

## 基于 Merton 模型与 Monte Carlo 模拟的障碍期权定价对冲

郑祥, 韦勇凤

(中国科学技术大学管理学院统计与金融系, 安徽合肥 230026)

**摘要:** 障碍期权是国内 OTC 市场报价交易频繁的一种典型期权, 该类期权偿付的跳跃结构和路径依赖性使得障碍期权的对冲一直是业界技术难题. 通过对挂钩沪深 300 指数的向上敲出障碍期权的定价对比分析, 设计了一款适用于目前国内金融市场的障碍期权的对冲策略. 主要通过 Black-Scholes-Merton 模型解析解和 Monte Carlo 模拟方法进行期权定价和分析障碍期权的 Greeks 的变动情况, 依据 delta 的变化进行静态复制最大成本的测算和动态障碍价格外移边界的分析以及 10 000 条指数路径的模拟对冲, 分析其平均对冲成本和极值效应, 并选取 2011~2016 年沪深 300 指数实际样本进行对冲策略的回测. 结果显示在遍历法触发式外移障碍边界的对冲思路下对冲平均成本显著降低, 同时对冲极值和分位数的分布相对平滑, 这反映了对冲策略表现良好, 实现了障碍期权的有效对冲.

**关键词:** 障碍期权; 期权定价; 期权对冲; Monte Carlo 模拟; Merton 模型

**中图分类号:** F830.9; O212      **文献标识码:** A      doi: 10.3969/j.issn.0253-2778.2018.11.007

**引用格式:** 郑祥, 韦勇凤. 基于 Merton 模型与 Monte Carlo 模拟的障碍期权定价对冲[J]. 中国科学技术大学学报, 2018, 48(11): 906-922.

ZHENG Xiang, WEI Yongfeng. Pricing and hedging barrier options based on Merton model and Monte Carlo simulation[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2018, 48(11): 906-922.

### Pricing and hedging barrier options based on Merton model and Monte Carlo simulation

ZHENG Xiang, WEI Yongfeng

(Department of Statistics and Finance, School of Management, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

**Abstract:** Barrier options as typical exotic options are trading frequently at the domestic OTC (over-the-counter) market, whose jumping structure and path dependence make the hedge method a constant problem for the industry. Here a barrier options hedge strategy applicable to current domestic financial market was designed by a comparative analysis for pricing the up-and-out barrier options of the CSI 300 index. The barrier options price and the Greeks change were analyzed through the analytical solution of the Black-Scholes-Merton model and numerical solution of the Monte Carlo simulation method. According to the simulated 10 000 index path of hedge and the variation of delta, the static replicate maximal cost was enumerated and options dynamic barrier out-shift boundary was deduced for analyzing the average hedge cost and extreme effect. 2011~2016 actual CSI 300 was selected to back-test and verify the effectiveness of the hedge strategy. The results show that the hedge average cost is significantly reduced under the hedge

收稿日期: 2017-09-11; 修回日期: 2017-12-08

作者简介: 郑祥, 男, 1992 年生, 硕士. 研究方向: 金融工程与风险管理. E-mail: xzheng1@mail.ustc.edu.cn

通讯作者: 韦勇凤, 博士/讲师. E-mail: yfwei@ustc.edu.cn

idea of the traversal trigger outward moving barrier boundary, and that the distribution of the hedge extremes and quantiles is relatively smooth, which reflects the good performance of the hedge strategy and the effective hedge of the barrier option.

**Key words:** barrier options; option pricing; option hedging; Monte Carlo simulation; Merton model

## 0 引言

障碍期权是一种路径依赖型期权,其收益结构通常可由普通欧式看涨/看跌期权的结构性变化而成.向上敲出障碍期权的收益取决于期权存续期内标的资产价格是否达到障碍价格,若达到障碍价格或者击破障碍价格则期权被敲出作废,否则,该期权的行权收益与普通欧式看涨期权相同.由于障碍期权对于潜在收益最大值的可控效应使得障碍期权费用低廉,颇受投资者的青睐.障碍期权的发行者亦可限定价格上行或下行时作为期权义务的最大损失.国内金融市场目前没有完备的期权市场,关于障碍期权的报价交易普遍存在于 OTC 市场,而作为期权发行者却苦于没有合适的障碍期权对冲方案,造成对冲成本过高,收益存在不稳定性和风险性.本文通过挂钩沪深 300 指数的向上敲出障碍期权探索适用于国内市场障碍期权发行的定价工具与对冲策略.

## 1 文献综述

在障碍期权的定价研究方面,基于 Black-Scholes 模型下<sup>[1]</sup>,Merton<sup>[2]</sup>最早发表有关障碍期权的论文,提出了向下单边敲出看涨期权的解析解公式,向下敲出期权类似于普通欧式期权,但是当价格达到预先设定的较低的障碍价格时,期权被敲出作废.之后,Reinner 和 Rubinstein<sup>[3]</sup>通过一系列共有因子推导出标准障碍期权的定价公式,这些解析解公式至今仍是业界使用较为普遍的计算障碍期权理论价格的定价方式.此后,Heynen 和 Kat<sup>[4,5]</sup>,Carr<sup>[6]</sup>研究了部分障碍期权和彩虹障碍期权的定价方法,而对于障碍期权的数值解分析方式,主要有有限差分法<sup>[7]</sup>和 Monte Carlo 模拟方法<sup>[8]</sup>.本文对障碍期权的定价恰恰结合了 Black-Scholes-Merton 模型解析解和 Monte Carlo 模拟数值解,通过对定价结果的分析阐述,论证了向上敲出障碍期权定价结果之间的差异,为后续研究障碍期权的对冲做定价基础.

对于障碍期权的对冲,学术界主要有两类方法:静态复制和动态对冲. Merton<sup>[2]</sup>以其自身对障碍期权显示解的研究,通过计算在该显示解下的 delta 进行动态对冲,然而他表示障碍期权的 delta 在障

碍价格边界附近波动剧烈频繁,尤其是期权存续期将截止并且价格在障碍价格附近时 gamma 值和 theta 值很大,对冲效果不理想.动态对冲成本的过高使得学者们研究出静态复制这一理论. Derman 等<sup>[9]</sup>以及 Carr 等<sup>[10-12]</sup>相继提出使用一系列与挂钩标的障碍期权头寸相反的普通欧式期权进行复制交易,这些普通欧式期权具有不同的执行价格和不同的到期期限,从而匹配障碍期权障碍价格附近的期权偿付结构.在 Carr<sup>[12]</sup>等设定的框架中,对标的资产的价格过程进行了限制,其假定漂移率为 0,同时假设波动率具有某种波动率特征,在这些假定下推出了 Put-Call-Symmetry,并在此基础上推出了各种障碍期权的严格复制方法.但是这个框架之中的假设太过苛刻,因此在放开漂移率为 0 的假设后,便只能找到障碍期权价值的上界和下界,不能准确复制了. Carr 等<sup>[11]</sup>此后拓展了静态复制的框架,引入系统波动率框架;而 Derman 等<sup>[9]</sup>没有对漂移率做假设,但对期权品种有所要求;Chou 等<sup>[12]</sup>对漂移率进行了修正,提出需要一系列执行价不同,但到期期限一致的普通期权.

基于静态复制和动态对冲障碍期权的方法,部分学者针对交易费率和动态对冲的频率进行对冲敏感性的研究<sup>[13-15]</sup>. Tompkins<sup>[13]</sup>通过 Monte Carlo 模拟仿真标的资产的路径,进行 delta 动态对冲并比较 Carr 静态复制模型下交易费用,结果显示动态对冲时交易费用会增加成本 8.5%,而静态复制只增加 0.06%,表明静态复制是一种比较稳妥的方法. Cvitanic 等<sup>[14-15]</sup>利用 super-replication 复制奇异期权的封闭解以及根据随机波动率框架下的期权复制,解决了在交易费用下静态复制对波动率对称性的依赖.而 Jun 等<sup>[16]</sup>基于反射原理提出了使用一系列欧式和同类奇异期权进行障碍期权的静态复制.

然而上述方法在实际操作中面临着一些困难,首先这种静态复制的方法要求市场上标的资产进行连续性报价交易,这在实践中是不可能的,因此交易者通过在规定的时间内交易——这就产生了对冲误差,这也意味着在不断的交易时间间隔内发生诸多交易成本,这种通过大量头寸复制一个非线性损益组合在实际中也只能做到近似复制.其次,

super-replication 最大的缺陷在于将模型复杂化,其依赖于非常严格的数学证明,造成由期权市场交易带来的合约价格波动误差。

本文将在前人的基础上,结合静态复制与动态对冲的优缺点,通过有解析解的 Black-Scholes-Merton 模型和有数值解的 Monte Carlo 模拟比较定价结果的差异,进而分析障碍期权希腊值的变动情况,借鉴 super-replication 思路,通过在 Carr 模型静态复制下计算复制最大成本和障碍价格对冲的外移边界,通过单纯外移、蝶式外移、价差外移、遍历法触发式外移等结构进行动态对冲,实现障碍期权动态对冲的有效改进,探索适合国内机构障碍期权发行者的动态对冲思路。

## 2 Black-Scholes-Merton 模型解析解与 Monte Carlo 模拟数值解

### 2.1 Black-Scholes-Merton 模型解析解

在 Black-Scholes-Merton 模型假设下,障碍期权的定价可归结为求解抛物型偏微分方程的混合问题,对于该收益结构的产品为向上敲出障碍期权,向上敲出的障碍期权满足以下偏微分方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial c}{\partial S} - rc = 0, \\ c(S, T) = (S - X)^+, \\ c(H, t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

该向上敲出障碍期权定解区域为  $D = \{(S, t) \mid 0 \leq S \leq H, 0 \leq t \leq T\}$ , 当标的资产价格  $S \geq H$ , 期权失效。

对于式(1),学术界基于伊藤随机微分方程和风险中性定价原理,可以得到障碍期权定价的解析解公式。需要注意的是,根据障碍价格水平  $H$  是否高于执行价格  $X$ ,其解析解的定价公式并不相同。Reniner 和 Rubinstein<sup>[18]</sup> 推导出标准障碍期权的定价公式,障碍期权有向上、向下、敲出、敲入等不同分类,而本文研究对象主要为向上敲出障碍期权( $S < H$ )。Black-Scholes-Merton 模型下的定价方法为

$$\begin{aligned} C_{\text{up-and-out}}(S, t) = & S e^{-q(T-t)} \left[ (N(d_1) - N(d_5)) - \left(\frac{S}{H}\right)^{\frac{2}{\sigma^2}(r-q)-1} (N(d_3) - N(d_7)) \right] - \\ & K e^{-r(T-t)} \left[ (N(d_2) - N(d_6)) - \left(\frac{S}{H}\right)^{\frac{2}{\sigma^2}(r-q)+1} (N(d_4) - N(d_8)) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{-\ln \frac{S}{H} - \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= d_1 + \sigma \sqrt{T-t}, \\ d_3 &= \frac{\ln \frac{S}{H} - \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}, \\ d_4 &= d_3 + \sigma \sqrt{T-t}, \\ d_5 &= \frac{-\ln \frac{X}{S} - \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}, \\ d_6 &= d_5 + \sigma \sqrt{T-t}, \\ d_7 &= \frac{-\ln \frac{SX}{H^2} - \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}, \\ d_8 &= d_7 + \sigma \sqrt{T-t}, \end{aligned}$$

式中,  $S$  为指数价格,  $X$  为期权的执行价格,  $H$  为障碍水平,  $K$  为期权发生敲入或者敲出后的支付,  $T$  为到期时间,  $r$  为无风险利率,  $q$  为红利率,故而若期权到期时间内价格未曾击破障碍水平和击破障碍水平下该期权的收益为

$$\text{Payoff} = \begin{cases} \max(S - X, 0), & \text{if } S < H \text{ before } T; \\ K, & \text{at hit} \end{cases} \quad (3)$$

本文主要将 Black-Scholes-Merton 模型定价公式与 Monte Carlo 模拟定价做定价对比分析,解析解公式详细证明可参考文献[2,3]。

根据 Black-Scholes-Merton 模型解析解定价公式,绘制向上敲出障碍期权的价值曲线图,通过改变期限参数判断障碍期权价值曲线走向,并将其价值曲线与普通欧式期权价值曲线相比较,分析该奇异期权的优势所在(图 1, 图 2)。如图 1(a)所示,向上敲出障碍期权的价值随标的价格走势呈现倒 U 型走势,当标的走势逐渐向障碍水平趋近时,期权价值逐步增加后急转直下。而对于期权的存续时间而言,期限越小,期权被敲出的概率越小,价值越高,峰度越高,当期权期限无限逼近于障碍水平时,此为期权收益,其在障碍水平附近收益存在跳跃性(图 1(b))。相较于香草期权,障碍期权由于收益结构的跳跃性使得潜在收益低,因而价格更便宜(图 2(a));此外与普通欧式看涨期权不同的是,普通欧式期权随着期权从虚值进入实值状态价格不断升高,而向上敲出障碍期权却呈现山坡状,这是由于障碍价格的存在使得期权价值不可能一直增大(图 2

(b). 另一方面,从图 1,2 中我们能够看到,标准的障碍期权在标的资产价格逐步接近障碍值时进行 delta 对冲时比较困难,当标的资产价格接近障碍值时,障碍期权价格急转直下,这意味着在障碍值价格

水平附近,障碍期权 delta 的变动十分剧烈. 对于期权卖方而言,对冲的难度变得很大,主要是因为障碍期权在此时有很高的 gamma 风险.

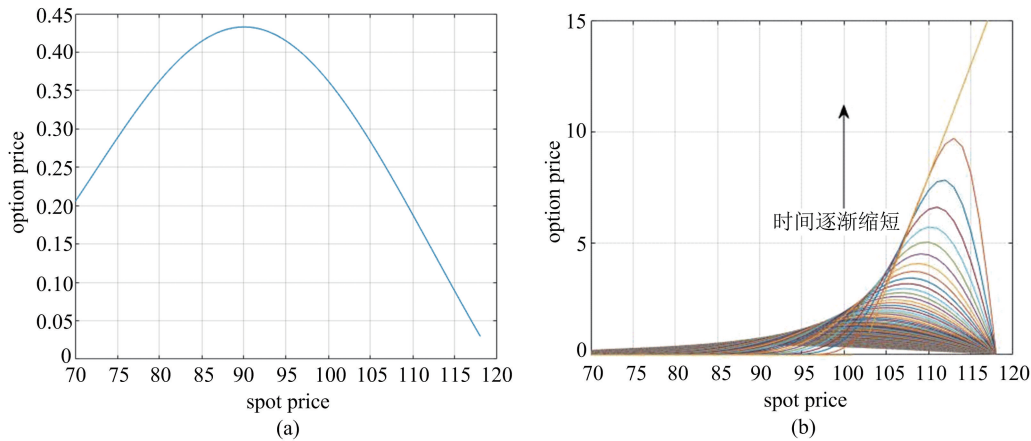
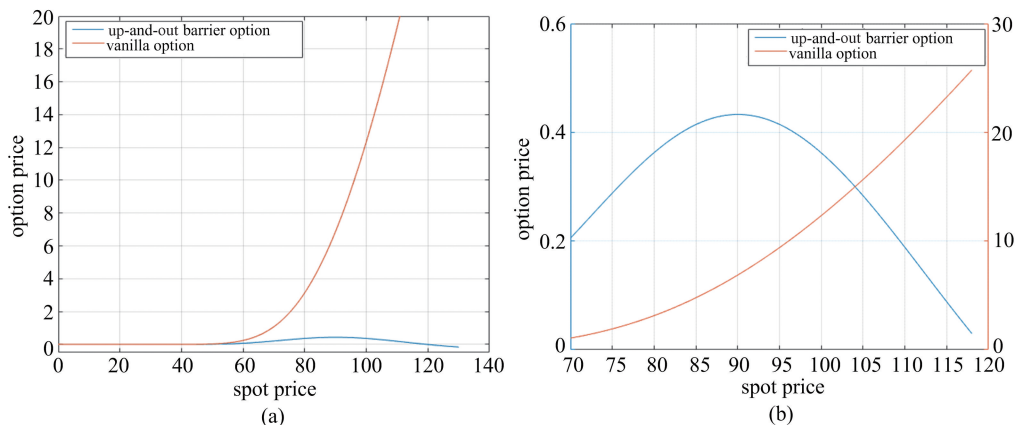


图 1 向上敲出障碍期权价值曲线图

Fig. 1 The value curve of up-and-out barrier option



定价参数:  $S=100, X=102, H=118, r=0.07, \sigma=0.25, K=0.03, T=1, q=0$

图 2 障碍期权与香草期权价值对比图

Fig. 2 Value comparison of barrier options and vanilla options

### 2.2 Monte Carlo 模拟定价数值解

Monte Carlo 模拟方法是在风险中性世界(标的资产的收益率等于无风险利率,与标的资产自身无关),通过数值方法模拟,随机产生若干条标的资产的价格路径,取各路径收益的均值,再以无风险利率进行贴现得到期权的价格. 根据上述分析得到 Monte Carlo 定价方法如下:

$$C(S_t, \tau) = I(S_{t|\max} < H) \exp(-r\tau) E^Q[V(S_t, \tau) | F_t] = I(S_{t|\max} < H) \exp(-r\tau) E^Q[\max(S_T - X, 0)].$$

其中,

$$S_T = S_t \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau + \sigma(W(T) - W(t))\right) =$$

$$S_t \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau + \sigma\sqrt{\tau}\epsilon\right), \epsilon \sim N(0, 1);$$

$$V(S_T, 0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V(S_{T,i}, 0),$$

$$C(S_0, 0) = \exp(-rT) V(S_T, 0).$$

利用 Monte Carlo 模拟 10000 条价格路径,每条路径设定步数为 2000 步,依次进行 50 次计算可以分别得到障碍期权价值均值与方差. 通过计算不同年度下障碍期权的价值,并将其结果与 Black-Scholes-Merton 模型下解析解定价结果相比较,结果如表 1,2 所示. 通过表 1,2 的解析结果和模拟结果可以看出, Black-Scholes-Merton 模型下和 Monte Carlo 模拟下期权价格差异化很小,模拟定

价显示较为稳定. 此外, 我们绘制了 60 日滚动历史波动率 (sigma60)、180 日滚动历史波动率 (sigma180)、Garch (1, 1) 模型下估计的波动率 (sigmaGarch) 对期权价格的影响图示 (图 3), 时间窗口选择 2009~2016 年, 对比沪深 300 指数波动率走势图可以清楚地看到 2015 年熊市转换期间, 当波动率走高时, 恰恰是障碍期权的价值进入低谷期的阶段; 而当波动率走低时, 恰恰是障碍期权价值较高的阶段. 譬如在 2016 年下半年至 2017 年中, 波动率处于历史低点, 障碍期权价格较高. 其原因主要在于敲出障碍期权的收益结构决定了当波动率较高时, 障碍期权敲出概率大, 潜在收益低, 自然期权的价值也就低, 反之亦然.

表 1 历史波动率下障碍期权价值比较

Tab. 1 Value comparison of barrier options under historical volatility

年份	历史波动率 $\sigma$	期限 T/a	Black-Scholes-Merton 模型	Monte Carlo 模拟	模拟方差
2009	0.361 4	1	0.143 8	0.138 2	0.000 085
2010	0.272	1	0.292 9	0.302 4	0.000 209
2011	0.219 8	1	0.498 7	0.516 2	0.000 351
2012	0.201 3	1	0.617 3	0.642 7	0.000 519
2013	0.223 6	1	0.478 2	0.497 5	0.000 339
2014	0.198 5	1	0.638 3	0.664 5	0.000 406
2015	0.432 2	1	0.094 2	0.087 6	0.000 064
2016	0.230 4	1	0.444 0	0.463 3	0.000 353

[注] 定价参数:  $S = 100, X = 102, H = 118, r = 0.07, \sigma = 0.25, K = 0.03, T = 1, q = 0.$

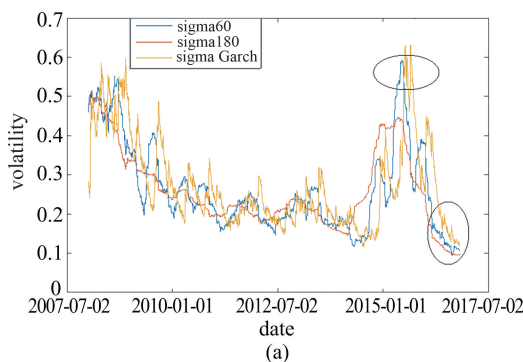


图 3 沪深 300 指数波动率走势 (a) 及期权价值走势 (b)

Fig. 3 CSI 300 index volatility trend (a) and option value movements (b)

### 2.3 障碍期权 Greeks 风险分析

进一步地, 为了更好地对冲障碍期权, 需要了解障碍期权的希腊值的变化情况. 我们通过中心差分法给出不同存续期下障碍期权 Greeks (图 4). 中心差分法计算障碍期权不同希腊字母的计算方法如下:

$$\Delta = \frac{F(S + \Delta S) - F(S - \Delta S)}{2\Delta S} \quad (4)$$

$$\Gamma = \frac{F(S + \Delta S) - 2F(S) + F(S - \Delta S)}{\Delta S^2} \quad (5)$$

$$V = \frac{F(\sigma + \Delta\sigma) - F(\sigma - \Delta\sigma)}{2\Delta\sigma} \quad (6)$$

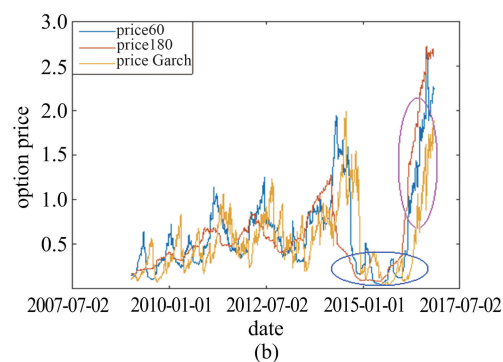
无论是基于解析解的定价结果还是基于 Monte Carlo 模拟下的定价结果均向我们揭示了一个规律: 市场定价的无差异化使得各家机构间报价交易的期权产品价值无异, 而能够通过不断发行产品获得持续收益则必定要做好对冲工作, 对冲成本越低则收益越高. 通过对比在 60 日历史波动率, 180 日历史波动率, Garch(1, 1) 波动率下障碍期权价值变化曲线 (图 3), 我们发现, 当波动率较低时, 障碍期权的价值普遍较高; 反之, 波动率较高时, 其障碍期权的价值普遍较低, 这与普通看涨期权的价值变化恰好相反. 同时也就意味着作为期权发行者而言, 当市场上的波动较缓时, 欧式期权的期权费收入会缩水, 而障碍期权的价值较高, 期权费收入较高.

表 2 已实现波动率下障碍期权价值比较

Tab. 2 Value comparison of barrier options under realized volatility

年份	已实现波动率 $\sigma$	期限 T/a	Black-Scholes-Merton 模型	Monte Carlo 模拟	模拟方差
2009	0.322 7	1	0.190 4	0.189	0.000 118
2010	0.246 9	1	0.373 7	0.386 5	0.000 207
2011	0.203 2	1	0.603 5	0.625 8	0.000 486
2012	0.198 3	1	0.639 8	0.663 4	0.000 332
2013	0.216	1	0.520 5	0.540 2	0.000 542
2014	0.190 6	1	0.702 8	0.729 6	0.000 613
2015	0.389 8	1	0.119 8	0.116 1	0.000 090
2016	0.208 7	1	0.565 9	0.585 7	0.000 469

[注] 定价参数:  $S = 100, X = 102, H = 118, r = 0.07, \sigma = 0.25, K = 0.03, T = 1, q = 0.$



$$\Theta = \frac{F(t) - F(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (7)$$

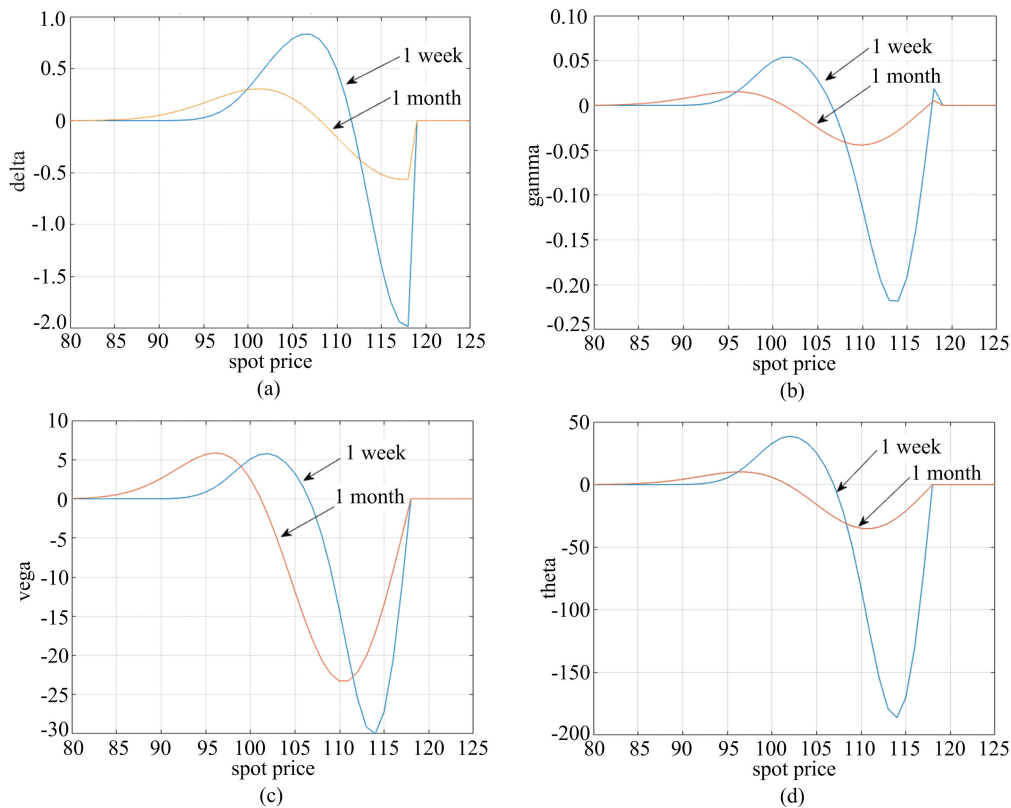
$$\rho = \frac{F(r + \Delta r) - F(r - \Delta r)}{2\Delta r} \quad (8)$$

式中,  $\Delta$  代表 delta,  $\Gamma$  代表 gamma,  $V$  代表 vega,  $\Theta$  代表 theta;  $\rho$  代表 rho.

障碍期权由于其特性,在敲入或者敲出后 delta 会瞬间清零,从图 4 我们可以看到,障碍期权的 gamma 在执行价格附近达到最大值,进而随着标的资产价格的增长急转直下,尤其是在临近障碍价格附近变动明显.同时也说明了障碍期权的 delta 在临近障碍价格时变动剧烈,造成动态对冲交易频繁,交易成本上升,冲击成本增高.vega 随着标的资产价格上升,其绝对值不断变大,尤其是在标的资产向障碍值逼近中,期权价值对波动率的敏感性会急剧上升;theta 也反映了在期权临近障碍值附近时时间价值骤然下降;而 rho 总体而言对障碍期权价值变化的敏感性较为稳定.而对于期权卖方而言,当标的资产价格接近障碍值时,期权卖方需要大量卖出标的资产,以使 delta 由负值变为零.同时,缺点也很

明显,一旦没有触线,需要重新买回标的资产的头寸,而由于此时价格已经接近障碍值,大量买进的操作也会助推标的资产价格进一步上涨,使其更有可能达到障碍值.

定价结果的无差异化使得我们继续探究障碍期权在 Black-Scholes-Merton 模型解析解和 Monte Carlo 模拟数值解下不同希腊风险值的差异,这里主要探讨 delta 风险.在图 4 中,随着标的价格向上逐渐接近于期权执行价格,向上敲出障碍期权由深度虚值向实值转变,其 delta 在这一阶段的走势类似与普通看涨期权,但当标的价格大于执行价格并接近于障碍水平时,期权价格由于敲出概率增大而迅速贬值.当期权发生敲出之后 delta 骤降为 0;而对于同一障碍期权不同存续期下希腊字母走势虽然具有相似性,即当标的价格高于期初价格时期权 delta 为负,且随着标的价格靠近障碍价格时 delta 增大,持续到期权敲出 delta 变为 0,但相较于长存续期,存续期较短的障碍期权 delta 变化更加剧烈,这均有异于普通看涨期权的 delta 值变动,也即意味着对冲难度高,冲击成本高.



Greeks 计算参数:  $S=100, X=102, H=118, r=0.07, \sigma=0.25, K=0.03, T=1, q=0$ .

图 4 向上敲出看涨障碍期权希腊值

Fig. 4 Greek value of up-and-out barrier option

### 3 障碍期权的对冲

#### 3.1 Monte Carlo 模拟对冲

障碍期权的对冲涉及两大对冲方法:静态对冲方法和动态对冲方法.

所谓静态对冲方法所依据的原理是 Carr 等<sup>[11]</sup>提出的等价模型,其指出障碍期权与同期限的欧式期权的某种组合在一定条件下是等价的,因此在卖出障碍期权后直接到场内具有期限匹配的欧式期权市场上根据等价公式构造欧式期权的某种组合,其等价于买入一个障碍期权,这就对冲了原先卖出障碍期权的风险,由于两种组合等价,买入欧式期权组合之后在到期日之前就无须调整.但是在中国现有资本市场环境下,由于场内交易的期权还未推出,场外期权都是由机构定制的,缺乏完备的期权市场.可供选择的金融产品尚缺,相应的静态对冲较难实现.

动态对冲方法是在发行障碍期权后,动态计算障碍期权对特定风险因素的敏感性,然后用同一标的资产的其他产品来动态对冲障碍期权的涨跌风险.这一对冲方式需要不断调整其他对冲产品头寸的数量.其复制原理就是类似于对冲卖空看涨期权后进行 delta 动态对冲的过程,不断调整现货保持持有 delta 值头寸,来模拟持有障碍期权时所持有的 delta 头寸,这样持续直至标的资产价格超过敲出价格  $H$  较远时,停止动态对冲过程,或者持续至期权合约到期结束.

我们先在理想状态下做障碍期权的模拟对冲:先通过 Monte Carlo 方法模拟出 10000 条沪深 300 指数价格路径,同时假设使用沪深 300 股指期货来对冲,假设其价格与股指现货的价格一致,或者在变动上同步,这样一来我们就可以在理想的状态下,比

较不同对冲策略的对冲效果.标的资产现价 100,执行价格 102,障碍价格 118,到期时间为 1 年,波动率为固定历史波动率 25%.用 Black-Scholes-Merton 模型和 Monte Carlo 模拟进行定价,分别为:0.3622 和 0.3712.市场定价结果的无差异化使得期权发行者更关心的是期权产品发行后对冲成本的总体差异以及可能出现的巨额亏损.因此我们通过 Monte Carlo 模拟产生 2000 步共 10000 条路径,共模拟对冲 10000 次.表 3 列出了期权对冲结果的主要统计指标.

表 3 delta 动态对冲结果

Tab. 3 Result of dynamic hedging for delta

动态对冲 平均成本	标准 差	峰度	极大 值	上 5% 分位数	上 1% 分位数
1.1829	1.9455	16.63	23.39	7.7781	11.4999

从表 3 可以看出,模拟对冲 10 000 次后,平均成本不仅没有收敛到期权价值,而且对冲成本是期权价值的近 4 倍.从标准差、极值、分位数等的结果分析,产生的极值路径很多,而且极值很大,也即对冲的极端风险很大.在 Monte Carlo 模拟对冲 10000 次的结果中,可以分别得到 delta 对标的价格走势的敏感性和对冲成本的分布情况(图 5),从图 5 可以看到,随着到期日的临近与障碍价格的迫临,障碍期权的 delta 一度达到 -12,对冲成本的分布集中于 0~4 之间,delta 的剧烈变动和对冲成本的巨大都表明在模拟动态 delta 对冲下,出现极值的路径概率大,对冲误差的持续放大造成对冲成本的骤然增高.我们也不难发现,在对冲成本中右方出现拖尾现象,说明期权发行者对冲时会出现巨额亏损.

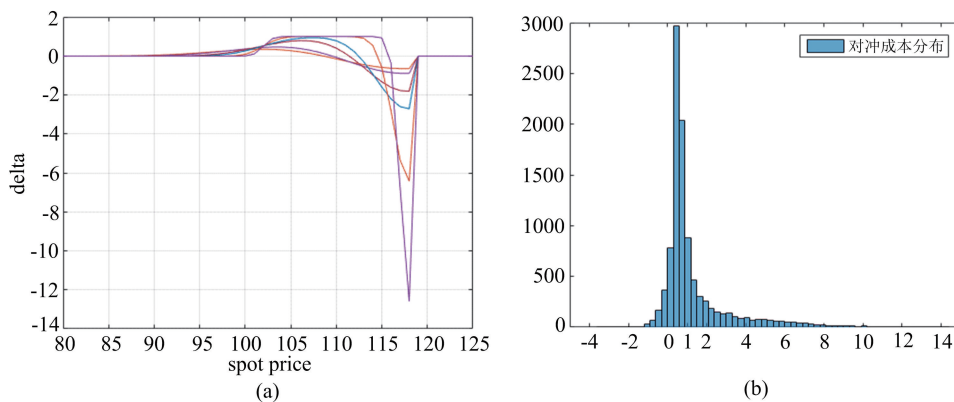


图 5 Monte Carlo 模拟下的 delta(a)和对冲成本分布(b)

Fig. 5 delta and hedging cost distribution under Monte Carlo simulation

在 Carr 的静态复制模型中,提出了单边障碍期权和双边障碍期权的复制方法.依据该模型下的期权复制方法,通过计算障碍期权静态复制成本的上界,并将其与动态对冲下的理论成本相比较,如果动态对冲的理论成本已经超出了这个上界,那么显然采用动态对冲便没有了意义.因此,首先要根据 Carr 的静态复制模型确定动态对冲外移边界的最大值.基于看涨看跌平价关系和波动率对称性假设:

$$C = P + (F - K)e^{-rT} \quad (9)$$

$$\sigma(F_t, t) = \sigma\left(\frac{F^2}{F_t}, t\right) \quad (10)$$

式中,  $F_t$  为时间  $t$  时刻的期货价格,  $F$  为当前期货的价格,  $F_t > 0$  且  $t \in [0, T]$ . 则有 European put-call symmetry: 考虑在一个无摩擦的市场环境中, 无套利机会, 无漂移率, 则对称关系如下:

$$C(K)K^{-\frac{1}{2}} = P(H)H^{-\frac{1}{2}},$$

式中,  $K, H$  分为普通看涨看跌期权的执行价格,  $(KH)^{1/2} = F$ .

考虑一个向上敲出的看涨期权, 由 Carr 首次提出可以进行如下的复制组合<sup>[11]</sup>:

$$UOC(K, H) = C(K) - UIP(K, H) - (H - K)UIB(H), H > K, F \quad (11)$$

式中,  $UIB(H)$  为一个向上敲入的债券, 表示在到期日之前若价格达到  $H$ , 则可以得到 1 元的偿付.  $UIB(H)$  同样可以有期权复制如下:

$$UIB(H) = 2BC(H) + H^{-1}C(H), H > F \quad (12)$$

式中,  $BC(H)$  为标的资产价格高于  $H$  偿付 1 元的两值期权. 此处涉及两值期权的定价, 本文采用的是 Black 模型下计算两值期权的价值. 综上分析, 有

$$UOC(K, H) = C(K) - KH^{-1}C(H^2K^{-1}) - (H - K)(2BC(H) + H^{-1}C(H)), H > K, F \quad (13)$$

我们知道在完备的市场中, 一份远期合约的价格有  $H \leq H(t) \leq He^{rT}$ , 则

$$UOC(K, H(t)) \leq UOC(K, He^{rT}) \quad (14)$$

这个上界即为我们对障碍期权复制成本的上界, 有  $UOC(K, H + \Delta x) \leq UOC(K, He^{rT})$ , 解得的  $\Delta x$  即为障碍价格外移边界的最大值. 依据本文中障碍期权产品参数设置,  $S = 100, K = 102, H = 118, T = 1, r = 0.07, \alpha = 0.25, q = 0$ , 该障碍期权最大外移边界为 6.43, 超过 6.43 的外移边界的对冲成本将高于复制期权的损益.

为了更好地对冲障碍期权, 我们得到静态复制下的最大外移边界, 从期权的收益结构入手, 通过外移障碍边界复制收益结构和原期权收益结构几乎完全一致的期权, 改变原有障碍期权在障碍价格这一断点附近的特征, 平滑断点附近的 delta 的变化, 变化的频繁程度和剧烈程度. 我们提出以下四种思路进行模拟对冲: 单纯外移边界法, 蝶式外移边界法, 价差外移边界法, 遍历法触发式外移边界法. 单纯外移边界法即在已知发行期权产品要素的情况下, 预先设置一个新的障碍价格: 新障碍价格 = 原障碍价格 + 外移边界. 期权发行者按照新的障碍价格下期权的 delta 进行对冲. 蝶式外移边界即蝶式结构实质是对原敲出边界  $H$  与虚拟敲出边界  $H1$  之间的到期偿付进行修改, 变成一个快速下降的结构. 从定价来看, 这个蝶式结构可以由一个执行价为  $X$ , 敲出边界为  $H$  的看涨期权多头和  $\frac{H - X}{\Delta x}$  份以  $H$  为执行价, 敲出边界为  $H1$  的看涨期权空头复制, 则  $V = UOC(X, H) - \frac{H - X}{\Delta x} UOC(H, H + \Delta x)$ . 由此进行蝶式障碍价格的外移. 价差外移边界法即价差结构的虚拟期权也是由不同的期权构成的组合, 其复制结构为: 一份执行价为  $X$ , 敲出价为  $H1$  的多头看涨期权, 和一份执行价为  $H$ , 敲出边界为  $H1$  的空头看涨期权:

$$V = UOC(X, H + \Delta x) - UOC(H, H + \Delta x).$$

遍历法触发式外移边界法即通过遍历 Monte Carlo 模拟的所在路径的每一步, 在标的价格触发障碍价的时候, 以新障碍价的 delta 做对冲, 否则按照原障碍价格计算 delta 作动态对冲, 逐步确定合适的触发价格(即触发使用新障碍价格的标的价格)以及适当的外移边界.

无论是单纯的外移边界、蝶式外移边界、价差式外移边界还是遍历法触发式外移均是通过不同的方式外移障碍价格得到一个虚拟的障碍价格, 以虚拟障碍价格下的 delta 进行对冲, 4 种方法下对冲最优解如表 4 所示, 具体对冲结果可在本文附录查阅. 根据对冲的结果, 我们选取 Monte Carlo 模拟下每种外移边界法下最优的结果进行对冲比较和对冲效果的展示(表 5). 如表 4, 表 5 所示, 4 种方法均在不显著改变对冲均值的前提下, 显著性地降低了对冲成本的极值效应, 尤其是遍历法触发式外移法, 将对冲均值降低 20.5%, 极值降低 51.1%, 极大地改善了



期权发行者在对冲成本上的损失. 其原因在于这种触发性质的外移, 使得向上敲出障碍期权的收益函数发生了改变, 其收益函数类似于软障碍期权, 在未触发前, 允许合约逐步地被敲入或敲出, 等同在合约中指定两个障碍水平, 一个较高的  $U$  和一个较低的  $L$ . 在敲出期权中, 资产价格处于两个障碍之间的距离决定了合约被敲出的比例. 例如假定一个向上敲

出期权有一个软障碍水平介于 110 和 120 之间. 如果最大资产价格在到期日之前达到 115, 那么收益中将有 5/10 或者说 50% 损失掉. 这种触发效应的外移结构设计使得期权在  $\Delta$  对冲时有了较大的缓冲空间, 同时也具有较低的  $\gamma$  风险, 因此相比较普通外移结构更加完善和可靠.

表 4 不同对冲方法下对冲最优解

Tab. 4 Optimal hedging solution under different hedging methods

对冲比较	动态对冲平均成本	标准差	峰度	极大值	上 5%分位数	上 1%分位数
delta 动态对冲	1.182 9	1.945 5	16.63	23.39	7.778 1	11.499 9
单纯外移	1.219	1.776 5	11.074 3	14.175	7.302 4	10.023 2
蝶式复制外移	1.297 7	1.698 4	9.072 1	11.557 9	6.979 3	8.908 4
价差复制外移	1.311 8	1.714 4	9.241 6	10.889 7	6.970 7	8.829 7
遍历法触发式外移	0.940 2	1.606 7	11.183 3	11.432 4	6.442 1	8.652 9

表 5 以  $\Delta$  动态对冲为基准, 不同对冲方法的对冲效应

Tab. 5 The hedge effect under different methods based on delta dynamic hedge

对冲效果	动态对冲平均成本	标准差	峰度	极大值	上 5%分位数	上 1%分位数
单纯外移	↑ 3.1%	↓ 8.7%	↓ 33.4%	↓ 39.4%	↓ 6.2%	↓ 12.8%
蝶式复制外移	↑ 9.7%	↓ 12.7%	↓ 45.4%	↓ 50.6%	↓ 10.3%	↓ 22.5%
价差复制外移	↑ 10.9%	↓ 11.9%	↓ 44.4%	↓ 53.4%	↓ 10.4%	↓ 23.2%
遍历法触发式外移	↓ 20.5%	↓ 17.4%	↓ 32.8%	↓ 51.1%	↓ 17.2%	↓ 24.8%

上述方法均是基于不断地外移障碍边界的思路来操作, 我们发现动态对冲平均成本和极值均有大幅下降, 并且平均对冲成本向障碍期权的理论价值收敛, 而对冲成本的极大值虽有大幅降低, 但在相同的外移边界下, 不同方法的对冲成本极大值大致相同. 因此本文将 Monte Carlo 模拟下的该极值路径筛选出来进行作图分析其  $\Delta$  在临近到期日时的变化情

况, 如图 6 所示. 在该极值路径下标的价格一路冲高, 一直刺破障碍价格, 而  $\Delta$  在障碍价格附近亦然达到 -12, 这意味着期权发行者此时  $\Delta$  头寸为 12, 如此大的  $\Delta$  使得发行者不得不大量卖空现货标的或者期货标的, 使得  $\Delta$  头寸保持中性, 而大量的头寸的卖空与标的资产市场价格走势不断刷出新高的情况下, 使得卖空标的造成巨额亏损.

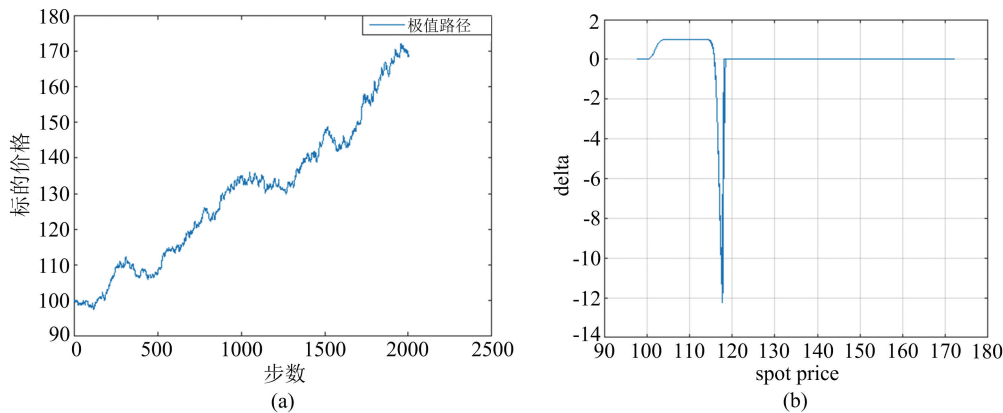


图 6 Monte Carlo 模拟下的极端路径和  $\Delta$  走势

Fig. 6 Extreme path and delta trend under Monte Carlo simulation

### 3.2 实际样本路径的对冲

针对 Monte Carlo 模拟下的 10 000 条路径,我们找到了障碍期权相对较为有效地减少对冲成本的方法,主要是不同触发价格下的障碍价格外移边界.该方法不仅有效地降低了对冲的平均成本,而且在极端价格路径下,根据对冲成本极值的表现情况来看,有效地减少了极端路径下的极值成本.在实际应用中,我们将结合 SLSG (stop-loss start-gain) 策略<sup>[17,19]</sup>与合适的障碍价格外移方法进行动态对冲.

SLSG 策略:当现货价格大于执行价  $K$  时,以无风险利率借入资金用于买入和期权数量相同的现货或期货,以避免现货或期货继续上涨带来的损失;当现货或者期货价格小于执行价  $K$  时,卖出所有股票,并偿还借款.以这种交易方式,在期末的清算中,可以得到和看涨期权完全相同的收益. SLSG 对冲策略中,仅以执行价  $K$  作为分界线,选择不同的 delta 值,但是障碍期权的不同在于:除了有执行价  $K$  之外,还有一个敲入和敲出水平.以向上敲出障碍期权为例,在价格接近敲出水平时, delta 会趋向于无穷小,因此,对于卖向上敲出障碍期权的一方,必须持有无穷多份股指期货空头才能实现 delta 中性.这在实际市场中显然是无法实现的.

因此,本文结合 Monte Carlo 模拟下的最优对冲外移边界方法和 SLSG 策略在敲出水平  $H$  下方选择一个触发价格  $H1$ ,并依据价格所处位置,分为以下区间: $[0, \text{执行价格 } K]$ , $[\text{执行价格 } K, \text{触发价格 } H1]$ , $[\text{触发价格 } H1, \text{障碍价格 } H]$ , $[\text{障碍价格}, \infty]$ .在各个区间的持有头寸的 delta 计算分为

$[0, K]$ :视 delta 为 0,不持有任何期货头寸;

$[K, \text{触发价格 } H1]$ :以期权的障碍价格下计算 delta,计算期货持有头寸;

$[\text{触发价格 } H1, \text{障碍价格 } H]$ :以障碍价格+外移边界(触发,触发蝶式,触发价差)计算 delta 以及期货头寸;

$[\text{障碍价格}, \infty]$ :期权触发, delta 为 0,期货头寸全部平仓.

其中,对冲总成本=支付客户收益+资金占用成本+交易费用+期货头寸损益.

由于基于 Monte Carlo 模拟 10 000 条价格下,极端路径较多,其成本一般高于期初期权费收入.因此在实际沪深 300 指数样本路径中,我们采用 SLSG 策略结合上述障碍价格外移边界的思路进行

对冲回测,这里以 2011~2016 年为样本价格路径为例.此处主要考虑对于挂钩指数的障碍期权,国内可对冲的工具主要为股指期货,而 IF300 股指期货于 2010 年 4 月上市交易,因此样本路径被迫选择 2011~2016 年.

针对 2011~2016 年这 6 条沪深 300 指数价格路径,选取滚动的沪深 300 股指期货活跃合约进行对冲策略回测,其中资金占用成本利率为 7%,波动率选取滚动 180 日历史波动率,时间期限为 1 年,执行价格为期初的 102%,障碍价格为期初价格的 118%,期权敲出损益记为 3%,红利率为 0,交易费率为 0.15%,股指期货交易最低保证金比例为 10%.上述数据均选取能够匹配市场的实际数据,从而可以得到更清晰地回测对冲效果(表 6,图 7~12).表 6 给出了 2011~2016 年详细的基于沪深 300 指数对冲回测结果,期权发行者收益是理论结果与对冲总成本的差值.图 7~12 绘制了每个年度的标的走势,对冲总成本走势,所收期权费走势和 delta 走势.标的走势纵轴均已换算,起始目标的价格为 100,相对应的对冲总成本和期权费是以标的价格基准而计算;横轴均为每一年的实际交易日天数序列.例如:2016 年,期初价格 100 时,此时所收期权费为 0.126 8,对冲总成本为 1.1829.在 2011~2016 年这六年中,其中 2011 年,2013 年,2016 年障碍期权未曾敲出;2012 年期权恰好敲出,2014 年期权敲出后沪深 300 指数未回调,2015 年期权敲出后指数回调,对冲成本为负时,则期权发行者为对冲障碍期权在股指期货的头寸中获得收益.值得注意的是,2016 年对冲亏损较大,其主要原因在于 2016 年价格走势期初走低,策略表现 delta 为 0,但在第 222 至 223 个交易日,价格达到执行价边界,此时 delta 为正,根据 delta 对障碍期权存续期限的敏感性,此时期权存续期已经只有一个月,策略上开始依据 delta 买进 IF300 头寸,结果价格急转直下,使得刚刚买进的期货头寸造成较大亏损.

因此,基于静态复制成本计算障碍价格最大外移边界,采用不同的外移边界方式,使得蒙特卡罗模拟下 10000 路径的平均对冲成本较低,理论结果显示可以大幅降低平均成本和极端路径下的对冲成本.模拟对冲结果显示不同对冲方法下平均对冲成本从低到高的依次排序为:遍历法触发式外移,纯外移,蝶式复制外移,价差复制外

移;降低极值效应的有效性的依次排序为遍历法触发式外移,蝶式复制外移,价差复制外移,纯外移.这四种方法均可以有效地改进障碍期权动态对冲的效果.根据模拟对冲的最优边界结合 SLSG 策略下的实际样本对冲回测,结果反馈对冲思路有效且具备实用价值,不仅降低了期权发行者的对冲成本,更加改善了当前市场对于障碍期权难于对冲的窘境.

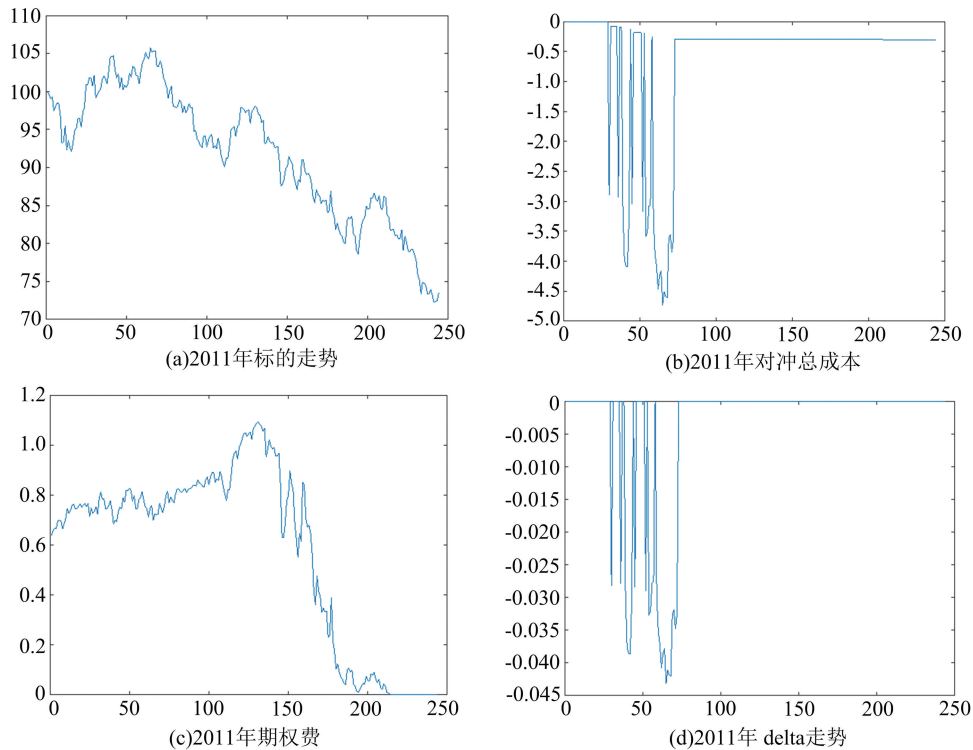


图 7 2011 年沪深 300 指数对冲分析图

Fig. 7 CSI 300 hedge analysis chart in 2011

## 5 结论

本文通过对向上敲出障碍期权进行定价发现无论是基于解析解的定价结果还是基于 Monte Carlo 模拟下的定价结果差异性较小,在存在广泛规模经济的金融市场,市场定价的无差异化使得金融机构间报价交易的相关障碍期权产品无异,而能够通过不断发行产品获得持续收益的必定要做好对冲工作,对冲成本越低廉则收益越高.在解析解与数值解的定价比较下,当市场上的波动较缓时,欧式期权的期权费收入会缩水,而障碍期权的价值较高,收入的期权费较高.作为金融机构期权的发行者可以根据当前以及未来市场行情波动情况来合理决定发售期权类别的比例,从而增加收益.

相较于普通欧式期权的对冲方式,障碍期权其

表 6 2011~2016 年沪深 300 指数对冲回测结果

Tab. 6 CSI 300 hedging results in 2011~2016

	理论期权费	对冲总成本	期权发行者收益
2011 年	0.637 8	-0.305 3	0.943 1
2012 年	0.651	0.476 8	0.174 2
2013 年	0.443	-0.472 7	0.915 7
2014 年	1.100 6	1.092 3	0.008 3
2015 年	0.096 6	0.107 2	-0.010 6
2016 年	0.126 8	1.182 9	-1.056 1

障碍价格附近 delta 变化剧烈且 delta 绝对值较大,普通的 delta 对冲成本较高,极值成本偏大.而国内缺乏完备的期权市场,静态复制在国内不可行.本文总结障碍期权的静态复制与动态对冲两种方法,设计新的对冲思路——基于静态复制成本计算障碍价格最大外移边界的动态对冲方法,提出了四类外移边界方案:遍历法触发式外移,单纯外移,蝶式复制外移,价差复制外移,并分别比较四种方法下向上敲出障碍期权的对冲效果.最后通过 Monte Carlo 模拟下找到最优的对冲外移边界,结合 SLSG 策略,本文对 2011~2016 年沪深 300 指数的走势进行实际对冲回测.回测结果中,遍历法触发式外移边界不仅降低对冲平均成本,平滑对冲极值和分位数的分布,并且存在通过对冲现货头寸获得额外补偿收益的可能,对冲策略表现良好,实现了障碍期权动态对冲思

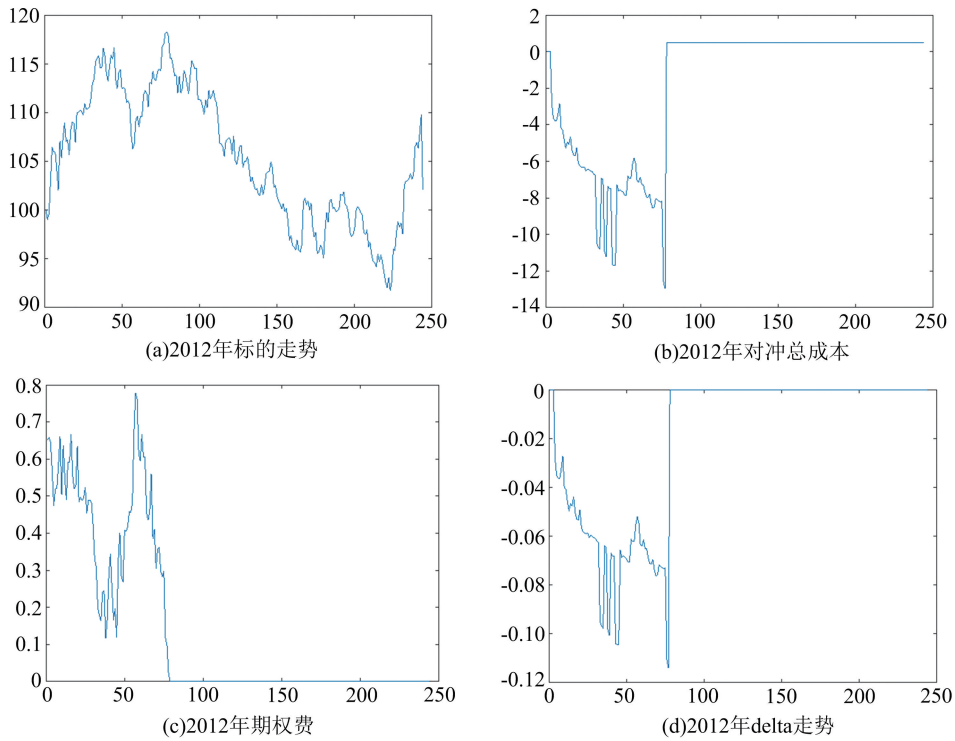


图 8 2012 年沪深 300 指数对冲分析图  
 Fig. 8 CSI 300 hedge analysis chart in 2012

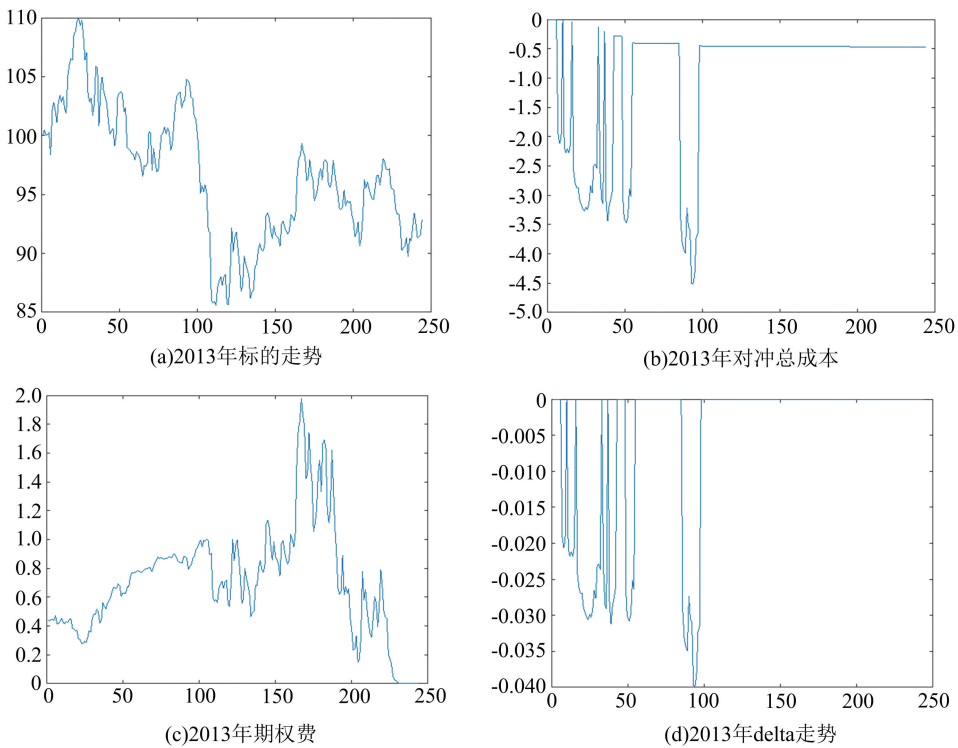


图 9 2013 年沪深 300 指数对冲分析图  
 Fig. 9 CSI 300 hedge analysis chart in 2013

路的改进.

尽管本文给出了在控制风险的同时可以降低对冲成本的有效改进方法,但仍然存在未被考虑在内

的影响对冲成本的潜在因素. 其一,跟踪误差,虽然 IF300 股指期货与沪深 300 指数之间相关性很强,但在不同的市场环境下流动性、交易反应时间等因

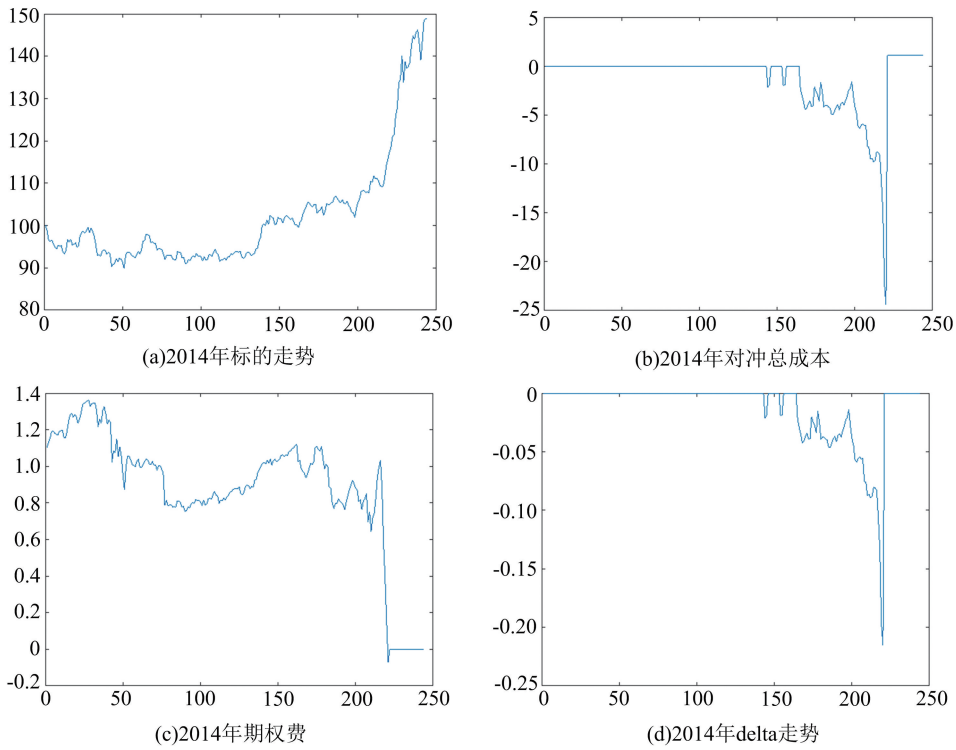


图 10 2014 年沪深 300 指数对冲分析图

Fig. 10 CSI 300 hedge analysis chart in 2014

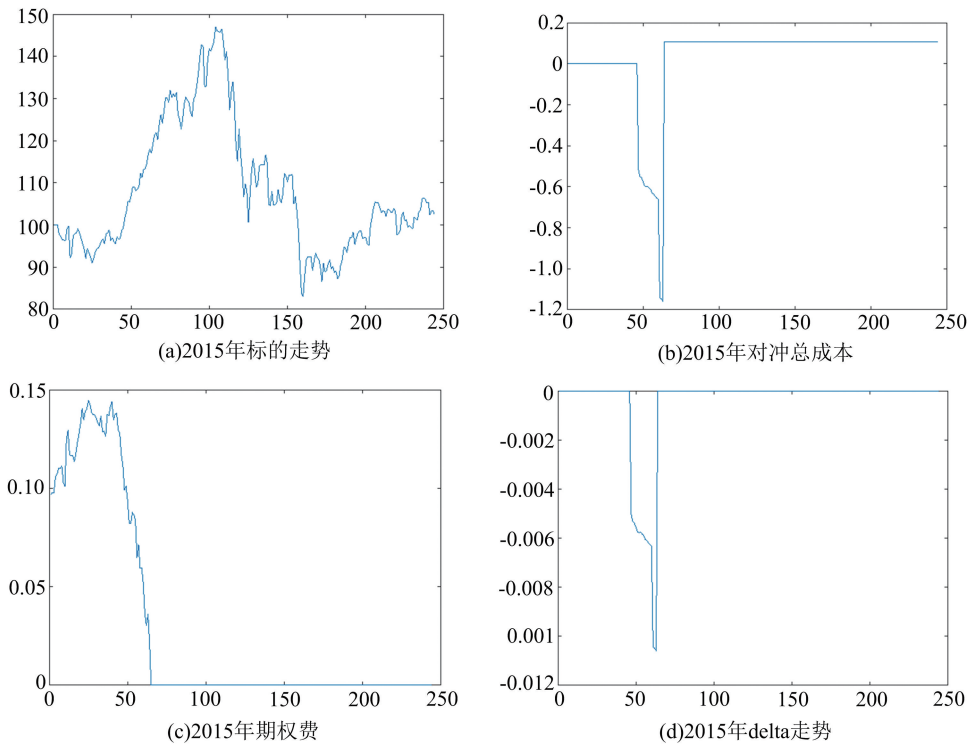


图 11 2015 年沪深 300 指数对冲分析图

Fig. 11 CSI 300 hedge analysis chart in 2015

素受到市场价格与市场预期的影响,通常会出现期货贴水或升水的状态,因此股指期货与现货之间的

误差始终不会完全消除,从而造成对冲过程中不能完美地复制.其二,在对向上敲出障碍期权的模拟对

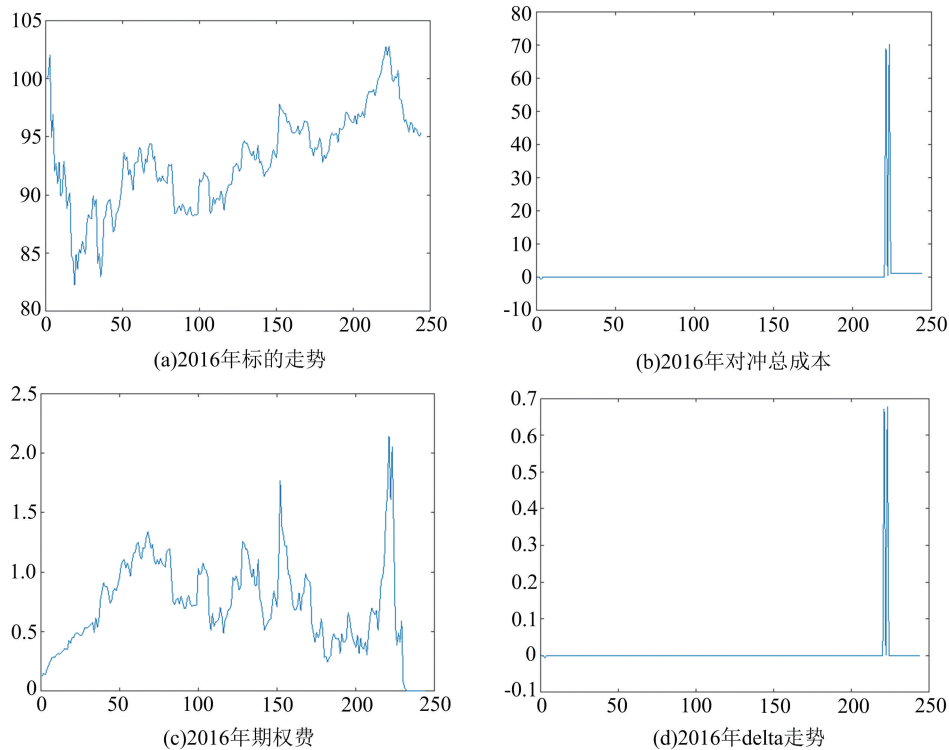


图 12 2015 年沪深 300 指数对冲分析图

Fig. 12 CSI 300 hedge analysis chart in 2016

冲与实证对冲中,运动 delta 计算的股指期货交易头寸不可避免地存在小数位头寸,难以精确实施对冲.由于期权具有非线性收益的特性,本文在对向上敲出障碍期权进行虚拟外延边界下的 delta 动态对冲只能对冲掉一定程度的线性风险,而非线性头寸的风险度量欠缺考虑.在后续的研究中,将着重研究对于障碍期权不完美对冲下的对冲思路与方法.

#### 参考文献(References)

- [ 1 ] BLACKF, SCHOLLES M. The pricing of options and corporate liabilities [J]. The Journal of Political Economy, 1973, 81: 637-659.
- [ 2 ] MERTON R C. Theory of rational option pricing[J]. Bell Journal of Economics and Management Science, 1973, 4(1): 141-183.
- [ 3 ] RUBINSTEIN M, REINER E. Breaking down the barrier[J]. Risk, 1991, 4: 28-35.
- [ 4 ] HEYNEN P, KAT H. Partial barrier options [J]. Journal of Financial Engineering, 1994, 3: 253-274.
- [ 5 ] HEYNEN P, KAT H. Discrete partial barrier options with a moving barrier [J]. Journal of Financial Engineering, 1994, 5: 199-209.
- [ 6 ] CARR P. Two extension to barrier option valuation [J]. Applied Mathematical Finance, 1995, 2: 173-209.
- [ 7 ] XING L. Application of finite difference methods in stock option pricing [J]. Science Technology and Engineer, 2007, 7(19): 5192-5195.
- [ 8 ] CAROLE B, PHELM B. Monte Carlo methods for pricing discrete Parisian options [J]. The European Journal of Finance, 2011, 17(3): 169-196.
- [ 9 ] Derman E, Ergener D, Kani I. Forever hedged [J]. Risk, 1994, 7: 139-145.
- [10] CARR P, CHOU A. Hedging complex barrier options [R]. Cambridge, MA: Morgan Stanley and MIT Computer Science, 1997.
- [11] CARR P, ELLIS K, GUPTA V. Static hedging of exotic options [J]. Journal of Finance, 1998, 53(3): 1165-1190.
- [12] CARR P, PICRON J. Static hedging of timing risk [J]. Journal of Derivatives, 1999, 6(3): 57-70.
- [13] TOMPKINS R. Static versus dynamic hedging of exotic options: An evaluation of hedge performance via simulation [J]. Journal of Risk Finance, 2002, 3: 6-34.
- [14] CVITANIĆ J, PHAM H, TOUZI N. Super-replication in stochastic volatility models under portfolio constraints [J]. Applied Probability Trust, 1999, 36(2): 523-545.
- [15] CVITANIĆ J, PHAM H, TOUZI N. Hedging in discrete time under transaction costs and continuous-

- time limit [J]. Applied Probability Trust, 1999, 36 (1): 163-178.
- [16] JUN D, KU H. Static hedging of chained-type barrier options[J]. North American Journal of Economics and Finance, 2015, 33: 317-327.
- [17] CARR P P, JARROW R A. The stop-loss start-gain paradox and option valuation: A new decomposition into intrinsic and time value [J]. The Review of Financial Studies, 1990, 3(3): 469-482.
- [18] RUBINSTEIN M, REINER E. Breaking down the barrier[J]. Risk, 1991, 4: 28-35.
- [19] 储国强, 卫剑波, 王琦. 沪深 300 指数障碍期权的动态对冲研究[J]. 武汉金融, 2014(12): 25-29.

## 附录

该期权产品参数为 1 年期, 执行价格 102, 障碍价格 118, 无风险利率 7%, 波动率 25%。值得注意的是, 不同产品参数背景下, 该最优触发价格和新的虚拟障碍价格外移边界不同, 因此针对不同期权参数, 触发价格和虚拟障碍价格不同, 需要重新进行遍历计算。

表 A1 单纯外移边界法对冲结果

Tab. A1 Hedge result of pure outward moving barrier boundary

外移边界	新障碍价格	动态对冲平均成本	标准差	峰度	极大值	上 5%分位数	上 1%分位数
0.5	118.5	1.194 4	1.868 1	13.004 2	19.506 2	7.538 8	10.704 1
1	119	1.206 3	1.813 8	11.716 2	16.296 2	7.384	10.314 7
1.5	119.5	1.219	1.776 5	11.074 3	14.175	7.302 4	10.023 2
2	120	1.232 3	1.748 8	10.640 2	13.489	7.235 4	9.773
2.5	120.5	1.246	1.728 7	10.304	12.940 8	7.176 7	9.539 7
3	121	1.259 9	1.715 7	10.017 9	12.423 3	7.124 8	9.352
5	123	1.443	1.524 8	16.871 7	8.899 9	5.436 1	6.713 7
6.43	124.43	1.5151	1.756 8	16.346 9	8.690 9	5.502 3	6.697

表 A2 蝶式外移边界法对冲结果

Tab. A2 Hedge result of spread outward moving barrier boundary

外移边界	新障碍价格	动态对冲平均成本	标准差	峰度	极大值	上 5%分位数	上 1%分位数
0.5	118.5	1.008 3	1.961 3	12.393 3	20.353 9	7.585 6	10.938
1	119	1.154 1	1.850 6	11.717 7	17.226 4	7.391 9	10.425
1.5	119.5	1.184 2	1.761 8	11.244 1	15.326 9	7.307 8	10.111 7
2	120	1.205 4	1.760 8	10.875 2	14.156	7.242 1	9.854 3
2.5	120.5	1.223 1	1.735	10.541 2	13.566 1	7.185 3	9.631 3
3	121	1.239 1	1.716 8	10.220 2	13.056 3	7.133 7	9.438 9
5	123	1.297 7	1.698 4	9.072 1	11.557 9	6.979 3	8.908 4
6.43	124.43	1.339 4	1.725 7	8.484 1	10.845 6	6.903 9	8.650 6
8	126	1.386 8	1.784 7	8.097 1	10.325 3	6.851 4	8.470 3

表 A3 价差外移边界法

Tab. A3 Hedge result of butterfly outward moving barrier boundary

外移边界	新障碍价格	动态对冲平均成本	标准差	峰度	极大值	上 5%分位数	上 1%分位数
0.5	118.5	1.191 1	1.870 1	13.006 2	19.532 7	7.54	10.711
1	119	1.203	1.815 6	11.725 5	16.354 4	7.384 4	10.321 5
1.5	119.5	1.215 8	1.778	11.094 1	14.239 8	7.302 9	10.031 4
2	120	1.229	1.749 9	10.673 3	13.572 3	7.236 1	9.782 8

续表 A3

外移边界	新障碍价格	动态对冲平均成本	标准差	峰度	极大值	上 5%分位数	上 1%分位数
2.5	120.5	1.242 4	1.729 3	10.330 8	13.038 5	7.177 7	9.552 1
3	121	1.256	1.715 4	10.033 7	12.54 2	7.126 2	9.364 4
5	123	1.311 8	1.714 4	9.241 6	10.889 7	6.970 7	8.829 7
6.43	124.43	1.353 8	1.755 5	8.950 2	10.546 6	6.895 3	8.601 9
8	126	1.401 9	1.827 9	8.757 2	10.443 2	6.849	8.447 1

表 A4 遍历法触发式外移边界法

Tab. A4 hedge result of traversal trigger outward moving barrier boundary

触发价格	外移边界	新障碍价格	动态对冲平均成本	标准差	峰度	极大值	上 5%分位数	上 1%分位数
-1	0.5	118.5	1.147 1	1.855 4	13.786 5	19.506 2	7.478 7	10.762 9
	1	119	1.140 5	1.82	12.703 4	16.296 2	7.379 3	10.512
	1.5	119.5	1.133 3	1.799 8	12.273 7	14.184 7	7.348 7	10.339 5
	2	120	1.125 4	1.787 9	12.041 5	14.184 7	7.326 9	10.197 8
	2.5	120.5	1.116 6	1.782 3	11.875 5	14.184 7	7.307 9	10.081 7
-2	0.5	118.5	1.107 4	1.794 8	13.93 2	19.506 2	7.235 6	10.374 1
	1	119	1.101 2	1.757 2	12.511 3	16.296 2	7.125	10.061 8
	1.5	119.5	1.094 4	1.734 4	11.785 7	14.175	7.085 6	9.824 9
	2	120	1.086 9	1.720 3	11.315 6	13.48 9	7.055 8	9.616 5
	2.5	120.5	1.078 4	1.713 1	10.964 8	12.940 8	7.029 4	9.435 2
	3	121	1.069	1.712 2	10.696 2	12.422 3	7.007 1	9.294 8
	4	122	1.047 4	1.726 3	10.369 8	11.432 4	6.971 8	9.079 7
-3	0.5	118.5	1.078 6	1.765 1	14.545 7	19.506 2	7.118 3	10.309
	1	119	1.072 2	1.725 2	12.961 2	16.269 2	6.994 3	9.967 7
	1.5	119.5	1.062 2	1.700 7	12.11 2	14.17 5	6.944 4	9.700 8
	2	120	1.059	1.685	11.539 3	13.48 9	6.907 9	9.459 3
	2.5	120.5	1.050 9	1.765	11.099 4	12.940 8	6.874 5	9.249 4
	3	121	1.041 9	1.674 5	10.75 7	12.423 3	6.843 7	9.084 4
	4	122	1.021 1	1.687 1	10.334 3	11.432 4	6.795	8.821 8
-4	0.5	118.5	1.047 2	1.738 3	15.196 6	19.506 2	7.007 5	10.275 2
	1	119	1.041 1	1.694 7	13.473 7	16.269 2	6.86	9.901 8
	1.5	119.5	1.034 4	1.667 2	12.520 2	14.175	6.791 3	9.617 3
	2	120	1.027 2	1.649 5	11.859 4	13.489	6.7395	9.363 8
	2.5	120.5	1.079 2	1.639 5	11.34 3	12.940 8	6.694 4	9.145 4
	3	121	1.011 4	1.636 5	10.936 2	12.423 3	6.655	8.958 1
	4	122	0.990 4	1.648 5	10.426 2	11.432 4	6.592 9	8.665 9



续表 A4

触发 价格	外移 边界	新障碍 价格	动态对冲 平均成本	标准差	峰度	极大值	上 5% 分位数	上 1% 分位数
	0.5	118.5	1.021 3	1.718 2	15.767 3	19.506 2	6.931 8	10.239 6
	1	119	1.015 6	1.673 8	13.977 1	16.296 2	6.778 9	9.870 1
	1.5	119.5	1.009 4	1.645 8	12.982 6	14.175	6.706 4	9.594 4
	2	120	1.002 8	1.627 6	12.287 3	13.489	6.652	9.346 6
	2.5	120.5	0.995 4	1.617 3	11.737 3	12.940 8	6.605 7	9.134 5
-5	3	121	0.987 2	1.614 3	11.297 7	12.423 3	6.565 7	8.951 3
	4	122	0.968 6	1.626 5	10.729 4	11.432 4	6.531 3	8.663 1
	4.5	122.5	0.958 3	1.640 5	10.565 4	10.958 4	6.478 2	8.554 7
	5	123	0.947 3	1.658 9	10.453 5	10.606 7	6.459 9	8.469 2
	8	126	0.869 8	1.828	10.222 9	10.594 1	6.411 5	8.211 8
	10	128	0.809 1	1.994 9	10.019 8	10.330 1	6.432 8	8.168
	1	119	0.983 5	1.654 7	14.619 2	16.296 2	6.7187	9.852 8
	2	120	0.971 8	1.607 8	12.854 6	13.48 9	6.590 7	9.329 3
	2.5	120.5	0.965	1.597 3	12.274 8	12.940 8	6.543 9	9.118 8
	3	121	0.957 4	1.594 2	11.806 4	12.423 3	6.504 1	8.937 3
-6	3.5	121.5	0.949 2	1.597 6	11.447 1	11.916 7	6.470 1	8.785 9
	4	122	0.940 2	1.606 7	11.183 3	11.432 4	6.442 1	8.652 9
	4.5	122.5	0.930 6	1.621	10.992 1	10.985 4	6.419 8	8.547 2
	5	123	0.920 4	1.639 8	10.852 7	10.606 7	6.402 7	8.463 1
	5.5	123.5	0.906 6	1.662 7	10.749 7	10.652	6.389 1	8.392 9
-6.43	4	122	0.923 5	1.595 1	11.409 5	11.432 4	6.398	8.628 7