文章编号:0253-2778(2018)05-0361-06

二维部分耗散 Navier-Stokes 方程解的最优代数衰减性

张昭云,谢倩倩,贾 艳,董柏青

(安徽大学数学科学学院,安徽合肥 230601)

摘要:主要讨论部分耗散二维 Navier-Stokes 方程解的时间衰减性.利用改进的 Fourier 分解方法和归纳方法,得到了方程解及其高阶导数的最优代数衰减率.

关键词:Navier-Stokes 方程;部分耗散;Fourier 分解方法;最优代数衰减

中图分类号:O175.2 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2018.05.003

2010 Mathematics Subject Classification:76N10

引用格式:张昭云,谢倩倩,贾艳,等. 二维部分耗散 Navier-Stokes 方程解的最优代数衰减性[J]. 中国科学技术大学学报,2018,48(5):361-366.

ZHANG Zhaoyun, XIE Qianqian, JIA Yan,et al. Optimal algebraic decay of solutions for 2D Navier-Stokes equations with partial dissipation[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2018,48(5):361-366.

Optimal algebraic decay of solutions for 2D Navier-Stokes equations with partial dissipation

ZHANG Zhaoyun, XIE Qianqian, JIA Yan, DONG Boqing

(*School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei* 230601, *China*)

Abstract: The optimal algebraic decay of solutions for two-dimensional Navier-Stokes equation with partial dissipation was studied. By developing the classic Fourier splitting methods together with inductive methods, the higher-order derivatives of solutions in the optimal algebraic rates was obtained.

Key words: Navier-Stokes equations; partial dissipation; Fourier splitting methods; optimal algebraic decay

0 引言

本文主要研究下面二维 Navier-Stokes 方程的 Cauchy 问题:

$$\left.\begin{aligned}&\partial_t u_1-\mu_{11}\partial_{xx}u_1-\mu_{12}\partial_{yy}u_1+u\cdot\nabla u_1+\partial_x\pi=0,\\&\partial_t u_2-\mu_{21}\partial_{xx}u_2-\mu_{22}\partial_{yy}u_2+u\cdot\nabla u_2+\partial_y\pi=0,\\&\nabla\cdot u=0,\\&u(x,y,0)=u_0\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式中,未知函数 $u=(u_1(x,y;t),u_2(x,y;t))$ 和 π 分别表示流体的速度和压力,u_0 是初速度. $\mu_{ij}(i,j=1,2)\geqslant 0$ 为流体的动力学粘性系数.

基于其在物理和数学以及其他相关科学领域的重要性,近一个多世纪以来,Navier-Stokes 方程的理论和应用研究一直是非线性偏微分方程领域中最重要的前沿问题之一. 当空间维数为 2 时,众所周知,经典的不可压缩的 Navier-Stokes 方程的 Cauchy 问题存在唯一的整体光滑解.但当维数大于

收稿日期:2017-08-30;**修回日期**:2018-01-25

基金项目:国家自然科学基金(11271019,11571240)资助.

作者简介:张昭云,男,1992 年生,硕士生.研究方向:偏微分方程. E-mail:zhangzhaoyunmath@163.com

通讯作者:董柏青,博士/教授. E-mail:bqdong@ahu.edu.cn

等于 3 时,然而 Navier-Stokes 方程在大的初值条件下是否存在整体经典解依然是一个非常大的公开问题[1-2].

在开创性的文章中，Leray[3] 首次提出了 $n(n>2)$ 维 Navier-Stokes 方程解的长时间衰减问题. 利用 Fourier 分解方法,Schonbek[4] 肯定地回答了这一问题并分别证明了其解在 L^2 范数下的代数衰减速率为

$$\|u(t)\|_{L^2}\leqslant C(1+t)^{-\frac{n}{4}}$$

以及二维 Navier-Stokes 方程高阶导数的最优代数衰减性

$$\|\nabla^m u(t)\|_{L^2}\leqslant C(1+t)^{-\frac{m+1}{2}},\ m>0,\ t>1.$$

之后,利用不同的方法,文献[5-8]先后进一步证明了 Navier-Stokes 方程具有更加丰富的最优代数衰减速率.关于 Navier-Stokes 方程在不同空间范数的衰减性质可以参考文献[9-18].

需要指出的是,上述研究工作都强烈地依赖于流体的 Laplace 耗散性以及由 Stokes 算子生成解析半群的 L^p-L^q 衰减估计.然而对一些具有各向异性的不可压缩流体而言,比如当 $\mu_{11}=\mu_{22}=0$,$\mu_{12}>0$,$\mu_{21}>0$ 时，即方程(1)变为(为了方便不妨令 $\mu_{21}=\mu_{12}=1$)

$$\left.\begin{aligned}&\partial_t u_1-\partial_{yy}u_1+u\cdot\nabla u_1+\partial_x\pi=0,\\&\partial_t u_2-\partial_{xx}u_2+u\cdot\nabla u_2+\partial_y\pi=0,\\&\nabla\cdot u=0,\\&u(x,0)=u_0\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

我们无法直接再利用上述文章中使用的方法来研究(2)的时间衰减性,至今也没有发现在这一方面有相关的时间衰减性结果.例如一方面我们无法直接利用 Fourier 分解方法通过耗散项把区域分成一个圆盘和圆盘的外部,从而来刻画解在 Fourier 变换下的低频效应.另一方面方程(2)的线性问题显然已经没有了经典热方程那样的 L^p-L^q 估计,我们无法利用积分方程基于经典的线性热传导方程 L^p-L^q 估计的能量分析方法来得到解的衰减性.为了克服这一新的困难,我们基于方程(2)特殊的部分耗散结构,通过进一步发展 Fourier 分解方程并结合有限能量解的一致估计和迭代方法,成功得到了二维 Navier-Stokes 方程解及其高阶导数的最优代数衰减性,具体来说，本文我们将证明下面的结果.

定理 0.1 设 $u_0\in L^1(R^2)\cap H^s(R^2)$，$s>0$ 且 $\nabla\cdot u_0=0$. 方程(2)存在唯一的强解 $u(x,y;t)\in C((0,T];H^s)$ 对于任意的 $T>0$ 且满足

$$\|\nabla^s u\|_{L^2}^2\leqslant C(1+t)^{-(s+1)},\ t>0\tag{3}$$

注 0.1 定理 0.1 的衰减结果和线性热方程的衰减速率一致,因而是最优的.

1 几个引理

首先,我们给出几个约定:分数阶拉普拉斯算子 Λ^α，$\Lambda=(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ 表示 Zygmund 算子,其是通过 Fourier 变换定义的,即

$$\widehat{\Lambda^\alpha f}(\xi)=|\xi|^\alpha\hat{f}(\xi),\ \hat{f}(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{R^2}e^{-ix\cdot\xi}f(x)dx\tag{4}$$

另外,本文中 C 只与初始值有关,与时间 t 无关.

我们再给出几个在本文中重要的引理.

引理 1.1 假设 $s\in R$，$\mathrm{div}u=0$，那么有

$$\iint_{R^2}(-\partial_{yy}u_1\Lambda^{2s}u_1-\partial_{xx}u_2\Lambda^{2s}u_2)dxdy\geqslant\frac{1}{2}\|\Lambda^{1+s}u\|_{L^2}^2\tag{5}$$

引理 1.2[6] 假设 $u_0\in H^s(R^2)$ 且 $\nabla\cdot u_0=0$. 如果 u 是方程(2)的强解,那么 u 满足下面的先验估计:

$$\|u(t)\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\nabla u\|_{L^2}^2d\tau\leqslant\|u_0\|_{L^2}^2\tag{6}$$

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\Delta u\|_{L^2}^2d\tau\leqslant\|\nabla u_0\|_{L^2}^2\tag{7}$$

和

$$\|\Lambda^s u(t)\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\Lambda^{s+1}u\|_{L^2}^2d\tau\leqslant C\|\Lambda^s u_0\|_{L^2}^2,\ s\geqslant 2\tag{8}$$

证明 为了证明式(6)，只需要对方程(2)两边同时与 u 做内积,然后分部积分并利用引理1.1在 $s=0$ 的情形即可得到式(6).为了证明式(7)和(8),我们只需要证明式(8)对任意 $s>0$ 成立即可.对方程(2)两边同时与 $(-\Delta)^s u$ 做内积，得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Lambda^s u(t)\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|\Lambda^{s+1}u(t)\|_{L^2}^2=-\int_{R^2}(u\cdot\nabla u)(-\Delta)^s u\,dxdy\triangleq\mathrm{RHS}\tag{9}$$

这里我们使用了基于引理 1.1 得到的不等式

$$\iint_{R^2}(-\partial_{yy}u_1(-\Delta)^s uu_1-\partial_{xx}u_2(-\Delta)^s uu_2)dxdy\geqslant\frac{1}{2}\|\Lambda^{1+s}u\|_{L^2}^2.$$

利用 Hölder 不等式和 Gagliardo-Nirenberg 不等式，有

$$
\begin{aligned}
|RHS| &\leqslant \int_{R^2} \Lambda^s(u\cdot\nabla u)\Lambda^s u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \\
& C\|\Lambda^s(u\otimes u)\|_{L^2}\|\Lambda^{s+1}u\|_{L^2}\leqslant \\
& C\|\Lambda^s u\|_{L^4}^2\|u\|_{L^4}^2+\frac{1}{8}\|\Lambda^{s+1}u\|_{L^2}^2\leqslant \\
& C\|\Lambda^s u\|_{L^2}\|\Lambda^{s+1}u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{L^2}+ \\
& \frac{1}{8}\|\Lambda^{s+1}u\|_{L^2}^2\leqslant C\|\Lambda^s u\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\|\Lambda^{s+1}u\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

把 RHS 代入并利用 Gronwall 不等式和(6)，就得到

$$
\|\Lambda^s u(t)\|_{L^2}^2+\int_0^t\|\Lambda^{s+1}u\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau\leqslant C(u_0)\|\Lambda^s u_0\|_{L^2}^2.
$$

这样完成了引理 1.2 的证明.

引理 1.3 假设 u 是方程(2)的强解，并且 $u_0\in L^1(R^2)\cap L^2(R^2)$. 那么

$$
|\hat{u}(\xi,t)|^2\leqslant C+C|\xi|^2\left(\int_0^t\|u\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau\right)^2.
$$

证明 对方程(2)两边直接进行 Fourier 变换，有

$$
\left.
\begin{aligned}
\hat{u}_1(t)+|\xi_2|^2\hat{u}_1=F[-u\cdot\nabla u_1-\partial_x\pi]=G_1(\xi,t),\\
\hat{u}_2(t)+|\xi_1|^2\hat{u}_2=F[-u\cdot\nabla u_2-\partial_y\pi]=G_2(\xi,t)
\end{aligned}
\right\}
\tag{10}
$$

现在估计 $G_i(\xi,t)$, $i=1,2$.

$$
\begin{aligned}
&|F[-(u\cdot\nabla)u_1]|=|F[\mathrm{div}(u\otimes u_1)]|\leqslant\\
&\sum_{i,j=1}^2\int_{R^2}|u_iu_{1j}||\xi_j|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant|\xi|\ \|u\|_{L^2}^2,\\
&|F[-(u\cdot\nabla)u_2]|=|F[\mathrm{div}(u\otimes u_2)]|\leqslant\\
&\sum_{i,j=1}^2\int_{R^2}|u_iu_{1j}||\xi_j|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant|\xi|\ \|u\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

对方程(1)两边同时取散度，有

$$
\Delta\pi=-\partial_{kl}(u_ku_l),
$$

即

$$
\pi=(-\Delta)^{-1}\partial_{kl}(u_ku_l),
$$

利用 Fourier 变换，

$$
F[\partial_x\pi]=\mathrm{i}\xi_1|\xi|^{-2}\xi_k\xi_lF[-u_ku_l],
$$

因此

$$
|F[\partial_x\pi]|\leqslant|\xi|\ \|u\|_{L^2}^2.
$$

同样的

$$
|F[\partial_y\pi]|\leqslant|\xi|\ \|u\|_{L^2}^2.
$$

这样我们就估计 G_1, G_2 为

$$
|G_i(\xi,t)|\leqslant C|\xi|\ \|u\|_{L^2}^2,\ i=1,2.
$$

本质上(10)是一个关于 ξ 的常微分方程组，利用常数变易公式，我们得到

$$
\begin{aligned}
|\hat{u}_1(\xi,t)|&=|\hat{u}_1(\xi,0)\mathrm{e}^{-|\xi_2|^2t}|+\\
&C|\xi|\int_0^t\|u\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau,\\
|\hat{u}_2(\xi,t)|&=|\hat{u}_2(\xi,0)\mathrm{e}^{-|\xi_1|^2t}|+\\
&C|\xi|\int_0^t\|u\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
$$

因为 $u_0\in L^1$，所以

$$
|\hat{u}_0(\xi)|\leqslant\|u_0\|_{L^1}\leqslant C,
$$

这样就得到

$$
|\hat{u}(\xi,t)|^2\leqslant C+C|\xi|^2\left(\int_0^t\|u\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau\right)^2.
$$

引理 1.3 得证.

2 定理 0.1 的证明

由引理 1.2 的高阶先验估计，我们可以平行利用文献[2]的方法得到方程(2)存在唯一的整体强解，由于证明完全是相同的，这里不再赘述.

下面证明定理 0.1 的衰减部分. 我们主要分三步来证明这一结果.

2.1 L^2 衰减

我们主要利用经典的 Fourier 分解方法来证明方程(2)的解的 L^2 衰减.

对方程(2)两边与 (u_1,u_2) 做内积，利用引理 1.1 和分部积分，有

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{L^2}^2\leqslant 0 \tag{11}
$$

由 Plancherel 定理，有

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R^2}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi+\int_{R^2}|\xi|^2|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi\leqslant 0.
$$

令 $f(t)\in C^1(R^+)$ 且满足 $f(0)=1$, $f(t)>0$, $f'(t)>0$. 对上式方程两边同时乘 $f(t)$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(t)\int_{R^2}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi\right)+\\
&f(t)\int_{R^2}|\xi|^2|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi\leqslant\\
&f'(t)\int_{R^2}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}
$$

令 $B(t)=\{\xi\in R^2:|\xi|\leqslant(\frac{f'(t)}{f(t)})^{\frac{1}{2}}\}$；那么

$$
\begin{aligned}
&f(t)\int_{R^2}|\xi|^2|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi\geqslant\\
&2f(t)\int_{B(t)^c}|\xi|^2|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi\geqslant
\end{aligned}
$$

$$f'(t)\int_{R^2}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi-f'(t)\int_{B(t)}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi,$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(t)\int_{R^2}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi\right)\leqslant f'(t)\int_{B(t)}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi.$$

不等式两边关于时间 t 积分得

$$f(t)\int_{R^2}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi\leqslant\int_{R^2}|\hat{u}_0|^2\mathrm{d}\xi+C\int_0^t f'(s)\int_{B(s)}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s \tag{12}$$

由引理1.3和 Hölder 不等式,有

$$f(t)\int_{R^2}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi\leqslant C+C\int_0^t f'(s)\int_{B(s)}\left[1+|\xi|^2\left(\int_0^s\|u\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau\right)^2\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\leqslant C+C\int_0^t f'(s)\int_{B(s)}\left[1+|\xi|^2 s\left(\int_0^s\|u\|_{L^2}^4\mathrm{d}\tau\right)\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s \tag{13}$$

或者进一步利用引理1.2得到

$$f(t)\int_{R^2}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi\leqslant C+C\int_0^t f'(s)\int_{B(s)}(1+|\xi|^2s^2)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s \tag{14}$$

取 $f(t)=(\ln(e+t))^3$,由(14),有

$$(\ln(e+t))^3\int_{R^2}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi\leqslant C+C\int_0^t\frac{(\ln(e+s))^2}{e+s}\int_{B(s)}(1+|\xi|^2s^2)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\leqslant$$

$$C+C\int_0^t\left(\frac{(\ln(e+s))^2}{e+s}\frac{1}{(e+s)\ln(e+s)}+\frac{(\ln(e+s))^2}{e+s}\frac{1}{(e+s)^2(\ln(e+s))^2}(e+s)^2\right)\mathrm{d}s\leqslant C+C\int_0^t\frac{1}{e+s}\mathrm{d}s\leqslant C\ln(e+t).$$

因此

$$\|u(t)\|_{L^2}^2=\|\hat{u}(t)\|_{L^2}^2\leqslant C(\ln(e+t))^{-2} \tag{15}$$

我们再选取 $f(t)=(1+t)^2$,从(13)有

$$(1+t)^2\int_{R^2}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi\leqslant C+C\int_0^t(1+s)\int_{B(s)}\left[1+|\xi|^2s\left(\int_0^s\|u\|_{L^2}^4\mathrm{d}\tau\right)\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\leqslant C+C(1+t)+C(1+t)\int_0^t\|u\|_{L^2}^4\mathrm{d}s \tag{16}$$

利用(15)和 Planchel 定理,

$$(1+t)\|u\|_{L^2}^2\leqslant C+C\int_0^t((1+s)\|u\|_{L^2}^2)(1+s)^{-1}(\ln(e+s))^{-2}\mathrm{d}s.$$

运用 Gronwall 不等式,

$$(1+t)\|u\|_{L^2}^2\leqslant C\exp\left\{\int_0^\infty(1+s)^{-1}(\ln(e+s))^{-2}\mathrm{d}s\right\}\leqslant C.$$

这样我们就得到方程(2)解的 L^2 衰减性:

$$\|u(t)\|_{L^2}^2\leqslant C(1+t)^{-1} \tag{17}$$

2.2 H^1 辅助衰减

类似于引理1.2,我们也可以得到

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2+\int_s^t\|\Delta u\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau\leqslant\|\nabla u(s)\|_{L^2}^2,\quad 0<s<t\leqslant\infty.$$

即 $\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2$ 满足单调性

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2\leqslant\|\nabla u(s)\|_{L^2}^2,\ 0<s<t\leqslant\infty.$$

又由引理1.2,有

$$\int_0^\infty\|\nabla u\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau\leqslant\|u_0\|_{L^2}^2\leqslant C.$$

从而,我们得到

$$\frac{t}{2}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2\leqslant\int_{\frac{t}{2}}^t\|\nabla u(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\leqslant\int_0^t\|\nabla u(s)\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\leqslant\|u_0\|_{L^2}^2,$$

即

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2}\leqslant(1+t)^{-\frac{1}{2}},\ t>0 \tag{18}$$

2.3 高阶导数衰减

方程(2)两边分别于 $\Lambda^{2s}u_1,\Lambda^{2s}u_2$ 做内积,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Lambda^s u\|_{L^2}^2+\|\Lambda^{s+1}u\|_{L^2}^2\leqslant\left|\iint_{R^2}(u\cdot\nabla u)\Lambda^{2s}u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \tag{19}$$

利用 Fourier 变换、Hölder 不等式和 Young 不等式,(19)右端经计算可得到

$$\left|\int_{R^2}(u\cdot\nabla u)\Lambda^{2s}u\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|=\int_{R^2}|\xi_1\hat{u}_1u+\xi_2\hat{u}_2u||\xi^{2s}\hat{u}|\mathrm{d}\xi\leqslant\sum_{i=1}^2\int_{R^2}|\xi|^s|\hat{u}_iu||\xi|^{s+1}|\hat{u}|\mathrm{d}\xi\leqslant\sum_{i=1}^2\|\Lambda^s(u_iu)\|_{L^2}\|\Lambda^{s+1}u\|_{L^2}\leqslant C\sum_{i=1}^2\|\Lambda^s(u_iu)\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\|\Lambda^{s+1}u\|_{L^2}^2 \tag{20}$$

由 Hölder 不等式、Gagliardo-Nireneberg 不等式和 Young 不等式,有

$$\sum_{i=1}^{2}\|\Lambda^s(u_i u)\|_{L^2}^2 \leqslant$$
$$C\sum_{i=1}^{2}(\|u_i\|_{L^4}\|\Lambda^s u\|_{L^4}+\|u\|_{L^4}\|\Lambda^s u_i\|_{L^4})^2 \leqslant$$
$$C\|u\|_{L^4}^2\|\Lambda^s u\|_{L^4}^2 \leqslant$$
$$C\|u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}\|\Lambda^{s-1}u\|_{L^2}\|\Lambda^{s+1}u\|_{L^2} \leqslant$$
$$C\|u\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{L^2}^2\|\Lambda^{s-1}u\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\|\Lambda^{s+1}u\|_{L^2}^2 \tag{21}$$

将 (20)～(21) 代入(19)并利用(17)和(18)，我们就可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Lambda^s u\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|\Lambda^{s+1}u\|_{L^2}^2 \leqslant$$
$$C\|u\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{L^2}^2\|\Lambda^{s-1}u\|_{L^2}^2 \leqslant$$
$$C(1+t)^{-2}\|\Lambda^{s-1}u\|_{L^2}^2 \tag{22}$$

对(22)运用类似于节 2.1 的 Fourier 分解方法，我们可以进一步得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R^2}|\xi|^{2s}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi \leqslant$$
$$-\frac{1}{2}\int_{R^2}|\xi|^{2(s+1)}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi+$$
$$C(1+t)^{-2}\int_{R^2}|\xi|^{2(s-1)}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi \leqslant$$
$$-\frac{1}{2}\int_{S(t)^c}|\xi|^{2(s+1)}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi+$$
$$C(1+t)^{-2}\int_{R^2}|\xi|^{2(s-1)}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi \leqslant$$
$$-\int_{R^2}\frac{p}{1+t}|\xi|^{2s}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi+$$
$$\int_{S(t)}\frac{p}{1+t}|\xi|^{2s}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi+$$
$$C(1+t)^{-2}\int_{R^2}|\xi|^{2(s-1)}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi.$$

这里

$$S(t)=\{\xi\in R^2:|\xi|^2\leqslant\frac{2p}{(1+t)},p>s+3\}.$$

进一步的，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{R^2}|\xi|^{2s}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi+$$
$$\frac{p}{1+t}\int_{R^2}|\xi|^{2s}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi \leqslant$$
$$\frac{p}{1+t}\int_{S(t)}|\xi|^2|\xi|^{2s}|\xi|^{-2}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi+$$
$$C(1+t)^{-2}\int_{R^2}|\xi|^{2(s-1)}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi \leqslant$$
$$\frac{C}{(1+t)^2}\int_{S(t)}|\xi|^{2s}|\xi|^{-2}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi+$$
$$\frac{C}{(1+t)^2}\int_{R^2}|\xi|^{2(s-1)}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi \leqslant$$
$$\frac{C}{(1+t)^2}\int_{R^2}|\xi|^{2(s-1)}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi.$$

不等式两边乘积分因子 $(1+t)^p$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{(1+t)^p\int_{R^2}|\xi|^{2s}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi\} \leqslant$$
$$C\ (1+t)^{p-2}\int_{R^2}|\xi|^{2s-2}|\hat{u}(\xi,t)|^2\mathrm{d}\xi \tag{23}$$

再关于时间 t 积分：

$$\|\Lambda^s u\|_{L^2}^2 \leqslant C(1+t)^{-p}+$$
$$C(1+t)^{-p}\int_0^t(1+\tau)^{p-2}\|\Lambda^{s-1}u\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau \tag{24}$$

当 $s=1$，通过直接计算，有

$$\|\Lambda u\|_{L^2}^2 \leqslant C(1+t)^{-p}+$$
$$C(1+t)^{-p}\int_0^t(1+\tau)^{p-2}\|u\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau \leqslant C(1+t)^{-p}+$$
$$C(1+t)^{-p}\int_0^t(1+\tau)^{p-2}(1+\tau)^{-1}\mathrm{d}\tau \leqslant C(1+t)^{-2}.$$

由数学归纳法，假设 $s=k$ 时，有

$$\|\Lambda^k u\|_{L^2}^2 \leqslant C(1+t)^{-(k+1)}.$$

那么当 $s=k+1$，通过计算，有

$$\|\Lambda^{k+1}u\|_{L^2}^2 \leqslant C(1+t)^{-p}+$$
$$C(1+t)^{-p}\int_0^t(1+\tau)^{p-2}\|\Lambda^k u\|_{L^2}^2\mathrm{d}\tau \leqslant$$
$$C(1+t)^{-p}+C(1+t)^{-p}\int_0^t(1+\tau)^{p-2-k-1}\mathrm{d}\tau \leqslant$$
$$C(1+t)^{-(k+2)}.$$

因此，

$$\|\Lambda^s u\|_{L^2}^2 \leqslant C(1+t)^{-(s+1)},\ t>0 \tag{25}$$

这样我们就证明了高阶导数衰减性.

参考文献(References)

[1] LADYZHENSKAYA O A. The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Fluids[M]. New York: Gordon Breach, 1969.

[2] TEMAN R. The Navier-Stokes Equations [M]. Amsterdam: North-Holland, 1977.

[3] LERAY J. Sur le mouvement d' un liquide visqueux remplissant l' espace [J]. Acta Math, 1934, 63: 193-248.

[4] SCHONBEK M. L^2 decay for weak solutions of the Navier-Stokes equations[J]. Arch Rational Mech Anal, 1985, 88: 209-222.

[5] WIEGNER M. Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations in ℝ[J]. J London Math Soc, 1987, 35: 303-313.

[6] OLIVER M, TITI E S. Remark on the rate of decay of higher order derivatives for solutions to the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$[J]. J Funct Anal, 2000, 172: 1-18.

[7] KAJIKIYA R, MIYAKAWA T. On L^2 decay of weak solutions of Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$[J]. Math Z, 1986, 192: 135-148.

[8] KATO T. Strong L^p solution of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions [J]. Math Z, 1984, 187: 471-480.

[9] CARPIO A. Large time behavior in incompressible Navier-Stokes equations[J]. SIAM J Math Anal, 1996, 27: 449-475.

[10] CHEN Z M. A sharp decay result on strong solutions of the Navier-Stokes equations in the whole space[J]. Comm Partial Differential Equs, 1991, 16: 801-820.

[11] DONG B Q, CHEN Z M. Remarks on upper and lower bounds of solutions to the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^2$[J]. Appl Math Computations, 2006, 182: 553-558.

[12] HAN P. Long-time behavior for Navier-Stokes flows in a two-dimensional exterior domain[J]. J Funct Anal, 2016, 270: 1091-1152.

[13] HE C, XIN Z. On the decay properties of solutions to the nonstationary Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^3$[J]. Proc Roy Soc Edinburgh, 2001, 131: 597-619.

[14] NICHE C. Decay characterization of solutions to Navier-Stokes-Voigt equations in terms of the initial datum [J]. J Differential Equations, 2016, 260: 4440-4453.

[15] ZHAO J, ZHENG L. Temporal decay for the generalized Navier-Stokes equations [J]. Nonlinear Anal: Theory, Methods & Applications, 2016, 141: 191-210.

[16] ZHANG L. Sharp rate of decay of solutions to 2-dimensional Navier-Stokes equation[J]. Comm Partial Differential Equs, 1995, 20: 119-127.

[17] JIA Y, ZHANG X, DONG B Q. Global well-posedness of the 2D micropolar fluid flows with mixed dissipation [J]. Electron J Differential Equations, 2016, 154: 1-10.

[18] TAO Qunqun, ZHANG Fei, DONG Boqing. Rapid time decay of weak solutions to the generalized Hallmagneto-hydrodynamics equations[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2015, 45(9): 727-732.
陶群群,章飞,董柏青.广义霍尔磁流体力学方程弱解的快速衰减[J]. 中国科学技术大学学报, 2015, 45(9): 727-732.