文章编号:0253-2778(2018)08-0637-06

次线性期望空间下广义ND列加权和的完全收敛性

梁海业,吴群英

(桂林理工大学理学院,广西桂林 541004)

摘要:研究次线性期望空间下广义ND列加权和的完全收敛性,在随机变量的p阶上积分存在条件下,将概率空间中广义ND列加权和的完全收敛性推广到了次线性期望空间.

关键词:次线性期望;完全收敛性;加权和;广义ND列

中图分类号:O211.4 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2018.08.006

2010 Mathematics Subject Classification:60F15

引用格式:梁海业,吴群英.次线性期望空间下广义ND列加权和的完全收敛性[J].中国科学技术大学学报,2018,48(8):637-642.

LIANG Haiye, WU Qunying. Complete convergence of weighted sums for extended ND random variables sequence under sub-linear expectation[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2018,48(8):637-642.

Complete convergence of weighted sums for extended ND random variables sequence under sub-linear expectation

LIANG Haiye, WU Qunying

(*College of Science, Guilin University of Technology, Guilin 541004, China*)

Abstract: The complete convergence of weighted sums for extended ND under sub-linear expectation was studied. With the condition of the p order Choquet integrals of the random variable being finite, the complete convergence of weighted sums for extended ND random variables sequence in the probability space was extended to the sub-linear expectations space.

Key words: sub-linear expectation; complete convergence; weighted sum; extended ND random variables sequence

0 引言

非线性是金融领域研究工作中存在的明显问题,而经典的线性概率空间并不能满足非线性的统计计算.为此,彭实戈[1]创造性地提出了次线性期望空间理论,并给出了次线性期望理论的完整公理体系,引起了业内学者的广泛关注.如Peng[2]证明了次线性期望空间下的中心极限定理;Zhang[3-5]得到了次线性期望下广义ND的Kolmogorov强大数定律、矩不等式、重对数率以及独立和ND情况下的Rosenthal's不等式;Wu和Jiang[6]得到了次线性期望空间下的强大数律与Chover型重对数律,Hu等[7]证明了次线性期望空间下一般矩条件的强大数律.

收稿日期:2018-03-23;**修回日期**:2018-04-17

基金项目:国家自然科学基金(11661029)资助.

作者简介:梁海业,男,1992年生,硕士.研究方向:概率极限理论.E-mail:2522331952@qq.com

通讯作者:吴群英,博士/教授.E-mail:wqy666@glut.edu.cn

完全收敛性概念自 1947 年被提出以来，在概率空间下的研究已然有了一定的深度，如 Wu[8-9] 分别给出了 ND 序列和 ND 阵列随机变量完全收敛性的证明；孟兵和吴群英[10] 证明了 ND 阵列加权乘积和的完全收敛性；甘师信和陈平炎[11] 得到了 NOD 序列加权和的强收敛速度. 在次线性期望下虽然有 Zhong 和 Wu[12] 证明了在 $C_{\mathbb{V}}[|X|^p l(|X|^{1/\alpha})]<\infty$ 且权重为 a_{ni}，其中 $\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2=O(n)$，条件下广义 ND 序列加权和的完全收敛和完全积分收敛性. 但是，对于次线性期望下随机变量序列的完全收敛性的文章还是相对比较少的. 本文在现有的理论基础上，证明了在 $\hat{\mathbb{E}}(|X|^p)\leqslant C_{\mathbb{V}}(|X|^p)<\infty$ 且权重为 a_{nk}，其中 $|a_{nk}|\leqslant cn^{-\alpha}$，$\sum_{k=1}^{n} a_{nk}^2\leqslant cn^{\beta-\alpha}$，对 $\forall\alpha>0,\beta>-\alpha$ 情形下广义 ND 序列加权和的完全收敛性，将文献[11]的部分结论进一步推广到了次线性空间中. 而且，本文的条件与结论与文献[12]的条件与结论是互不包含的，证明方法也是不相同的.

1 引理

我们使用彭实戈[1-2] 提出的次线性期望空间的框架，假设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 是给定的可测空间，$\mathscr{H}$ 是定义在 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上由实函数构成的线性空间，使得如果 $X_1,X_2,\cdots,X_n\in\mathscr{H}$，则对于任意的 $\varphi\in C_{l,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}_n)$ 有 $\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n)\in\mathscr{H}$，其中 $C_{l,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}_n)$ 表示在线性空间的局部 Lipschitz 函数，即对任意 $\varphi\in C_{l,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}_n)$，存在常数 $c>0$，$m\in N$ 取决于 φ，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}_n$ 都有

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant c(1+|x|^m+|y|^m)|x-y|.$$

也称 $\mathscr{H}$ 是由随机变量所构成的空间，并记 $X\in\mathscr{H}$.

定义 1.1[4] $\hat{\mathbb{E}}:\mathscr{H}\to\mathbb{R}$ 被称作次线性期望，如果 $\hat{\mathbb{E}}$ 满足下面四个条件：

①单调性：如果 $X\geqslant Y$，那么 $\hat{\mathbb{E}}(X)\geqslant\hat{\mathbb{E}}(Y)$；

②保持常数不变性：$\hat{\mathbb{E}}(c)=c$；

③次可加性：$\hat{\mathbb{E}}(X+Y)\leqslant\hat{\mathbb{E}}(X)+\hat{\mathbb{E}}(Y)$；

④正齐次性：$\hat{\mathbb{E}}(\lambda X)=\lambda\hat{\mathbb{E}}(X)$，$\lambda\geqslant 0$.

这里 $\overline{\mathbb{R}}=[-\infty,+\infty]$. 三元组 $(\Omega,\mathscr{H},\hat{\mathbb{E}})$ 被称为次线性期望空间，$\hat{\mathbb{E}}$ 是次线性期望，定义 $\hat{\mathbb{E}}$ 的共轭期望 $\hat{\varepsilon}$ 为

$$\hat{\varepsilon}(X):=-\hat{\mathbb{E}}(-X),\ \forall X\in\mathscr{H}.$$

定义 1.2[4] 令 $G\subset\mathscr{F}$，一个函数 $V:G\to[0,1]$ 称为容度，如果

① $V(\varnothing)=0$，$V(\Omega)=1$；

②对任意 $A\subset B$，$A,B\in\mathscr{G}$，则有 $V(A)\leqslant V(B)$.

如果对所有的 $A,B\in\mathscr{G}$，有 $V(A\cup B)\leqslant V(A)+V(B)$，则称 V 具有次可加性；如果对任意 $A_n\in\mathscr{F}$，有 $V(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}V(A_n)$，则称 V 具有可数次可加性.

在次线性期望空间中可产生相应的上容度和下容度 $(\mathbb{V},\mathscr{V})$，即对于任意 $A\in\mathscr{F}$，

$$\mathbb{V}(A):=\inf\{\hat{\mathbb{E}}[\xi]:I_A\leqslant\xi,\xi\in\mathscr{H}\},$$

$$\mathscr{V}(A):=1-\mathbb{V}(A^c),$$

式中，A^c 为 A 的补集. 因此对任意 $f\leqslant I(A)\leqslant g$，$f,g\in\mathscr{H}$，则有

$$\hat{\mathbb{E}}f\leqslant\mathbb{V}(A)\leqslant\hat{\mathbb{E}}g,\ \hat{\varepsilon}f\leqslant\mathscr{V}(A)\leqslant\hat{\varepsilon}g \tag{1}$$

根据定义，显然 $\mathbb{V}$ 具有次可加性.

对于 $\forall X\in\mathscr{H}$，$p>0$，$x>0$，因为

$$I(|X|>x)\leqslant\frac{|X|^p}{x^p}I(|X|>x)\leqslant\frac{|X|^p}{x^p},$$

由 $\frac{|X|^p}{x^p}\in\mathscr{H}$ 以及式(1)得 Markov 不等式

$$\mathbb{V}(|X|>x)\leqslant\frac{\hat{\mathbb{E}}|X|^p}{x^p} \tag{2}$$

成立.

定义 1.3[4] 定义 Choquet 积分为

$$C_{\mathbb{V}}(X)=\int_0^{\infty}\mathbb{V}(X\geqslant t)\,\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{0}[\mathbb{V}(X\geqslant t)-1]\,\mathrm{d}t.$$

对于下容度 $\mathscr{V}$ 也有类似的积分定义.

定义 1.4(同分布)[4] 设 X_1,X_2 是定义在次线性期望空间 $(\Omega_1,\mathscr{H}_1,\hat{\mathbb{E}}_1)$ 和 $(\Omega_2,\mathscr{H}_2,\hat{\mathbb{E}}_2)$ 上的 n 维随机向量，如果

$$\hat{\mathbb{E}}_1(\varphi(X_1))=\hat{\mathbb{E}}_2(\varphi(X_2)),\ \forall\varphi\in C_{l,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}_n),$$

则称其为同分布的，记为 $X_1\overset{\mathrm{d}}{=}X_2$. 如果 $\forall i\geqslant 1$，$X_i\overset{\mathrm{d}}{=}X_1$，则称随机变量序列 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是同分布的.

定义 1.5(广义 ND)[3] 在次线性期望空间 $(\Omega,\mathscr{H},\hat{\mathbb{E}})$ 下随机变量序列 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 被称为广义 ND 序列，如果存在常数 $K\geqslant 1$，使得下式成立：

$$\hat{\mathbb{E}}\Big(\prod_{i=1}^{n}\varphi_i(X_i)\Big)\leqslant K\prod_{i=1}^{n}\hat{\mathbb{E}}(\varphi_i(X_i)),\ n\geqslant 1,$$

其中非负函数 $\varphi_i\in C_{l,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R})$ 是非降(或非增).

显然，如果 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是广义 ND 随机变量序列，$f_1(x),f_2(x),\cdots\in C_{l,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R})$ 是非降(或非增)的函数，则 $\{f_n(X_n);n\geqslant 1\}$ 也是广义 ND 的随机变量序列.

本文约定，c 总代表一个正常数，在不同的地方可取不同的值；$a_x\sim b_x$ 表示 $\lim\limits_{x\to\infty}a_x/b_x=1$；$I(\cdot)$ 表示示性函数.

为证本文的结论，我们需要以下两个引理.

引理 1.1　设 X 是次线性期望空间 $(\Omega,\mathscr{H},\hat{\mathbb{E}})$ 下的随机变量，满足 $X\leqslant 1$. 则

$$\hat{\mathbb{E}}\exp(X)\leqslant\exp(\hat{\mathbb{E}}X+\hat{\mathbb{E}}X^2)\tag{3}$$

证明　根据 $X\leqslant 1$，有

$$X=XI(-1\leqslant X\leqslant 1)+XI(X<-1),$$

所以

$$\begin{aligned}&\exp(X)=\\&\exp\{XI(-1\leqslant X\leqslant 1)+XI(X<-1)\}=\\&\exp\{XI(-1\leqslant X\leqslant 1)\}\cdot\exp\{XI(X<-1)\}\leqslant\\&\mathrm{e}^{-1}\exp\{XI(-1\leqslant X\leqslant 1)\}\leqslant\\&\exp\{XI(-1\leqslant X\leqslant 1)\},\end{aligned}$$

因此，可不妨假设 $|X|\leqslant 1$，则对任意 n，有 $|X|^n\leqslant 1$，根据泰勒展开式，有

$$\begin{aligned}\exp(X)=1+X+X^2\Big(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{X^{n-2}}{n!}\Big)\leqslant\\1+X+X^2\Big(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|X|^{n-2}}{n!}\Big)\leqslant\\1+X+X^2\Big(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big)=\\1+X+X^2(\mathrm{e}-2)\leqslant 1+X+X^2.\end{aligned}$$

又因为 $\exp(x)\geqslant 1+x$，对于任意 $x\in R$，因此有 $\exp(\hat{\mathbb{E}}X+\hat{\mathbb{E}}X^2)\geqslant 1+\hat{\mathbb{E}}X+\hat{\mathbb{E}}X^2$，所以

$$\hat{\mathbb{E}}\exp(X)\leqslant 1+\hat{\mathbb{E}}X+\hat{\mathbb{E}}X^2\leqslant\exp(\hat{\mathbb{E}}X+\hat{\mathbb{E}}X^2).$$

引理 1.2　设 X 是次线性期望空间 $(\Omega,\mathscr{H},\hat{\mathbb{E}})$ 下的随机变量，$p\geqslant 1$，则

$$C_{\mathbb{V}}(|X|^p)<\infty\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-1}\mathbb{V}(|X|>n)<\infty\tag{4}$$

证明　根据 Choquet 积分的定义，有

$$\begin{aligned}C_{\mathbb{V}}(|X|^p)=\int_0^{\infty}\mathbb{V}(|X|^p\geqslant x)\mathrm{d}x=\\\int_0^{\infty}\mathbb{V}(|X|\geqslant x^{1/p})\mathrm{d}x\ (\text{令 } x^{1/p}=y)=\\p\int_0^{\infty}y^{p-1}\mathbb{V}(|X|\geqslant y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

所以

$$C_{\mathbb{V}}(|X|^p)<\infty\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-1}\mathbb{V}(|X|>n)<\infty.$$

2　主要结果及其证明

定理 2.1　假设 $\{X,X_n;n\geqslant 1\}$ 是次线性期望空间 $(\Omega,\mathscr{H},\hat{\mathbb{E}})$ 下的同分布广义 ND 随机变量序列，$\mathbb{V}$ 具有可数次可加性，$\{a_{nk};1\leqslant k\leqslant n,n\geqslant 1\}$ 是常数阵列，满足对任意 $1\leqslant k\leqslant n,n\geqslant 1$，有 $|a_{nk}|\leqslant cn^{-\alpha}$ 及 $c_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}^2\leqslant cn^{\beta-\alpha}$. 如果 $\alpha>0$，$\beta>-\alpha$，$p=(1+\alpha+\beta)/\alpha\geqslant 2$ 且

$$\hat{\mathbb{E}}(|X|^p)\leqslant C_{\mathbb{V}}(|X|^p)<\infty\tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-u/c_n)<\infty,\forall u>0\tag{6}$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}\Big\{\sum_{k=1}^{n}a_{nk}(X_k-\hat{\mathbb{E}}X_k)>\varepsilon\Big\}<\infty,\forall\varepsilon>0\tag{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}\Big\{\sum_{k=1}^{n}a_{nk}(X_k-\hat{\varepsilon}X_k)<-\varepsilon\Big\}<\infty,\forall\varepsilon>0\tag{8}$$

特别地，当 $\hat{\mathbb{E}}X_k=\hat{\varepsilon}X_k$ 时，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}\Big\{\Big|\sum_{k=1}^{n}a_{nk}(X_k-\hat{\mathbb{E}}X_k)\Big|>\varepsilon\Big\}<\infty,\forall\varepsilon>0\tag{9}$$

证明　不失一般性，可以假设对任意 $1\leqslant k\leqslant n,n\geqslant 1$ 有 $\hat{\mathbb{E}}X_n=0,\hat{\mathbb{E}}X_n^2=1,a_{nk}\geqslant 0$. 给定任意 $\varepsilon>0$，取 $\rho=\dfrac{\alpha^2}{\alpha+1}$ 因为 $\alpha>0$，所以 $\rho>0$，正整数 $N>\dfrac{\alpha+1}{\beta}$. 因为 $n^{-\rho}\to 0,n\to\infty$，所以对于任意给定的 ε,N，存在正整数 N_0 使得当 $n\geqslant N_0$ 时，有 $n^{-\rho}<\varepsilon/N$. 因为本文结论证明的是完全收敛性，又由于完全收敛性与前面有限项是无关的，所以可以不妨假设当 $n\geqslant 1$ 时，$n^{-\rho}<\varepsilon/N$. 令

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}a_{nk}X_k.$$

$$X'_{nk}:=X_kI(a_{nk}X_k\leqslant n^{-\rho})+a_{nk}^{-1}n^{-\rho}I(a_{nk}X_k>n^{-\rho}),$$

$$T'_n:=\sum_{k=1}^{n}a_{nk}X'_{nk}.$$

$$X''_{nk}:=(X_k-a_{nk}^{-1}n^{-\rho})I(a_{nk}X_k>\varepsilon/N),$$

$$T''_{nk}:=\sum_{k=1}^{n}a_{nk}X''_{nk}.$$

$$X'''_{nk}:=(X_k-a_{nk}^{-1}n^{-\rho})I(n^{-\rho}<a_{nk}X_k\leqslant\varepsilon/N),$$

$$T'''_n:=\sum_{k=1}^{n}a_{nk}X'''_{nk}.$$

显然 $X_k=X'_{nk}+X''_{nk}+X'''_{nk}$, $T_n=T'_n+T''_n+T'''_n$. 注意到对任意的 $n\geqslant 1$ 有

$$\{T_n>3\varepsilon\}\subset\{T'_n>\varepsilon\}\cup\{T''_n>\varepsilon\}\cup\{T'''_n>\varepsilon\},$$

因此要证 $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}(T_n>3\varepsilon)<\infty$ 成立,则只要证 $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}(T'_n>\varepsilon)<\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}(T''_n>\varepsilon)<\infty$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}(T'''_n>\varepsilon)<\infty$ 就可以了.

由定义 1.5,知 $\{a_{nk}X'_{nk},k=1,2,\cdots,n\}$ 是广义 ND 的,进而 $\{\exp(u_na_{nk}X'_{nk}),k=1,2,\cdots,n\}$ 也是非负广义 ND 的. 记 $u_n=\min\{\varepsilon/(2c_n),n^{\rho}\}$, 由定义 1.5有

$$\hat{\mathbb{E}}\exp(u_nT'_n)=\hat{\mathbb{E}}\prod_{k=1}^{n}\exp(u_na_{nk}X'_{nk})\leqslant$$

$$c\prod_{k=1}^{n}\hat{\mathbb{E}}\exp(u_na_{nk}X'_{nk}).$$

因 $u_na_{nk}X'_{nk}\leqslant 1$, 由引理 1.1 有

$$\hat{\mathbb{E}}\exp(u_na_{nk}X'_{nk})\leqslant$$

$$\exp(u_na_{nk}\hat{\mathbb{E}}X'_{nk}+u_n^2a_{nk}^2\hat{\mathbb{E}}(X'_{nk})^2),$$

又因为 $\hat{\mathbb{E}}X'_{nk}\leqslant\hat{\mathbb{E}}X_k=0$ 及 $\hat{\mathbb{E}}(X'_{nk})^2\leqslant\hat{\mathbb{E}}X_k^2=1$, 于是有

$$\hat{\mathbb{E}}\exp(u_na_{nk}X'_{nk})\leqslant\exp(u_n^2a_{nk}^2),$$

及

$$\hat{\mathbb{E}}\exp(u_nT'_n)\leqslant c\exp(u_n^2c_n).$$

由式(2)有

$$\mathbb{V}(T'_n>\varepsilon)\leqslant\exp(-\varepsilon u_n)\hat{\mathbb{E}}\exp(u_nT'_n)\leqslant$$

$$c\exp(-\varepsilon u_n+u_n^2c_n).$$

如果 $\varepsilon/2c_n>n^{\rho}$, 则由 u_n 的定义有

$$\mathbb{V}(T'_n>\varepsilon)\leqslant c\exp(-\varepsilon n^{\rho}/2);$$

如果 $\varepsilon/2c_n\leqslant n^{\rho}$, 则有

$$\mathbb{V}(T'_n>\varepsilon)\leqslant c\exp(-\varepsilon^2/(4c_n)).$$

因 $\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\varepsilon n^{\rho}/2)<\infty$ 并由式(6)有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}(T'_n>\varepsilon)<\infty \tag{10}$$

假设函数 $g(x)\in C_{l,\mathrm{Lip}}(\mathbb{R})$, 使得 $\forall x\in\mathbb{R}$, $0\leqslant g(x)\leqslant 1$; 且当 $|X|\leqslant\mu(0<\mu<1)$, $g(x)=1$; 当 $|X|>1$, $g(x)=0$. 则有

$$I(|X|\leqslant\mu)\leqslant g(x)\leqslant I(|X|\leqslant 1),$$

$$I(|X|>1)\leqslant 1-g(x)\leqslant I(|X|>\mu) \tag{11}$$

令

$$f_n(i)=\mathrm{Card}\{k;\mu\varepsilon/(iN)\leqslant a_{nk}<\mu\varepsilon/((i-1)N)\},$$

$$h_i=[iN/(\mu\varepsilon)]^{1/\alpha},$$

其中, $[x]$ 表示 x 的整数部分, $\mathrm{Card}(A)$ 表示集合 A 的元素的个数.因为 $0<a_{nk}\leqslant cn^{-\alpha}\to 0(\alpha>0)$, 所以可以不妨假设 $0<a_{nk}<\dfrac{\mu\varepsilon}{N}$, 则有

$$\left(0<a_{nk}<\frac{\mu\varepsilon}{N}\right)=$$

$$\bigcup_{j=2}^{\infty}(\mu\varepsilon/(jN)\leqslant a_{nk}<\mu\varepsilon/((j-1)N))$$

是必然事件.再由式(1)和(11)以及 $\mathbb{V}$ 的可数次可加性,有

$$\mathbb{V}(T''_n>\varepsilon)\leqslant\mathbb{V}(\sum_{k=1}^{n}a_{nk}X''_{nk}>\varepsilon)\leqslant$$

$$\mathbb{V}(\exists 1\leqslant k\leqslant n\text{ 使得 }a_{nk}X_n>\varepsilon/N)\leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(a_{nk}X_k>\varepsilon/N)\leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{V}(|a_{nk}X_k|>\varepsilon/N)\leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\hat{\mathbb{E}}\left(1-g\left(\left|\frac{a_{nk}X_k}{\varepsilon/N}\right|\right)\right)=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\hat{\mathbb{E}}\left(1-g\left(\left|\frac{a_{nk}X}{\varepsilon/N}\right|\right)\right)\leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{V}(|a_{nk}X|>\mu\varepsilon/N)=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{V}(|X|>\mu\varepsilon/(Na_{nk}),$$

$$\bigcup_{j=2}^{\infty}(\mu\varepsilon/(jN)\leqslant a_{nk}<\mu\varepsilon/((j-1)N)))\leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\mathbb{V}(\mu\varepsilon/(jN)\leqslant a_{nk}<$$

$$\mu\varepsilon/((j-1)N),|X|>j-1)=$$

$$\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{V}(\mu\varepsilon/(jN)\leqslant a_{nk}<$$

$$\mu\varepsilon/((j-1)N),|X|>j-1)=$$

$$\sum_{j=2}^{\infty}f_n(j)\mathbb{V}(|X|>j-1).$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}(T''_n>\varepsilon)\leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}f_n(j)\mathbb{V}(|X|>j-1).$$

由 c_n 和 $f_n(j)$ 的定义,得 $c_n\geqslant f_n(j)\mu^2\varepsilon^2/(Nj)^2$. 又因 $c_n\leqslant cn^{\beta-\alpha}$, 所以 $f_n(j)\leqslant$

$cn^{\beta-\alpha}N^2j^2/(\mu^2\varepsilon^2)$. 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}(T''_n>\varepsilon)\leqslant c\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{n=h_{j-1}}^{h_j}n^{\beta-\alpha}j^2\mathbb{V}(|X|>j-1).$$

当 $p=(1+\alpha+\beta)/\alpha>2$ 时,有

$$\sum_{n=h_{j-1}}^{h_j}n^{\beta-\alpha}\leqslant\int_{h_{j-1}}^{h_j}x^{\beta-\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{\beta-\alpha+1}\int_{h_{j-1}}^{h_j}\mathrm{d}x^{\beta-\alpha+1}=$$
$$\frac{1}{\beta-\alpha+1}[(h_j)^{\beta-\alpha+1}-(h_{j-1})^{\beta-\alpha+1}]\leqslant$$
$$c[(jN/(\mu\varepsilon))^{(\beta-\alpha+1)/\alpha}-((j-1)N/(\mu\varepsilon))^{(\beta-\alpha+1)/\alpha}]\leqslant$$
$$cj^{(\beta-\alpha+1)/\alpha-1}.$$

由引理 1.2 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}(T''_n>\varepsilon)\leqslant$$
$$c\sum_{j=2}^{\infty}j^{2+(\beta-\alpha+1)/\alpha-1}\mathbb{V}(|X|>j-1)=$$
$$c\sum_{j=2}^{\infty}j^{p-1}\mathbb{V}(|X|>j-1)\leqslant$$
$$c\sum_{j=2}^{\infty}j^{p-1}\mathbb{V}(|X|>j)\leqslant cC_{\mathbb{V}}(|X|^p)<\infty \tag{12}$$

当 $p=(1+\alpha+\beta)/\alpha=2$ 时,有

$$\sum_{n=h_{j-1}}^{h_j}n^{\beta-\alpha}\leqslant\int_{h_{j-1}}^{h_j}x^{-1}\mathrm{d}x=\ln(h_j)-\ln(h_{j-1})=$$
$$\frac{1}{\alpha}[\ln(jN/(\mu\varepsilon))-\ln((j-1)N/(\mu\varepsilon))]=$$
$$\frac{1}{\alpha}[\ln j-\ln(j-1)]\sim\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{j},j\geqslant 2.$$

再由引理 1.2 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}(T''_n>\varepsilon)\leqslant\frac{c}{\alpha}\sum_{j=2}^{\infty}j^2\cdot\frac{1}{j}\mathbb{V}(|X|>j)\leqslant$$
$$c\sum_{j=2}^{\infty}j\mathbb{V}(|X|>j)\leqslant cC_{\mathbb{V}}(|X|^p)<\infty. \tag{13}$$

由 X'''_{nk} 的定义,如果 $a_{nk}X_k\notin(n^{-\rho},\varepsilon/N]$,则 $a_{nk}X'''_{nk}=0$;如果 $n^{-\rho}<a_{nk}X_k\leqslant\varepsilon/N$,则 $a_{nk}X'''_{nk}\leqslant N^{-1}\varepsilon$. 于是为使 $T'''_n=\sum_{k=1}^{n}a_{nk}X'''_{nk}>\varepsilon$,至少存在 N 个下标 k 使得 $n^{-\rho}<a_{nk}X_k\leqslant\varepsilon/N$. 根据同分布以及 ND 性质,并由式(1)和(11)及 Markov 不等式,有

$$\mathbb{V}(T'''_n>\varepsilon)\leqslant\mathbb{V}(\text{至少存在 } N \text{ 个下标 } k \text{ 使得}$$
$$n^{-\rho}<a_{nk}X_k\leqslant N^{-1}\varepsilon)\leqslant$$
$$\mathbb{V}(\text{至少存在 } N \text{ 个下标 } k \text{ 使得 } a_{nk}X_k>n^{-\rho})\leqslant$$
$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_N\leqslant n}\mathbb{V}(X_{i_1}>a_{nk}^{-1}n^{-\rho},$$
$$X_{i_2}>a_{nk}^{-1}n^{-\rho},\cdots,X_{i_N}>a_{nk}^{-1}n^{-\rho})\leqslant$$
$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_N\leqslant n}\hat{\mathbb{E}}[(1-g(a_{nk}n^{\rho}X_{i_1}))\cdot$$
$$(1-g(a_{nk}n^{\rho}X_{i_2}))\cdots(1-g(a_{nk}n^{\rho}X_{i_N}))]\leqslant$$
$$c\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_N\leqslant n}[\hat{\mathbb{E}}(1-g(a_{nk}n^{\rho}X))]^N\leqslant$$
$$c\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_N\leqslant n}[\mathbb{V}(|X|>\mu a_{nk}^{-1}n^{-\rho})]^N\leqslant$$
$$c\frac{1}{n^{(\alpha+\beta-\rho p)N}}(\hat{\mathbb{E}}|X|^p)^N\leqslant c\frac{1}{n^{(\alpha+\beta-\rho p)N}}.$$

又因为

$$(\alpha+\beta-\rho p)N>$$
$$(\alpha+\beta-\frac{\alpha^2}{\alpha+1}\frac{1+\alpha+\beta}{\alpha})\frac{\alpha+1}{\beta}=1,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}(T'''_n>\varepsilon)\leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{(\alpha+\beta-\rho p)N}}<\infty \tag{14}$$

结合式(10),(12)~(14)便证明了式(7).

根据文献[1]中次线性期望的定义有

$$\hat{\varepsilon}[X]:=-\hat{\mathbb{E}}[-X],\forall X\in\mathscr{H}.$$

显然,$\{-X,-X_n;n\geqslant 1\}$ 也满足定理 2.1 中的条件,用 $\{-X,-X_n;n\geqslant 1\}$ 替换式(7)中的 $\{X,X_n;n\geqslant 1\}$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}\{\sum_{k=1}^{n}a_{nk}((-X_k)-\hat{\mathbb{E}}(-X_k))>\varepsilon\}<\infty.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}\{\sum_{k=1}^{n}a_{nk}(X_k-\hat{\varepsilon}X_k)<-\varepsilon\}=$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}\{\sum_{k=1}^{n}a_{nk}(X_k+\hat{\mathbb{E}}(-X_k))<-\varepsilon\}=$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{V}\{\sum_{k=1}^{n}a_{nk}((-X_k)-\hat{\mathbb{E}}(-X_k))>\varepsilon\}<\infty,$$

即式(8)成立.

特别的,当 $\hat{\mathbb{E}}X_k=\hat{\varepsilon}X_k$ 时,有

$$\mathbb{V}\{|\sum_{k=1}^{n}a_{nk}(X_k-\hat{\mathbb{E}}X_k)|>\varepsilon\}$$
$$\leqslant\mathbb{V}\{\sum_{k=1}^{n}a_{nk}(X_k-\hat{\mathbb{E}}X_k)>\varepsilon\}+$$
$$\mathbb{V}\{\sum_{k=1}^{n}a_{nk}(X_k-\hat{\mathbb{E}}X_k)<-\varepsilon\}<\infty.$$

这便得到了式(9),即完成了定理 2.1 的证明.

注 2.1　定理 2.1 是将文献[11]中定理 2.1 的结论从概率空间推广到了次线性期望空间.

参考文献(References)

[1] PENG S. Multi-dimensional G-Brownian motion and related stochastic calculus under G-expectation [J].

Stochastic Process，2008，118(12)：2223-2253.

[2] PENG S. A new central limit theorem under sub-linear expectations[EB/OL]. [2018-03-01] https://arxiv.org/abs/0803.2656.

[3] ZHANG L X. Strong limit theorems for extended independent and extended negatively dependent random variables under non-linear expectations [EB/OL]. [2018-03-01] https://arxiv.org/abs/ 1608.00710.

[4] ZHANG L X. Exponential inequalities under sub-linear expectations with applications to laws of the iterated logarithm [J]. Science China, 2014, 59 (12): 2503-2526.

[5] ZHANG L X. Rosenthal's inequalities for independent and negatively dependent random variables under sub-linear expectations with applications[J]. Science China，2016，59(4):751-768.

[6] WU Q，JIANG Y. Strong law of large numbers and Chover's law of the iterated logarithm under sub-linear expectations[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications，2018，460(1)：252-270.

[7] HU C，DATTA S，KOUL H L. A strong law of large numbers for sub-linear expectation under a general moment condition[J]. Statistics & Probability Letters，2016，119：248-258.

[8] WU Q. Complete convergence for negatively dependent sequences of random variables [J]. Journal of Inequalities & Applications，2010，2010(1):1-10.

[9] WU Q. A complete convergence theorem for weighted sums of arrays of rowwise negatively dependent random variables [J]. Journal of Inequalities & Applications，2012，2012(1)：1-10.

[10] 孟兵，吴群英. ND阵列加权乘积和的完全收敛性[J]. 纯粹数学与应用数学，2010，26(1):84-90.
MENG Bing，WU Qunying. Complete convergence for weighted sums of arrays of ND random variables[J]. Pure and Applied Mathematics，2010，26(1):84-90.

[11] 甘师信，陈平炎. NOD序列加权和的强收敛速度[J]. 数学物理学报，2008，28(2):283-290.
GAN Shixin，CHEN Pingyan. Strong convergence rate of weighted sums for NOD sequences [J]. Acta Mathematica Scientia，2008，28(2):283-290.

[12] ZHONG H, WU Q. Complete convergence and complete moment convergence for weighted sums of extended negatively dependent random variables under sub-linear expectation[J]. Journal of Inequalities & Applications，2017，2017(1)：261.