 可以看出, 逼近效果与用于逼近模型预设面片数 K 有很大的关系. 使用越少的面片, 逼近结果就越粗糙, 而用时也相对更少. 这是因为算法在聚类过程中用时少, 而求解稀疏方程, 计算复杂度高. 我们的经验设置面片数 K 在 20 到

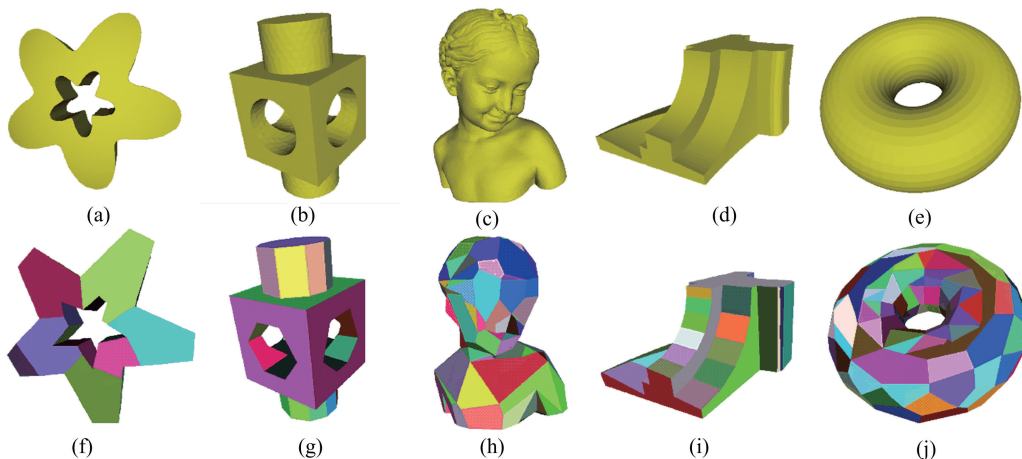


图 6 通过聚类边界顶点梯度 L_0 模最小的稀疏优化模型对网格进行简化的结果

Fig.6 Several results of our sparse optimization to approximate 3D models

120 之间. 当然超出这个范围也是可以逼近的, 只是会消耗更多的代价去求解线性方程组或者聚类计算. 对于复杂模型, 如图 7(a), 可以看到, 优化的

结果也能很好地表达了几何模型的特征, 从而也验证了本文的优化算法在使用不同个数的面片近似几何物体时的有效性和稳定性.

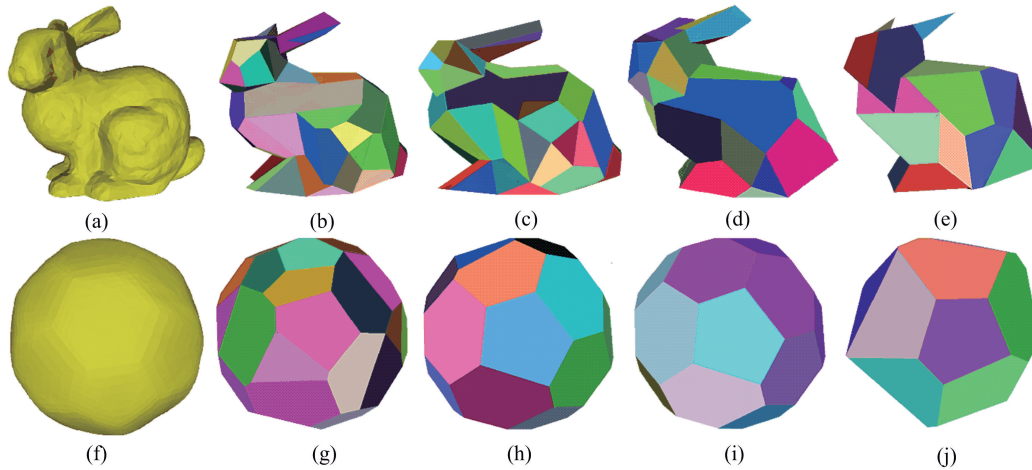


图 7 使用不同的面片数, 对同一个输入模型进行逼近的效果

Fig.7 The result of approximating a same model with different number of patches

表 2 图 7 中模型简化数据统计

Tab.2 Model simplification data set in Fig.7

模型名称	输入面片数	输出面片数	运行时间/s	平均误差
Bunny	4968	100	26.33	0.0031
		83	23.064	0.0034
		60	13.391	0.0036
		40	11.985	0.0038
Football	7424	64	33.892	0.0241
		48	21.782	0.0216
		32	14.735	0.0275
		24	13.579	0.0357

3 结论

本文介绍一种新的基于稀疏优化思想的网格逼近方法. 算法通过法向梯度 L_0 模优化, 顶点位置更新, 面片聚类, 最后求解基于顶点的稀疏优化模型. 得到一个平面多边形表示的三维模型. 大量的网格逼近结果表明, 本文提出的方法易于实现, 并且具有直观的几何意义, 可以有效地应用于几何造型系统中, 同时也证明了所提出的优化模型与算法的有效性和算法的稳定性.

本文提出的优化方法还存在一定的不足. 首先, 用于处理的网格必须是三角网格, 虽然任意的

网格都可以经过一个预处理进行三角化, 但是我们希望对于四边形网格和六边形网格, 都可以不经过预处理直接进行优化逼近. 其次, 本文提出的优化方法需要迭代求解大型稀疏线性方程组, 对于较大的几何模型, 计算速度还有待进一步的加快. 这些正是我们的未来研究的方向.

参考文献(References)

[1] COHEN-STEINER D, ALLIEZ P, DESBRUN M. Variational shape approximation[J] ACM Transactions on Graphics (TOG), 2004, 23(3): 905-914.

[2] CHEN D, SITTHI-AMORN P, LAN J T, et al. Computing and fabricating multiplanar models [J]. Computer Graphics Forum, 2013, 32(2pt3): 305-315.

[3] CUTLER B, WHITING E. Constrained planar remeshing for architecture [C]// Proceedings of Graphics Interface 2007. New York: ACM, 2007: 11-18.

[4] COHEN J, MANOCHA D, OLANO M. Simplifying polygonal models using successive mappings [C]// Proceedings of the 8th Conference on Visualization '97. Los Alamitos, CA: IEEE Computer Society Press, 1997: 395-ff.

[5] GARLAND M, HECKBERT P S. Surface simplification using quadric error metrics [C]// Proceedings of the 24th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York: ACM Press/ Addison-Wesley Publishing Co, 1997: 209-216.

- [6] HOPPE H. Progressive meshes[C]// Proceedings of the 23rd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York: ACM, 1996: 99-108.
- [7] HOPPE H, DEROSE T, DUCHAMP T, et al. Mesh optimization[C]// Proceedings of the 20th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York: ACM, 1993: 19-26.
- [8] SCHROEDER W J, ZARGE J A, LORENSEN W E. Decimation of triangle meshes[C]// Proceedings of the 19th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York: ACM, 1992, 26(2): 65-70.
- [9] LI L, HE M, WANG P. Mesh simplification algorithm based on absolute curvature-weighted quadric error metrics[C]// 2010 5th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications. IEEE, 2010: 399-403.
- [10] YAO L, HUANG S, XU H, et al. Quadratic error metric mesh simplification algorithm based on discrete curvature[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015, 2015: Article ID 428917.
- [11] PAPAGEORGIOU A, PLATIS N. Triangular mesh simplification on the GPU[J]. The Visual Computer, 2015, 31(2): 235-244.
- [12] WANG J, WANG L, LI J, et al. A feature preserved mesh simplification algorithm [J]. Journal of Engineering and Computer Innovations, 2011, 2(6): 98-105.
- [13] 周昆, 潘志庚, 石教英. 基于三角形折叠的网格简化算法[J]. 计算机学报, 1998, 21(6): 506-513.
ZHOU Kun, PAN Zhigeng, SHI Jiaoying. Mesh simplification algorithm based on triangle collapse[J]. Chinese J Computers, 1998, 21(6): 506-513.
- [14] 潘志庚, 马小虎, 石教英. 虚拟环境中多细节层次模型自动生成算法[J]. 软件学报, 1996, 7(9): 526-531.
PAN Zhigeng, MA Xiaohu, SHI Jiaoying. The automatic generation algorithm for models at multiple levels of detail in virtual environment[J]. Journal of Software, 1996, 7(9): 526-531.
- [15] 周晓云, 刘慎权. 基于特征角准则的多面体简化方法[J]. 计算机学报, 1996(增刊): 212-223.
ZHOU Xiaoyun, LIU Shenquan. Polyhedral simplification method based on characteristic angle criterion[J]. Chinese J Computers, 1996 (suppl): 212-223.
- [16] GLOWINSKI R, LE TALLEC P. Augmented Lagrangian and operator-splitting methods in nonlinear mechanics[M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1989.
- [17] WU C, TAI X C. Augmented Lagrangian method, dual methods, and split Bregman iteration for ROF, vectorial TV, and high order models[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2010, 3(3): 300-339.
- [18] WU C, ZHANG J, TAI X C. Augmented Lagrangian method for total variation restoration with non-quadratic fidelity[J]. Inverse Problems and Imaging, 2011, 5(1): 237-261.
- [19] ZHANG H, WU C, ZHANG J, et al. Variational mesh denoising using total variation and piecewise constant function space [J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2015, 21(7): 873-886.
- [20] WANG P S, FU X M, LIU Y, et al. Rolling guidance normal filter for geometric processing [J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2015, 34(6): 173.
- [21] YU Y, ZHOU K, XU D, et al. Mesh editing with poisson-based gradient field manipulation [C]// ACM Transactions on Graphics (TOG). ACM, 2004, 23(3): 644-651.
- [22] ARTHUR D, VASSILVITSKII S. k-means++: The advantages of careful seeding [C]// Proceedings of the Eighteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007: 1027-1035.
- [23] KANUNGO T, MOUNT D M, NETANYAHU N S, et al. An efficient k-means clustering algorithm: Analysis and implementation [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2002, 24(7): 881-892.
- [24] LOW K L, TAN T S. Model simplification using vertex-clustering [C]// Proceedings of the 1997 Symposium on Interactive 3D Graphics. New York: ACM, 1997: 75-ff.