第47卷第3期 中国科学技术大学学报 Vol.47,No.3
2017年3月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Mar. 2017

文章编号:0253-2778(2017)3-0262-05

Lévy过程下金融期权风险对冲参数的模拟仿真估计

刘 刚[1],崔振嵛[2],刘彦初[3],谢金贵[1]

(1.中国科学技术大学管理学院,安徽合肥 230026;2.史蒂文斯理工学院商学院,霍博肯 07030,美国;
3.中山大学岭南学院金融系,广东广州 510275)

摘要:金融期权风险对冲参数的精确估计是衍生品风险管理实践的重要环节,也是金融工程学术界研究的热点之一.模拟仿真方法由于规避了"维度灾难"问题,近年来成为金融工程的主流技术之一.提出了一种基于路径求导的新的模拟仿真方法,来高效地估计Lévy过程下的金融期权风险对冲参数.对于满足Lévy过程的资产价格模型,仅有特征函数是已知的,通过Fourier逆变换并且通过线性插值方法来构造其分布函数和密度函数,从而可以生成随机样本并得到风险对冲参数的模拟仿真估计.数值试验验证了该方法的实际效果,结果显示,与文献中现有的方法相比,提出的估计方法具有更高的计算效率.

关键词:风险对冲参数;路径求导法;特征函数;Lévy过程

中图分类号:F830.9 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2017.3.009

引用格式:刘刚,崔振嵛,刘彦初,等. Lévy过程下金融期权风险对冲参数的模拟仿真估计[J]. 中国科学技术大学学报,2017,47(3):262-266.

LIU Gang, CUI Zhenyu, LIU Yanchu, et al. A simulation approach to financial options Greeks estimation under Lévy processes[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2017, 47(3):262-266.

A simulation approach to financial options Greeks estimation under Lévy processes

LIU Gang[1], CUI Zhenyu[2], LIU Yanchu[3], XIE Jingui[1]

(1.*School of Management, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026, *China*;
2.*Financial Engineering Division, School of Systems and Enterprises, Stevens Institute of Technology, Hoboken, NJ* 07030, *United States*;
3.*Department of Finance, Lingnan (University) College, Sun Yat-sen University, Guangzhou* 510275, *China*)

Abstract: Accurate estimation of the Greeks for financial options is an important practical procedure for risk management of financial derivatives. It is also an important topic in financial engineering research. Monte Carlo simulation method, being capable of avoiding the problem of "curse of dimensionality", is one of the most popular computational tools in financial engineering. Here a new Monte Carlo simulation method was developed to estimate Greeks for financial options under Lévy processes. For asset price models following Lévy processes, only the characteristic functions are known. By building our method on

收稿日期:2016-01-22;**修回日期**:2016-05-10

基金项目:国家自然科学基金(71571176),国家自然科学基金青年基金(71501196),中央高校基本科研业务费专项资金(14wkpy63)资助.

作者简介:刘刚,男,1992年生,硕士. 研究方向:金融工程. E-mail: liugang1@mail.ustc.edu.cn

通讯作者:谢金贵,博士/副教授. E-mail: xiej@ustc.edu.cn

Fourier transform inversion and linear interpolations, approximations of the cumulative distribution functions and the probability density functions can be obtained, paving the way for generating random samples and constructing Monte Carlo simulation estimates to the Greeks. Numerical experiments were conducted to illustrate the efficiency of the proposed method and the results show that it performs more efficiently than alternatives in the literature.

Key words: Greeks; pathwise derivative method; characteristic function; Lévy process

0 引言

金融衍生产品市场的发展是近半个世纪以来全球金融市场最显著的发展之一.作为一类非常重要的金融衍生产品,期权赋予了投资者在到期日或者到期日之前,以约定的价格买入或卖出某项标的资产的权利,为此所付出的期权费即是期权的价格.期权本质上可以看作投资者购买的一项“保险”,“保费”就是投资者所付的权利金(期权价格):若标的资产的未来价格变动与投资者预期不一致,则“保险”生效,投资者可以大幅减少损失甚至仍然盈利;反之,则该“保险”自然到期终止,投资者仅仅损失期初所付的权利金.期权的定价以及风险对冲参数的计算是期权研究的两个基本问题.相对于期权价格,风险对冲参数的精确计算也至少同样重要.这主要因为:① 风险对冲参数是构造衍生品套期保值组合(Hedging portfolio)的最重要元素.例如期权的Delta(Δ)值表示在其他条件不变的情况下,期权价格对标的资产价格变化的敏感性.这样当我们手里有某些标的资产时,我们就可以通过相应的期权构成一个投资组合,使得这个组合的 Delta 值为 0,这样我们的投资组合的价值不受标的资产价格变动的影响,从而达到套期保值的目的;② 资产价格模型的参数一般都是根据市场历史数据通过统计方法估计得到的,因此存在统计误差,所以风险对冲参数也可以反应统计误差对衍生品价格的影响.因此,在计算期权价格的同时,我们还必须精确计算期权风险对冲参数.

风险对冲参数定义为期权价格关于模型参数的导数,这个导数也衡量了期权价格关于该参数的敏感性程度.因此,我们计算风险对冲参数就等价于计算期权的敏感度(下文对这两种说法不做区分).在计算期权的敏感度时,常用的方法有两种:似然比法(likelihood ratio method)和路径求导法(pathwise derivative method).Glasserman[1] 介绍了路径求导法及使用的前提条件,同时也给出了一些运用路径求导法计算期权敏感度的例子,但是仅讨论了一些简单扩散过程的情况.当资产价格服从 Lévy 过程时,Glasserman 等[2] 以及运用似然比法对期权的敏感度进行估计,并且给出了估计量的收敛速度.除了以上两种方法以外,在敏感度的估计上也有一些其他的方法.Liu 等[3] 提出用核估计法来估计具有不连续的回报函数的期权风险对冲参数.Chen 等[4] 提出了一种广义的路径求导方法来估计美式期权的风险对冲参数.

本文考虑服从 Lévy 过程的资产价格模型,并将传统的路径求导方法与随机变量求导技术相结合,用来估计期权的风险对冲参数.对于一般的 Lévy 过程,我们仅仅知道资产价格的特征函数,所以需要通过 Fourier 逆变换以及线性插值方法,来得到(近似的)分布函数以及密度函数,从而生成随机样本,并以此构造期权风险对冲参数的模拟仿真估计量.在数值实验中,我们采用 CGMY 过程和 Variance-Gamma 过程这两类具有代表性的 Lévy 过程.数值结果显示,相比文献中现有的方法,比如 Glasserman 等[2] 采用的似然比方法,我们得到的计算结果具有更小的均方误差(mean square error),从而具有更高的计算效率.

1 路径求导法及敏感度估计

1.1 路径求导法

在一个概率空间(Ω, F, P)中,令$\{X(\theta,\omega)\}$为一个连续的随机过程,其中 ω 是一个随机变量,令其密度函数为 $g(\omega)$;$\theta \in \mathbb{R}$ 代表我们感兴趣的模型参数.令 $X(\theta,\omega)$的密度函数和分布函数分别为 $p_\theta(x)$ 和 $F(\theta, x)$.我们考虑形式如 $\alpha(\theta)=E_\theta[f(X(\theta,\omega))]$这样的期望对 θ 的求导计算,即是求 $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}\theta$ 的值.当 $f(X(\theta,\omega))$满足 Lipschitz 连续时,并且 $X(\theta,\omega)$对 θ 的导数 $X'(\theta,\omega)$存在,则我们有如下的表达式:

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}E_\theta[f(X(\theta,\omega))]}{\mathrm{d}\theta}=$$

$$\frac{\mathrm{d}\int_{\mathbb{R}} f(x(\theta,\omega))g(\omega)\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}=$$
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}f(x(\theta,\omega))}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}g(x)\mathrm{d}\omega=$$
$$E_{\theta}\left[f'(X(\theta,\omega))\frac{\mathrm{d}X(\theta,\omega)}{\mathrm{d}\theta}\right] \tag{1}$$

对于式(1)中的表达式,我们首先给出$\frac{\mathrm{d}X(\theta,\omega)}{\mathrm{d}\theta}$的表达形式.对于某个$U\sim Unif[0,1]$,总会有$F(\theta,X)=U$成立.那么两边同时对$\theta$求导,我们可以得到

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{\frac{\partial F(\theta,x)}{\partial\theta}}{p_{\theta}(x)}\Big|_{x=X} \tag{2}$$

把式(2)代入式(1),可以得到

$$E_{\theta}\left[f'(X(\theta,\omega))\frac{\mathrm{d}X(\theta,\omega)}{\mathrm{d}\theta}\right]=$$
$$-E_{\theta}\left[f'(X(\theta,\omega))\frac{\frac{\partial F(\theta,x)}{\partial\theta}}{p_{\theta}(x)}\Big|_{x=X}\right].$$

从上述结果可以看出,如果$p_{\theta}(x)$和$F(\theta,x)$的显式表达式已知,那么可以得到$\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}\theta$的无偏估计.但是如果仅仅知道$X(\theta,\omega)$的特征函数,那么上述结果不能直接应用.在这种情形下,我们需要先通过特征函数来得到$p_{\theta}(x)$和$F(\theta,x)$的近似表达式,下一节给出了具体的方法.

1.2 特征函数的变换及线性插值

如果我们知道了$X(\theta,\omega)$的特征函数,记为$\varphi_{\theta}(\xi)$,就可以按照 Feng 等[5]给出的 Hilbert 变换来近似计算$X(\theta,\omega)$的分布函数,由下式给出:

$$F_{h,M}(\theta,x)=$$
$$\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{m=-M}^{M}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\left(mh-\frac{1}{2}h\right)}\frac{\varphi_{\theta}\left(mh-\frac{1}{2}h\right)}{\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi}$$

上式给出了$X(\theta,\omega)$的(近似)分布函数在给定的点上的取值.根据$X(\theta,\omega)$的特征函数$\varphi_{\theta}(\xi)$,我们可以得到$X(\theta,\omega)$密度函数的双边 Laplace 变换$L(p)=\varphi_{\theta}(-p/\mathrm{i})$,$p=\sigma+\mathrm{i}\xi$.令

$$x_0=E_{\theta}[f(X(\theta,\omega))]=-\frac{\mathrm{d}L(p)}{\mathrm{d}p}\Big|_{p=0}.$$

考虑区间$[x_{k\min},x_{k\max}]$,令$\eta=x_k-x_{k-1}$,$k_{\min}<k<k_{\max}$,$x_k=x_0+k\eta$,$x_{-k}=x_0-k\eta$.根据线性插值法,可以构造分布函数$F(\theta,x)$的近似计算公式:

$$\hat{F}(\theta,x)=$$
$$\begin{cases}0, & x\leqslant x_{k\min};\\ F_{h,M}(\theta,x_{k-1})+\frac{F_{h,M}(\theta,x_k)-F_{h,M}(\theta,x_{k-1})}{\eta}(x-x_{k-1}), & \\ \quad x_{k-1}<x<x_k; & \\ 1, & x\geqslant x_{k\max}.\end{cases}$$

其中,$k_{\min}\leqslant k\leqslant k_{\max}$.在选取$x_{k\min}$,$x_{k\max}$时,为保证误差较小,需尽量使得$\hat{F}(\theta,x_{k\min})\to 0$,$\hat{F}(\theta,x_{k\max})\to 1$.另一方面,为了保证分布函数的单调性,若$\hat{F}(\theta,x_{k-1})>\hat{F}(\theta,x_k)$,我们令$\hat{F}(\theta,x_{k-1})=\hat{F}(\theta,x_k)$.这样,让$\hat{F}(\theta,x)$对$x$求导就可以得到密度函数$p_{\theta}(x)$的近似计算:

$$\hat{p}_{\theta}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant x_{k\min}\text{ 或 }x\geqslant x_{k\max};\\ \frac{F_{h,M}(\theta,x_k)-F_{h,M}(\theta,x_{k-1})}{\eta}, & \\ \quad x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k, k_{\min}\leqslant k\leqslant k_{\max}. & \end{cases}$$

在以上的计算中,如果我们选取合适的M,h,η,$x_{k\min}$,$x_{k\max}$,可以使得误差在一个很小的可控范围内,这样就可以保证计算的准确性.

1.3 Monte Carlo 模拟仿真

令$\frac{\partial F(\theta,x)}{\partial\theta}=G(\theta,x)$.通过线性插值法,我们已经构造出$F(\theta,x)$的近似计算公式,同理我们也可以构造出$G(\theta,x)$的近似计算,构造方式如下:

$$\hat{G}(\theta,x)=$$
$$\begin{cases}0, & x\leqslant x_{k\min}\text{ 或 }x\geqslant x_{\max};\\ G_{h,M}(\theta,x_{k-1})+\frac{G_{h,M}(\theta,x_k)-G_{h,M}(\theta,x_{k-1})}{\eta}(x-x_{k-1}), & \\ \quad x_{k-1}<x<x_k. & \end{cases}$$

其中,$k_{\min}\leqslant k\leqslant k_{\max}$,并且$G_{h,M}(\theta,x)$的计算公式如下:

$$G_{h,M}(\theta,x)=\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{m=-M}^{M}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\left(mh-\frac{1}{2}h\right)}\frac{\psi_{\theta}\left(mh-\frac{1}{2}h\right)}{\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi}.$$

这样我们可以基于近似分布函数$\hat{F}(\theta,x)$来生成随机样本,例如$\{\hat{X}_i,i=1,2,\cdots,N\}$,并且带入上述公式,得到$\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}\theta$的模拟仿真估计量$\mathrm{d}\hat{\alpha}/\mathrm{d}\theta$:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\alpha}}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}f'(x)\frac{\hat{G}(\theta,x)}{\hat{p}_{\theta}(x)}\Big|_{x=\hat{X}_i}.$$

通过上述讨论,基于特征函数的逆变换以及线性插值的方法,我们构造了欧式期权风险对冲参数

的模拟仿真估计量.在下一节我们将通过两个数值例子来验证该估计量的计算效率,并与文献中的方法作比较.

2 数值计算

假设资产价格的变动服从过程 $S(t)=\exp\{X(\theta,\omega(t))\}$,其中,$X(\theta,\omega(t))$是一个关于 θ 的随机过程,$\omega(t)$是一个与 θ 无关的随机过程.下面我们将考虑 $X(\theta,\omega(t))$分别是 CGMY 过程和 Variance-Gamma 过程时,欧式看涨期权和亚式期权的风险对冲参数的数值计算.

2.1 CGMY 过程与 Variance-Gamma 过程

当 $X(\theta,\omega(t))$为 CGMY 过程时,令其初始值 $X(\theta,\omega(0))=\ln S_0$, $S_0\in\mathbb{R}$,其特征函数由下式给出:

$$\varphi_\theta(\xi)=\exp\{i\xi(\ln\theta+t\mu)-tC\Gamma(-Y)(M'^Y-(M'-i\xi)^Y+G^Y-(G+i\xi)^Y)\}$$

其双边拉普拉斯变换如下:

$$L(p)=\exp\{-p(\ln\theta+t\mu)-tC\Gamma(-Y)(M'^Y-(M'+p)^Y+G^Y-(G-p)^Y)\}$$

式中,

$$C>0,\ G>0,\ M'>0,\ 0<Y<2,$$
$$\mu=r-q-C\Gamma(-Y)\cdot((M'-1)^Y-M'^Y+(G+1)^Y-G^Y),$$

并且 $\Gamma(\cdot)$是 gamma 函数.

当 $X(\theta,\omega(t))$为 Variance-Gamma 过程时,其傅里叶变换如下:

$$\varphi_\theta(\xi)=\theta^{i\xi}\exp(at\xi i)\left(\frac{1}{1-\theta'\nu\xi i+\rho^2\nu\xi^2/2}\right)^{t/\nu}.$$

其双边拉普拉斯变换如下:

$$L(p)=\theta^{-p}\exp(-atp)\frac{1}{(1+\theta'\nu p-(\rho^2\nu p^2)/2)^{t/\nu}}.$$

式中,$a=r+\frac{1}{\nu}\ln(1-\theta'\nu-\rho^2\nu/2)$,$r,\rho,\nu,\theta'$是模型的参数.

2.2 期权价格对初始价格的敏感度

当执行价格为 K,到期日为 T,无风险利率为 r,初始价格为 S_0 时,欧式看涨期权的价格为

$$V_\theta(T,K)=\exp(-rT)E[(S(t)-K)^+]=E[\exp(-rT)(\exp\{X(\theta,\omega(T))\}-K)^+]:=E[h(X(\theta,\omega(T)))1_{\{X(\theta,\omega(T))\geq\ln K\}}]$$

考虑期权价格对初始价格 S_0 的敏感度,则 $\theta=S_0$.

2.3 计算结果

在数值实验中,CGMY 过程的模型参数取值如下:

$$C=4,\ G=50,\ M'=60,$$
$$Y=0.7,\ r=0.05,\ q=0.02,$$
$$T=0.5,\ d=6,\ \theta=K=1.$$

表 1　CGMY 过程下的数值算法的参数设置

Tab.1　Parameters in numerical algorithms for CGMY processes

亚式期权($i=2,3,\cdots,d$)							
$k^1_{\min}$	$k^1_{k_{\min}}$	$x^1_{k_{\max}}$	x^1_0	$x^1_{k_{\max}}$	h^1	M^1	η^1
−741	686	−0.264	0.000 8	0.246	9.253	28	0.000 357 4
$k^i_{\min}$	$k^i_{\max}$	$x^i_{\min}$	x^i_0	$x^i_{\max}$	h^i	M^i	η^i
−210	215	−0.209 2	0.000 8	0.215 8	0.5	80	0.000 1
欧式看涨期权							
$k_{\min}$	$k_{\max}$	$x_{k\min}$	x_0	$x_{k\max}$	h	M	η
−65	59	−0.644 915	0.005 085	0.595 085	4.342	43	0.01

Variance-Gamma 过程的参数取值如下:

$$\theta=K=100,\ r=0.05,$$
$$\rho=0.2,\ \nu=1,\ \theta'=-0.15.$$

表 2　CGMY 过程下的欧式看涨期权的结果.精确值:0.566 8

Tab.2　Results for European call option under CGMY process. Exact value: 0.566 8

模拟次数	标准差		误差		敏感度		相对误差
×1 000	似然比	路径求导	似然比	路径求导	似然比	路径求导	
1	4.13E−2	1.75E−2	2.45E−3	2.52E−3	0.569 247	0.569 319	3.94E−4
4	2.06E−2	8.74E−3	−8.81E−4	4.39E−4	0.565 919	0.567 239	1.77E−3
16	1.03E−2	4.37E−3	8.31E−4	1.16E−4	0.567 631	0.566 915	1.74E−3
64	5.16E−3	2.19E−3	4.47E−5	6.77E−5	0.566 845	0.566 868	3.82E−4
256	2.58E−3	1.09E−3	−3.33E−4	−1.58E−5	0.566 467	0.566 784	8.83E−5
1 024	1.29E−3	5.46E−4	−3.02E−4	4.92E−5	0.566 5	0.566 8	0.000 18
4 096	6.44E−4	2.73E−4	−6.20E−4	−1.50E−5	0.56 618	0.566 79	0.000 59
16 384	3.22E−4	1.37E−4	−6.87E−4	−6.72E−5	0.566 113	0.566 733	6.19E−4

表 3 Variance-Gamma 过程下的数值算法的参数设置

Tab.3 Parameters in numerical algorithms for Variance-Gamma processes

$k_{\min}$	$k_{\max}$	$x_{k\min}$	x_0	$x_{k\max}$	h	M	η
−435	199	2.897 388	4.627 39	5.433 388	0.9	80	0.01

表 4 Variance-Gamma 过程下的欧式看涨期权的结果.精确值:0.728 2

Tab.4 Results for European call option under Variance-Gamma process. Exact value: 0.728 2

模拟次数 ×1 000	标准差		误差		敏感度		相对误差
	似然比	路径求导	似然比	路径求导	似然比	路径求导	
1	6.98E−2	1.73E−2	4.30E−3	1.07E−3	0.732 49	0.729 27	4.41E−3
4	3.62E−2	8.65E−3	7.00E−4	−9.55E−4	0.728 9	0.727 245	2.27E−3
16	1.78E−2	4.32E−3	−4.60E−3	−5.31E−4	0.723 599	0.727 669	5.62E−3
64	9.06E−3	2.16E−3	−3.45E−4	−6.74E−4	0.727 855	0.727 526	4.53E−4
256	4.53E−3	1.08E−3	−5.42E−4	−1.14E−4	0.727 657	0.728 086	5.89E−4
1 024	2.27E−3	5.41E−4	3.78E−4	−2.43E−4	0.728 578	0.727 957	8.53E−4
4 096	1.13E+3	2.70E−4	−2.07E−4	−2.52E−4	0.727 993	0.727 948	6.13E−5
16 384	5.67E−4	1.35E−4	−1.91E−4	−2.11E−4	0.728 009	0.727 989	2.74E−5

表 1 和表 3 分别给出了在 CGMY 过程和 Variance-Gamma 过程下用于构造$\hat{G}(\theta,x)$,$\hat{p}_\theta(x)$以及$\hat{F}(\theta,x)$的各参数的取值.在选取这些数值时,我们不仅要保证所构造的每个近似函数要满足的概率性质,同时也要所产生的误差尽量小.表 2 和表 4 分别给出了在 CGMY 过程和 Variance-Gamma 过程下欧式看涨期权的敏感度计算结果.通过比较我们可以发现,相对于似然比求导法,路径求导法的标准差明显较小.另一方面,对于两种估计方法的误差(即估计量的偏差(bias),定义为估计值与精确值的差),我们可以看到表中给出的相对误差值均小于 0.01,所以两种方法所产生的误差并没有显著差别.所以综合来看,路径求导法给出的估计量,其均方差较小,因此其是一个更好的计算敏感度的方法.

3 结论

本文首次提出基于路径求导和随机变量求导相结合的方法,在 Lévy 过程下计算期权价格的敏感度值,也就是期权的风险对冲参数值.通过数值计算的比较,我们所给出的方法具有较小的均方差.因此相比于文献中已有的似然比方法,在计算期权的敏感度时,路径求导法是一个更好的选择.但是本文还存在不足之处,没有给出在路径求导法下对敏感度估计的误差边界,今后我们将沿着这个方向进行深入的研究.

参考文献(References)

[1] GLASSERMAN P. Monte Carlo Method in Financial Engineering [M]. New York : Springer, 2004: 386-396.

[2] GLASSERMAN P, LIU Z J. Sensitivity estimation from characteristic functions[J]. Operations Research, 2010, 58(6): 1 611-1 623.

[3] LIU G W, HONG L. Kernel estimation of the Greeks for options with discontinuous payoffs [J]. Operations Research, 2011, 59(1): 96-108.

[4] CHEN N, LIU Y C. American option sensitivities estimation via a generalized perturbation analysis approach [J]. Operations Research, 2014, 62(3): 616-632.

[5] FENG L M, LIN X. Inverting analytic characteristic functions and financial applications[J]. SIAM Journal on Financial Mathematics, 2013, 4(1): 372-398.