第50卷第4期 中国科学技术大学学报 Vol. 50, No. 4
2020年4月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Apr. 2020

文章编号:0253-2778(2020)04-0396-06

有界线性算子的 Weyl 型定理及亚循环性

王 静,曹小红

(陕西师范大学数学与信息科学学院,陕西西安 710119)

摘要:令 H 为无限维复可分的 Hilbert 空间, $B(H)$ 为 H 上有界线性算子的全体. 称算子 $T \in B(H)$ 满足 Browder 定理,若 $\sigma(T)\backslash\sigma_w(T) \subseteq \pi_{00}(T)$ 或 $\sigma_w(T)=\sigma_b(T)$; 若 $\sigma(T)\backslash\sigma_w(T)=\pi_{00}(T)$, 称 T 满足 Weyl 定理,其中 $\sigma(T)$, $\sigma_w(T)$, $\sigma_b(T)$ 分别表示算子 T 的谱集、Weyl 谱、Browder 谱, $\pi_{00}(T)=\{\lambda \in \mathrm{iso}\,\sigma(T): 0<\dim N(T-\lambda I)<\infty\}$. 通过定义新的谱集,研究了当 T 为亚循环算子时算子及算子函数满足 Weyl 型定理的充要条件,并讨论了相应谱集的谱映射定理.

关键词: Browder 定理; Weyl 定理; 谱集; 亚循环算子; 谱映射定理

中图分类号: O177.2 **文献标识码**: A doi: 10.3969/j.issn.0253-2778.2020.04.002

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 47B20; Secondary 47A30

引用格式: 王静,曹小红. 有界线性算子的 Weyl 型定理及亚循环性[J]. 中国科学技术大学学报,2020,50(4): 396-401.

WANG Jing, CAO Xiaohong. Weyl type theorem and hypercyclic property for bounded linear operators[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2020,50(4):396-401.

Weyl type theorem and hypercyclic property for bounded linear operators

WANG Jing, CAO Xiaohong

(*School of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China*)

Abstract: Let H be an infinite dimensional separable complex Hilbert space and $B(H)$ be the algebra of all bounded linear operators on H. $T \in B(H)$ satisfies Browder's theorem if $\sigma(T)\backslash\sigma_w(T) \subseteq \pi_{00}(T)$ or $\sigma_w(T)=\sigma_b(T)$. If $\sigma(T)\backslash\sigma_w(T)=\pi_{00}(T)$, Weyl's theorem holds for T, where $\sigma(T)$, $\sigma_w(T)$, $\sigma_b(T)$ denote the spectrum set, Weyl spectrum, and Browder spectrum respectively, and $\pi_{00}(T)=\{\lambda \in \mathrm{iso}\,\sigma(T): 0<\dim N(T-\lambda I)<\infty\}$. Using the newly defined spectrum, the sufficient and necessary conditions for operator functions satisfying Weyl type theorem were studied if T is a hypercyclic operator. In addition, the spectrum mapping theorem for some new spectrums was discussed.

Key words: Browder's theorem; Weyl's theorem; spectrum set; hypercyclic operator; spectrum mapping theorem

0 引言

本文中, H 表示无限维复可分 Hilbert 的空间, $B(H)$ 为 H 上的有界线性算子的全体. 算子 $T \in B(H)$ 称为上半 Fredholm 算子,若 T 的值域 $R(T)$ 是闭集且其零空间 $N(T)$ 是有限维的;若值域

收稿日期: 2020-03-02; **修回日期**: 2020-04-03

基金项目: 国家自然科学基金(11471200)资助.

作者简介: 王静,女,1993 年生,硕士. 研究方向:算子理论,泛函分析. E-mail: 2590953142@qq.com

通讯作者: 曹小红,博士/教授. E-mail: xiaohongcao@snnu.edu.cn

$R(T)$ 的余维数是有限的，则称 $T \in B(H)$ 为下半 Fredholm 算子. $T \in B(H)$ 称为 Fredholm 算子，如果 T 既为上半 Fredholm 算子又为下半 Fredholm 算子. 对一个半 Fredholm 算子 T 而言（上半或者下半），令 $n(T)=\dim N(T)$，$d(T)=\dim(H/R(T))$，其指标定义为 $\mathrm{ind}(T)=n(T)-d(T)$. 算子 $T \in B(H)$ 的升标 $\mathrm{asc}(T)$ 为满足 $N(T^n)=N(T^{n+1})$ 的最小正整数 n，若这样的正整数不存在，则记 $\mathrm{asc}(T)=+\infty$；而 $T \in B(H)$ 的降标 $\mathrm{des}(T)$ 为满足 $R(T^n)=R(T^{n+1})$ 的最小正整数 n，若这样的正整数不存在，则记 $\mathrm{des}(T)=+\infty$. T 称为 Weyl 算子，如果 T 是指标为零的 Fredholm 算子；若 T 是有限升降标的 Fredholm 算子，T 称为是 Browder 算子. 称 $T \in B(H)$ 为下有界算子，若 T 为上半 Fredholm 算子且 $n(T)=0$. 令 $\sigma(T)$，$\sigma_e(T)$，$\sigma_w(T)$，$\sigma_b(T)$，$\sigma_a(T)$，$\sigma_{ea}(T)$，$\sigma_{ab}(T)$，$\sigma_d(T)$，$\sigma_p(T)$，$\sigma_{SF}(T)$ 分别表示 T 的谱、本质谱、Weyl 谱、Browder 谱、逼近点谱、本质逼近点谱、Browder 逼近点谱、Goldberg 谱、点谱和半 Fredholm 谱，记

$$\rho(T)=\mathbb{C}\setminus\sigma(T),\ \rho_e(T)=\mathbb{C}\setminus\sigma_e(T),$$
$$\rho_w(T)=\mathbb{C}\setminus\sigma_w(T),\rho_b(T)=\mathbb{C}\setminus\sigma_b(T),$$
$$\rho_a(T)=\mathbb{C}\setminus\sigma_a(T),\rho_{ea}(T)=\mathbb{C}\setminus\sigma_{ea}(T),$$
$$\rho_{ab}(T)=\mathbb{C}\setminus\sigma_{ab}(T),\rho_d(T)=\mathbb{C}\setminus\sigma_d(T),$$
$$\rho_p(T)=\mathbb{C}\setminus\sigma_p(T),\rho_{SF}(T)=\mathbb{C}\setminus\sigma_{SF}(T),$$
$$\sigma_0(T)=\sigma(T)\setminus\sigma_b(T).$$

对集合 $E\subseteq\mathbb{C}$，用 $\mathrm{iso}\,E$ 表示 E 中孤立点的全体，$\mathrm{acc}\,E$ 表示 E 中聚点的全体. 如果 $\mathrm{iso}\,\sigma(T)\subseteq\sigma_p(T)$，则称 T 为 isoloid 算子. D 表示单位闭圆盘，∂D 表示单位闭圆盘的边界.

Weyl 定理是 Weyl[1] 在 1909 年研究自伴算子 T 的谱时发现的，近年来国内外许多学者开始研究哪些算子满足 Weyl 定理，于是满足 Weyl 定理的算子的范围不断地扩大[2-9]. 称算子 $T\in B(H)$ 满足 Weyl 定理，如果有 $\sigma(T)\setminus\sigma_w(T)=\pi_{00}(T)$，其中 $\pi_{00}(T)=\{\lambda\in\mathrm{iso}\,\sigma(T):0<n(T-\lambda I)<\infty\}$. Harte 和 Lee[10] 对 Weyl 定理进行了变形，定义了 Browder 定理：即算子 T 满足 $\sigma(T)\setminus\sigma_w(T)\subseteq\pi_{00}(T)$ 或 $\sigma_w(T)=\sigma_b(T)$.

任给 $x\in H$，x 在 T 下的轨道定义为

$$\mathrm{Orb}(T,x)=\{x,Tx,T^2x,\cdots\}.$$

称 $x\in H$ 为亚循环向量，若 $\mathrm{Orb}(T,x)$ 在 $x\in H$ 中是稠密的. 下面用 $HC(H)$ 表示 $B(H)$ 上亚循环算子的全体，$\overline{HC(H)}$ 为 $HC(H)$ 的范数闭包. 文献[11]给出了 $T\in\overline{HC(H)}$ 的判定，即 $T\in\overline{HC(H)}$ 当且仅当① $\sigma_w(T)\cup\partial D$ 连通；② $\sigma_0(T)=\varnothing$；③任给 $\lambda\in\rho_{SF}(T)$，都有

$$\mathrm{ind}(T-\lambda I)\geqslant 0.$$

本文主要通过定义新的谱集，研究了当 T 为亚循环算子时算子及算子函数满足 Weyl 型定理的充要条件，并讨论了相应谱集的谱映射定理.

1　主要结论

首先，定义一个新的集合，令

$$\rho_1(T)=\{\lambda\in C:n(T-\lambda I)<\infty,$$
$$\text{存在 }\varepsilon>0,\text{当 }0<|\mu-\lambda|<\varepsilon\text{ 时},$$
$$\mu\notin\sigma_{ea}(T)\text{ 并且 }N(T-\mu I)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}R[(T-\mu I)^n]\}.$$

令 $\sigma_1(T)=C\setminus\rho_1(T)$，则 $\sigma_1(T)\subseteq\sigma_{ea}(T)\subseteq\sigma_{ab}(T)\subseteq\sigma_a(T)$ 且 $\sigma_1(T)\subseteq\sigma_{ea}(T)\subseteq\sigma_w(T)\subseteq\sigma_b(T)\subseteq\sigma(T)$.

定理 1.1　设 $T\in B(H)$，$\sigma(T)=\sigma_1(T)\cup\{\lambda\in\mathrm{iso}\,\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}$ 且 $\sigma(T)\cup\partial D$ 连通，则 T 满足 Browder 定理且 $T\in\overline{HC(H)}$.

证明　由于

$$\sigma_1(T)\cup\{\lambda\in\mathrm{iso}\,\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}\subseteq$$
$$\sigma_w(T)\subseteq\sigma_b(T)\subseteq\sigma(T)$$

且

$$\sigma(T)=\sigma_1(T)\cup\{\lambda\in\mathrm{iso}\,\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\},$$

则 $\sigma_w(T)=\sigma_b(T)=\sigma(T)$，因此 T 满足 Browder 定理，$\sigma_0(T)=\varnothing$，$\sigma_w(T)\cup\partial D$ 连通. 假设存在 $\lambda_0\in\rho_{SF}(T)$，$\mathrm{ind}(T-\lambda_0 I)<0$，则 $\lambda_0\notin\sigma_1(T)\cup\{\lambda\in\mathrm{iso}\,\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}=\sigma(T)$，矛盾. 即对任意的 $\lambda\in\rho_{SF}(T)$，$\mathrm{ind}(T-\lambda I)\geqslant 0$，故 $T\in\overline{HC(H)}$.

注解 1.1　①设 $T\in B(H)$，T 满足 Browder 定理且 $T\in\overline{HC(H)}$，推不出 $\sigma(T)=\sigma_1(T)\cup\{\lambda\in\mathrm{iso}\,\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}$ 且 $\sigma(T)\cup\partial D$ 连通.

例 1.1　令 $A\in B(l^2)$ 定义为

$$A(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(0,0,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\cdots),$$

令 $T=A+I$，则 $\sigma_w(T)=\sigma_b(T)=\sigma(T)=\{1\}$，说明 T 满足 Browder 定理. 由于 $\sigma_w(T)\cup\partial D=\partial D$ 连通，$\sigma_0(T)=\varnothing$，对任意的 $\lambda\in\rho_{SF}(T)$，$\mathrm{ind}(T-\lambda I)\geqslant 0$，因此 $T\in\overline{HC(H)}$. 但 $\sigma_1(T)=\varnothing$，$\{\lambda\in\mathrm{iso}\,\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}=\varnothing$，故 $\sigma(T)\neq\sigma_1(T)\cup\{\lambda\in\mathrm{iso}\,\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}$.

②在定理 1.1 的条件下，即当 $\sigma(T)=\sigma_1(T)\cup$

$\{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T): n(T-\lambda I)=0\}$ 成立时，有 $\{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T): 0<n(T-\lambda I)<\infty\}=\varnothing$.

由于 $\{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T): 0<n(T-\lambda I)<\infty\} \cap \sigma_1(T)=\varnothing$，$\{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T): 0<n(T-\lambda I)<\infty\} \cap \{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T): n(T-\lambda I)=0\}=\varnothing$，因此 $\{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T): 0<n(T-\lambda I)<\infty\} \cap \sigma(T)=\varnothing$，故

$\{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T): 0<n(T-\lambda I)<\infty\}=\varnothing$.

由定理 1.1 和注解 1.1②可得以下推论：

推论 1.1 设 $T \in B(H)$，则 $\sigma(T)=\sigma_1(T) \cup \{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T): n(T-\lambda I)=0\}$ 且 $\sigma(T) \cup \partial D$ 连通当且仅当下列成立：

① T 满足 Browder 定理且 $T \in \overline{HC(H)}$；

② $\{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T): 0<n(T-\lambda I)<\infty\}=\varnothing$.

证明 必要性. 由定理 1.1 和注解 1.1②即证.

充分性.

$\sigma_1(T) \cup \{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T): n(T-\lambda I)=0\} \subseteq \sigma(T)$ 显然成立. 下证反包含成立. 对任意的 $\lambda_0 \notin \sigma_1(T) \cup \{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T): n(T-\lambda I)=0\}$，$n(T-\lambda_0 I)<\infty$，存在 $\varepsilon>0$，当 $0<|\mu-\lambda_0|<\varepsilon$ 时，$\mu \notin \sigma_{ea}(T)$ 并且 $N(T-\mu I) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} R[(T-\mu I)^n]$. 由于 $T \in \overline{HC(H)}$，则 $\mu \in \rho_w(T)=\rho_b(T)$ 则

$$N(T-\mu I)= N(T-\mu I) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} R[(T-\mu I)^n]=\{0\},$$

则 $\mu \in \rho(T)$，进而 $\lambda_0 \in \operatorname{iso}\sigma(T) \cup \rho(T)$，又因 $\{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T): 0<n(T-\lambda I)<\infty\}=\varnothing$. 因此 $\lambda_0 \in \rho(T)$. 由于 T 满足 Browder 定理且 $T \in \overline{HC(H)}$，故 $\sigma_w(T)=\sigma_b(T)=\sigma(T)$，即 $\sigma(T) \cup \partial D$ 连通.

推论 1.2 设 $T \in B(H)$，则 $\sigma(T)=\sigma_1(T) \cup \{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T): n(T-\lambda I)=0\}$ 且 $\sigma(T) \cup \partial D$ 连通当且仅当 T 满足 Weyl 定理且 $T \in \overline{HC(H)}$.

证明 由推论 1.1 可知，T 满足 Browder 定理且 $T \in \overline{HC(H)}$，$\{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T): 0<n(T-\lambda I)<\infty\}=\varnothing$，即得 $\sigma_w(T)=\sigma_b(T)=\sigma(T)$，因此 $\sigma(T) \backslash \sigma_w(T)=\varnothing$，$\pi_{00}(T)=\varnothing$，$T$ 满足 Weyl 定理，故推论 1.2 是正确的.

定理 1.2 设 $T \in B(H)$，$\sigma(T)=\sigma_1(T) \cup \sigma_d(T)$ 连通. 若对任意的多项式 p，存在 $\lambda_0 \in \sigma(T)$，使得 $|p(\lambda_0)|=1$，则 $p(T) \in \overline{HC(H)}$.

证明 由于 $\sigma(T)=\sigma_1(T) \cup \sigma_d(T)$ 且 $\sigma_1(T) \cup \sigma_d(T) \subseteq \sigma_w(T) \subseteq \sigma_b(T) \subseteq \sigma(T)$，因此 $\sigma_w(T)=\sigma_b(T)=\sigma(T)$. 所以对任意的多项式 p，有 $\sigma(p(T))=p(\sigma(T))=p(\sigma_b(T))=\sigma_b(p(T))$，即 $\sigma_0(p(T))=\varnothing$. 假设存在 $\lambda_0 \in \rho_{SF}(T)$，使得 $\operatorname{ind}(T-\lambda_0 I)<0$，则 $\lambda_0 \notin \sigma_1(T) \cup \sigma_d(T)=\sigma(T)$ 矛盾，所以任给 $\lambda \in \rho_{SF}(T)$，都有 $\operatorname{ind}(T-\lambda I) \geqslant 0$. 即对任意的多项式 p，$p(\sigma_w(T))=\sigma_w(p(T))$. 若存在 $\mu_0 \in \rho_{SF}(p(T))$，使得 $\operatorname{ind}(p(T)-\mu_0 I)<0$，令 $p(x)-\mu_0=a(x-\lambda_1)^{n_1}\cdots(x-\lambda_k)^{n_k}$，$\mu_0=p(\lambda_i)$，则

$$p(T)-\mu_0 I=a(T-\lambda_1 I)^{n_1}\cdots(T-\lambda_k I)^{n_k},$$

因此 $\lambda_i \in \rho_{SF}(T)$，至少存在一个 λ_i，使得 $\operatorname{ind}(p(T)-\lambda_i I)<0$，矛盾. 故任给 $\mu \in \rho_{SF}(p(T))$，都有 $\operatorname{ind}(p(T)-\mu I) \geqslant 0$. 存在 $\lambda_0 \in \sigma(T)$，$|p(\lambda_0)|=1$，则 $p(\lambda_0) \in \partial D$，又因 $p(\lambda_0) \in p(\sigma(T))=p(\sigma_w(T))=\sigma_w(p(T))$，所以 $p(\lambda_0) \in \sigma_w(p(T)) \cap \partial D$. 又由于 $\sigma_w(p(T))$ 和 ∂D 都是连通的，故 $\sigma_w(p(T)) \cup \partial D$ 是连通的，即 $p(T) \in \overline{HC(H)}$.

注解 1.2 由定理 1.2 的证明可知，下列叙述是正确的：

(i) 设 $T \in B(H)$，$\sigma(T)=\sigma_1(T) \cup \{\lambda \in \sigma_d(T): n(T-\lambda I)<\infty\}$ 连通. 则对任意的多项式 p，存在 $\lambda_0 \in \sigma(T)$，使得

$$|p(\lambda_0)|=1, p(T) \in \overline{HC(H)}.$$

(ii) 设 $T \in B(H)$，$\sigma(T)=\sigma_1(T)$ 连通. 则对任意的多项式 p，存在 $\lambda_0 \in \sigma(T)$，使得

$$|p(\lambda_0)|=1, p(T) \in \overline{HC(H)}.$$

(iii) 设 $T \in B(H)$，$\sigma(T)=\sigma_1(T) \cup \sigma_d(T)$ 连通. 则对任意的多项式 p，存在 $c \neq 0$，使得

$$cp(T) \in \overline{HC(H)}.$$

(iv) 设 $T \in B(H)$，$\sigma(T)=\sigma_1(T) \cup \{\lambda \in \sigma_d(T): n(T-\lambda I)<\infty\}$ 连通. 则对任意的多项式 p，存在 $c \neq 0$，使得 $cp(T) \in \overline{HC(H)}$.

(v) 设 $T \in B(H)$，$\sigma(T)=\sigma_1(T)$ 连通. 则对任意的多项式 p，存在 $c \neq 0$，使得 $cp(T) \in \overline{HC(H)}$.

对任意的多项式 p，都能找到一个 $\lambda_0 \in \sigma(T)$，使得 $p(\lambda_0) \neq 0$. 令 $c=\dfrac{1}{p(\lambda_0)}$，则 $|cp(\lambda_0)|=1$，因此 $cp(T) \in \overline{HC(H)}$.

引理 1.1 若 T 满足 Browder 定理，则对任意的多项式 p，$p(T)$ 满足 Browder 定理当且仅当对任意的 $\lambda,\mu \in \rho_e(T)$，$\operatorname{ind}(T-\lambda I) \cdot \operatorname{ind}(T-\mu I) \geqslant 0$.

当 $T \in \overline{HC(H)}$ 时，由定理 1.2，注解 1.2 及引理 1.1，可以得到

定理 1.3　设 $T \in B(H)$，则下列叙述等价：

①对任意的多项式 p，$p(T)$ 满足 Browder 定理且 $T \in \overline{HC(H)}$；

② T 满足 Browder 定理且 $T \in \overline{HC(H)}$；

③ $\sigma(T) = \sigma_1(T) \cup \sigma_d(T)$ 且 $\sigma(T) \cup \partial D$ 连通；

④ $\sigma(T) = \sigma_1(T) \cup \sigma_d(T)$ 且 $\sigma_w(T) \cup \partial D$ 连通；

⑤ $\sigma(T) = \sigma_1(T) \cup \{\lambda \in \sigma_d(T): n(T-\lambda I) < \infty\}$ 且 $\sigma(T) \cup \partial D$ 连通；

⑥ $\sigma(T) = \sigma_1(T) \cup \{\lambda \in \sigma_d(T): n(T-\lambda I) < \infty\}$ 且 $\sigma_w(T) \cup \partial D$ 连通.

证明　①⇒②. 令 $p(T) = T$ 即可.

②⇒①. 由于 $T \in \overline{HC(H)}$，因此，对任意的 $\lambda \in \rho_{SF}(T)$，$\text{ind}(T-\lambda I) \geqslant 0$，即对任意的 $\lambda \in \rho_e(T)$，$\text{ind}(T-\lambda I) \geqslant 0$，由引理 1.1 可知，对任意的多项式 p，$p(T)$ 满足 Browder 定理.

②⇒③. $\sigma_1(T) \cup \sigma_d(T) \subseteq \sigma(T)$ 显然成立，下证反包含成立. 对任意的 $\lambda_0 \notin \sigma_1(T) \cup \sigma_d(T)$，则 $T-\lambda_0 I$ 为上半 Fredholm 算子，存在 $\varepsilon > 0$，当 $0 < |\mu - \lambda_0| < \varepsilon$ 时，$\mu \notin \sigma_{ea}(T)$ 并且 $N(T-\mu I) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} R[(T-\mu I)^n]$. 由上半 Fredholm 算子摄动定理可知，$\lambda_0 \notin \sigma_{ea}(T)$，又因 $T \in \overline{HC(H)}$，则 $\lambda_0 \in \rho_w(T) = \rho_b(T) = \rho(T)$. 由推论 1.1 的充分性证明，即得 $\sigma(T) \cup \partial D$ 连通.

③⇒②. 由于 $\sigma_1(T) \cup \sigma_d(T) \subseteq \sigma_w(T) \subseteq \sigma_b(T) \subseteq \sigma(T)$ 且 $\sigma(T) = \sigma_1(T) \cup \sigma_d(T)$，因此 $\sigma_w(T) = \sigma_b(T) = \sigma(T)$，故 T 满足 Browder 定理. $\sigma_0(T) = \varnothing$，$\sigma_w(T) \cup \partial D$ 连通. 假设存在 $\lambda_0 \in \rho_{SF}(T)$，$\text{ind}(T-\lambda_0 I) < 0$，则 $\lambda_0 \in \rho_1(T) \cap \rho_d(T) = \rho(T)$，矛盾. 因此，对任意的 $\lambda \in \rho_{SF}(T)$，$\text{ind}(T-\lambda I) \geqslant 0$，故 $T \in \overline{HC(H)}$.

③⇔④. 显然成立.

②⇒⑤. $\sigma_1(T) \cup \{\lambda \in \sigma_d(T): n(T-\lambda I) < \infty\} \subseteq \sigma(T)$ 显然成立. 下证反包含成立. 对任意的 $\lambda_0 \notin \sigma_1(T) \cup \{\lambda \in \sigma_d(T): n(T-\lambda I) < \infty\}$，则 $\lambda_0 \in \rho_1(T)$ 且 $R(T-\lambda_0 I)$ 是闭的，因此由 ②⇒③ 证明过程即证.

⑤⇒②. 同③⇒②的证明.

⑤⇔⑥. 显然成立.

注解 1.3　①在定理 1.3 的 ②⇒③ 的过程中，“T 满足 Browder 定理”是本质的.

例 1.2　设 $A, B \in B(l^2)$ 定义为

$$A(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots),$$
$$B(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, x_4, \cdots),$$

令 $T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$，则

(i) $\sigma(T) = \sigma_b(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leqslant 1\}$，$\sigma_w(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = 1\}$，$T$ 不满足 Browder 定理；

(ii) $\sigma_0(T) = \varnothing$；$\sigma_w(T) \cup \partial D = \partial D$；任给 $\lambda \in \rho_{SF}(T)$，都有 $\text{ind}(T-\lambda I) \geqslant 0$，则 $T \in \overline{HC(H)}$；

(iii) $\sigma_1(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = 1\}$，$\sigma_d(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = 1\}$，此时“$\sigma(T) = \sigma_1(T) \cup \sigma_d(T)$”不成立.

②在定理 1.3 的 ②⇒③ 的过程中，“$T \in \overline{HC(H)}$”是本质的.

例 1.3　设 $A, B, C \in B(l^2)$ 定义为

$$A(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots),$$
$$B(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, x_4, \cdots),$$
$$C(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_1, 0, x_2, \cdots),$$

令

$$T = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},$$

则

(i) $\sigma(T) = \sigma_b(T) = \sigma_w(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leqslant 1\}$，$T$ 满足 Browder 定理；

(ii) 当 $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| < 1\}$ 时，$\text{ind}(T-\lambda I) < 0$，则 $T \notin \overline{HC(H)}$；

(iii) $\sigma_1(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = 1\}$，$\sigma_d(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = 1\}$，此时“$\sigma(T) = \sigma_1(T) \cup \sigma_d(T)$”不成立.

③当 T 满足 Browder 定理且 $T \in \overline{HC(H)}$ 时，定理 1.3③中 $\sigma(T)$ 的分解的两部分缺一不可.

例 1.4　令 $T \in B(l^2)$ 定义为

$$T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, x_4, \cdots),$$

则 $\sigma(T) = \sigma_b(T) = \sigma_w(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leqslant 1\}$，说明 T 满足 Browder 定理. $\sigma_0(T) = \varnothing$；$\sigma_w(T) \cup \partial D = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| \leqslant 1\}$；任给 $\lambda \in \rho_{SF}(T)$，都有 $\text{ind}(T-\lambda I) \geqslant 0$，则 $T \in \overline{HC(H)}$. 但 $\sigma_d(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = 1\}$，故 $\sigma(T) \neq \sigma_d(T)$.

例 1.5　如例 1.1 中的算子 T，T 满足

Browder 定理；$T \in \overline{HC(H)}$. 但 $\sigma(T)=\{1\}$，$\sigma_1(T)=\varnothing$，故 $\sigma(T)\neq\sigma_1(T)$.

④当 T 满足 Browder 定理且 $T\in\overline{HC(H)}$ 时，定理 1.3⑤中 $\sigma(T)$ 的分解的两部分缺一不可.

例 1.6 如例 1.4 中的算子 T，T 满足 Browder 定理；$T\in\overline{HC(H)}$. 但 $\sigma(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|\leqslant 1\}$，$\{\lambda\in\sigma_d(T):n(T-\lambda I)<\infty\}=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=1\}$，故 $\sigma(T)\neq\{\lambda\in\sigma_d(T):n(T-\lambda I)<\infty\}$.

例 1.7 如例 1.1 中的算子 T，T 满足 Browder 定理；$T\in\overline{HC(H)}$. 但 $\sigma(T)=\{1\}$，$\sigma_1(T)=\varnothing$，故 $\sigma(T)\neq\sigma_1(T)$.

由定理 1.3 可以得到以下推论：

推论 1.3 设 $T\in B(H)$，$T\in\overline{HC(H)}$，则下列叙述等价：

①对任意的多项式 p，$p(T)$ 满足 Browder 定理；

② T 满足 Browder 定理；

③ $\sigma(T)=\sigma_1(T)\cup\sigma_d(T)$；

④ $\sigma(T)=\sigma_1(T)\cup\{\lambda\in\sigma_d(T):n(T-\lambda I)<\infty\}$.

推论 1.4 设 $T\in B(H)$，T 满足 Browder 定理，则下列叙述等价：

① $T\in\overline{HC(H)}$；

② $\sigma(T)=\sigma_1(T)\cup\sigma_d(T)$ 且 $\sigma(T)\cup\partial D$ 连通；

③ $\sigma(T)=\sigma_1(T)\cup\sigma_d(T)$ 且 $\sigma_w(T)\cup\partial D$ 连通；

④ $\sigma(T)=\sigma_1(T)\cup\{\lambda\in\sigma_d(T):n(T-\lambda I)<\infty\}$ 且 $\sigma(T)\cup\partial D$ 连通；

⑤ $\sigma(T)=\sigma_1(T)\cup\{\lambda\in\sigma_d(T):n(T-\lambda I)<\infty\}$ 且 $\sigma_w(T)\cup\partial D$ 连通.

引理 1.2 设 $T\in B(H)$，p 为一多项式，则

①设 $T\in B(H)$，对任意的多项式 p，若 $\mu_0\in\operatorname{iso}\sigma(p(T))$ 且

$$p(T)-\mu_0 I=a(T-\lambda_1 I)^{n_1}\cdots(T-\lambda_k I)^{n_k},$$

则 $\lambda_i\in\operatorname{iso}\sigma(T)\cup\rho(T)$，$i=1,2,\cdots,k$.

②设 $T\in B(H)$，若 T 为 isoloid 算子且满足 Weyl 定理，则对任意的多项式 p，$p(T)$ 为 isoloid 算子且 $\pi_{00}(p(T))\subseteq\sigma(p(T))\backslash\sigma_w(p(T))$.

同理，当 $T\in\overline{HC(H)}$ 时，由定理 1.2，注解 1.2 及引理 1.2，可以得到

定理 1.4 设 $T\in B(H)$，则下列叙述等价：

①对任意的多项式 p，$p(T)$ isoloid 算子且满足 Weyl 定理且 $T\in\overline{HC(H)}$；

② T 为 isoloid 算子且满足 Weyl 定理且 $T\in\overline{HC(H)}$；

③ $\sigma(T)=\sigma_1(T)$ 且 $\sigma(T)\cup\partial D$ 连通；

④ $\sigma(T)=\sigma_1(T)$ 且 $\sigma_w(T)\cup\partial D$ 连通.

证明 ①⇒②. 令 $p(T)=T$ 即可.

②⇒①. 由引理 1.2 可知，只需证对任意的多项式 p，$p(T)$ 满足 Browder 定理，由定理 1.3 中②⇒① 的过程即证.

②⇒③. $\sigma_1(T)\subseteq\sigma(T)$ 显然成立，只需证 $\sigma(T)\subseteq\sigma_1(T)$ 即可. 对任意的 $\lambda_0\notin\sigma_1(T)$，$n(T-\lambda_0 I)<\infty$，存在 $\varepsilon>0$，当 $0<|\mu-\lambda_0|<\varepsilon$ 时，$\mu\notin\sigma_{ea}(T)$ 并且 $N(T-\mu I)\subseteq\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}R[(T-\mu I)^n]$. 由于 $T\in\overline{HC(H)}$，则 $\mu\in\rho_w(T)=\rho_b(T)$，由推论 1.1 的充分性证明过程得 $\mu\in\rho(T)$，进而 $\lambda_0\in\operatorname{iso}\sigma(T)\cup\rho(T)$，当 $\lambda_0\in\operatorname{iso}\sigma(T)$ 时，又因 T 为 isoloid 算子，则 $0<n(T-\lambda_0 I)<\infty$，故 $\lambda_0\in\pi_{00}(T)=\sigma(T)\backslash\sigma_w(T)$，$\lambda_0\in\rho_w(T)=\rho_b(T)$，矛盾. 因此 $\lambda_0\in\rho(T)$. 由于 $\sigma_1(T)\subseteq\sigma_w(T)\subseteq\sigma(T)$，$\sigma_1(T)=\sigma(T)$ 且 $T\in\overline{HC(H)}$，则 $\sigma_w(T)=\sigma(T)$，即得 $\sigma(T)\cup\partial D$ 连通.

③⇒②. 由于 $\sigma_1(T)\subseteq\sigma_w(T)\subseteq\sigma_b(T)\subseteq\sigma(T)$，$\sigma(T)=\sigma_1(T)$，因此 $\sigma_w(T)=\sigma_b(T)=\sigma(T)$，$\sigma(T)\backslash\sigma_w(T)=\varnothing$. 又因 $\pi_{00}(T)\cap\sigma_1(T)=\varnothing$，则 $\pi_{00}(T)\cap\sigma(T)=\varnothing$，即 $\pi_{00}(T)=\varnothing$，故 T 满足 Weyl 定理.

下证 T 为 isoloid 算子. 由于 $\{\lambda\in\operatorname{iso}\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}\cap\sigma_1(T)=\varnothing$，因此 $\{\lambda\in\operatorname{iso}\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}\cap\sigma(T)=\varnothing$，故

$$\{\lambda\in\operatorname{iso}\sigma(T):n(T-\lambda I)=0\}=\varnothing,$$

T 为 isoloid 算子.

下证 $T\in\overline{HC(H)}$. $\sigma_0(T)=\varnothing$，$\sigma_w(T)\cup\partial D$ 连通. 假设存在 $\lambda_0\in\rho_{SF}(T)$，$\operatorname{ind}(T-\lambda_0 I)<0$，则 $\lambda_0\in\rho_1(T)=\rho(T)$，矛盾. 因此，对任意的 $\lambda\in\rho_{SF}(T)$，$\operatorname{ind}(T-\lambda I)\geqslant 0$，故 $T\in\overline{HC(H)}$.

③⇔④. 由 $\sigma(T)=\sigma_1(T)$ 可知，$\sigma(T)=\sigma_w(T)$，因此，显然成立.

注解 1.4 ①在定理 1.4 的 ②⇒③ 的过程中，“T 为 isoloid 算子”是本质的.

例 1.8 令 $A\in B(l^2)$ 定义为

$$A(x_1,x_2,x_3,\cdots)=(0,x_1,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\cdots),$$

令 $T=A+I$，则 $\sigma_w(T)=\sigma_b(T)=\sigma(T)=\{1\}$，

$\pi_{00}(T)=\varnothing$，说明 T 满足 Weyl 定理. 由于 $n(T)=0$，说明 T 不为 isoloid 算子. 由于 $\sigma_w(T)\cup\partial D=\partial D$ 连通，$\sigma_0(T)=\varnothing$，对任意的 $\lambda\in\rho_{SF}(T)$，$\mathrm{ind}(T-\lambda I)\geqslant 0$，因此 $T\in\overline{HC(H)}$. 但 $\sigma_1(T)=\varnothing$，故 $\sigma(T)\neq\sigma_1(T)$.

② 在定理 1.4 的 ②⇒③ 的过程中，"T 为 isoloid 算子且满足 Weyl 定理"是本质的.

例 1.9　如例 1.2 中的算子 T，

$$\sigma(T)=\sigma_b(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|\leqslant 1\},$$

$$\sigma_w(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=1\},$$

T 不满足 Browder 定理，则 T 不满足 Weyl 定理；$T\in\overline{HC(H)}$；但 $\sigma_1(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=1\}$，此时"$\sigma(T)=\sigma_1(T)$"不成立.

③ 在定理 1.4 的 ②⇒③ 的过程中，"$T\in\overline{HC(H)}$"是本质的.

例 1.10　如例 1.3 中的算子 T，

$$\sigma(T)=\sigma_w(T)=\sigma_b(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|\leqslant 1\},$$

$$\pi_{00}(T)=\varnothing,$$

算子 T 的孤立点不存在，T 为 isoloid 算子且满足 Weyl 定理；$T\notin\overline{HC(H)}$；$\sigma_1(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=1\}$，此时"$\sigma(T)=\sigma_1(T)$"不成立.

由定理 1.4 可以得到以下推论：

推论 1.5　设 $T\in B(H)$，$T\in\overline{HC(H)}$，则下列叙述等价：

①对任意的多项式 p，$p(T)$ isoloid 算子且满足 Weyl 定理；

② T 为 isoloid 算子且满足 Weyl 定理；

③ $\sigma(T)=\sigma_1(T)$.

推论 1.6　设 $T\in B(H)$，T 为 isoloid 算子且满足 Weyl 定理，则下列叙述等价：

① $T\in\overline{HC(H)}$；

② $\sigma(T)=\sigma_1(T)$ 且 $\sigma(T)\cup\partial D$ 连通；

③ $\sigma(T)=\sigma_1(T)$ 且 $\sigma_w(T)\cup\partial D$ 连通.

由定理 1.4 可知，当 T 为 isoloid 算子且满足 Weyl 定理且 $T\in\overline{HC(H)}$ 时，$\sigma(T)=\sigma_1(T)$，由于 $\sigma(T)$ 有谱映射定理，因此下面可以给出 $\sigma_1(T)$ 的谱映射定理.

定理 1.5　设 $T\in B(H)$，T 为 isoloid 算子且满足 Weyl 定理且 $T\in\overline{HC(H)}$，则对任意的多项式 p，有 $p(\sigma_1(T))=\sigma_1(p(T))$.

证明　由于 $T\in\overline{HC(H)}$，则对任意的 $\lambda\in\rho_{SF}(T)$，$\mathrm{ind}(T-\lambda I)\geqslant 0$，故对任意的 $\lambda\in\rho_{SF+}(T)$，$\mathrm{ind}(T-\lambda I)\geqslant 0$，由文献[12]可知，对任意的多项式 p，有 $p(\sigma_1(T))\subseteq\sigma_1(p(T))$. 下证 $\sigma_1(p(T))\subseteq p(\sigma_1(T))$，由定理 1.4 可知，若 T 为 isoloid 算子且满足 Weyl 定理且 $T\in\overline{HC(H)}$ 时，有 $\sigma(T)=\sigma_1(T)$，因此，

$$\mu\notin p(\sigma_1(T))=p(\sigma(T))=\sigma(p(T)),$$

故 $\mu\notin\sigma_1(p(T))$，从而 $\sigma_1(p(T))\subseteq p(\sigma_1(T))$. 综上可得，对任意的多项式 p，有 $p(\sigma_1(T))\subseteq\sigma_1(p(T))$.

参考文献(References)

[1] WEYL H V. Über beschränkte quadratische Formen, deren differenz vollstetig ist[J]. Rendiconti Del Circolo Matematico Di Palermo, 1909, 27(1): 373-392.

[2] BERBERIAN S K. An extension of Weyl's theorem to a class of not necessarily normal operators [J]. Michigan Mathematical Journal, 1969, 16(3): 273-279.

[3] LI C, ZHU S, FENG Y, et al. Weyl's theorem for functions of operators and approximation [J]. Integral Equations and Operator Theory, 2010, 67(4): 481-497.

[4] CURTO R E, HAN Y M. Weyl's theorem for algebraically paranormal operators [J]. Integral Equations and Operator Theory, 2003, 47(3): 307-314.

[5] AN I, HAN Y. Weyl's theorem for algebraically quasi-class A operators [J]. Integral Equations and Operator Theory, 2008, 62(1): 1-10.

[6] SHI W, CAO X. Weyl's theorem for the square of operator and perturbations [J]. Communications in Contemporary Mathematics, 2015, 17(5): 36-46.

[7] COBURN L A. Weyl's theorem for nonnormal operators[J]. Michigan Mathematical Journal, 1966, 13(3): 285-288.

[8] DUGGAL B P. The Weyl spectrum of p-hyponormal operators [J]. Integral Equations and Operator Theory, 1997, 29(2): 197-201.

[9] CAO X. Analytically class operators and Weyl's theorem[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 320(2): 795-803.

[10] HARTE R, LEE W Y. Another note on Weyl's theorem[J]. Trans Amer Math Soc, 1997, 349(5): 2115-2124.

[11] HERRERO D A. Limits of hypercyclic and supercyclic operators[J]. Journal of Functional Analysis, 1991, 99(1): 179-190.

[12] CAO X, GUO M, MENG B, et al. Weyl's spectra and Weyl's theorem [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, 288(2): 758-767.