第48卷第5期 中国科学技术大学学报 Vol.48,No.5
2018年5月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA May 2018
文章编号:0253-2778(2018)05-0420-11

基于通货膨胀和损失厌恶的DC养老金最优投资

王传玉,付春艳,盛国祥

(安徽工程大学数理学院金融工程系,安徽芜湖 241000)

摘要:主要研究了通货膨胀和损失厌恶下的DC养老金的最优投资问题.首先,应用伊藤公式得到通胀折现后真实股票价格的微分方程.然后,在前景理论的框架下,考虑通胀环境下的退休时刻终端财富期望效用最大化问题,应用鞅方法推导退休前任意时刻DC养老金最优投资策略的显式解.最后,应用蒙特卡洛方法对结果进行敏感度分析,分析损失厌恶对DC养老金最优投资策略的影响.

关键词:损失厌恶;通货膨胀;前景理论;DC养老金;最优投资;鞅方法

中图分类号:F832.48 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2018.05.011

引用格式:王传玉,付春艳,盛国祥. 基于通货膨胀和损失厌恶的DC养老金最优投资[J]. 中国科学技术大学学报,2018,48(5):420-430.

WANG Chuanyu, FU Chunyan, SHENG Guoxiang. Optimal investment of DC pension under the inflation and loss aversion[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2018,48(5):420-430.

Optimal investment of DC pension under the inflation and loss aversion

WANG Chuanyu, FU Chunyan, SHENG Guoxiang

(*Department of Financial Engineering, School of Mathematics and Physics, Anhui Polytechnic University, Wuhu* 241000, *China*)

Abstract: The optimal investment problem of DC pension under the inflation and loss aversion was studied. First, the stochastic differential equation of the real stock price after inflation was discounted by the Ito formula. Then, in the framework of prospect theory, considering the problem of maximizing the expected utility of terminal wealth discounted by inflation at retirement, the explicit solution of the optimal investment strategy of DC pension at any time before retirement was derived by using the martingale method.In the end, the impact of the loss aversion on the optimal investment strategy of DC pension was analyzed using the Monte-Carlo method.

Key words: loss aversion; inflation; prospect theory; DC pension; optimal investment; martingale method

0 引言

养老基金作为退休制的一个普遍的主题而产生,因为它有助于确保退休后的个人生活.目前存在两种类型的养老金:确定给付(defined benefit,DB)型和确定缴费(defined contribution,DC)型养老金.DC型养老金通过建立个人账户,将缴费投资于金融市场,实现资金的累积和增值,以满足养老金给付需求.DC养老金计划主要受退休前经济行为的影响,因此,DC养老金管理者希望在资金积累阶段找

收稿日期:2017-07-23;**修回日期**:2017-12-15

基金项目:国家自然科学基金(61503001),安徽省高校自然科学重点研究项目(KJ2018A0120)资助.

作者简介:王传玉(通讯作者),男,1964年生,教授.研究方向:精算数学.E-mail:wchyu@ahpu.edu.cn

到最好的投资组合.很多文献都研究了 DC 养老金的最优投资策略.Vigna 和 Haberman[1] 首次研究了 DC 养老金的离散模型,考虑了高风险资产和低风险资产,应用随机动态规划方法推导了 DC 养老金的最优投资策略.Boulier 等[2] 首次研究了常利率风险下 DC 养老金的连续模型,考虑 CRRA 效用函数,其模型中的终端财富需要确保退休后的个人生活.Guan 和 Liang[3] 同时考虑利率风险和股票波动性,推导得到最优投资策略的明确解,使得终端财富在年金保障下的 CRRA 效用最大化.

以上几篇文献都没有考虑通胀风险,由于近几年通货膨胀对金融市场的影响越发显著,退休人员的未来购买力受到严重影响,因此,研究 DC 养老金的最优投资策略时,有必要考虑通胀条件下的金融市场.Battocchio 和 Menoncin[4] 考虑连续时间下的 DC 养老金模型,研究最优资产配置,养老金管理者需要管理工资风险和通胀风险,使得终端财富的期望效用函数最大化.Munk 和 Sorensen[5] 设定目标函数是期末效用最大化模型,投资者将资金投资于现金、债券和股票,研究了利率风险和通胀风险对 DC 养老金最优资产配置的影响.最近,Han 和 Hung[6],Yao 等[7] 分别在 CRRA 效用最大化和均值方差准则下研究了带通胀风险的 DC 计划.殷俊等[8] 考虑了随机利率和通胀因素,且名义利率用 CIR 过程来模拟,并引入通胀指数化债券来对冲通胀风险,随后应用随机动态规划方法,推导 CRRA 效用函数下 DC 养老金的最优投资策略.

上述文献研究都关注 DC 养老金终端财富的光滑效用函数期望最大化,所以养老金管理者通常被认为是终端财富严格风险厌恶.然而,不同的人对风险的态度不同,DC 养老金终端财富的效用函数并非总是光滑的.Kahneman 和 Tversky[9] 首先提出了前景理论,提出了投资组合理论中的损失厌恶效用和扭曲概率,它可能会降低投资者的风险.Berkelaar 等[10] 首次用鞅方法推导了连续情况下,两种效用函数下损失厌恶的最优投资策略.随后,Gomes[11] 考虑了对应的离散模型,用鞅方法推出两种效用函数下损失厌恶的最优投资策略.Guan 和 Liang[12] 研究了损失厌恶和 VaR 约束下 DC 养老金的最优管理,效用函数分别考虑用 S 型函数和 CRRA 函数,并用敏感度分析研究了在不同的经济参数下的资产配置.

通过上述文献分析,可以发现,通货膨胀和损失厌恶对 DC 养老金投资策略有重要影响.本文在上述模型基础上研究通货膨胀和损失厌恶对 DC 养老金的最优投资问题.通过折现的方法考虑通胀因素,分析不同损失厌恶函数对养老金投资计划的影响,为投资者提供一些建议.

1　构建模型

在 $[0,T]$ 内,假设金融市场是一个连续无摩擦无套利且非自融资的完备市场.养老金计划开始于 0 时刻,$T>0$ 表示退休时刻.类似于文献[12],假设市场上存在三种资产,一种无风险资产(即现金),一种滚动债券和一种风险资产(即股票).

定义一个完备概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]},P)$,$\mathscr{F}_t$ 包含市场中 t 时刻之前可得的信息.

无风险资产(即现金)在 t 时刻的价格 $S_0(t)$ 满足下面的微分方程:

$$\mathrm{d}S_0(t)=S_0(t)r(t)\mathrm{d}t,\ S_0(0)=S_0 \tag{1}$$

这里的 $r(t)$ 是随机利率,它满足 Ornstein-Uhlenbeck 模型:

$$\mathrm{d}r(t)=a(b-r(t))\mathrm{d}t-\sigma_r\mathrm{d}W_r(t),\ r(0)=r_0 \tag{2}$$

式中,a,b,σ_r 是正的常数,$W_r(t)$ 是概率空间上的一维标准布朗运动.

一个到期日为 T 的零息债券在 t 时刻的价格 $B(t,T)$ 满足下面的微分方程,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}B(t,T)}{B(t,T)}=r(t)\mathrm{d}t+\sigma_rA(t,T)(\lambda_r\mathrm{d}t+\mathrm{d}W_r(t)),\\&B(T,T)=1\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

式中,$A(t,T)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-a(T-t)}}{a}$,$\lambda_r$ 表示 $W_r(t)$ 的风险市价,$\sigma_rA(t,T)$ 表示 $B(t,T)$ 的波动率.

购买一个期限为常数 K 的债券,则一个期限为常数 K 的滚动债券 $B_K(t)$ 满足下面的随机微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}B_K(t)}{B_K(t)}=r(t)\mathrm{d}t+\sigma_rA(t,t+K)(\lambda_r\mathrm{d}t+\mathrm{d}W_r(t)) \tag{4}$$

实际上,市场上任意期限的零息债券可以通过现金和滚动债券复制.它们的关系是

$$\frac{\mathrm{d}B(t,s)}{B(t,s)}=\left(1-\frac{A(t,s)}{A(t,s+K)}\right)\frac{\mathrm{d}S_0(t)}{S_0(t)}+\frac{A(t,s)}{A(t,s+K)}\frac{\mathrm{d}B_K(t)}{B_K(t)},\ \forall s>t \tag{5}$$

最后一种资产是一种风险资产(即股票).假设金融市场上的股票服从如下随机微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}S'(t)}{S'(t)}=r(t)\mathrm{d}t+\sigma_1(\lambda_r\mathrm{d}t+\mathrm{d}W_r(t))+\sigma_2(\lambda_S\mathrm{d}t+\mathrm{d}W_S(t)),\ S'(0)=S_1' \tag{6}$$

式中,$W_S(t)$ 是完备概率空间上的一维标准布朗运动,它和 $W_r(t)$ 独立;λ_S 是 $W_S(t)$ 的市场风险价格,它表示承担股票风险的收益.

考虑通货膨胀率为定义在 $(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]},P)$ 上的可测适应过程,满足下面的随机微分方程[13]:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}P(t)}{P(t)}=\mu_\pi\mathrm{d}t+\sigma_{P_1}\mathrm{d}W_r(t)+\sigma_{P_2}\mathrm{d}W_S(t),\\&P(0)=1\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

式中,μ_π 为预期即期通货膨胀率;$\sigma_P=(\sigma_{P_1},\sigma_{P_2})'$ 为通胀波动率矩阵,它们均为 $[0,T]\times\Omega$ 上可测、一致有界的过程.

利用通货膨胀率对股票价格进行折算,得到折现后的真实股票价格为

$$S(t)=\frac{S'(t)}{P(t)}.$$

然后应用伊藤公式,得到 $S(t)$ 满足如下微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)}=\mu(t)\mathrm{d}t+(\sigma_1-\sigma_{P_1})\mathrm{d}W_r(t)+(\sigma_2-\sigma_{P_2})\mathrm{d}W_S(t) \tag{8}$$

式中,$\mu(t)=r(t)+\sigma_1\lambda_r+\sigma_2\lambda_S-\mu_\pi-\sigma_1\sigma_{P_1}-\sigma_2\sigma_{P_2}+\sigma_{P_1}^2+\sigma_{P_2}^2$.

由于养老金管理者会从缴费者那里持续获得缴费,这种缴费会不断增加养老金账户的财富.养老金管理者在研究最优投资策略时,应该考虑从缴费者那里得到的缴费.员工的工资常常和金融市场有关,因此这里考虑一个随机缴费率.假设缴费率满足如下随机过程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}C(t)}{C(t)}=\mu_c\mathrm{d}t+\sigma_{C_1}\mathrm{d}W_r(t)+\sigma_{C_2}\mathrm{d}W_S(t),\\&C(0)=C_0\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式中,$\mu_c,\sigma_{C_1},\sigma_{C_2}$ 和 C_0 均是正常数.当 $\sigma_{C_1}=\sigma_{C_2}$ 时,这时缴费率是有界确定的.

假设养老金账户的初始资金为 X_0,养老金管理者可以通过在金融市场上投资来避免风险.假设市场上不存在交易成本和税收,短期购买也是允许的.分别用 $u_0(t)$,$u_B(t)$ 和 $u_S(t)$ 来表示投资于现金账户、债券和股票的资金,那么养老基金的财富 $X(t)$ 满足

$$\mathrm{d}X(t)=u_0(t)\frac{\mathrm{d}S_0(t)}{S_0(t)}+u_B(t)\frac{\mathrm{d}B_K(t)}{B_K(t)}+u_S(t)\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)}+C(t)\mathrm{d}t \tag{10}$$

将方程(1),(4)和(8)带入上面的微分方程,由 $X(t)=u_0(t)+u_B(t)+u_S(t)$,可以推出财富的明确表达式为

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{d}X(t)=r(t)X(t)\mathrm{d}t+\\&u_B(t)\sigma_rA(t,t+K)(\lambda_r\mathrm{d}t+\mathrm{d}W_r(t))+\\&u_S(t)(\sigma_1\lambda_r+\sigma_2\lambda_S-\mu_\pi-\sigma_1\sigma_{P_1}-\\&\sigma_2\sigma_{P_2}+\sigma_{P_1}^2+\sigma_{P_2}^2)\mathrm{d}t+\\&u_S(t)(\sigma_1-\sigma_{P_1})\mathrm{d}W_r(t)+\\&u_S(t)(\sigma_2-\sigma_{P_2})\mathrm{d}W_S(t)+C(t)\mathrm{d}t,\\&X(0)=X_0\geqslant 0\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

2 损失厌恶下的最优投资策略

2.1 损失厌恶的形式

Kahneman 和 Tversky[9] 首先提出了前景理论,提出了投资组合理论中的损失厌恶效用和扭曲概率,它可能会降低投资者的风险,其中的损失厌恶效用是很重要的发现.他们认为,人们经常做的投资决定和参考点有关,对于不同的人,参考点可能不同.终端财富在参考点以上即为收益,在参考点以下即为损失.人们对收益和损失经常表现出不同的行为.实际上,大多数人对损失比对收益更加敏感.他们的想法基于如下效用函数:

$$U(X(T))=\begin{cases}-A\,(\theta-X(T))^{\gamma_1},\ X(T)\leqslant\theta;\\B\,(X(T)-\theta)^{\gamma_2},\ X(T)>\theta\end{cases} \tag{12}$$

式中,A,B 为正常数,$0<\gamma_1\leqslant 1,0<\gamma_2<1$.

效用函数(12)表明,投资者对于收益持风险厌恶态度,而对于损失持风险喜好态度.应用该损失厌恶效用函数前需要提前选择参考点 θ.在 DC 养老基金中,参考点 θ 可以是养老基金的缴费率或初始财富.由(12)可知,终端财富值小于 θ 时,效用函数图像是凸的;终端财富值大于 θ 时,效用函数图像是凹的.

2.2 损失厌恶约束下的解

令 $u(t)=(u_B(t),u_S(t))$,如果方程(11)存在唯一解,且 $u(t)$ 关于 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ 渐近可测,则称 $u(t)$ 是可采纳策略,养老金管理者的目标是,寻找最优投资策略 $u^*(t)$ 满足损失厌恶效用函数的期

望最大化条件,即

$$\max_{u(\cdot)} E[U(X(T))]$$
$$\text{s.t.}\quad (X(t),u(t))\ \text{满足式(12)} \tag{13}$$

为了求解问题(13),先来介绍完备市场的定价核.给定随机变量的价格可以通过乘以定价核得到,由参考文献[10]的式(7),利用式(3),(8)可得,定价核 $H(t)$ 满足如下微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}H(t)}{H(t)}=-r(t)\mathrm{d}t-\lambda_r\mathrm{d}W_r(t)-\left(\lambda_S+\frac{\sigma_{P_1}^2+\sigma_{P_2}^2-\mu_\pi}{\sigma_2-\sigma_{P_2}}\right)\mathrm{d}W_S(t),H(0)=1 \tag{14}$$

在完备市场上可以利用鞅方法来求解最优投资组合选择问题.基于文献[14],问题(13)可以转化成带预算约束的等价问题,即

$$\max_{X(T)} E[U(X(T))]$$
$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} E\left[H(T)X(T)-\int_0^T H(s)C(s)\mathrm{d}s\right]\leqslant X(0),\\ X(T)\geqslant 0\end{cases} \tag{15}$$

预算约束的推导基于方程(11),由完备市场可得,该约束等价于方程(11).问题(15)中的预算约束的经济解释为:在DC养老金中,账户资金有两个来源,即初始财富和缴费.

命题2.1　损失厌恶效用下的最优终端财富为

$$X^{*,\lambda^*}(T)=\begin{cases}\theta+\left(\dfrac{\lambda^*H(T)}{B\gamma_2}\right)^{\frac{1}{\gamma_2-1}},\ H(T)<\overline{H};\\ 0,H(T)\geqslant\overline{H}\end{cases} \tag{16}$$

式中,$\overline{H}$ 满足 $f(\overline{H})=0$,

$$f(x)=B(1-\gamma_2)\left(\frac{B\gamma_2}{\lambda^*x}\right)^{\frac{\gamma_2}{1-\gamma_2}}+A\theta^{\gamma_1}-\lambda^*\theta x;$$

$\lambda^*>0$ 是一个关于预算约束的拉格朗日乘子,它满足

$$E\left[H(T)X^{*,\lambda^*}(T)-\int_0^T H(s)C(s)\mathrm{d}s\right]=X(0).$$

命题2.1的证明见附录.命题2.1中,最优终端财富分成两个部分:定价核较小时,财富类似于光滑CRRA效用;定价核较大时,财富跌至零.实际上,光滑效用的最优终端财富是关于定价核的递减函数.定价核很小时,光滑效用的最优终端财富始终在 θ 上面,此时,损失厌恶下的最优财富等于光滑效用的最优财富.然而,定价核相对较大时,最优财富小于参考点 θ,风险态度表现为风险喜好,此时的最优财富等于0.

命题2.2　损失厌恶下DC养老金管理者在时间 $t(0\leqslant t<T)$ 的最优财富为

$$\begin{aligned}X^{*,\lambda^*}(t)=&\frac{1}{H(t)}E\left[H(T)X^{*,\lambda^*}(T)\mid\mathscr{F}_t\right]-\int_t^T E\left[\frac{H(s)}{H(t)}C(s)\mid\mathscr{F}_t\right]\mathrm{d}s=\\&\left(\theta\exp\left[\frac{1}{2}\mathrm{Var}\{N_t\}+E\{N_t\}\right]\Phi(d_1(\overline{H}))+\right.\\&\left(\frac{\lambda^*H(t)}{B\gamma_2}\right)^{\frac{1}{\gamma_2-1}}\exp\left(\frac{\gamma_2^2}{2(\gamma_2-1)^2}\mathrm{Var}\{N_t\}+\right.\\&\left.\left.\frac{\gamma_2}{\gamma_2-1}E\{N_t\}\right)\Phi(d_2(\overline{H}))\right)-\\&\int_t^T C(t)\exp\left[\left(\mu_c-\frac{1}{2}\sigma_{C_1}^2-\frac{1}{2}\sigma_{C_2}^2-\frac{1}{2}\lambda_r^2-\right.\right.\\&\left.\left.\frac{1}{2}\left(\lambda_S+\frac{\sigma_{P_1}^2+\sigma_{P_2}^2-\mu_\pi}{\sigma_2-\sigma_{P_2}}\right)^2\right)(s-t)\right]\cdot\\&\exp\left[E\{Q(t,s)\}+\frac{1}{2}\mathrm{Var}\{Q(t,s)\}\right]\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{17}$$

式中,$\Phi(\cdot)$ 表示标准正态变量的累积分布函数,且

$$\begin{aligned}N_t=&-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\lambda_r^2(T-t)-\frac{1}{2}\left(\lambda_S+\frac{\sigma_{P_1}^2+\sigma_{P_2}^2-\mu_\pi}{\sigma_2-\sigma_{P_2}}\right)^2(T-t)-\\&\lambda_r[W_r(T)-W_r(t)]-\left(\lambda_S+\frac{\sigma_{P_1}^2+\sigma_{P_2}^2-\mu_\pi}{\sigma_2-\sigma_{P_2}}\right)[W_S(T)-W_S(t)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E\{N_t\}=&-(r(t)-b)\frac{1-\exp(-a(T-t))}{a}-\\&b(T-t)-\frac{1}{2}\left[\lambda_r^2+\left(\lambda_S+\frac{\sigma_{P_1}^2+\sigma_{P_2}^2-\mu_\pi}{\sigma_2-\sigma_{P_2}}\right)^2\right](T-t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\{N_t\}=&\frac{\sigma_r^2}{a^2}\left[(T-t)+\frac{2\exp(-a(T-t))}{a}-\frac{\exp(-2a(T-t))}{2a}-\frac{3}{2a}\right]+\\&\left[\lambda_r^2+\left(\lambda_S+\frac{\sigma_{P_1}^2+\sigma_{P_2}^2-\mu_\pi}{\sigma_2-\sigma_{P_2}}\right)^2\right](T-t)-\\&2\frac{\lambda_r}{a}(\sigma_r(T-t)-\sigma_rA(t,T)),\end{aligned}$$

$$d_1(\overline{H})=\frac{\ln\left(\dfrac{\overline{H}}{H(t)}\right)-E\{N_t\}-\mathrm{Var}\{N_t\}}{\sqrt{\mathrm{Var}\{N_t\}}},$$

$$d_2(\overline{H})=\frac{\ln\left(\dfrac{\overline{H}}{H(t)}\right)-E\{N_t\}-\dfrac{\gamma_2}{\gamma_2-1}\mathrm{Var}\{N_t\}}{\sqrt{\mathrm{Var}\{N_t\}}},$$

$$C(s)=C(t)\exp\Big[\Big(\mu_c-\frac{1}{2}\sigma_{C_1}^2-\frac{1}{2}\sigma_{C_2}^2\Big)(s-t)+\sigma_{C_1}(W_r(s)-W_r(t))+\sigma_{C_2}(W_S(s)-W_S(t))\Big],$$

$$E\{Q(t,s)\}=-(r(t)-b)\frac{1-\exp(-a(s-t))}{a}-b(s-t),$$

$$\mathrm{Var}\{Q(t,s)\}=\int_t^s\sigma_r^2A(u,s)^2\mathrm{d}u+(\sigma_{C_1}-\lambda_r)^2(s-t)+\Big(\sigma_{C_2}-\lambda_S-\frac{\sigma_{P_1}^2+\sigma_{P_2}^2-\mu_\pi}{\sigma_2-\sigma_{P_2}}\Big)^2(s-t)+2(\sigma_{C_1}-\lambda_r)\int_t^s\sigma_rA(u,s)\mathrm{d}u,$$

$\forall s\geqslant t$.

命题 2.3 投资于债券和股票的最优资金分别为

$$u_B^*(t)=-\frac{\partial G(t,r(t),H(t))}{\partial r(t)}\frac{1}{A(t,t+K)}-\lambda_r\frac{\partial G(t,r(t),H(t))}{\partial H(t)}\frac{H(t)}{\sigma_rA(t,t+k)}+(\lambda_S+\frac{\sigma_{P_1}^2+\sigma_{P_2}^2-\mu_\pi}{\sigma_2-\sigma_{P_2}})\frac{\partial G(t,r(t),H(t))}{\partial H(t)}\cdot\frac{(\sigma_1-\sigma_{P_1})H(t)}{(\sigma_2-\sigma_{P_2})\sigma_rA(t,t+K)}-\frac{F_1(t)}{\sigma_rA(t,t+K)}+\frac{(\sigma_1-\sigma_{P_1})F_2(t)}{(\sigma_2-\sigma_{P_2})\sigma_rA(t,t+K)},$$

$$u_S^*(t)=-(\lambda_S+\frac{\sigma_{P_1}^2+\sigma_{P_2}^2-\mu_\pi}{\sigma_2-\sigma_{P_2}})\cdot\frac{\partial G(t,r(t),H(t))}{\partial H(t)}\frac{H(t)}{\sigma_2-\sigma_{P_2}}-\frac{F_2(t)}{\sigma_2-\sigma_{P_2}}\quad(18)$$

式中，

$$\frac{\partial G(t,r(t),H(t))}{\partial H(t)}=-\frac{\theta}{H(t)\sqrt{\mathrm{Var}\{N_t\}}}\cdot\exp\Big[\frac{1}{2}\mathrm{Var}\{N_t\}+E\{N_t\}\Big]\varphi(d_1(\overline{H}))+\frac{1}{(\gamma_2-1)H(t)}\Big(\frac{\lambda^*H(t)}{B\gamma_2}\Big)^{\frac{1}{\gamma_2-1}}\cdot\exp\Big(\frac{\gamma_2^2}{2(\gamma_2-1)^2}\mathrm{Var}\{N_t\}+\frac{\gamma_2}{\gamma_2-1}E\{N_t\}\Big)\Phi(d_2(\overline{H}))-\frac{1}{H(t)\sqrt{\mathrm{Var}\{N_t\}}}\Big(\frac{\lambda^*H(t)}{B\gamma_2}\Big)^{\frac{1}{\gamma_2-1}}\cdot\exp\Big(\frac{\gamma_2^2}{2(\gamma_2-1)^2}\mathrm{Var}\{N_t\}+\frac{\gamma_2}{\gamma_2-1}E\{N_t\}\Big)\varphi(d_2(\overline{H}))\quad(19)$$

$$\frac{\partial G(t,r(t),H(t))}{\partial r(t)}=-\theta A(t,T)\exp\Big[\frac{1}{2}\mathrm{Var}\{N_t\}+E\{N_t\}\Big]\Phi(d_1(\overline{H}))+\theta\frac{A(t,T)}{\sqrt{\mathrm{Var}\{N_t\}}}\exp\Big[\frac{1}{2}\mathrm{Var}\{N_t\}+E\{N_t\}\Big]\varphi(d_1(\overline{H}))-\frac{\gamma_2A(t,T)}{\gamma_2-1}\Big(\frac{\lambda^*H(t)}{B\gamma_2}\Big)^{\frac{1}{\gamma_2-1}}\cdot\exp\Big(\frac{\gamma_2^2}{2(\gamma_2-1)^2}\mathrm{Var}\{N_t\}+\frac{\gamma_2}{\gamma_2-1}E\{N_t\}\Big)\Phi(d_2(\overline{H}))+\frac{A(t,T)}{\sqrt{\mathrm{Var}\{N_t\}}}\Big(\frac{\lambda^*H(t)}{B\gamma_2}\Big)^{\frac{1}{\gamma_2-1}}\cdot\exp\Big(\frac{\gamma_2^2}{2(\gamma_2-1)^2}\mathrm{Var}\{N_t\}+\frac{\gamma_2}{\gamma_2-1}E\{N_t\}\Big)\varphi(d_2(\overline{H}))\quad(20)$$

式中，$\varphi(\cdot)$ 表示标准正态密度函数，$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})$，且

$$F_1(t)=\sigma_{C_1}F(t,T)+\int_t^TD(t,s)\sigma_rA(t,s)\mathrm{d}s,$$

$$F_2(t)=\sigma_{C_2}F(t,T).$$

命题 2.2，2.3 的证明见附录.

3 敏感度分析

为了更好地说明损失厌恶水平对最优投资策略的影响，这里考虑一个确定的通货膨胀率.由于缴费率通常在初始时期是固定的，这里考虑一个确定的缴费率，并且应用蒙特卡洛方法（Monte-Carlo method，MCM）来找到现金、债券和股票的最优平均比例.

假设模型中使用的参数值如下，这些参数设定参考文献[12,15]中的数值应用：

$$a=0.2;b=0.02;\sigma_r=0.02;r_0=0.04;$$
$$A=2.25;B=1;K=20;T=40;$$
$$\lambda_r=0.15;\lambda_S=0.2;\sigma_1=0.2;\sigma_2=0.4;C_0=0.15;$$
$$\mu_c=0.02;\sigma_{C_1}=\sigma_{C_2}=0;X_0=1;$$
$$\mu_\pi=0.06;\sigma_{P_1}=0.2;\sigma_{P_2}=0.2.$$

图 1 给出了不同损失厌恶函数下的最优投资策略.

在图 1(a)中，养老金管理者在积累阶段把大约 2 的资金投资于股票，股票所占比例开始于 8，然后比例随时间慢慢减少.债券的最优比例从 5 降低到约 2.为了终端财富的损失厌恶效用最大化，养老金

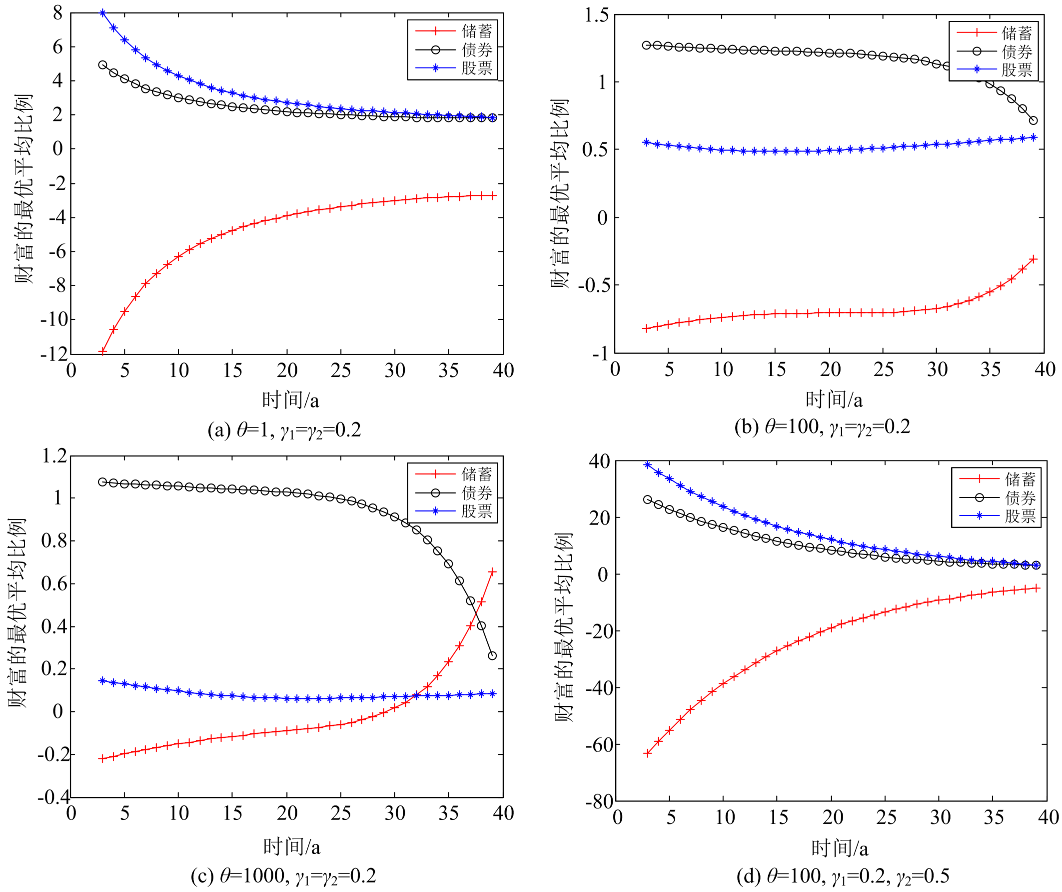

图 1　不同损失厌恶函数下的最优投资策略

Fig.1　The optimal investment strategy under different loss aversion functions

管理者总是保持资金的一个空头头寸，它从－12 慢慢增加到－2.

在图 1(b)中，养老金管理者不确定终端财富能否高于 $\theta=100$.此外，由于参考点不够高，养老金管理者可以在一些情况下实现终端财富高于 100.因此，管理人对资产投资有复杂的行为.由于初始时期投资风险高，风险规避特性导致债券中的资金开始于高比例，约为 1.3.然而，账户中的资金增加，从而债券的比例减少，接近退休时，养老金管理者在某些情况下获取高于 100 的财富，从而分配于现金的资金更多，分配于股票和债券的资金更少.

在图 1(c)中，参考点 $\theta=1000$，实际上，养老金管理者很难得到高于 1000 的财富，所以养老金管理者几乎是一个风险厌恶的投资者.因此，养老金管理者将大量比例的资金投资于债券，使得其在退休时从 1.1 降到 0.2；分配于现金账户的资金从－0.2 增长至 0.6；股票所占比例基本保持稳定.

另外，我们也关心风险厌恶 γ_2 对最优投资策略的影响.图 1(d)给出了 $\gamma_2=0.5$ 的情况，和图 1(b)相比，γ_2 增加，这种情况下养老金管理者表现为较少风险厌恶.因此，养老金管理者持有更高比例的股票.

4　结论

本文考虑通货膨胀服从随机微分方程，DC 型养老金管理者对损失持厌恶态度，应用鞅方法得到 DC 养老金退休时刻的最优终端财富以及退休前任意时刻投资于债券、股票的最优投资策略.最后，固定通货膨胀率，缴费率等参数，对不同损失厌恶函数下的退休前任意时刻最优投资策略进行敏感度分析，可以看出，风险厌恶的投资者投资于股票的资金更多.然而，在退休时，损失厌恶投资者持有更多地低风险资产.

我们通过分析各参数对 DC 型养老金计划最优资产配置的影响，为 DC 型养老金计划投资者提供更有效的策略.本文选取损失厌恶函数的参考点固定，接下来可以考虑参考点不定情况.此外，本文模型还可以在其他方面进行拓展，比如风险资产还可

以考虑通胀指数化债券等.

参考文献(References)

[1] VIGNA E, HABERMAN S. Optimal investment strategy for defined contribution pension schemes[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2001, 28: 233-262.

[2] BOULIER J F, HUANG S J, TAILLARD G. Optimal management under stochastic interest rates: The case of a protected defined contribution pension fund[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2001, 28: 173-189.

[3] GUAN G, LIANG Z. Optimal management of DC pension plan in a stochastic interest rate and stochastic volatility framework[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2014, 57: 58-66.

[4] BATTOCCHIO P, MENONCIN F. Optimal pension management in a stochastic framework[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2004, 34: 79- 95.

[5] MUNK C, SRENSEN C, VINTHER T N. Dynamic asset allocation under mean-reverting returns, stochastic interest rates and inflation uncertainty are popular recommendations consistent with rational behavior? [J]. International Review of Economics and Finance, 2004, 13: 141-166.

[6] HAN N W, HUNG M W. Optimal asset allocation for DC pension plans under inflation [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2012, 51: 172-181.

[7] YAO H X, YANG Z, CHEN P. Markowitz mean-variance defined contribution pension fund management under inflation: A continuous-time model [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2013, 53: 851-863.

[8] 殷俊, 李媛媛. 基于随机利率和通货膨胀的缴费确定型养老金计划最优资产配置策略[J]. 当代经济科学, 2013, 35 (2): 11-21.
YIN Jun, LI Yuanyuan. Stochastic interest rate and inflation based optimal asset allocation tactics for defined-contribution pension plans [J]. Modern Economic Science, 2013, 35 (2): 11-21.

[9] KAHNEMAN D, TVERSKY A. Prospect theory: An analysis of decision under risk [J]. Econometrica, 1979, 47(2): 263-292.

[10] BERKELAAR A B, KOUWENBERG R, POST T. Optimal portfolio choice under loss aversion[J]. Rev Econ Stat, 2004, 86 (4): 973-987.

[11] GOMES F J. Portfolio choice and trading volume with loss-averse investors [J]. J Bus, 2005, 78 (2): 675-706.

[12] GUAN G, LIANG Z. Optimal management of DC pension plan under loss aversion and value-at-risk constraints [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2016, 69: 224-237.

[13] 费为银, 李允贺, 夏登峰. 通胀下带激励的对冲基金最优投资[J]. 系统工程理论与实践, 2015, 35(11): 2740-2748.
FEI Weiyin, LI Yunhe, XIA Dengfeng. Optimal investment strategies of hedge funds with incentive fees under inflationary environment [J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2015, 35 (11): 2740-2748.

[14] COX J, HUANG C. Optimum consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process[J]. Journal of Economic Theory, 1989, 49: 33-83.

[15] DEELSTRA G, GRASSELLI M, KOEHL P F. Optimal investment strategies in the presence of a minimum guarantee[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2003, 33: 189-207.

附录

A1 命题 2.1 证明

我们可以用拉格朗日对偶理论来求解问题(15).首先定义问题(15)的拉格朗日算子:

$$\mathscr{L}(X(T),\lambda)=E[U(X(T))]-\lambda E[H(T)X(T)]+\lambda X(0)+\lambda E\left[\int_0^T H(s)C(s)\mathrm{d}s\right] \tag{A1}$$

那么,问题(15)等价于

$$\left.\begin{aligned}&\inf_{\lambda\geqslant 0}\sup_{X(T)}\mathscr{L}(X(T),\lambda),\\&X(T)\geqslant 0\end{aligned}\right\} \tag{A2}$$

先固定拉格朗日乘子,即求解以下问题:

$$\left.\begin{array}{l}\sup\limits_{X(T)}\mathscr{L}(X(T),\lambda),\\ X(T)\geqslant 0\end{array}\right\}\tag{A3}$$

问题(A3)为点态问题,可以求出显式解.然后,可以得到关于 λ 的最优化问题:

$$\inf_{\lambda\geqslant 0}\mathscr{L}(X^{*,\lambda}(T),\lambda)\tag{A4}$$

由于以上问题是关于 $X(T)$ 的最优化问题,可以忽略和 $X(T)$ 无关的的部分,以上问题可以简化为固定 λ 的问题:

$$\left.\begin{array}{l}\max\limits_{X(T)}\{E[U(X(T))]-\lambda E[H(T)X(T)]\},\\ X(T)\geqslant 0\end{array}\right\}\tag{A5}$$

令 $U_1(x)=-A(\theta-x)^{\gamma_1}$,$U_2(x)=B(x-\theta)^{\gamma_2}$.

当 $U(x)=U_2(x)$ 时,问题(A4)是一个凹的最优化问题,其解为

$$X_2^{*,\lambda}(T)=\theta+\left(\frac{\lambda^* H(T)}{B\gamma_2}\right)^{\frac{1}{\gamma_2-1}}.$$

当 $U(x)=U_1(x)$ 时,问题(A5)是一个凸的最优化问题,其解为 $X_1^{*,\lambda}(T)=0$ 或 θ.

现在来比较 $X_2^{*,\lambda}(T)$ 与 $X_1^{*,\lambda}(T)$ 从而确定全局最优值.令

$$f(H(T))=U(X_2^{*,\lambda})-\lambda H(T)X_2^{*,\lambda}-[U(X_1^{*,\lambda})-\lambda H(T)X_1^{*,\lambda}]>0,$$

那么,$X_2^{*,\lambda}(T)$ 就是最优解.

当 $X_1^{*,\lambda}(T)=\theta$ 时,$f(H(T))=B(1-\gamma_2)\left(\dfrac{B\gamma_2}{\lambda H(T)}\right)^{\frac{\gamma_2}{1-\gamma_2}}>0$ 恒成立.因此 $X_1^{*,\lambda}(T)=\theta$ 不可能是最优解.

当 $X_1^{*,\lambda}(T)=0$ 时,$f(H(T))=B(1-\gamma_2)\left(\dfrac{B\gamma_2}{\lambda H(T)}\right)^{\frac{\gamma_2}{1-\gamma_2}}+A\theta^{\gamma_1}-\lambda\theta H(T)$.

显然,$H(T)<\dfrac{A}{\lambda}\theta^{\gamma_1-1}$ 时,$f(H(T))>0$.另外,$\lim\limits_{H(T)\to+\infty}f(H(T))=-\infty$,$f'(H(T))<0$,因此,可以推断出方程 $f(H(T))=0$ 在区间 $(\dfrac{A}{\lambda}\theta^{\gamma_1-1},+\infty)$ 内存在唯一解.我们假设这个唯一解为 $\overline{H}$.由于 $f(H(T))$ 是严格递减函数,所以 $H(T)\geqslant\overline{H}$ 时,$f(H(T))\leqslant 0$;$H(T)<\overline{H}$ 时,$f(H(T))>0$.因此问题(A5)的最优解为

$$X^{*,\lambda}(T)=\begin{cases}\theta+\left(\dfrac{\lambda^* H(T)}{B\gamma_2}\right)^{\frac{1}{\gamma_2-1}},\ H(T)<\overline{H};\\ 0,H(T)\geqslant\overline{H}\end{cases}\tag{A6}$$

$X^{*,\lambda}(T)$ 也是问题(A3)的解.下面求 λ^*.最优对 $(X^{*,\lambda^*}(T),\lambda^*)$ 满足对偶理论中的互补松弛条件:

$$\lambda^* E\left[\left(\theta+\left(\frac{\lambda^* H(T)}{B\gamma_2}\right)^{\frac{1}{\gamma_2-1}}\right)H(T)1_{\{H(T)<\overline{H}\}}-\int_0^T H(s)C(s)\mathrm{d}s\right]=\lambda^* X(0)\tag{A7}$$

当 $\lambda^*=0$ 时,预算约束不起作用.由于 $0<\gamma_2<1$,由(A6)可得,$X^{*,\lambda^*}(T)=+\infty$,$\overline{H}=+\infty$,这种情况是不现实的.

当 $\lambda^*>0$ 时,预算约束有效.此时最优对 $(X^{*,\lambda^*}(T),\lambda^*)$ 满足条件:

$$E\left[\left(\theta+\left(\frac{\lambda^* H(T)}{B\gamma_2}\right)^{\frac{1}{\gamma_2-1}}\right)H(T)1_{\{H(T)<\overline{H}\}}-\int_0^T H(s)C(s)\mathrm{d}s\right]=X(0)\tag{A8}$$

(A8)的解即为最优拉格朗日乘子.

因此,$X^{*,\lambda^*}(T)$ 为问题(13)的解.

A2 命题 2.2 证明

由于市场完备,终端财富(14)在 t 时刻的最优财富为

$$X^{*,\lambda^*}(t)=\frac{1}{H(t)}E\left[H(T)X^{*,\lambda^*}(T)\mid\mathcal{L}_t\right]-\int_t^T E\left[\frac{H(s)}{H(t)}C(s)\mid\mathcal{L}_t\right]\mathrm{d}s \tag{A9}$$

(A9)中第一部分是 $X^{*,\lambda^*}(T)$ 在 t 时刻的风险中性价格;第二部分表示从 t 到 T 时间内累积缴费的财富值.

① $\frac{1}{H(t)}E\left[H(T)X^{*,\lambda^*}(T)\mid\mathcal{L}_t\right]=$

$$\frac{1}{H(t)}E\left[H(T)\theta 1_{\{H(T)<\overline{H}\}}\mid\mathcal{L}_t\right]+\frac{1}{H(t)}E\left[H(T)\left(\frac{\lambda^* H(T)}{B\gamma_2}\right)^{\frac{1}{\gamma_2-1}}1_{\{H(T)<\overline{H}\}}\mid\mathcal{L}_t\right].$$

由式(2)可得,$r(t)=(r_0-b)\exp(-at)+b-\sigma_r\exp(-at)\times\int_0^t\exp(as)\mathrm{d}W_r(s)$,那么,

$$\int_t^T r(s)\mathrm{d}s=\int_t^T\left[(r(t)-b)\exp(-a(s-t))+b-\sigma_r\exp(-as)\times\int_0^t\exp(au)\mathrm{d}W_r(u)\right]\mathrm{d}s=$$

$$(r(t)-b)\frac{1-\exp(-a(T-t))}{a}+b(T-t)-\sigma_r\int_t^T\exp(-as)\int_t^s\exp(au)\mathrm{d}W_r(u)\mathrm{d}s=$$

$$(r(t)-b)\frac{1-\exp(-a(T-t))}{a}+b(T-t)-\sigma_r\int_t^T\frac{1-\exp(-a(T-s))}{a}\mathrm{d}W_r(s)=$$

$$(r(t)-b)\frac{1-\exp(-a(T-t))}{a}+b(T-t)-\int_0^t\sigma_r A(s,T)\mathrm{d}W_r(s).$$

另外,$\int_t^T r(s)\mathrm{d}s$ 是一个正态分布随机变量,即

$$\int_t^T r(s)\mathrm{d}s\sim N\Bigg((r(t)-b)\frac{1-\exp(-a(T-t))}{a}+b(T-t),$$
$$\frac{\sigma_r^2}{a^2}\left[(T-t)+\frac{2\exp(-a(T-t))}{a}-\frac{\exp(-2a(T-t))}{2a}-\frac{3}{2a}\right]\Bigg).$$

由定价核 $H(t)$ 的微分方程(14)可得,$H(T)=H(t)\exp(N_t)$,其中,

$$N_t=-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\lambda_r^2(T-t)-\frac{1}{2}\left(\lambda_S+\frac{\sigma_{P_1}^2+\sigma_{P_2}^2-\mu_\pi}{\sigma_2-\sigma_{P_2}}\right)^2(T-t)-$$
$$\lambda_r[W_r(T)-W_r(t)]-\left(\lambda_S+\frac{\sigma_{P_1}^2+\sigma_{P_2}^2-\mu_\pi}{\sigma_2-\sigma_{P_2}}\right)[W_S(T)-W_S(t)],$$

所以 N_t 也是一个正态分布随机变量,且

$$E\{N_t\}=-(r(t)-b)\frac{1-\exp(-a(T-t))}{a}-b(T-t)-$$
$$\frac{1}{2}\left[\lambda_r^2+\left(\lambda_S+\frac{\sigma_{P_1}^2+\sigma_{P_2}^2-\mu_\pi}{\sigma_2-\sigma_{P_2}}\right)^2\right](T-t),$$

$$\mathrm{Var}\{N_t\}=\frac{\sigma_r^2}{a^2}\left[(T-t)+\frac{2\exp(-a(T-t))}{a}-\frac{\exp(-2a(T-t))}{2a}-\frac{3}{2a}\right]+$$
$$\left[\lambda_r^2+\left(\lambda_S+\frac{\sigma_{P_1}^2+\sigma_{P_2}^2-\mu_\pi}{\sigma_2-\sigma_{P_2}}\right)^2\right](T-t)-2\frac{\lambda_r}{a}(\sigma_r(T-t)-\sigma_r A(t,T)),$$

因此,

$$E\left[\theta H(T)1_{\{H(T)<\overline{H}\}}\mid\mathcal{L}_t\right]=\theta H(t)E\left[\exp(N_t)1_{\left\{N_t<\ln\left(\frac{\overline{H}}{H(t)}\right)\right\}}\right]=$$

$$\theta H(t)\int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{\overline{H}}{H(t)}\right)}\exp\left[-\left(\frac{(x-E\{N_t\})^2}{2\mathrm{Var}\{N_t\}}\right)\right]\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2\pi\mathrm{Var}\{N_t\}}}\mathrm{d}x=$$

$$\frac{\theta H(t)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\ln\left(\frac{\overline{H}}{H(t)}\right)-E\{N_t\}-\mathrm{Var}\{N_t\}}{\sqrt{\mathrm{Var}\{N_t\}}}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\exp\left(E\{N_t\}+\frac{1}{2}\mathrm{Var}\{N_t\}\right)\mathrm{d}y=$$

$$\theta H(t)\exp\left(E\{N_t\}+\frac{1}{2}\mathrm{Var}\{N_t\}\right)\Phi\left[\frac{\ln\left(\frac{\overline{H}}{H(t)}\right)-E\{N_t\}-\mathrm{Var}\{N_t\}}{\sqrt{\mathrm{Var}\{N_t\}}}\right].$$

同理，得

$$\frac{1}{H(t)}E\left[H(T)\left(\frac{\lambda^* H(T)}{B\gamma_2}\right)^{\frac{1}{\gamma_2-1}}1_{\{H(T)<\overline{H}\}}\mid \mathscr{L}_t\right]=$$

$$\left(\frac{\lambda^* H(t)}{B\gamma_2}\right)^{\frac{1}{\gamma_2-1}}\exp\left(\frac{\gamma_2^2}{2(\gamma_2-1)^2}\mathrm{Var}\{N_t\}+\frac{\gamma_2}{\gamma_2-1}E\{N_t\}\right)\Phi(d_2(\overline{H})),$$

式中，$d_2(\overline{H})=\dfrac{\ln\left(\frac{\overline{H}}{H(t)}\right)-E\{N_t\}-\frac{\gamma_2}{\gamma_2-1}\mathrm{Var}\{N_t\}}{\sqrt{\mathrm{Var}\{N_t\}}}$.

②由方程(9)可得

$$C(s)=C(t)\exp\left[\left(\mu_c-\frac{1}{2}\sigma_{C_1}-\frac{1}{2}\sigma_{C_2}\right)(s-t)\right]+\sigma_{C_1}(W_r(s)-W_r(t))+\sigma_{C_2}(W_S(s)-W_S(t)),\forall s\geqslant t.$$

因此，

$$E\left[\frac{H(s)}{H(t)}C(s)\mid\mathscr{L}_t\right]=$$

$$E\left[C(t)\exp\left(\left(\mu_c-\frac{1}{2}\sigma_{C_1}^2-\frac{1}{2}\sigma_{C_2}^2-\frac{1}{2}\lambda_r^2-\frac{1}{2}\left(\lambda_S+\frac{\sigma_{P_1}^2+\sigma_{P_2}^2-\mu_\pi}{\sigma_2-\sigma_{P_2}}\right)^2\right)(s-t)\right)\exp(Q(t,s))\right]=$$

$$C(t)\exp\left[\left(\mu_c-\frac{1}{2}\sigma_{C_1}^2-\frac{1}{2}\sigma_{C_2}^2-\frac{1}{2}\lambda_r^2-\frac{1}{2}\left(\lambda_S+\frac{\sigma_{P_1}^2+\sigma_{P_2}^2-\mu_\pi}{\sigma_2-\sigma_{P_2}}\right)^2\right)(s-t)\right]\times$$

$$\exp\left[E\{Q(t,s)\}+\frac{1}{2}\mathrm{Var}\{Q(t,s)\}\right],$$

式中，

$$Q(t,s)=-\int_s^t r(u)\mathrm{d}u+(\sigma_{C_1}-\lambda_r)[W_r(s)-W_r(t)]+$$

$$(\sigma_{C_2}-\lambda_S-\frac{\sigma_{P_1}^2+\sigma_{P_2}^2-\mu_\pi}{\sigma_2-\sigma_{P_2}})[W_S(s)-W_S(t)].$$

$Q(t,s)$ 也是一个正态分布随机变量，且，

$$E\{Q(t,s)\}=-(r(t)-b)\frac{1-\exp(-a(s-t))}{a}-b(s-t),$$

$$\mathrm{Var}\{Q(t,s)\}=\int_t^s\sigma_r^2A(u,s)^2\mathrm{d}u+(\sigma_{C_1}-\lambda_r)^2(s-t)+$$

$$\left(\sigma_{C_2}-\lambda_S-\frac{\sigma_{P_1}^2+\sigma_{P_2}^2-\mu_\pi}{\sigma_2-\sigma_{P_2}}\right)^2(s-t)+2(\sigma_{C_1}-\lambda_r)\int_t^s\sigma_rA(u,s)\mathrm{d}u.$$

令 $D(t,s)=E\left[\frac{H(s)}{H(t)}C(s)\mid\mathscr{L}_t\right]$，那么 $D(t,s)$ 满足下面的倒向随机微分方程：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}D(t,s)}{D(t,s)}=r(t)\mathrm{d}t+(\sigma_{C_1}+\sigma_rA(t,s))[\lambda_r\mathrm{d}t+\mathrm{d}W_r(t)]+\\&\qquad\sigma_{C_2}\left[(\lambda_S+\frac{\sigma_{P_1}^2+\sigma_{P_2}^2-\mu_\pi}{\sigma_2-\sigma_{P_2}})\mathrm{d}t+\mathrm{d}W_S(t)\right],\\&D(s,s)=C(s),\ s\geqslant t\end{aligned}\right\}\tag{A9}$$

令 $F(t,T)=\int_t^T D(t,s)\mathrm{d}s$，$F(t,T)$ 也满足如下倒向随机微分方程：

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{d}F(t,T)=-C(t)\mathrm{d}t+r(t)F(t,T)\mathrm{d}t+F_1(t)[\lambda_r\mathrm{d}t+\mathrm{d}W_r(t)]+\\&\qquad F_2(t)\left[(\lambda_S+\frac{\sigma_{P_1}^2+\sigma_{P_2}^2-\mu_\pi}{\sigma_2-\sigma_{P_2}})\mathrm{d}t+\mathrm{d}W_S(t)\right],\\&F(T,T)=0\end{aligned}\right\}\tag{A10}$$

其中，$F_1(t)=\sigma_{C_1}F(t,T)+\int_t^T D(t,s)\sigma_r A(t,s)\mathrm{d}s$，$F_2(t)=\sigma_{C_2}F(t,T)$.

综上，命题 2.2 得证.

A3　命题 2.3 证明

比较 $X^{*,\lambda^*}(t)$ 的微分形式和方程(11)，可以得到最优投资策略.

令 $G(t,r(t),H(t))=\dfrac{1}{H(t)}E\left[H(T)X^{*,\lambda^*}(T)\mid\mathscr{L}_t\right]$，那么，

$$\mathrm{d}X^{*,\lambda^*}(t)=\mathrm{d}G(t,r(t),H(t))-\mathrm{d}F(t,T).$$

根据方程(2)，(14)和(A10)，$\mathrm{d}X^{*,\lambda^*}(t)$ 的显式形式为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X^{*,\lambda^*}(t)=&\square\mathrm{d}t-\left[\sigma_r\frac{\partial G(t,r(t),H(t))}{\partial r(t)}+\lambda_r\frac{\partial G(t,r(t),H(t))}{\partial H(t)}H(t)+F_1(t)\right]\mathrm{d}W_r(t)-\\&\left[(\lambda_S+\frac{\sigma_{P_1}^2+\sigma_{P_2}^2-\mu_\pi}{\sigma_2-\sigma_{P_2}})\frac{\partial G(t,r(t),H(t))}{\partial H(t)}H(t)+F_2(t)\right]\mathrm{d}W_S(t)\end{aligned}\tag{A11}$$

式中，$\square$ 表示某些和推导最优投资策略无关的函数.我们可以通过单独比较扩散部分的系数得到最优投资策略，所以只需计算 $\mathrm{d}X^{*,\lambda^*}(t)$ 的扩散部分的显式形式.比较式(A11)和方程(11)，即可得式(18).证毕.