第50卷第5期 中国科学技术大学学报 Vol. 50, No. 5
2020年8月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA May 2020
文章编号:0253-2778(2020)05-0576-05

线性斜积半流指数 φ-膨胀性的若干刻画

岳 田[1,2],宋晓秋[3]
(1.湖北汽车工业学院理学院,湖北十堰 442002;2.汽车动力传动与电子控制湖北省重点实验室,湖北十堰 442002;
3.中国矿业大学数学学院,江苏徐州 221116)

摘要:研究了 Banach 空间中线性斜积半流的指数 φ-膨胀性.基于一致指数膨胀性的定义,引入了 Banach 空间中线性斜积半流指数 φ-膨胀性的概念,运用数学分析与算子理论得到了指数 φ-膨胀性的若干刻画.所得结果推广和完善了指数稳定性理论中一些已有结果.

关键词:线性斜积半流;指数 φ-膨胀性;函数空间
中图分类号:O175.24 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2020.05.004
2010 Mathematics Subject Classification:34D05

引用格式:岳田,宋晓秋.线性斜积半流指数 φ-膨胀性的若干刻画[J].中国科学技术大学学报,2020,50(5):576-580,611.
YUE Tian, SONG Xiaoqiu. Some characterizations for the exponential φ-expansiveness of linear skew-product semiflows[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2020,50(5):576-580,611.

Some characterizations for the exponential φ-expansiveness of linear skew-product semiflows

YUE Tian[1,2], SONG Xiaoqiu[3]
(1. *School of Science, Hubei University of Automotive Technology, Shiyan* 442002, *China*;
2. *Hubei Key Laboratory of Automotive Power Train and Electronics Control, Shiyan* 442002, *China*;
3. *School of Mathematics, China University of Mining and Technology, Xuzhou* 221116, *China*)

Abstract: The exponential φ-expansiveness of linear skew-product semiflows in Banach space was studied. Based on the definition of uniform exponential expansiveness, a linear skew-product semiflow with exponential φ-expansiveness was presented. Some characterizations for exponential φ-expansiveness were obtained via mathematical analysis and operator theory. The results extend some well-known conclusions in the exponential stability theory.

Key words: linear skew-product semiflows; exponential φ-expansiveness; function spaces

0 引言

众所周知,近年来关于发展方程解的渐近行为理论研究取得了突破性的进展,大量长期公开问题的解决,使得相应理论不断丰富和完善[1-12].尤其是在指数稳定性方面,Datko、Pazy、Rolewicz 等作出了奠基性贡献.1970 年 Datko[1] 指出单参数强连续算子半群 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 一致指数稳定的充要条件为对任一 $x\in X$,有 $\int_0^\infty \|T(t)x\|^2 \mathrm{d}t<\infty$,随后 Pazy[2] 将其结论推广到了 $L^p(\mathbb{R}_+)(p\geqslant 1)$的情形,

收稿日期:2019-03-04;**修回日期**:2020-05-27
基金项目:国家自然科学基金(11502075),教育部产学合作协同育人项目(202002137038,202002177010),汽车动力传动与电子控制湖北省重点实验室开放基金项目(ZDK1202004)资助.
作者简介:岳田(通讯作者),男,1998 年生,硕士/讲师.研究方向:微分系统定性理论.E-mail:ytcumt@163.com

Rolewicz[3]于 1986 年将上述结果又扩展到了双参数的发展族. 在这之后，关于指数稳定性理论的研究方兴未艾，如文献[4]利用测试函数的方法讨论了刻画发展方程解的一类重要工具—线性斜积半流的一致指数稳定性与容许性的联系；文献[5]借助于泛函分析与算子理论工具，利用函数空间与序列空间探讨了线性斜演化半流一致指数稳定的连续与离散特征.

区别于指数稳定性[6]与指数二分性[7]，发展方程的指数膨胀性(指数不稳定性)问题也获得了极大的关注，已成为描述动力系统渐近行为的重要工具之一. 如文献[8-11]利用容许性方法(又称测试函数方法)、Banach 函数空间与序列空间方法探讨了线性斜积半流一致指数膨胀的连续型与离散型刻画. 由于一致指数渐近行为所需的条件太强，并不能完整地反映出一些动力系统的客观属性；相反，非一致指数行为却更广泛地存在于自然现象之中，比如基于遍历论的观点，有限维空间中几乎所有的线性变分方程都具有非一致指数渐近行为. 因此在有限或无限维空间中研究发展方程解的非一致指数渐近行为尤为重要. 故本文将在上述文献的基础上，基于一致指数膨胀性的定义，引入 Banach 空间中线性斜积半流的一个更广义的膨胀性概念—指数 φ-膨胀性，然后借助于离散时间方法给出了线性斜积半流指数 φ-膨胀性的若干离散型与连续型刻画. 所得结果推广和完善了指数稳定性理论中关于一致指数行为的若干结果，这为研究线性斜积半流的其他非一致指数行为(非一致指数二分性、非一致指数三分性)提供了可行的路径，具有一定的理论意义.

1　预备知识

设 X 是一个 Banach 空间，(Θ,d)为一个度量空间，将空间 X 上的范数及作用其上面的有界线性算子全体 $\mathscr{B}(X)$上的范数记作 $\|\cdot\|$. I 为恒等算子，χ_A 表示集 A 的特征函数，$\mathbb{R}_+=[0,\infty)$，$\mathbb{R}_+^*=(0,\infty)$，$[m]$表示不超过实数 m 的最大整数，集合 $\mathscr{H}$ 表示所有非减函数 $h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+^*$ 构成的全体，函数 $\varphi:\mathbb{R}_+\to(0,\infty)$.

定义 1.1[8]　连续映射 $\sigma:\Theta\times\mathbb{R}_+\to\Theta$ 称为 Θ 上的半流，如果满足以下两个性质：

(ⅰ) $\sigma(\theta,0)=\theta$，$\forall\,\theta\in\Theta$；

(ⅱ) $\sigma(\theta,t+s)=\sigma(\sigma(\theta,s),t)$，$\forall\,(\theta,s,t)\in\Theta\times\mathbb{R}_+^2$.

定义 1.2[8]　$\pi=(\Phi,\sigma)$称为 $X\times\Theta$ 上的线性斜积半流，如果 σ 为 Θ 上的半流且 $\Phi:\Theta\times\mathbb{R}_+\to\mathscr{B}(X)$满足如下条件：

(ⅰ) $\Phi(\theta,0)=I$，$\forall\,\theta\in\Theta$；

(ⅱ) $\Phi(\theta,t+s)=\Phi(\sigma(\theta,t),s)\Phi(\theta,t)$，$\forall\,(\theta,s,t)\in\Theta\times\mathbb{R}_+^2$；

(ⅲ) 映射 $t\mapsto\Phi(\theta,t)x\in X$ 连续，对所有的$(\theta,x)\in\Theta\times X$.

例 1.1　设 σ 为度量空间 Θ 上的半流，X 是一个 Banach 空间，$\boldsymbol{T}=\{T(t)\}_{t\geqslant0}$ 为 X 上的 C_0 半群[1]. 定义

$$\Phi_T(\theta,t)=T(t),\ \forall\,(\theta,t)\in\Theta\times\mathbb{R}_+,$$

则 $\pi_T=(\Phi_T,\sigma)$是 $X\times\Theta$ 上的线性斜积半流.

例 1.2　设 $\Theta=\mathbb{R}_+$，$\sigma(\theta,t)=\theta+t$，$\boldsymbol{U}=\{U(t,s)\}_{t\geqslant s\geqslant0}$ 为 Banach 空间 X 上的演化族[12]. 定义

$$\Phi_U(\theta,t)=U(t+\theta,\theta),\ \forall\,(\theta,t)\in\mathbb{R}_+^2,$$

则 $\pi_U=(\Phi_U,\sigma)$是 $X\times\Theta$ 上的线性斜积半流.

例 1.3　设 σ 为度量空间 Θ 上的半流，X 是一个 Banach 空间，$A:\Theta\to\mathscr{B}(X)$为连续映射. 若 $\Phi(\theta,t)x$ 是如下抽象 Cauchy 问题

$$\left.\begin{aligned}&u'(t)=A(\sigma(\theta,t))u(t),t\geqslant0;\\&u(0)=x\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

的解，则 $\pi=(\Phi,\sigma)$是 $X\times\Theta$ 上的线性斜积半流.

定义 1.3　若对每个$(\theta,x)\in\Theta\times X$，函数 $\varphi(\|\Phi(\theta,\cdot)x\|)$可测，则称线性斜积半流 $\pi=(\Phi,\sigma)$是 φ-可测的.

定义 1.4　线性斜积半流 $\pi=(\Phi,\sigma)$称为指数 φ-有界，如果存在常数 $M>0$ 和 $\omega>0$ 使得对 $\forall\,(t,\theta,x)\in\mathbb{R}_+\times\Theta\times X$ 有

$$\varphi(\|\Phi(\theta,t)x\|)\leqslant Me^{\omega t}\varphi(\|x\|)\tag{2}$$

定义 1.5　线性斜积半流 $\pi=(\Phi,\sigma)$称为指数 φ-膨胀，如果存在常数 $N>0$ 和 $\upsilon>0$ 使得对 $\forall\,(t,s,\theta,x)\in\mathbb{R}_+^2\times\Theta\times X$ 有

$$\varphi(\|\Phi(\theta,t+s)x\|)\geqslant Ne^{\upsilon t}\varphi(\|\Phi(\theta,s)x\|)\tag{3}$$

注 1.1　在定义 1.5 中若 $\varphi(t)=t$，则称线性斜积半流 $\pi=(\Phi,\sigma)$是一致指数膨胀的.

设$(\Omega,\mathscr{A},\mu)$为一可测空间，$\mathscr{M}(\Omega,\mathbb{R})$为所有从 Ω 到$\mathbb{R}$ 的可测函数构成的集合，

$$\mathscr{M}^+(\Omega,\mathbb{R})=\{j\in\mathscr{M}(\Omega,\mathbb{R})\mid j(\tau)\geqslant0,\forall\,\tau\in\Omega\}.$$

定义 1.6[12]　函数 $S:\mathscr{M}(\Omega,\mathbb{R})\to[0,\infty)$ 称为

$\mathscr{M}(\Omega,\mathbb{R})$上的广义范数，如果满足以下性质：

（ⅰ）$S(j)=0$ 当且仅当 $j=0(\mu\text{-a.e.})$；

（ⅱ）$S(j_1+j_2)\leqslant S(j_1)+S(j_2)$，$\forall j_1,j_2\in\mathscr{M}(\Omega,\mathbb{R})$；

（ⅲ）$S(\alpha j)=|\alpha|S(j)$，$\forall\alpha\in\mathbb{R}$，$\forall j\in\mathscr{M}(\Omega,\mathbb{R})$且满足 $S(j)<\infty$；

（ⅳ）若 $j_1,j_2\in\mathscr{M}(\Omega,\mathbb{R})$且满足$|j_1|\leqslant|j_2|$，则 $S(j_1)\leqslant S(j_2)$.

注 1.2[12] 若函数 S 为 $\mathscr{M}(\Omega,\mathbb{R})$上的广义范数，则 $E=\{j\in\mathscr{M}(\Omega,R)\mid S(j)<\infty\}$ 在 $\|j\|_E=S(j)$下为一赋范函数空间.

设 $\mathscr{E}(\mathbb{N})$表示满足如下性质的赋范序列空间的全体[12]：

（ⅰ）$\chi_{\{0,\cdots,n\}}\in E$，$\forall n\in\mathbb{N}$；

（ⅱ）$\lim\limits_{n\to\infty}\|\chi_{\{0,\cdots,n\}}\|_E=\infty$；

（ⅲ）存在 $l>0$ 使得 $\|\chi_{\{n\}}\|_E\geqslant l,\forall n\in\mathbb{N}$.

类似地，设 $\mathscr{E}(\mathbb{R}_+)$表示满足如下性质的赋范序列空间的全体[12]：

（ⅰ）$\chi_{[0,t]}\in E$，$\forall t\geqslant 0$；

（ⅱ）$\lim\limits_{t\to\infty}\|\chi_{[0,t]}\|_E=\infty$；

（ⅲ）存在 $l>0$ 使得 $\|\chi_{[t,t+1)}\|_E\geqslant l,\forall t\geqslant 0$.

设 $\mathscr{F}$ 表示满足如下性质的函数 $F:\mathscr{M}^+(\mathbb{N},\mathbb{R})\to[0,\infty)$所构成的全体[12]：

（ⅰ）若 $j_1,j_2\in\mathscr{M}^+(\mathbb{N},\mathbb{R})$且满足 $j_1\leqslant j_2$，则 $F(j_1)\leqslant F(j_2)$；

（ⅱ）存在 $l>0$ 使得 $F(\alpha\chi_{\{n\}})\geqslant l\alpha,\forall\alpha>0$，$n\in\mathbb{N}$；

（ⅲ）$\lim\limits_{n\to\infty}F(\alpha\chi_{\{0,\cdots,n\}})=\infty,\forall\alpha>0$.

设 $\mathscr{G}$ 表示满足如下性质的函数 $G:\mathscr{M}^+(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})\to[0,\infty)$所构成的全体[12]：

（ⅰ）若 $u_1,u_2\in\mathscr{M}^+(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$且满足 $u_1\leqslant u_2$，则 $G(u_1)\leqslant G(u_2)$；

（ⅱ）存在 $l>0$ 使得 $G(\alpha\chi_{[t,t+1)})\geqslant l\alpha,\forall\alpha>0$，$t\geqslant 0$；

（ⅲ）$\lim\limits_{t\to\infty}G(\alpha\chi_{[0,t]})=\infty,\forall\alpha>0$.

引理 1.1[12] 若 $F\in\mathscr{F},L>0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\inf_{\alpha\in(0,L]}\frac{F(\alpha\chi_{\{0,\cdots,n\}})}{\alpha^2}=\infty.$$

引理 1.2[12] 若 $h\in\mathscr{H}$，则

（ⅰ）函数 $\psi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$，$\psi(t)=\int_0^t h(s)\mathrm{d}s$ 是非减连续双射；

（ⅱ）对 $\forall\rho>0$，$\exists\beta>0$，使得对所有满足性质 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}h(t_n)\leqslant\rho$ 的序列$(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$有 $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}t_n\leqslant\beta$.

2 主要结论

定理 2.1 设 $\pi=(\Phi,\sigma)$为指数 φ-有界的线性斜积半流，则以下命题等价：

（ⅰ）$\pi=(\Phi,\sigma)$是指数 φ-膨胀的；

（ⅱ）存在序列 $\xi:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_+^*$满足 $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\xi(n)=\infty$，使得对$\forall(m,n,\theta,x)\in\mathbb{N}^2\times\Theta\times X$ 有

$$\varphi(\|\Phi(\theta,m+n)x\|)\geqslant\xi(m)\varphi(\|\Phi(\theta,n)x\|)\tag{4}$$

（ⅲ）存在函数 $\eta:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+^*$满足 $\sup\limits_{t\geqslant 0}\eta(t)=\infty$，使得对$\forall(t,s,\theta,x)\in\mathbb{R}_+^2\times\Theta\times X$ 有

$$\varphi(\|\Phi(\theta,t+s)x\|)\geqslant\eta(t)\varphi(\|\Phi(\theta,s)x\|)\tag{5}$$

（ⅳ）存在常数 $h>0$ 和 $c>1$ 使得对$\forall(t,\theta,x)\in\mathbb{R}_+\times\Theta\times X$ 有

$$\varphi(\|\Phi(\theta,t+h)x\|)\geqslant c\varphi(\|\Phi(\theta,t)x\|)\tag{6}$$

证明 （ⅰ）⇒（ⅱ）. 显然，只需取 $\xi(n)=N\mathrm{e}^{vn}$即可，其中 N，v 由定义 1.5 所给出.

（ⅱ）⇒（ⅲ）. 对$\forall(t,s,\theta,x)\in\mathbb{R}_+^2\times\Theta\times X$ 有

$$\begin{aligned}&\varphi(\|\Phi(\theta,t+s)x\|)\geqslant\\&\frac{\varphi(\|\Phi(\theta,[t]+[s]+2)x\|)}{M\mathrm{e}^{2\omega}}\geqslant\\&\frac{\xi([t]+2)}{M\mathrm{e}^{2\omega}}\varphi(\|\Phi(\theta,[s])x\|)\geqslant\\&\frac{\xi([t]+2)}{M^2\mathrm{e}^{3\omega}}\varphi(\|\Phi(\theta,s)x\|)=\\&\eta(t)\varphi(\|\Phi(\theta,s)x\|),\end{aligned}$$

其中，$\eta(t)=\dfrac{\xi([t]+2)}{M^2\mathrm{e}^{3\omega}}$，$t\geqslant 0$.

（ⅲ）⇒（ⅳ）. 设 $h>0$ 且满足 $\eta(h)>1$. 则取 $c=\eta(h)$可得（ⅳ）成立.

（ⅳ）⇒（ⅰ）. 设$(t,s,\theta,x)\in\mathbb{R}_+^2\times\Theta\times X$，则有

$$\begin{aligned}&\varphi(\|\Phi(\theta,([t/h]+1)h+s)x\|)\leqslant\\&M\mathrm{e}^{\omega([t/h]+1)h-\omega t}\varphi(\|\Phi(\theta,t+s)x\|)\leqslant\\&M\mathrm{e}^{\omega h}\varphi(\|\Phi(\theta,t+s)x\|).\end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned}&\varphi(\|\Phi(\theta,t+s)x\|)\geqslant\\&\frac{1}{M\mathrm{e}^{\omega h}}\varphi(\|\Phi(\theta,([t/h]+1)h+s)x\|)\geqslant\end{aligned}$$

$$\frac{1}{M\mathrm{e}^{\omega h}}c^{[t/h]+1}\varphi(\|\Phi(\theta,s)x\|)\geqslant \frac{1}{M\mathrm{e}^{\omega h}}c^{t/h}\varphi(\|\Phi(\theta,s)x\|)= N\mathrm{e}^{vt}\varphi(\|\Phi(\theta,s)x\|),$$

其中，$N=\dfrac{1}{M\mathrm{e}^{\omega h}}$，$v=\dfrac{\ln c}{h}$.

为方便起见，对每个 $(n,\theta_0,x_0)\in\mathbb{N}\times\Theta\times X$，记

$$u_{n,\theta_0,x_0}(m)=\frac{\varphi(\|\Phi(\theta_0,n)x_0\|)}{\varphi(\|\Phi(\theta_0,m+n)x_0\|)},m\in\mathbb{N}.$$

定理 2.2　设 $\pi=(\Phi,\sigma)$ 是指数 φ-有界的线性斜积半流，则 π 是指数 φ-膨胀的当且仅当存在 $F\in\mathscr{F}$ 使得

$$K:=\sup_{(n,\theta_0,x_0)\in\mathbb{N}\times\Theta\times X}F(u_{n,\theta_0,x_0})<\infty \tag{7}$$

证明　必要性. 显然，只需取 $F(j)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}j(m)$ 即可.

充分性. 为方便起见，记

$$r_n=\frac{1}{\varphi(\|\Phi(\theta_0,n)x_0\|)},$$

则

$$u_{n,\theta_0,x_0}=\sum_{k=0}^{\infty}u_{n,\theta_0,x_0}(k)\chi_{\{k\}}\geqslant \sum_{k=0}^{m}\varphi(\|\Phi(\theta_0,n)x_0\|)r_{n+k}\chi_{\{k\}},$$

从而

$$\begin{aligned}K&\geqslant F(u_{n,\theta_0,x_0})\geqslant\\ &F\Big(\sum_{k=0}^{m}\varphi(\|\Phi(\theta_0,n)x_0\|)r_{n+k}\chi_{\{k\}}\Big)\geqslant\\ &F(\varphi(\|\Phi(\theta_0,n)x_0\|)r_{n+m}\chi_{\{m\}})\geqslant\\ &l\varphi(\|\Phi(\theta_0,n)x_0\|)r_{n+m}\end{aligned} \tag{8}$$

即 $r_n\geqslant\dfrac{l}{K}r_{n+m}$，$\forall(m,n)\in\mathbb{N}^2$.

故

$$\sum_{k=0}^{m}r_{n+k}\chi_{\{k\}}\geqslant\sum_{k=0}^{m}\frac{l}{K}r_{n+m}\chi_{\{k\}}=\frac{l}{K}r_{n+m}\chi_{\{0,\cdots,m\}} \tag{9}$$

结合式(8)和式(9)，有

$$\begin{aligned}K&\geqslant F\Big(\varphi(\|\Phi(\theta_0,n)x_0\|)\sum_{k=0}^{m}r_{n+k}\chi_{\{k\}}\Big)\geqslant\\ &F\Big(\frac{l}{K}\varphi(\|\Phi(\theta_0,n)x_0\|)r_{n+m}\chi_{\{0,\cdots,m\}}\Big)\geqslant\\ &f(m)\frac{l^2}{K^2}\varphi^2(\|\Phi(\theta_0,n)x_0\|)r_{n+m}^2\end{aligned} \tag{10}$$

式中，

$$f(m)=\inf_{\alpha\in(0,L]}\frac{F(\alpha\chi_{\{0,\cdots,m\}})}{\alpha^2},$$

$$\alpha=\frac{l}{K}\varphi(\|\Phi(\theta_0,n)x_0\|)r_{n+m},$$

且 $f(m)\to\infty(m\to\infty)$.

由式(10)可得

$$\varphi(\|\Phi(\theta_0,m+n)x_0\|)\geqslant \xi(m)\varphi(\|\Phi(\theta_0,n)x_0\|),\quad\forall(m,n,\theta_0,x_0)\in\mathbb{N}^2\times\Theta\times X,$$

其中 $\xi(m)=l\sqrt{\dfrac{f(m)}{K^3}}$. 故由定理 2.1 可知 π 是指数 φ-膨胀的.

推论 2.1　设 $\pi=(\Phi,\sigma)$ 是指数 φ-有界的线性斜积半流，则 π 是指数 φ-膨胀的当且仅当存在 K'，$p>0$，使得对 $\forall(n,\theta_0,x_0)\in\mathbb{N}\times\Theta\times X$ 有

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\varphi^p(\|\Phi(\theta_0,m+n)x_0\|)}\leqslant\frac{K'}{\varphi^p(\|\Phi(\theta_0,n)x_0\|)} \tag{11}$$

证明　借助定理 2.2，取

$$F(j)=\Big(\sum_{m=0}^{\infty}j^p(m)\Big)^{1/p}$$

即可.

推论 2.2　设 $\pi=(\Phi,\sigma)$ 是指数 φ-有界的线性斜积半流，则 π 是指数 φ-膨胀的当且仅当存在 $h\in\mathscr{H}$ 以及 $K''>0$ 使得对 $\forall(n,\theta_0,x_0)\in\mathbb{N}\times\Theta\times X$ 有

$$\sum_{m=0}^{\infty}h\left(\frac{\varphi(\|\Phi(\theta_0,n)x_0\|)}{\varphi(\|\Phi(\theta_0,m+n)x_0\|)}\right)\leqslant K'' \tag{12}$$

证明　必要性. 取 $h(t)=t$ 即可.

充分性. 由引理 1.2 可知，存在 $\beta>0$ 使得对 $\forall(n,\theta_0,x_0)\in\mathbb{N}\times\Theta\times X$ 有

$$\sup_{m\in\mathbb{N}}\frac{\varphi(\|\Phi(\theta_0,n)x_0\|)}{\varphi(\|\Phi(\theta_0,m+n)x_0\|)}\leqslant\beta.$$

从而

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty}\psi\left(\frac{\varphi(\|\Phi(\theta_0,n)x_0\|)}{\varphi(\|\Phi(\theta_0,m+n)x_0\|)}\right)\leqslant\\ &\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varphi(\|\Phi(\theta_0,n)x_0\|)}{\varphi(\|\Phi(\theta_0,m+n)x_0\|)}\cdot h\left(\frac{\varphi(\|\Phi(\theta_0,n)x_0\|)}{\varphi(\|\Phi(\theta_0,m+n)x_0\|)}\right)\leqslant\end{aligned}$$

$$\beta\sum_{m=0}^{\infty}h\left(\frac{\varphi(\|\Phi(\theta_0,n)x_0\|)}{\varphi(\|\Phi(\theta_0,m+n)x_0\|)}\right)\leqslant K''\beta.$$

设 $F:\mathscr{M}^{+}(\mathbb{N},\mathbb{R})\to[0,\infty)$，$F(j)=\psi^{-1}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\psi(j(m))\right)$，则 $F\in\mathscr{F}$，且有

$$\sup_{(n,\theta_0,x_0)\in\mathbb{N}\times\Theta\times X}F(u_{n,\theta_0,x_0})\leqslant\psi^{-1}(K''\beta)<\infty.$$

从而由定理 2.2 可知结论成立.

推论 2.3 设 $\pi=(\Phi,\sigma)$是指数 φ-有界的线性斜积半流，则 π 是指数 φ-膨胀的当且仅当 $E\in\mathscr{E}(\mathbb{N})$使得

(ⅰ) 对 $\forall(n,\theta_0,x_0)\in\mathbb{N}\times\Theta\times X$ 有 $u_{n,\theta_0,x_0}\in E$；

(ⅱ) $\sup_{(n,\theta_0,x_0)\in\mathbb{N}\times\Theta\times X}\|u_{n,\theta_0,x_0}\|_E<\infty$.

为方便起见，对每个$(t_0,\theta_0,x_0)\in\mathbb{R}_+\times\Theta\times X$，记

$$\kappa_{t_0,\theta_0,x_0}(t)=\frac{\varphi(\|\Phi(\theta_0,t_0)x_0\|)}{\varphi(\|\Phi(\theta_0,t+t_0)x_0\|)},t\geqslant 0.$$

定理 2.3 设 $\pi=(\Phi,\sigma)$是指数 φ-有界和 φ-可测的线性斜积半流，则 π 是指数 φ-膨胀的当且仅当存在 $G\in\mathscr{G}$ 使得

$$\sup_{(t_0,\theta_0,x_0)\in\mathbb{R}_+\times\Theta\times X}G(\kappa_{t_0,\theta_0,x_0})<\infty \tag{13}$$

证明 必要性. 显然，只需取

$$G(g)=\int_0^{\infty}g(t)\mathrm{d}t$$

即可.

充分性. 对 $\forall t\in[m,m+1),m\in\mathbb{N}$，

$$\kappa_{t_0,\theta_0,x_0}(t)\geqslant\frac{\varphi(\|\Phi(\theta_0,t_0)x_0\|)}{M\mathrm{e}^{\omega(t-m)}\varphi(\|\Phi(\theta_0,m+t_0)x_0\|)}\geqslant\frac{\varphi(\|\Phi(\theta_0,t_0)x_0\|)}{M\mathrm{e}^{\omega t}\varphi(\|\Phi(\theta_0,m+t_0)x_0\|)}:=\upsilon_{t_0,\theta_0,x_0}(t).$$

对每个 $j\in\mathscr{M}^{+}(\mathbb{N},\mathbb{R})$，定义 $g_j\in\mathscr{M}^{+}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$，

$$g_j(t)=\frac{j(m)}{M\mathrm{e}^{\omega}},\forall t\in[m,m+1),m\in\mathbb{N}.$$

定义函数 $F_G:\mathscr{M}^{+}(\mathbb{N},\mathbb{R})\to[0,\infty)$，$F_G(j)=G(g_j)$. 由于 $G\in\mathscr{G}$，故 $F_G\in\mathscr{F}$，以及

$$F_G(u_{n,\theta_0,x_0})=G(\upsilon_{n,\theta_0,x_0})\leqslant G(\kappa_{n,\theta_0,x_0}).$$

进而

$$\sup_{(n,\theta_0,x_0)\in\mathbb{N}\times\Theta\times X}F_G(u_{n,\theta_0,x_0})\leqslant\sup_{(n,\theta_0,x_0)\in\mathbb{N}\times\Theta\times X}G(\kappa_{n,\theta_0,x_0})\leqslant\sup_{(t_0,\theta_0,x_0)\in\mathbb{R}_+\times\Theta\times X}G(\kappa_{t_0,\theta_0,x_0})<\infty.$$

故由定理 2.2 可得结论成立.

推论 2.4 设 $\pi=(\Phi,\sigma)$是指数 φ-有界和 φ-可测的线性斜积半流，则 π 是指数 φ-膨胀的当且仅当存在 $p>0$ 使得

$$\sup_{(t_0,\theta_0,x_0)\in\mathbb{R}_+\times\Theta\times X}\int_0^{\infty}\frac{\varphi^p(\|\Phi(\theta_0,t_0)x_0\|)}{\varphi^p(\|\Phi(\theta_0,t+t_0)x_0\|)}\mathrm{d}t<\infty \tag{14}$$

证明 借助定理 2.3，取

$$G(g)=\left(\int_0^{\infty}g^p(t)\mathrm{d}t\right)^{1/p}$$

即可.

推论 2.5 设 $\pi=(\Phi,\sigma)$是指数 φ-有界和 φ-可测的线性斜积半流，则 π 是指数 φ-膨胀的当且仅当存在 $h\in\mathscr{H}$ 使得

$$\sup_{(t_0,\theta_0,x_0)\in\mathbb{R}_+\times\Theta\times X}\int_0^{\infty}h\left(\frac{\Phi(\|(\theta_0,t_0)x_0\|)}{\Phi(\|(\theta_0,t+t_0)x_0\|)}\right)\mathrm{d}t<\infty \tag{15}$$

证明 必要性. 取 $h(t)=t$ 即可.

充分性. 设 $\tilde{h}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$，$\tilde{h}(t)=h\left(\frac{t}{M\mathrm{e}^{\omega}}\right)$. 在定理 2.3 所定义的 $\upsilon_{t_0,\theta_0,x_0}(t)$ 中，取 $t_0=n,n\in\mathbb{N}$. 则有

$$\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{h}(u_{n,\theta_0,x_0}(m))=\int_0^{\infty}h(\upsilon_{n,\theta_0,x_0}(t))\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{\infty}h(\kappa_{n,\theta_0,x_0}(t))\mathrm{d}t.$$

从而

$$\sup_{(n,\theta_0,x_0)\in\mathbb{N}\times\Theta\times X}\sum_{m=0}^{\infty}h\left(\frac{\varphi\|\Phi(\theta_0,n)x_0\|)}{\varphi\|\Phi(\theta_0,m+n)x_0\|)}\right)\leqslant\sup_{(t_0,\theta_0,x_0)\in\mathbb{R}_+\times\Theta\times X}\int_0^{\infty}h(\kappa_{t_0,\theta_0,x_0}(t))\mathrm{d}t<\infty.$$

故借助推论 2.2 可知结论成立.

推论 2.6 设 $\pi=(\Phi,\sigma)$是指数 φ-有界和 φ-可测的线性斜积半流，则 π 是指数 φ-膨胀的当且仅当 $E\in\mathscr{E}(\mathbb{R}_+)$使得

(ⅰ) 对 $\forall(t_0,\theta_0,x_0)\in\mathbb{R}_+\times\Theta\times X$ 有 $\kappa_{t_0,\theta_0,x_0}\in E$；

(ⅱ) $\sup_{(t_0,\theta_0,x_0)\in\mathbb{R}_+\times\Theta\times X}\|\kappa_{t_0,\theta_0,x_0}\|_E<\infty$.

参考文献(References)

[1] DATKO R. Extending a theorem of Liapunov to Hilbert spaces[J]. J Math Anal Appl, 1970, 32(3): 610-616.

(下转第 611 页)