

具有标准发生率的脉冲随机 SIS 传染病模型的动力学分析

于佳佳¹, 凌琳¹, 董锦华², 蒋贵荣¹

(1. 桂林电子科技大学数学与计算科学学院, 广西桂林 541004;

2. 桂林航天工业学院理学院, 广西桂林 541004)

摘要: 同时考虑随机干扰、生育脉冲和脉冲治疗, 建立一类带有标准发生率的 SIS 传染病模型. 利用随机微分方程理论, 得到了平凡解随机稳定的充分条件; 利用离散映射, 得到无病解存在的充分条件; 利用伊藤公式证明了疾病的随机灭绝性. 此外, 还通过数值模拟验证理论分析的结果.

关键词: 随机 SIS 传染病模型; 标准发生率; 脉冲生育; 脉冲治疗

中图分类号: O175 文献标识码: A doi: 10.3969/j.issn.0253-2778.2018.08.005

2010 Mathematics Subject Classification: 92D25

引用格式: 于佳佳, 凌琳, 董锦华, 等. 具有标准发生率的脉冲随机 SIS 传染病模型的动力学分析[J]. 中国科学技术大学学报, 2018, 48(8): 631-636.

YU Jiajia, LING Lin, DONG Jinhua, et al. Dynamics analysis of an impulsive stochastic SIS epidemic model with standard incidence[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2018, 48(8): 631-636.

Dynamics analysis of an impulsive stochastic SIS epidemic model with standard incidence

YU Jiajia¹, LING Lin¹, DONG Jinhua², JIANG Guirong¹

(1. School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China;

2. College of Science, Guilin University of Aerospace Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: Random disturbance, birth pulse and pulse treatments were simultaneously considered to build a class of SIS epidemic model with standard incidence. By applying the theory of stochastic differential equation, the sufficient conditions for the stochastic stability of the trivial solution were obtained. The sufficient conditions for the existence of the disease free solution were obtained by using a discrete map. The stochastic extinction of the disease was investigated by using the Itô formula. Moreover, numerical simulation was conducted to verify the theoretical analysis.

Key words: stochastic SIS epidemic model; standard incidence; birth pulses; pulse treatment

0 引言

传染病给人类和动物的生存带来了巨大的灾

难, 一直以来就是危害人类身体健康的最大敌人. 如何控制传染病的产生以及有效地预防传染病的扩散, 是当今世界研究的重要课题^[1-3].

收稿日期: 2017-07-17; 修回日期: 2018-01-08

基金项目: 国家自然科学基金(11662001, 11562006, 11771105), 广西自然科学基金重点基金(2016GXNSFDA380031), 广西自然科学基金杰出青年基金(2017GXNSFFA198012), 广西自然科学基金面上基金(2018GXNSFAA138177), 桂林电子科技大学研究生科研创新项目(2017YJCX81)资助.

作者简介: 于佳佳, 女, 1993年生, 硕士生. 研究方向: 非光滑动力系统. E-mail: 1290296035@qq.com

通讯作者: 蒋贵荣, 博士/教授. E-mail: grjiang9@163.com

由于传染病的传播及其控制过程中存在脉冲效应,如脉冲生育和脉冲治疗等,脉冲微分方程在传染病动力学^[4,5]领域得到了广泛的研究和应用.例如, Jiang 和 Yang^[6]建立了一类具有脉冲生育的模型,利用离散映射分析了系统的无病周期解的存在性和正周期解的稳定性; Hu 等^[7]研究了一类带有标准发生率的 SIRS 传染病模型,分析了模型的后向分岔.马淑芳等^[8]研究了一类具有脉冲效应的 SIS 传染病模型,理论分析了系统的无病周期解的存在性条件和渐近稳定性,讨论了模型的持久性.

在现实世界中,复杂的生态环境对生态系统会产生不同程度的影响.随机因素比如白噪声、光照、气温等对种群的影响也是处处存在的,在建立传染病模型时要考虑这些随机因素.随机传染病模型^[9]得到了很好的研究, Lin 等^[10]讨论了一类具有免疫接种的随机 SIS 模型,分析了平稳分布的存在性以及渐近稳定性;周艳丽和张卫国^[11]研究了一类具有非线性传染率的随机 SIS 传染病模型,分析并得到了疾病持续存在与随机灭绝的充分条件. Xu^[12]研究了一类 SIS 传染病模型,提出了模型的随机阈值定理,利用比较定理证明了白噪声对传染病模型的影响程度.

疾病发生率是刻画传染病模型的主要内容,经典的传染病模型大多是采用双线性发生率和饱和发生率. Anderson 和 May^[13]通过研究证实,对于某些动物来说,标准发生率比双线性发生率更符合实际.因此本文在建立模型时考虑标准发生率.另外,脉冲现象和随机干扰可以同时存在于同一个系统中,但对于同时具有脉冲和随机的动力系统,研究成果不多.基于以上因素,本文将脉冲生育、脉冲治疗以及随机干扰引入具有标准发生率的 SIS 传染病模型,从理论分析和数值模拟两方面研究传染病模型的动力学性质.

1 模型描述

设 $S(t)$ 和 $I(t)$ 分别是 t 时刻的易感者和感染者的数量,下面给出具有标准发生率以及脉冲生育和脉冲治疗的 SIS 传染病模型.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S} = -\frac{\beta SI}{N} - \mu S + \omega I, \\ \dot{I} = \frac{\beta SI}{N} - (\mu + \omega) I, \end{array} \right\} t \neq nT; \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta S = pI + \rho S, \\ \Delta I = -pI, \end{array} \right\} t = nT$$

式中, $N = S + I$, 参数 $\mu, \omega, \beta, \rho, p$ 都是正常数, $0 \leq \mu \leq 1$ 是自然死亡率, ω 是感染性个体感染期后转化为易感者的速率, $\frac{\beta SI}{N}$ 是标准发生率, β 是疾病传播系数. 脉冲生育为 $\Delta S = \rho S$, 发生在 $t = nT (n \in N_+)$ 时刻. 每一次治疗中, 治疗人数占感染人数的比例为 p , 从而脉冲治疗为: $\Delta S = pI$, $\Delta I = -pI$.

考虑到实际生物意义,任何生态系统都不可避免地受到外界环境的干扰,在生态系统中,对系统影响比较大的因素是染病者转化为易感者的比率,所以假设随机干扰项主要作用在染病者转化为易感者的比率上.于是可以用 $\omega \rightarrow \omega + \dot{B}(t)$ 来代替系统(1)中的转化率,确定模型(1)相应的随机模型如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} dS = \left(-\frac{\beta SI}{N} - \mu S + \omega I \right) dt + \alpha I dB(t), \\ dI = \left[\frac{\beta SI}{N} - (\mu + \omega) I \right] dt - \alpha I dB(t), \end{array} \right\} t \neq nT;$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta S = pI + \rho S, \\ \Delta I = -pI, \end{array} \right\} t = nT \quad (2)$$

式中, $\dot{B}(t)$ 是标准白噪音, $B(t)$ 是定义在完备概率空间上的标准 Brown 运动, α 是白噪音的强度.

2 平凡解的存在性和随机稳定性

显然系统(2)存在平凡解 $(0, 0)$. 由(2)得如下系统:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S} = -\frac{\beta SI}{N} - \mu S + \omega I + \alpha I \frac{dB(t)}{dt}, \\ \dot{I} = \frac{\beta SI}{N} - (\mu + \omega) I - \alpha I \frac{dB(t)}{dt}, \end{array} \right\} t \neq nT;$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta S = pI + \rho S, \\ \Delta I = -pI, \end{array} \right\} t = nT \quad (3)$$

系统(3)在平凡解 $(0, 0)$ 处的变分系统的系数矩阵为

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} -\mu & \omega + \alpha \frac{dB(t)}{dt} \\ 0 & -(\mu + \omega) - \alpha \frac{dB(t)}{dt} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \rho & p \\ 0 & -p \end{pmatrix}.$$

则单值矩阵 \mathbf{M} 可以表示为

$$M = (U + B) \exp\left(\int_0^T A(t) dt\right) = \begin{pmatrix} (1 + \rho) \exp(-\mu T) & \rho \exp[\omega T + \alpha(B(t) - B(0))] \\ 0 & (1 - p) \exp[-(\mu + \omega)T - \alpha \int_0^T \dot{B}(t) dt] \end{pmatrix}$$

式中, U 为单位矩阵. 根据 $|\lambda U - M| = 0$ 解得系统 (3) 的两个乘子:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{01} &= (1 + \rho) \exp(-\mu T), \\ \lambda_{02} &= (1 - p) \exp[-(\mu + \omega)T - \alpha \int_0^T \dot{B}(t) dt] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

记 $E(\lambda_{02})$ 是 λ_{02} 的期望, 由

$$|E(\lambda_{02})| = (1 - p) \exp[-(\mu + \omega)T + \frac{\alpha^2}{2}T] < 1,$$

得 $(\mu + \omega)T - \frac{\alpha^2}{2}T - \ln(1 - p) > 0$. 由 $|\lambda_{01}| < 1$ 得 $\mu T - \ln(1 + \rho) > 0$. 当 $|\lambda_{01}| < 1$ 和 $|E(\lambda_{02})| < 1$ 成立时, 系统 (2) 有随机稳定的平凡解, 故有如下的结论:

定理 2.1 如果条件 $\mu T - \ln(1 + \rho) > 0$ 和 $(\mu + \omega)T - \frac{\alpha^2}{2}T - \ln(1 - p) > 0$ 同时成立, 则系统 (2) 有随机稳定的平凡解.

3 无病解的存在性及稳定性

在这一部分里, 假设系统 (2) 中种群不存在染病者, 即 $I(t) = 0$, 则系统 (2) 变为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\mu S, \quad t \neq nT; \\ \Delta S &= \rho S, \quad t = nT \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

令 $S(t)$ 在 $t = kT$ 时刻的值是 S_k , 当 $kT \leq t < (k + 1)T$ 时, 系统 (5) 的第一个方程的解为

$$S(t) = S_k \exp(-\mu(t - kT)),$$

在脉冲时刻有

$$S((k + 1)T^+) = (1 + \rho)S_k \exp(-\mu T),$$

因此得到一个一维的离散映射:

$$S_{k+1} = (1 + \rho)S_k \exp(-\mu T) = F(S_k) \quad (6)$$

离散映射 (6) 的每个不动点对应模型 (2) 的一个周期解, 反之亦然. 映射 (6) 的唯一不动点为 $S^* = 0$, 且有

$$F'(S^*) = (1 + \rho) \exp(-\mu T).$$

当 $0 < \rho < \exp(\mu T) - 1$ 时, $F'(S^*) < 1$, 于是映射 (6) 的不动点 S^* 是渐近稳定的, 从而系统 (5) 的零解是渐近稳定的, 易感者的数量会趋向于零. 当 $\rho > \exp(\mu T) - 1$ 时, $F'(S^*) > 1$, 于是映射 (6) 的不动点 S^* 是不稳定的, 从而系统 (5) 的零解是不稳定的, 易感者的数量会逐渐增大.

在情形 $(1 + \rho) \exp(-\mu T) = 1$ 下, 映射 (6) 为

$$S_{k+1} = S_k \quad (7)$$

对任意 $S^* \in R^+$, S^* 是映射 (7) 的不动点, 从而系统 (2) 存在无穷多个无病周期解:

$$\begin{cases} \bar{S}(t) = S^* \exp[-\mu(t - kT)], & kT < t \leq (k + 1)T; \\ \bar{I}(t) = 0, & kT < t \leq (k + 1)T. \end{cases}$$

式中, $S^* \in R^+$.

总结上面的理论分析, 得到以下定理:

定理 3.1 假设系统 (1) 的染病者数量为零, 则当 $0 < \rho < \exp(\mu T) - 1$ 时, 系统 (5) 的易感者数量会随时间的推移趋向于零; 当 $\rho = \exp(\mu T) - 1$ 时, 系统 (5) 存在无穷多个无病周期解; 当 $\rho > \exp(\mu T) - 1$ 时, 系统 (5) 的易感者的数量会逐渐增大.

4 疾病的随机灭绝性

在传染病的控制中, 疾病的灭绝是很完美的结果. 下面讨论系统 (2) 中疾病的随机灭绝性, 先给出以下定理:

定理 4.1 在随机系统 (2) 中, 对于任意具有正初值的解 $(S(t), I(t))$, 假设条件 $\mu + \omega + \frac{\alpha^2}{2} - \beta > 0$ 成立, 则系统中的染病者 $I(t)$ 将以指数形式趋于零.

证明 对于任意的初始值 $S_0 > 0, I_0 > 0$, 系统 (2) 的解记为 $(S(t), I(t))$. 设 $\bar{S}(t) = \bar{S}(t, s_0)$ 是方程 (5) 以 S_0 为初始点的解. 根据随机微分方程的比

较定理,有

$$S(t) < \bar{S}(t),$$

从而有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \langle S(t) \rangle \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \langle \bar{S}(t) \rangle.$$

式中, $\langle S(t) \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t S(s) ds$.

定义 Lyapunov 函数 $V(I(t)) = \ln I(t)$, 由伊藤公式可得

$$dV(I) = \frac{1}{I} dI - \frac{1}{2I^2} (dI)^2 = \left[\frac{\beta S}{N} - (\mu + \omega + \frac{\alpha^2}{2}) \right] dt - \alpha dB(t) \quad (8)$$

对式(8)两边从 0 到 t 积分,有

$$\ln I(t) - \ln I(0) = \int_0^t \left[\frac{\beta S(s)}{N} - (\mu + \omega + \frac{\alpha^2}{2}) \right] ds - \alpha B(t) \quad (9)$$

将式(9)两边同乘 $\frac{1}{t}$, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \ln I(t) &= \frac{1}{t} \ln I(0) + \frac{1}{t} \int_0^t \left[\frac{\beta S(s)}{N} - (\mu + \omega + \frac{\alpha^2}{2}) \right] ds - \frac{1}{t} \alpha B(t) \leq \\ \frac{1}{t} \ln I(0) + \frac{\beta}{t} \int_0^t \frac{\bar{S}(s)}{N} ds - (\mu + \omega + \frac{\alpha^2}{2}) - \frac{1}{t} \alpha B(t) &= \\ \frac{1}{t} \ln I(0) + \beta - (\mu + \omega + \frac{\alpha^2}{2}) - \frac{1}{t} \alpha B(t) \end{aligned} \quad (10)$$

对式(10)两边取上确界极限,有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln I(t)}{t} \leq \beta - (\mu + \omega + \frac{\alpha^2}{2}).$$

又因为 $\mu + \omega + \frac{\alpha^2}{2} - \beta > 0$, 故有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln I(t)}{t} < 0.$$

因此,在系统(2)中,疾病将以指数形式趋于灭绝,定理 4.1 证毕.

由 $\mu + \omega + \frac{\alpha^2}{2} - \beta > 0$ 可知 $\mu + \omega + \frac{\alpha^2}{2} > \beta$, 自然死亡率 μ 与感染性个体感染期后转化为易感者的速率 ω 以及随机因素的影响 $\frac{\alpha^2}{2}$ 的和大于疾病传播系数 β . 故感染者的数量减少,以指数形式趋于零.

5 数值模拟

在系统(2)中取 $\beta=0.9, \mu=0.4, \omega=0.1, \alpha=0.1, p=0.2, \rho=0.4, T=1$, 条件 $\mu T - \ln(1+\rho) > 0$ 和 $(\mu + \omega)T - \frac{\alpha^2}{2}T - \ln(1-p) > 0$ 同时成立,图 1 给出了系统的相图和时间序列图.由图 1(a)可看出经过随机干扰和脉冲效应的不断影响,从初始点(2, 2.5)出发的轨线会逐渐收敛到原点;图 1(b)中的易感者 $S(t)$ 和感染者 $I(t)$ 的数量随时间的增大而同时趋于零.这验证了定理 2.1 的正确性.

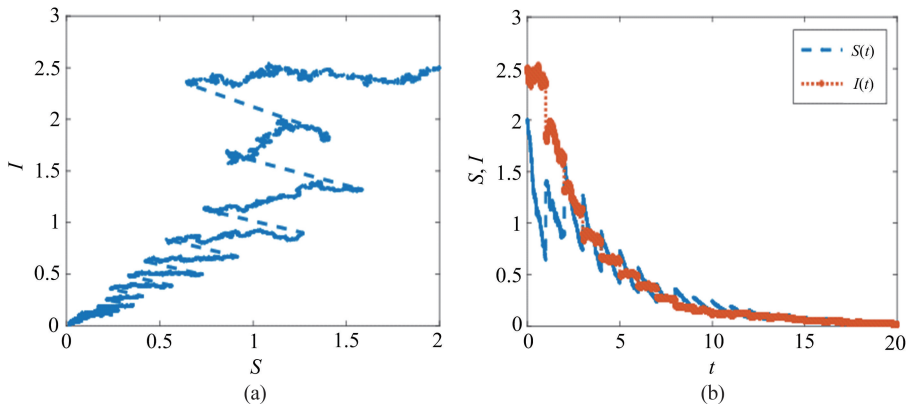


图 1 当 $\beta=0.9, \mu=0.4, \omega=0.1, \alpha=0.1, p=0.2, \rho=0.4, T=1$ 时,系统(2)的 (a) 相图以及 (b) $S(t)$ 和 $I(t)$ 的时间序列图

Fig.1 Take $\beta=0.9, \mu=0.4, \omega=0.1, \alpha=0.1, p=0.2, \rho=0.4, T=1$ in system (2) for (a) the phase portrait, and (b) time series of $S(t)$ and $I(t)$

在系统(2)中取 $\beta=0.8, \mu=0.4, \omega=0.6, \alpha=0.1, p=0.2, \rho=\exp(0.4)-1, T=1$, 条件 $\mu+\omega+\frac{\alpha^2}{2}-\beta > 0$ 成立, 图 2 给出了系统的相图和时间序列图. 由图 2(a)可知从初始点(6, 8)出发的轨线, 经过随机

干扰和脉冲效应的不断影响, 会逐渐地收敛到一个无病周期解; 由图 2(b)可看出 $S(t)$ 和 $I(t)$ 随时间而变化的情况, 染病者 $I(t)$ 的数量减少的速度很快, 以指数形式趋于零, 从而易感者 $S(t)$ 会很快趋于周期性的变化. 这验证了定理 4.1 的正确性.

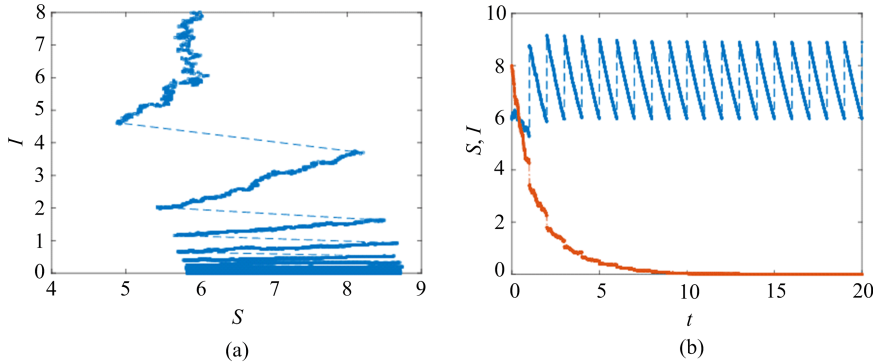


图 2 $\beta=0.8, \mu=0.4, \omega=0.6, \alpha=0.1, p=0.2, \rho=\exp(0.4)-1, T=1$ 时, 系统(2)的 (a) 相图以及 (b) $S(t)$ 和 $I(t)$ 的时间序列图
 Fig.2 Take $\beta=0.8, \mu=0.4, \omega=0.6, \alpha=0.1, p=0.2, \rho=\exp(0.4)-1, T=1$ in system (2) for (a) the phase portrait, and (b) time series of $S(t)$ and $I(t)$

6 结论

本文建立了一类带有标准发生率的脉冲随机 SIS 传染病模型, 分析了平凡解、无病解的存在性及其随机渐近稳定性以及疾病的随机灭绝性. 当系统有随机稳定的平凡解时, 虽然染病者的数量趋于零, 但易感者的数量也趋向于零. 随着时间的推移, 整个种群将会灭绝, 我们要避免这样的情况出现. 在传染病动力学的研究中, 无病解的存在意义重大. 由定理 4.1 可以知道, 在适当的条件下, 感染者的数量会以指数形式趋于零, 疾病灭绝. 本文关于平凡解、无病解以及疾病的随机灭绝性等方面的结论为疾病的控制提供了理论依据. 目前, 对于同时含有脉冲因素和随机干扰的动力学模型的复杂动力学行为的研究成果不多, 今后将对脉冲随机 SIS 传染病模型的随机稳定性和随机分岔等作进一步的研究.

参考文献 (References)

[1] GRAY A, GREENHALGH D, MAO X, et al. The SIS epidemic model with Markovian switching [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 394(2): 496-516.
 [2] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 等. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 3-24.
 [3] 马艳丽, 张仲华. 潜伏类和移出类具有传染性的 SEIR 模型的渐近性分析[J]中国科学技术大学学报, 2016, 46(2): 95-103.

MA Yanli, ZHANG Zhonghua. Asymptotical analysis of SEIR model with infectious force in latent and immune periods[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2016, 46(2): 95-103.
 [4] 蒋贵荣, 刘期怀, 龙腾飞, 等. 脉冲动力系统的分岔混沌理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2015: 167-169.
 [5] 刘开源, 陈兰荪. 一类具有垂直传染与脉冲免疫的 SEIR 传染病模型的全局分析[J]. 系统科学与数学, 2010, 30(3): 323-333.
 LIU Kaiyuan, CHEN Lansun. Global analysis of an SEIR epidemic disease mode with vertical transmission and pulse vaccination[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2010, 30(3): 323-333.
 [6] JIANG Guirong, YANG Qigui. Periodic solutions and bifurcation in an SIS epidemic model with birth pulse [J]. Mathematical and Computer Modeling, 2009, 50: 498-508.
 [7] HU Zhixing, LIU Sheng, WANG Hui. Backward bifurcation of an epidemic model with standard incidence rate and treatment rate [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2008, 9(5): 2302-2312.
 [8] 马淑芳, 仇晓芬, 钟秋慧. 具有脉冲出生的 SIS 传染病模型的生存性[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2010, 27(1): 34-37.
 MA Shufang, QIU Xiaofen, ZHONG Qiuhui. Persistence of SIS epidemic model with birth pulse[J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University,

- 2010, 27(1): 34-37.
- [9] 王克. 随机生物数学模型[M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [10] LIN Yuguo, JIANG Daqing, WANG Shuai. Stationary distribution of a stochastic SIS epidemic model with vaccination [J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2014, 394: 187-197.
- [11] 周艳丽, 张卫国. 非线性传染率的随机 SIS 传染病模型的持久性和灭绝性[J]. *山东大学学报(理学版)*, 2013, 48(10): 68-77.
ZHOU Yanli, ZHANG Weigu. Persistence and extinction in stochastic SIS epidemic model with nonlinear incidence rate [J]. *Journal of Shandong University (Natural Science)*, 2013, 48(10): 68-77.
- [12] XU C. Global threshold dynamics of a stochastic differential equation SIS model [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2017, 447(2): 736-757.
- [13] ANDERSON R, MAY R. *Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control*[M]. Oxford: Oxford University Press, 1991.