

相对论性闭 Toda 链的波函数讨论

文潇骋

(中国科学技术大学数学科学学院, 安徽合肥 230026)

摘要: 前人工作发现 N 粒子相对论性闭 Toda 链的波函数可以由与之相关联的规范理论计算出来, 但是在这个结果中, 只包含了能量在能级上的波函数的行为, 而对于非物理的能量, 即不在能级上的能量, 我们并不知道对应的波函数有着什么样的性质. 这里提出了一个猜想来计算非物理的能量上的波函数, 并且通过数值计算证明了对于非能级的能量不可能得到没有发散的波函数. 而且由于有极点抵消的条件, 可以从中得到关于开闭 BPS 不变量之间的关系.

关键词: 相对论性 Toda 链; BPS 不变量; 极点

中图分类号: O413.4; O413.1 **文献标识码:** A **doi:** 10.3969/j.issn.0253-2778.2018.05.001

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 81T45; Secondary 81T13

引用格式: 文潇骋. 相对论性闭 Toda 链的波函数讨论[J]. 中国科学技术大学学报, 2018, 48(5): 347-356.

WEN Xiaocheng. A note on the eigenfunction in a relativistic closed Toda chain[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2018, 48(5): 347-356.

A note on the eigenfunction in a relativistic closed Toda chain

WEN Xiaocheng

(School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: Recently, the eigenfunction for an N -particle relativistic closed Toda chain has been calculated by association with gauge theory. The results involve only the behavior of the eigenfunction of the energy level but do not include nonphysical energy. A conjecture was thus proposed to determine the eigenfunction of the nonphysical energy and a numerical calculation was conducted to prove that it is impossible to get an entire eigenfunction of the nonphysical energy. Because of the pole cancellation condition, the relation between the open and closed Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) invariants could be derived.

Key words: eigenfunction; relativistic toda chain; BPS invariant; singularity

0 引言

量子力学创建至今已有一百多年, 可是除了极少数的模型, 比如氢原子模型和谐振子模型之外, 对一个一般的量子力学系统, 去求解它的解析解仍然是一件非常困难的事情. 对于大部分的量子力学系统, 只能通过近似方法求得数值解. 近年来, 一系列

研究^[1-4]表明可能找到了一系列的可以完全解析求解的量子力学系统: 相对论性的 Toda 链. 许多研究已经表明, 相对论性的 Toda 链模型与一个五维的规范理论之间有相互的对应关系, 或者说与 Toric 的卡拉比-丘几何上的拓扑弦理论相对应. 因为关于 Toric 的卡拉比-丘几何上的镜像曲面的量子化系统已经有了很多的研究结论, 从而可以从这些已知的

收稿日期: 2018-03-01; 修回日期: 2018-04-19

作者简介: 文潇骋, 男, 1993 年生, 硕士生. 研究方向: 拓扑弦理论. E-mail: xcwen1993@gmail.com

结果中得到相对论性的 Toda 链的严格的量子化条件,继而通过求解量子化条件得到这个系统的能谱.在知道了如何求解一个量子系统的能谱结构之后,一个很自然的想法就是去进一步尝试找出这个系统各个能级所对应的波函数.在已有的工作中,学者们已经尝试过多种方法去求解卡拉比-丘几何上的拓扑弦量子化来得到量子力学系统的波函数.文献[5]尝试使用 WKB 近似的方法去求解.而文献[6-7]提出了一个关于波函数的猜想并且在多个模型上做了数值求解来验证这个猜想成立.在这个猜想中,波函数只有在能量满足严格的量子化条件时才是实数上平方可积的函数,而平方可积是对量子力学系统的波函数的一个物理的要求,只有平方可积的波函数才是物理的波函数.文献[4]指出,因为相对论性的 Toda 链模型可以与五维的规范理论联系起来,所以这个模型的波函数可以通过规范理论求解,但该文只给出了能级上的波函数解.而本文的关注点是任意能量上的波函数,不限制能量必须处在能级上,即在能量不一定满足严格的量子化条件的情况下给出一般的能级表达式.

1 相对论性 Toda 链的严格量子化条件与能谱

由 Toda 链的定义可得, N 粒子的 Toda 链得到的量子力学系统的哈密顿量有着如下的形式:

$$\hat{H} = \sum_{m=1}^N [1 + e^{\frac{-i\pi\omega_1 + 2\pi(x_m - x_{m+1})}{\omega_2}}] e^{\omega_2 p_m} \quad (1)$$

式中, x_m 和 p_m 分别表示是第 m 个粒子的位置和动量算符.由于这个系统是一个链,所以还需要确定边界条件才能完整地确定唯一的系统性质.边界条件由如下方程确定:

$$x_{N+1} = x_1 - \frac{\omega_2}{2\pi} \ln Q_{\text{rel}}, \quad Q_{\text{rel}} = e^{\frac{-2\pi m_0}{\omega_2}} \quad (2)$$

式中, ω_1 与 ω_2 是与约化普朗克常数 \hbar 有关的参数.不同的边界条件决定了不同的量子力学系统,由方程可知 $Q_{\text{rel}} \geq 0$, 而不同的 Q_{rel} 的取值决定了不同的

系统性质.当 $Q_{\text{rel}} = 0$ 时,这个系统被称为开的 Toda 链;反之,当 $Q_{\text{rel}} > 0$ 时被称为闭的 Toda 链.对于相对论性的 Toda 链来说,有一个非常重要的性质:任何一个相对论性的 Toda 链,都存在另一个相对论 Toda 链与其对偶^[8].对偶的系统由如下的哈密顿量描述:

$$\hat{H} = \sum_{m=1}^N [1 + e^{\frac{-i\pi\omega_2 + 2\pi(x_m - x_{m+1})}{\omega_1}}] e^{\omega_1 p_m} \quad (3)$$

同时该对偶系统的边界条件是

$$x_{N+1} = x_1 - \frac{\omega_1}{2\pi} \ln \tilde{Q}_{\text{rel}}, \quad \tilde{Q}_{\text{rel}} = e^{\frac{-2\pi m_0}{\omega_1}} \quad (4)$$

从式(1),(3)可以发现,这两个哈密顿量满足对易关系,所以这一对偶系统拥有共同本征态,也就是说一个函数如果是原系统的本征函数,那也同时就是对偶系统的本征函数.波函数就一定同时满足这一对对偶系统的薛定谔方程.

在开始讨论波函数之前我们先讨论 Toda 链的能谱问题,因为求出了能谱才能去求解能级所对应的本征函数.由之前的工作可以知道,相对论性开 Toda 链的能谱是连续谱,而相对论性闭 Toda 链的能谱是离散的.本文只介绍 2 粒子的相对论性闭 Toda 链的量子化条件,而这一部分在文献[9]中有过简单的说明.在 GHM 理论中,严格的量子化条件,或者说是波尔-索末菲条件,是通过要求谱行列式等于 0 来得到的.在谱行列式中,同时包含了非精细的配分函数与 NS 极限下的配分函数.然而在工作^[10]中发现可以得到一个与 GHM 理论等价的表示形式,这个理论在求解严格量子化条件中只用到了 NS 极限下的配分函数.这个理论表达式可以写为

$$\frac{\partial}{\partial a_i} [F_{\text{NS}}^d + F_{\text{NS}}^{\text{BPS},p} + F_{\text{NS}}^{\text{BPS},np}] = 2\pi i n_i \quad (5)$$

文献[3]已经讨论过了一般的相对论性 N 粒子 Toda 链.在这个方程中, F_{NS}^d 是多项式项, $F_{\text{NS}}^{\text{BPS},p}$ 是微扰的瞬子项,而 $F_{\text{NS}}^{\text{BPS},np}$ 是非微扰的瞬子项.在一般的情况下, $F_{\text{NS}}^{\text{BPS},p}$ 有如下的形式:

$$F_{\text{NS}}^{\text{BPS},p} = \frac{\omega_2}{4\pi i} \sum_{n>0} \sum_{j_L, j_R} \sum_{d>0} \frac{(-1)^{n\mathbf{B} \cdot \mathbf{d}}}{n^2} N_{j_L, j_R}^d \frac{\sin[(2j_L + 1)\pi n \frac{\omega_1}{\omega_2}] \sin[(2j_R + 1)\pi n \frac{\omega_1}{\omega_2}]}{\sin^3[\pi n \frac{\omega_1}{\omega_2}]} e^{-\frac{2\pi n d \cdot t}{\omega_2}} \quad (6)$$

式中, t 是 Kahler 参数,形式上是一个 N 维的向量,通过 t 可以定义一个矢量 \mathbf{a} , \mathbf{a} 与体系的能量相关,定义如下:

$$t_i = a_i - a_{i+1} (i < N - 1), t_N = m_0 + a_1 - a_N \quad (7)$$

并且在这个形式中,对于所有使得 BPS 不变量 N_{j_L, j_R}^d 不为零的 d, j_L, j_R , B 场被要求满足如下的关系

$$(-1)^{B \cdot d} = (-1)^{2j_L + 2j_R + 1} \quad (8)$$

而非微扰项与微扰项之间满足如下的关系:

$$F_{NS}^l(a, \omega_1, \omega_2, m_0) = F_{NS}^r(a, \omega_2, \omega_1, m_0) \quad (9)$$

在这里可以很明显的看出,无论是微扰项 F_{NS}^l

还是非微扰项 F_{NS}^r 都在 $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$ 处发散.但是这两项的和没有发散.发散能够抵消的关键是微扰项与非微扰项部分都有 B 场的存在,利用 B 场的性质(8)可以发现对于任意的极点,两者求和之后都会相互

抵消掉.

考虑一个实际的例子:双粒子的相对论性 Toda 链和它的对偶系统.这一对模型可以用如下的哈密顿量来描述:

$$\left. \begin{aligned} \hat{H} &= e^{i\omega_1 \partial_z} + e^{-i\omega_1 \partial_z} + e^{\frac{2\pi\sigma}{\omega_2}} + Q_{\text{rel}} e^{-\frac{2\pi\sigma}{\omega_2}}, \\ \hat{\tilde{H}} &= e^{i\omega_2 \partial_z} + e^{-i\omega_2 \partial_z} + e^{\frac{2\pi\sigma}{\omega_1}} + \tilde{Q}_{\text{rel}} e^{-\frac{2\pi\sigma}{\omega_1}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中,我们引入了新的符号 Q_{rel} ,定义如下:

$$Q_{\text{rel}} = e^{-\frac{2\pi m_0}{\omega_2}}, \tilde{Q}_{\text{rel}} = e^{-\frac{2\pi m_0}{\omega_1}} \quad (11)$$

这里要求 $a_1 = -a_2 = \frac{a}{2}$,其中参数 $a = a_1 - a_2$

与 Kahler 参数 \tilde{t} 相等.同时 m_0 在这里代表了拓扑弦理论中的质量参数.在式(5)中,考虑对 a_1 的导数,可以得到如下方程:

$$\begin{aligned} 2\pi n &= \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial a_1} [F_{NS}^l + F_{NS}^{\text{BPS},p} + F_{NS}^{\text{BPS},np}] = \frac{2}{i} \frac{\partial}{\partial a} [F_{NS}] = \frac{2\pi a^2}{\omega_1 \omega_2} + \frac{2\pi m_0 a}{\omega_1 \omega_2} - \frac{\pi(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{3\omega_1 \omega_2} - \pi + \\ &\sum_{j_L, j_R} \sum_{n \geq 1} \sum_{d_1, d_2} \frac{(-1)^{(2j_L + 2j_R + 1)n}}{n} (d_1 + d_2) N_{j_L, j_R}^{d_1, d_2} \times \frac{\sin[(2j_L + 1)\pi n \frac{\omega_1}{\omega_2}] \sin[(2j_R + 1)\pi n \frac{\omega_1}{\omega_2}]}{\sin^3[\pi n \frac{\omega_1}{\omega_2}]} e^{-2\pi n d_1 \frac{a}{\omega_2}} e^{-2\pi n d_2 \frac{a_0 + a}{\omega_2}} + \\ &\sum_{j_L, j_R} \sum_{n \geq 1} \sum_{d_1, d_2} \frac{(-1)^{(2j_L + 2j_R + 1)n}}{n} (d_1 + d_2) N_{j_L, j_R}^{d_1, d_2} \times \frac{\sin[(2j_L + 1)\pi n \frac{\omega_2}{\omega_1}] \sin[(2j_R + 1)\pi n \frac{\omega_2}{\omega_1}]}{\sin^3[\pi n \frac{\omega_2}{\omega_1}]} e^{-2\pi n d_1 \frac{a}{\omega_1}} e^{-2\pi n d_2 \frac{a_0 + a}{\omega_1}} \end{aligned} \quad (12)$$

若考虑的是对 a_2 求导,得到的将会是相同的方程,所以在这里只需要考虑对 a_1 求导的方程即可得到全部限制条件.从严格的量子化条件(12)中可以很明显的观察到,该式是 S 自对偶的,在 S 对偶变换下保持不变.因为可能会产生发散的微扰项与非微扰项的极点会相互抵消掉,所以该式在 $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}_+$ 处

没有极点,是一个在定义域上有着良好性质的函数.因为 $a^{(n)}$ 与能级的能量之间有着——对应的关系,每一个 a 对应着一个能量,所以在本文中将会用由严格量子化条件(12)中得到的第 n 个解 $a^{(n)}$ 来代表第 n 个能级的能量,而不是直接使用能量 $E^{(n)}$.表 1 给出了不同参数下的 $a^{(n)}$ 的解.

表 1 不同参数下量子化条件的解

Tab.1 Solution of quantization conditions with different parameters

$(\omega_1, \omega_2, m_0)$	$(2^{-\frac{1}{2}}, 1, -\frac{1}{2\pi})$	$(2^{-\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}}, \frac{-3}{2\pi})$	$(2^{-\frac{1}{4}}, 2^{\frac{1}{4}}, \frac{-3}{2\pi})$	$(2^{-\frac{1}{5}}, 2^{\frac{1}{5}}, \frac{-5}{2\pi})$
$a^{(0)}$	0.8622325...	1.2034826...	1.1957994...	1.4049398...
$a^{(1)}$	1.2273021...	1.6269143...	1.6211759...	1.8141154...
$a^{(2)}$	1.5023036...	1.9494783...	1.9447973...	2.1313106...

2 非物理的能量上的波函数

本节讨论 N 粒子的相对论性闭 Toda 链的本

征函数.在本文目标模型 $N = 2$ 的情况下,求解本征函数等价于求解对应的巴克斯特方程与其对偶方程的解.这里闭链所对应的巴克斯特方程和对偶方程

有如下的形式：

$$\left. \begin{aligned} & \left[Q_{\text{rel}}^{\frac{1}{2}}(e^{i\omega_1 \partial_s} + e^{-i\omega_1 \partial_s}) + e^{\frac{2\pi\sigma}{\omega_2}} + e^{-\frac{2\pi\sigma}{\omega_2}} \right] \bar{q}(\sigma, a, \omega_1, \omega_2, m_0) = E\bar{q}(\sigma, a, \omega_1, \omega_2, m_0), \\ & \left[\tilde{Q}_{\text{rel}}^{\frac{1}{2}}(e^{i\omega_2 \partial_s} + e^{-i\omega_2 \partial_s}) + e^{\frac{2\pi\sigma}{\omega_1}} + e^{-\frac{2\pi\sigma}{\omega_1}} \right] \bar{q}(\sigma, a, \omega_1, \omega_2, m_0) = \tilde{E}\bar{q}(\sigma, a, \omega_1, \omega_2, m_0) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

由文献[11]中可以知道,巴克斯特方程和其对偶方程的共同解一定是两个独立项的线性叠加,忽略一个整体的与 σ 无关的乘数因子,可以得到式(13)的解为

$$\begin{aligned} \bar{q} & \propto e^{\frac{i\pi m_0 \sigma}{\omega_1 \omega_2}} S_2^{-1}(i(\sigma - \frac{a}{2}) | \omega_1, \omega_2) S_2^{-1}(i(\sigma + \frac{a}{2}) | \omega_1, \omega_2) q_{\text{NS}}^{(ac)}(\sigma, a, \omega_1, \omega_2, m_0) - \\ & \xi e^{-\frac{i\pi m_0 \sigma}{\omega_1 \omega_2}} S_2^{-1}(-i(\sigma - \frac{a}{2}) | \omega_1, \omega_2) S_2^{-1}(-i(\sigma + \frac{a}{2}) | \omega_1, \omega_2) q_{\text{NS}}^{(c)}(\sigma, a, \omega_1, \omega_2, m_0) \end{aligned} \quad (14)$$

由文献[12]可以了解到式(14)中的瞬子项 $q_{\text{NS}}^{(c/ac)}$ 可以被写为两个配分函数的瞬子部分 $Z_{3d/5d, \text{NS}}^{c/ac}$ 的乘积:

$$q_{\text{NS}}^{(c)}(\sigma, a, \omega_1, \omega_2, m_0) \propto Z_{3d/5d, \text{NS}}^c(\omega, \mu, e^{2\pi i} q, Q_{\text{rel}}) Z_{3d/5d, \text{NS}}^c(\tilde{\omega}^{-1}, \tilde{\mu}, e^{-2\pi i} \tilde{q}^{-1}, \tilde{Q}_{\text{rel}}) \quad (15)$$

$$q_{\text{NS}}^{(ac)}(\sigma, a, \omega_1, \omega_2, m_0) \propto Z_{3d/5d, \text{NS}}^{ac}(\omega^{-1}, \mu, e^{-2\pi i} q^{-1}, Q_{\text{rel}}) Z_{3d/5d, \text{NS}}^{ac}(\tilde{\omega}, \tilde{\mu}, e^{2\pi i} \tilde{q}, \tilde{Q}_{\text{rel}}) \quad (16)$$

为了简化方程的形式,我们在这里引入符号

$$\left. \begin{aligned} q & = e^{\frac{2\pi i \omega_1}{\omega_2}}, \mu = e^{\frac{2\pi i a}{\omega_2}}, \omega = e^{-\frac{2\pi i}{\omega_2}}, \\ \tilde{q} & = e^{\frac{2\pi i \omega_2}{\omega_1}}, \tilde{\mu} = e^{\frac{2\pi i a}{\omega_1}}, \tilde{\omega} = e^{-\frac{2\pi i}{\omega_1}} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

由文献[4]可以知道当参数 a 等于严格的量子化条件的解,并且选择了合适的线性叠加系数 ξ 的值的时候,式(14)是一个在定义域上性质良好没有极点的函数.当参数 a 取值等于严格量子化条件的第 n 个解 $a^{(n)}$ 时, ξ 的取值应该等于 $-(-1)^n$. 就可以得到式(13)的没有极点的解.

在计算能级所对应的波函数,即参数 a 满足 $a = a^{(n)}$ 时,文献[4]声称可以取线性叠加系数 $\xi = -(-1)^n$,这时可能出现在 $\sigma = \pm \frac{a}{2}$ 处的极点会被消除,于是可以得到一个完整的没有极点的波函数解,可以做数值求解来检验这个声明.在第 n 个能级上取叠加参数 $\xi = -e^{i\pi n}$ 看上去是一个很不自然的设定,完全是为了满足某些要求而人工强行要求的.在波函数解中线性叠加系数应该是一个对任意能量都适用的一般的函数,同时这个函数在能量满足严格量子化条件(12)时会退化到之前的选择.

当能量不满足严格量子化条件时,从式(14)里可以很轻易地发现 \bar{q} 是发散的.因为 \bar{q} 中的双正弦函数项存在零点,而且它是在 \bar{q} 的分母上.附录给出了双正弦函数的性质,从中可知, $S_2(x | \omega)$ 的零点为 $x = n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2, n_1, n_2 \leq 0$. 因为 σ 和 a 都是实数,

所以可以得到 \bar{q} 只有两个极点,即 $\sigma = \pm \frac{a}{2}$. 而波函数要求在定义域上没有发散,所以需要去选取合适的线性叠加系数 ξ 去将极点抵消掉,才能得到完整的没有发散的波函数.

在这里我们提出一个猜想,对于一般的能量,线性参数 ξ 应该满足如下的关系:

$$\left. \begin{aligned} \xi & = -e^{i \frac{\text{volume}(a, \omega_1, \omega_2)}{2}}, \sigma = \frac{a}{2}; \\ \xi & = -e^{-i \frac{\text{volume}(a, \omega_1, \omega_2)}{2}}, \sigma = -\frac{a}{2} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

当满足如上条件时,波函数解中的极点将会被抵消掉.在上式中, volume 代表相空间体积,有着如下的形式:

$$\text{volume}(a, \omega_1, \omega_2) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial a_i} [F_{\text{NS}}^d + F_{\text{NS}}^{\text{BPS}, p} + F_{\text{NS}}^{\text{BPS}, np}] \quad (19)$$

可以看出,相空间体积 volume 就等于式(12)中等号右边的部分.

对于前文提到的这两个可能产生发散的极点,先分析其中一个.考虑 $\sigma = \frac{a}{2}$ 这个点,为了使公式更加简洁,我们引入符号 $x = \sigma - \frac{a}{2}$. 在之前的讨论中已经知道,忽略掉一个整体的常数因子之后 \bar{q} 是由两项求和得到的.第一项是

$$e^{\frac{i\pi m_0 a}{2\omega_1 \omega_2}} S_2^{-1}(ix | \omega_1, \omega_2) S_2^{-1}(ia | \omega_1, \omega_2) q_{NS}^{ac}(\frac{a}{2}, a, \omega_1, \omega_2, m_0) \tag{20}$$

第二项是

$$-\xi e^{\frac{-i\pi m_0 a}{2\omega_1 \omega_2}} S_2^{-1}(-ix | \omega_1, \omega_2) S_2^{-1}(-ia | \omega_1, \omega_2) q_{NS}^c(\frac{a}{2}, a, \omega_1, \omega_2, m_0) \tag{21}$$

这两项每一项在取极限 $x \rightarrow 0$ 时都是发散到无穷大的, 所以如果想要在 $\sigma = \frac{a}{2}$ 处将 \bar{q} 的发散抵消掉, 就需要选取一个特殊的 ξ 使得 \bar{q} 中的两个发散项能够相互抵消掉发散部分. 两项中的发散部分分别是 $S_2^{-1}(ix | \omega_1, \omega_2)$ 和 $S_2^{-1}(-ix | \omega_1, \omega_2)$. 由双正弦函数的性质可以知道,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} S_2^{-1}(ix | \omega_1, \omega_2) &= -\frac{\omega_1 \omega_2 i}{2\pi x}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} S_2^{-1}(-ix | \omega_1, \omega_2) &= \frac{\omega_1 \omega_2 i}{2\pi x} \end{aligned} \right\} \tag{22}$$

因此这两项的发散部分互为相反数. 于是如果想要使发散项能够互相抵消的话, 意味着它们的系数是相等的, 即

$$\begin{aligned} e^{\frac{i\pi m_0 a}{2\omega_1 \omega_2}} S_2^{-1}(ia | \omega_1, \omega_2) q_{NS}^{ac}(\frac{a}{2}, a, \omega_1, \omega_2, m_0) = \\ -\xi e^{\frac{-i\pi m_0 a}{2\omega_1 \omega_2}} S_2^{-1}(-ia | \omega_1, \omega_2) q_{NS}^c(\frac{a}{2}, a, \omega_1, \omega_2, m_0) \end{aligned} \tag{23}$$

在另一个可能产生发散的点 $\sigma = -\frac{a}{2}$ 处, 也需要满足类似的关系来抵消掉发散项.

由 q_{NS}^c 和 q_{NS}^{ac} 的定义(式(15), (16)), 结合手性与反手性项的关系, 可以得到 ξ 满足这样的关系:

$$\xi(\sigma = \frac{a}{2}) = \xi^{-1}(\sigma = -\frac{a}{2}) \tag{24}$$

因此, 在这里只需要在其中一个点检查我们的猜想即可, 只要在其中任意一点成立, 在另一点猜想会自动成立. 同时, 这也回答了为什么对于非物理的能量, 无法得到一个没有发散的平方可积的波函数. 因为如果希望得到的波函数是正常的在定义域上没有发散的函数, 这就意味着需要选择一个合适的 ξ 使得可以同时抵消两个可能产生的极点. 现在假设在

$\sigma = \frac{a}{2}$ 处选择 $\xi = \xi_1$ 可以抵消这里的发散, 而在 $\sigma = -\frac{a}{2}$ 处 $\xi = \xi_2$ 可以抵消发散. 则由刚才讨论的结果, 这两个值应该满足如下的条件:

$$\xi_1 = \xi_2^{-1}, \xi_1 = \xi_2 \tag{25}$$

这就表明了 $\xi = \xi^{-1}$. 现在回到我们的猜想上来: $\xi = -(-1)^{\frac{\text{volume}}{2\pi}}$; 只有当 $\text{volume} = 2\pi n$ 时, ξ 才能满足上述的限制条件, 然而这个条件也就是说能量要满足严格量子化条件, 或者说是在能级上的能量. 因此, 只有当 $a = a^{(n)}$ 或者能量在能级上时才能选取到合适的 ξ 使得可以同时抵消两个极点, 得到一个没有发散的波函数. 而非物理的能量, 或者不满足严格量子化条件的 a 来说, 不存在这样的一个 ξ 可以同时抵消两个极点, 求出的波函数一定会发散导致不平方可积. 这就是为什么只有在能级上才能求出正确的波函数.

回到式(23)上来, 现在关注可能出现发散的点 $\sigma = \frac{a}{2}$. 前文中已经提到要抵消发散就是要求两个发散项的系数在这的点相同. 对于两个复数来说, 相等也就意味着它们的模长和幅角分别都相等, 这两个复数才能相等.

从模相等条件可以发现 ξ 的模长与式(23)中两边 BPS(Bogornol'nyi-Prasad-Sommerfield)部分的差相等. 将两个 BPS 部分的差对 μ 做展开, 可以发现当 $\omega_1, \omega_2, m_0 \in \mathbb{R}$ 时, μ, μ^2, μ^3 的系数都为 0. 本文虽然不能对每一项都检查系数, 但是可以通过数值计算去检查这个结论. 当 $(\omega_1, \omega_2, m_0)$ 取不同的值的时候, 函数 $\Delta bs(\xi)$ 关于 a 的函数如图 1 所示. 从图 1 可以看出对于不同的 ω_1, ω_2, m_0 , 都可以说在一定精度下 $\Delta bs(\xi) = 1$ 或者 $\xi = -e^{i\theta}$ 是正确的.

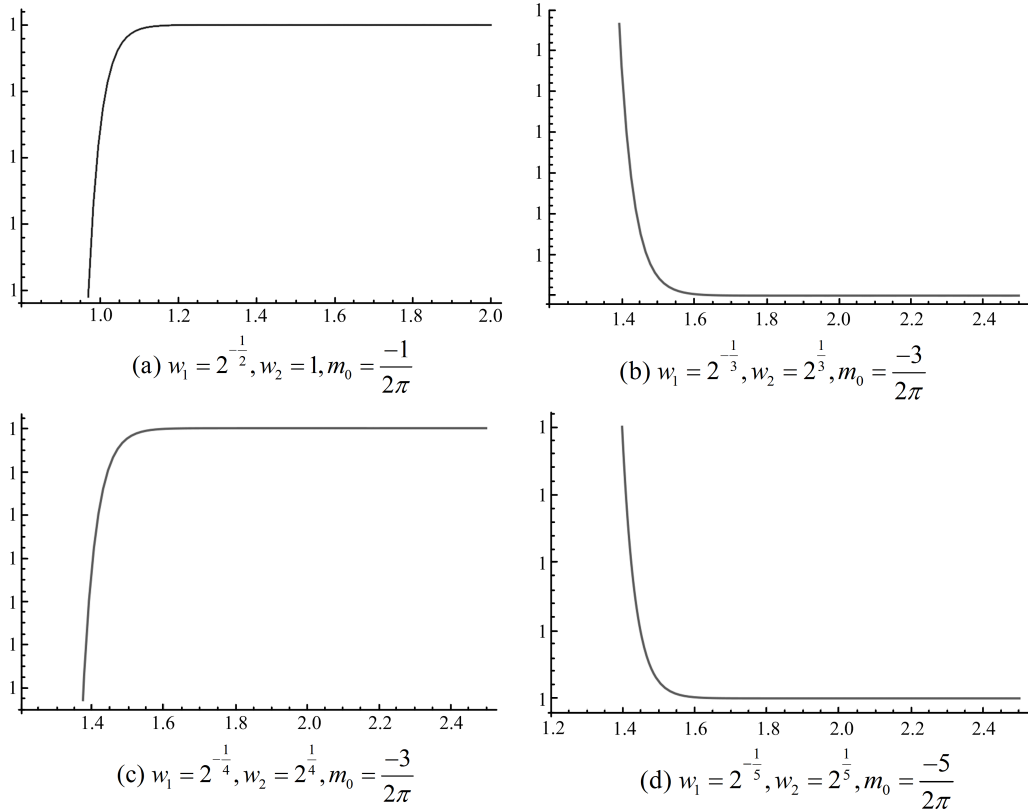


图 1 Abs(ξ)关于变量 a 的函数图

Fig.1 The graph of the function Abs(ξ) of a

而幅角相等的条件意味着

$$\theta = \arg \left[\frac{e^{\frac{-i\pi m_0 a}{2\omega_1 \omega_2}} S_2^{-1}(-ia | \omega_1, \omega_2) q_{NS}^c(\frac{a}{2}, a, \omega_1, \omega_2, m_0)}{e^{\frac{i\pi m_0 a}{2\omega_1 \omega_2}} S_2^{-1}(ia | \omega_1, \omega_2) q_{NS}^{ac}(\frac{a}{2}, a, \omega_1, \omega_2, m_0)} \right] \quad (26)$$

为了检查猜想(18),在这里通过数值计算来检验对于不同的 $a, \omega_1, \omega_2, m_0$ 的取值, θ 和 $\frac{\text{volume}}{2}$ 之间的关系. 对于不同的 $(\omega_1, \omega_2, m_0)$, $(\theta - \frac{\text{volume}(a, \omega_1, \omega_2)}{2})$ 关于 a 的函数图像如图 2 所示.

从图 2 可以看出, 当 $a > a^{(0)}$ 时, 关系 $\theta - \frac{\text{volume}(a, \omega_1, \omega_2)}{2} = 0$ 是成立的. 这也就是说 $\theta = \frac{\text{volume}(a, \omega_1, \omega_2)}{2}$. 而这就说明了我们的猜想(18)在数值计算下一定的精度内是成立的!

在这个猜想中, 蕴含了出现在相空间体积(19)中的闭 BPS 不变量 $N_{j_i, j_k}^{d_1, d_2}$ 和出现在配分函数 $Z_{3d/5d, NS}^{c/ac}$ 中的开 BPS 不变量之间的关系. 由于模长相等的条件对任意的 a 都是成立的, 也就是说方程左右两边对于 a 的任意 e 指数项的系数都是相等的, 则可以得到如下的关系:

$$\forall L \in \mathbb{Z} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n \in \{\text{divisor of } L\}} \sum_{d_1+d_2+\frac{m}{2}=\frac{L}{n}} \sum_{s_1} (D_{m, d_1, d_2}^{s_1} - D_{-m, d_1, d_2}^{s_1}) \frac{(-1)^{2ns_1}}{n} \times \frac{\sin(\frac{(1-2s_1)\pi n \omega_1}{\omega_2})}{2 \sin(\frac{\pi n \omega_1}{\omega_2})} e^{-2\pi n d_2 \frac{m_2}{\omega_2}} = 0 \\ \sum_{n \in \{\text{divisor of } L\}} \sum_{d_1+d_2+\frac{m}{2}=\frac{L}{n}} \sum_{s_1} (D_{m, d_1, d_2}^{s_1} - D_{-m, d_1, d_2}^{s_1}) \frac{(-1)^{2ns_1}}{n} \times \frac{\sin(\frac{(1-2s_1)\pi n \omega_2}{\omega_1})}{2 \sin(\frac{\pi n \omega_2}{\omega_1})} e^{-2\pi n d_1 \frac{m_1}{\omega_1}} = 0 \end{array} \right. \quad (27)$$

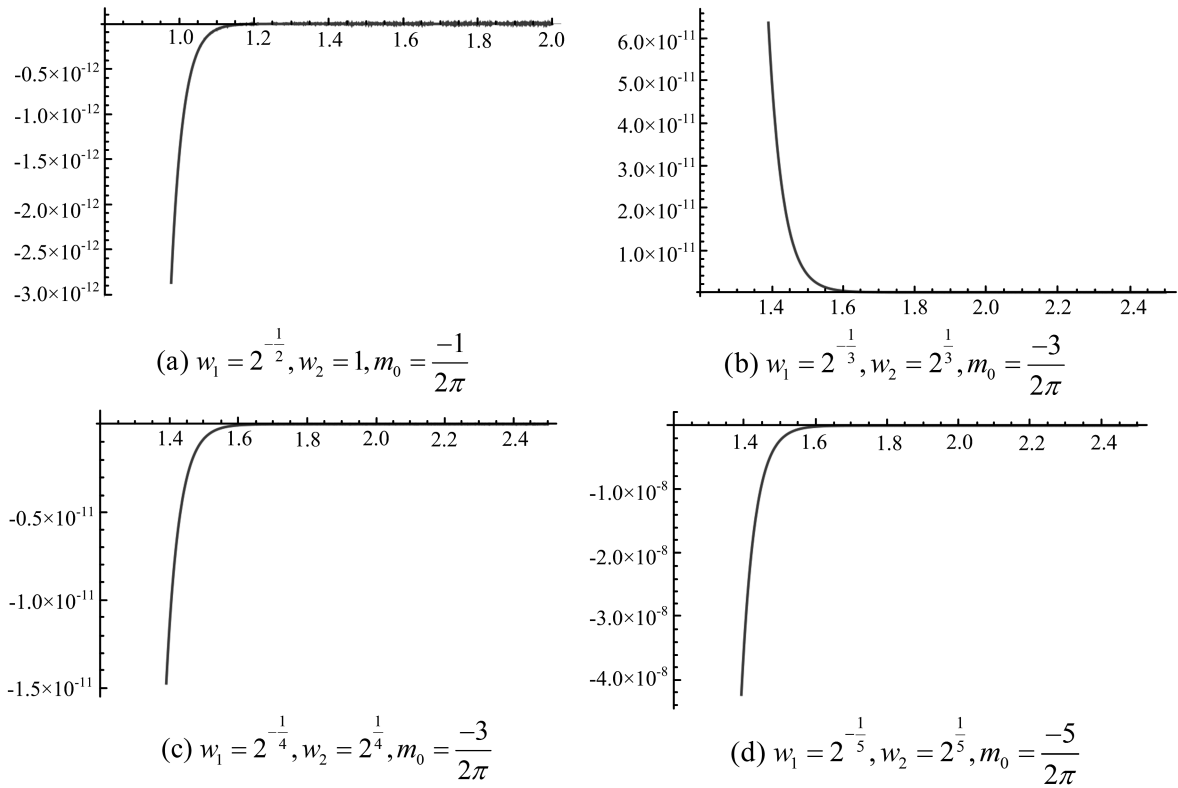


图 2 $(\theta - \frac{\text{volume}}{2})$ 关于变量 a 的函数图

Fig.2 The graph of the function $(\theta - \text{volume}/2)$ of a

同时,幅角相等的条件等价于

$$\frac{\text{volume}}{2} = \frac{\pi m_0 a}{\omega_1 \omega_2} - \pi \left(\frac{-a^2}{\omega_1 \omega_2} + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 3\omega_1 \omega_2}{6\omega_1 \omega_2} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(-\frac{e^{-2\pi n \frac{a}{\omega_1}}}{\tan(\frac{n\pi\omega_1}{\omega_2})} - \frac{e^{-2\pi n \frac{a}{\omega_2}}}{\tan(\frac{n\pi\omega_2}{\omega_1})} \right) +$$

$$\begin{aligned} & \text{Im}(-F_{3d/5d, NS}^c(\mu^{\frac{1}{2}}, \mu, e^{2\pi i} q, Q_{\text{rel}})) - \\ & \text{Im}(-F_{3d/5d, NS}^c(\mu^{-\frac{1}{2}}, \mu, e^{2\pi i} q, Q_{\text{rel}})) + \\ & \text{Im}(-F_{3d/5d, NS}^c(\tilde{\mu}^{-\frac{1}{2}}, \tilde{\mu}, e^{-2\pi i} \tilde{q}, \tilde{Q}_{\text{rel}})) - \\ & \text{Im}(-F_{3d/5d, NS}^c(\tilde{\mu}^{\frac{1}{2}}, \tilde{\mu}, e^{-2\pi i} \tilde{q}, \tilde{Q}_{\text{rel}})) \end{aligned} \quad (28)$$

与式(12)相对比,可以得到

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s_1} \sum_{d_1, d_2 > 0} \sum_{m \in \mathbf{Z}} (D_{m, d_1, d_2}^{s_1} - D_{-m, d_1, d_2}^{s_1}) \frac{(-1)^{2ns_1}}{n} \times \frac{\cos(\frac{(1-2s_1)\pi n \omega_1}{\omega_2})}{2\sin(\frac{\pi n \omega_1}{\omega_2})} e^{-2\pi n d_1 \frac{a}{\omega_2}} e^{-2\pi n d_2 \frac{m_0+a}{\omega_2}} e^{-\frac{\pi a m n}{\omega_2}} = \\ & \sum_{j_L, j_R} \sum_{n \geq 1} \sum_{d_1} \sum_{d_2 > 0} \frac{(-1)^{(2j_L+2j_R+1)n}}{n} (d_1 + d_2) N_{j_L, j_R}^{d_1, d_2} \times \\ & \frac{\sin[(2j_L + 1)\pi n \frac{\omega_1}{\omega_2}] \sin[(2j_R + 1)\pi n \frac{\omega_1}{\omega_2}]}{2\sin^3[\pi n \frac{\omega_1}{\omega_2}]} e^{-2\pi n d_1 \frac{a}{\omega_2}} e^{-2\pi n d_2 \frac{m_0+a}{\omega_2}} \end{aligned} \quad (29)$$

这里我们得到的(27)和(29)两个方程是开闭 BPS 不变量所满足的关系,所以可以看出,开闭 BPS 不变量之间一定存在着非平凡的关系,但是本文还不能解析地去证明它,但是数值上,现在可以求到 4 瞬子项来检验这个关系,直到 4 瞬子项时,这个关系还是成立的.

3 结论

本文首先介绍了拓扑弦与 Toric 卡拉比-丘几何的性质,讨论了 Toric 卡拉比-丘几何上的镜像曲面的量子化问题与能谱问题的两个等价的解决方法.在解决了能谱问题之后,一个自然的想法就是对能级的波函数的求解.本文讨论了 N 粒子相对论性闭 Toda 链的能谱和各能级所对应的波函数,并且对 $N=2$ 的情况作了严格的计算.之后将波函数从能级上推广到了任意的能量,不再要求能量必须满足严格量子化条件.从中发现了如果能量不满足严格量子化条件,我们不可能得到一个没有发散的波函数,也就不是物理的波函数.之前的工作^[4]在构造能级上的波函数时,波函数中的线性叠加系数是人为在能级点取的特殊值,而在本文中发现这个线性叠加系数是一个与能量相关的函数,对任意能量都成立,而不是仅仅对能级上的能量适用.对于这个叠加系数 ξ 的取值,做出了猜想(18),并且在 $N=2$ 的 Toda 链模型上做了高精度的数值计算检验了这个猜想.对于不同的 ω_1, ω_2, m_0 的取值,我们发现式(18)对任意的 a 都成立,从而确认了在一定精度范围内,这个猜想的确是成立的.

需要注意的是,虽然已经用高精度的数值计算在一个模型上检验了这个结果并且在数值层面上是正确的,但是仍然只能认为这是一个猜想,而不是一个结论.现在还没有一个好的办法能够在理论上去解析地证明这样的构造方式是正确的.开始我们的目标是去掉公式中人为设置的部分,用更加自然的方式得到波函数,从而将波函数的定义推广到了任意能量上,而不是仅仅限制在能级上.但是在计算中发现,本文的假设中已经暗含了所有的能级.只有在一部分特殊的取值点,按照本文提出的假设才能得到一个处处都有良好定义,连续的且在实数上平方可积的函数.由于物理的要求,波函数被要求必须是性质良好的函数,这里的性质良好,就包含了连续与平方可积.于是该系统的可选的能量就自然地限制了在这几个特殊的位置.而在能级上,本文的结论

自然地退化到了之前的结果,而这个可以消除极点的假设,同时包含了开弦与闭弦的 BPS 不变量在同一个方程中,很容易联想到对于这一类模型这两类不变量之间可能会存在着一些关系,这样的非平凡的关系才导致了线性叠加系数可以取到这么特殊的值.从极点消除的条件中,导出了出现在相空间体积(19)中的闭 BPS 不变量 $N_{j_i, j_e}^{d_i, d_e}$ 和出现在配分函数 $Z_{3d/5d, NS}^{c/ac}$ 中的开 BPS 不变量之间的关系.在开闭 BPS 不变量之间一定存在某些非平凡的关系,今后我们将做进一步的研究.

参考文献(References)

- [1] KHARCHEV S, LEBEDEV D. Integral representation for the eigenfunctions of a quantum periodic Toda chain [J]. *Letters in Mathematical Physics*, 1999, 50(1): 53-77.
- [2] FRANCO S, HATSUDA Y, MARIÑO M. Exact quantization conditions for cluster integrable systems [J]. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2016, 2016(6): 063107.
- [3] HATSUDA Y, MARINO M. Exact quantization conditions for the relativistic Toda lattice[J]. *Journal of High Energy Physics*, 2016, 2016(5): 133.
- [4] SCIARAPPA A. Exact relativistic Toda chain eigenfunctions from separation of variables and gauge theory[J]. *Journal of High Energy Physics*, 2017, 2017(10): 116.
- [5] KASHANI-POOR A K. Quantization condition from exact WKB for difference equations[J]. *Journal of High Energy Physics*, 2016, 2016(6): 180.
- [6] MARINO M, ZAKANY S. Exact eigenfunctions and the open topological string[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2017, 50(32): 325401.
- [7] MARINO M, ZAKANY S. Wavefunctions, integrability, and open strings [DB/OL]. arXiv.org: arXiv 1706.07402, 2017.
- [8] FADDEEV L D. Modular double of the quantum group $SL_q(2, \mathbb{R})$ [C]// *Lie Theory and Its Applications in Physics*. Berlin: Springer, 2014: 21-31.
- [9] GRASSIA, HATSUDA Y, MARINO M. Topological strings from quantum mechanics [DB/OL]. arXiv.org: arXiv 1410.3382, 2014.
- [10] WANG Xin, ZHANG Guojun, HUANG Minxin. New exact quantization condition for toric Calabi-Yau geometries[J]. *Physical Review Letters*, 2015, 115(12): 121601.
- [11] KHARCHEV S, LEBEDEV D, SEMENOV-TIAN-SHANSKY M. Unitary representations of $U_q(sl(2; \mathbb{R}))$,

the modular double, and the multiparticle q -deformed Toda chains [J]. Communications in Mathematical Physics, 2002, 225(3): 573-609.

[12] BULLIMORE M, KIM H C. The superconformal index of the $(2, 0)$ theory with defects[J]. Journal of High Energy Physics, 2015, 2015(5): 48.
 [13] FADDEEV L D, KASHAEV R M. Quantum dilogarithm [C]// Fifty Years of Mathematical

Physics: Selected Works of Ludwig Faddeev. Singapore: World Scientific, 2016: 502-509.

[14] BARNES E W. The theory of the double gamma function[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 1901, 196: 265-387.
 [15] BARNES E W. On the theory of multiple gamma function[J]. Trans Cambridge Phil Soc, 1904, 19: 374-425.

附录

这里对双正弦函数和与之相关的函数的性质做一个简单的介绍. 双正弦函数的理论可以追溯到 Barnes 的论文. 与量子二重对数函数之间紧密的联系是由 Faddeev 和 Kashaev 通过与量子反向散射方法给出的. 双正弦函数的基本的性质已经在文献[13-15]中列了出来.

为了简单起见, 引入符号 $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2)$, 其中要求 $\omega_1, \omega_2 > 0$. 双正弦函数 $S_2(x | \vec{\omega})$ 可以通过一个环路积分来定义

$$S_2(x | \vec{\omega}) = \exp \left(\int_c \frac{\sinh(x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2})t}{2 \sinh \frac{\omega_1 t}{2} \sinh \frac{\omega_2 t}{2}} \ln(-t) \frac{dt}{2\pi i t} \right) \tag{A1}$$

定义成立的范围为

$$0 < \text{Re } x < \omega_1 + \omega_2 \tag{A2}$$

在这个环路积分中, 积分路径是从 $\infty + 0i$ 到 0 , 然后绕过原点之后再回到 $\infty - 0i$. 与此同时还有一个与 (A1) 等价的积分表示由如下式子给出:

$$S_2(x | \vec{\omega}) = \exp \left(\frac{\pi i}{2} B_{2,2}(x | \vec{\omega}) \right) \cdot \exp \left[\int_{\mathbb{R}+0i} \frac{\exp(xt)}{(\exp(\omega_1 t) - 1)(\exp(\omega_2 t) - 1)} \frac{dt}{t} \right] \tag{A3}$$

式中,

$$B_{2,2}(x | \vec{\omega}) = \frac{x^2}{\omega_1 \omega_2} - \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 \omega_2} x + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 3\omega_1 \omega_2}{6\omega_1 \omega_2} \tag{A4}$$

从式(A4)中, 可以注意到有这样的性质: $B_{2,2}(\omega_1 + \omega_2 - x | \vec{\omega}) = B_{2,2}(x | \vec{\omega})$. 同样的, 还可以从式(A1)中得到另一个等价的积分表示:

$$S_2(x | \vec{\omega}) = \exp \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{\sinh(z - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2})t}{2 \sinh \frac{\omega_1 t}{2} \sinh \frac{\omega_2 t}{2}} - \frac{2x - \omega_1 - \omega_2}{\omega_1 \omega_2 t} \right] \frac{dt}{t} \right\} \tag{A5}$$

上述的两种积分表示在数值计算都非常难以计算, 只能做解析证明时使用. 所以如果希望能够做数值求解, 就需要去将双正弦函数展开为一个收敛的数列求和. 通过留数定理来计算式(A5), 就可以得到双正弦函数的序列展开, 适用范围是 $\text{Im } z > 0$ 或 $\text{Im } z < 0$.

$$S_2(x | \vec{\omega}) = \begin{cases} \exp \left(\frac{\pi i}{2} B_{2,2}(x | \vec{\omega}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{\exp(2\pi i n \frac{x}{\omega_1})}{\exp(2\pi i n \frac{\omega_1}{\omega_2}) - 1} + \frac{\exp(2\pi i n \frac{x}{\omega_1})}{\exp(2\pi i n \frac{\omega_2}{\omega_1}) - 1} \right\} \right), & \text{Im}(x) > 0; \\ \exp \left(-\frac{\pi i}{2} B_{2,2}(x | \vec{\omega}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{\exp(-2\pi i n \frac{x}{\omega_1})}{\exp(-2\pi i n \frac{\omega_1}{\omega_2}) - 1} + \frac{\exp(-2\pi i n \frac{x}{\omega_1})}{\exp(-2\pi i n \frac{\omega_2}{\omega_1}) - 1} \right\} \right), & \text{Im}(x) < 0 \end{cases} \tag{A6}$$

通过对积分路径 \mathcal{C} 做一个合适的变换, 可以将双正弦函数(A1)的定义域解析延拓至除了 $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{R}_-$ 之外

ω_1, ω_2 取任意复数. 同样的, 在 $\text{Im} \frac{\omega_1}{\omega_2} > 0$ 区域内也可以得到一个乘积形式的展开:

$$S_2(x | \vec{\omega}) = \exp\left(\frac{\pi i}{2} B_{2,2}(x | \vec{\omega})\right) \frac{\prod_{m=0}^{\infty} (1 - q^{2m} \exp(\frac{2\pi i x}{\omega_2}))}{\prod_{m=1}^{\infty} (1 - \tilde{q}^{-2m} \exp(\frac{2\pi i x}{\omega_1}))} =$$

$$\exp\left(-\frac{\pi i}{2} B_{2,2}(x | \vec{\omega})\right) \frac{\prod_{m=0}^{\infty} (1 - \tilde{q}^{-2m} \exp(-\frac{2\pi i x}{\omega_1}))}{\prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^{2m} \exp(-\frac{2\pi i x}{\omega_2}))} \quad (\text{A7})$$

式中,

$$q = \exp\left(\pi i \frac{\omega_1}{\omega_2}\right), \quad \tilde{q} = \exp\left(\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \quad (\text{A8})$$

由 theta 函数 $\theta_1(x | \frac{\omega_1}{\omega_2})$ 的模变换法则可以得到式(A6)与(A7)是等价的.

双正弦函数 $S_2(x | \vec{\omega})$ 的零点和极点是其非常重要的性质, 他们的位置分别是

$$\left. \begin{array}{l} \text{poles: } x = n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2, \quad n_1, n_2 \geq 1; \\ \text{zeros: } x = n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2, \quad n_1, n_2 \leq 0 \end{array} \right\} \quad (\text{A9})$$

并且在零点附近, 函数满足如下的关系:

$$\lim_{x \rightarrow 0} S_2(x | \vec{\omega}) = \frac{2\pi x}{\omega_1 \omega_2} \quad (\text{A10})$$