

基于总人口变动和隔离措施的 SIQS 传染病模型的渐近分析

傅金波

(福建师范大学闽南科技学院)

摘要: 根据传染病动力学原理,考虑人口既有输入又有输出,建立了一种具有总人口变动和隔离措施及垂直传染的 SIQS 传染病模型.综合利用 Routh-Hurwitz 判据, Lyapunov 函数和广义 Bendixson-Dulac 函数方法,获得了该系统的无病平衡点和地方病平衡点全局渐近稳定的充分条件. 研究表明:采取隔离措施,能够将疾病的传播和流行控制在一定范围内,甚至能够加快疾病的绝灭.

关键词: SIQS 传染病模型;隔离措施;垂直传染;全局渐近稳定性

中图分类号: O175.1 **文献标识码:** A doi: 10.3969/j.issn.0253-2778.2020.03.004

引用格式: 傅金波. 基于总人口变动和隔离措施的 SIQS 传染病模型的渐近分析[J]. 中国科学技术大学学报, 2020, 50(3): 282-288.

FU Jingbo. Asymptotic analysis of an SIQS epidemic model with varying total population size and quarantine measures[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2020, 50(3): 282-288.

Asymptotic analysis of an SIQS epidemic model with varying total population size and quarantine measures

FU Jingbo

(Minnan Science and Technology University, Quanzhou 362332, China)

Abstract: A class of SIQS epidemic model with vertical infection and varying total population size and quarantine measures was established, by employing the epidemic dynamic theory, and considering both the input and output of the population. The threshold conditions which guarantee the global asymptotic stable disease-free equilibrium and endemic equilibrium of the SIQS epidemic model are obtained using methods including Routh-Hurwitz bounded, Lyapunov function and generalized Bendixson-Dulac function. The results show that the spread and prevalence of a disease can be controlled within a certain range, and that quarantine measures can accelerate the extinction of the disease.

Key words: SIQS epidemic model; Quarantine measures; Vertical infection; Global asymptotic stability

0 引言

近年来,出现了一些新型的流行性传染病,严重威胁人类的生命和健康,给经济和社会造成了严重

影响. 面对流行性传染病频发的态势,揭示传染病的传播机理,研究传染病的有效防治措施,具有重要的现实意义. 关于传染病动力学的研究,国内外许多学者已分析了各种传染病模型,获得了一批有重

收稿日期: 2019-01-17; 修回日期: 2020-05-22

基金项目: 国家自然科学基金(11371306),福建省高等学校新世纪人才支持计划,泉州市科技计划(2018C094R)资助.

作者简介: 傅金波,男,1978年生,硕士/教授. 研究方向:生物数学. E-mail: fujinbomnkjxy@sina.com

要学术价值的研究成果^[1-10]. 最近,依据垂直传染和总人口变化,人们还研究了 SIRS 模型^[11]和 SIRI 模型^[12]. 在传染病动力学模型的建模中,考虑输入人口的较多,同时考虑人口输出的却很少;疾病的发生仅限于人际接触的发生率,同时考虑垂直传染因素不多;采用连续接种控制疾病传播较多,而在既有入口输入又有入口输出时采取隔离措施却很少见. 本文根据文献[1-12]的建模思想,将总人口划分为易感者、染病者和恢复者三类,建立基于总人口变动和隔离措施及垂直传染的 SIQS 传染病模型如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= (1-p)\Lambda + b(S+Q) + (1-q)bI - \frac{\beta IS}{N} - (\rho + \mu)S + vI + (\delta - \theta)Q \\ \frac{dI}{dt} &= p\Lambda + \frac{\beta IS}{N} + qbI - (\rho + \mu + v + \alpha + \epsilon + \theta)I \\ \frac{dQ}{dt} &= \epsilon I - (\rho + \mu + \delta)Q, N = S + I + Q \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, S, I, Q 分别表示易感者、染病者、隔离者, μ 为三类人群迁出的比例系数, N 表示人口总数, ρ 为自然死亡率, α 为染病者的因病死亡率, ϵ 染病者的隔离率. 本文采用的记号满足

$$k = \mu + \rho - b, m = \rho + \mu + v + \alpha + \epsilon + \theta - qb, n = \rho + \mu + \delta.$$

其中,系数 $\Lambda, b, \beta, \rho, \mu, v, \delta, \alpha, \epsilon, k, m, n$ 均为正的常数.

关于模型(1)的有关假设与说明如下:

(I) Λ 表示单位时间内从外界迁入者的总数,其中 $p, 1-p$ 为迁入者中染病者和易感者所占的比例 ($0 \leq p < 1$).

(II) $\frac{\beta I}{N}$ 为标准发生率, β 为易感者与染病者接触而染病的概率.

(III) 隔离者移除的比例系数为 δ , 其中转为易感者的比例系数为 $\delta - \theta$, 转为染病者的比例系数为 θ ($0 \leq \theta \leq \delta$).

(IV) b 为三类人群的出生率, q 表示染病者的垂直传染率 ($0 \leq q < 1$).

(V) 考虑到人口流动性较大,使得每一类个体的出生率小于自然死亡率与迁出率之和 ($\mu + \rho > b$), 并假定垂直传染发生率相对较低 ($\rho + \mu + v + \alpha + \epsilon + \theta > qb$).

由模型(1)的各式相加可得 $\frac{dN}{dt} = \Lambda - kN - \alpha I$,

因此模型(1)的可行域为

$$D = \{(S, I, Q) \mid 0 \leq S + I + Q \leq \frac{\Lambda}{k}\}.$$

为方便起见,引入如下记号:

$$R_{01} = \frac{\beta}{m}, R_{02} = \frac{\beta(n(k+\theta) + \epsilon(k+\theta) + \alpha n)}{man},$$

$$R_{03} = \frac{p(\alpha_1 n + \alpha_2 \epsilon)^2 + 2\beta n(n(k+\theta) + \epsilon(k+\theta)) + \beta \alpha n^2}{nm^2 \alpha}.$$

因 $n(k+\theta) + \epsilon(k+\theta) + \alpha n > \alpha n$ 以及

$$R_{02} = \frac{(n(k+\theta) + \epsilon(k+\theta) + \alpha n)}{\alpha n} R_{01},$$

$$R_{03} = \frac{p(\alpha n + \alpha \epsilon)^2 + \beta n(n(k+\theta) + \epsilon(k+\theta))}{man^2} + R_{02},$$

易见 $R_{03} > R_{02} > R_{01}$.

本文主要在可行域 D 上分析模型(1)的无病平衡点和地方病平衡点的存在性,然后建立无病平衡点和地方病平衡点全局渐近稳定性的代数判据,最后给出模型(1)所描述的传染病的传播规律性.

1 理论依据

为便于以下证明,现将模型(1)的无病平衡点和地方病平衡点的存在性定理等作为引理.

当 $p = 0$ 时,迁入者中只有易感者,这时模型(1)的平衡点坐标满足方程组

$$\left. \begin{aligned} \Lambda - \frac{\beta IS}{N} - kS + ((1-q)b + v)I + (b + \delta - \theta)Q &= 0 \\ \frac{\beta IS}{N} - mI &= 0 \\ \epsilon I - nQ &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

以及 $\Lambda - kN - \alpha I = 0$ 在集合 D 内的非负解.

由方程组(2)易知,模型(1)存在一个无病平衡点 $E^\circ(S^\circ, 0, 0)$; 当 $R_{01} > 1$ 时,除无病平衡点外,还存在一个地方病平衡点 $E(\tilde{S}, \tilde{I}, \tilde{Q})$, 其中,

$$S^\circ = \frac{\Lambda}{k}, \tilde{S} = \frac{mN_0}{\beta}, \tilde{I} = \frac{\Lambda - kN_0}{\alpha},$$

$$\tilde{Q} = \frac{\epsilon(\Lambda - kN_0)}{\alpha n}, N_0 = \frac{B_0}{B_1}.$$

N_0 是方程 $B_1 N - B_0 = 0$ 的唯一正根,并且满足

$$0 < N_0 = \frac{B_0}{B_1} < \frac{\Lambda}{k}, \text{ 这里,}$$

$$B_1 = k[\beta n(k+\theta) + \beta \epsilon(k+\theta) + (\beta - m)\alpha n],$$

$$B_0 = \beta\Lambda[n(k + \theta) + \varepsilon(k + \theta)].$$

基于上述分析,有如下结论:

引理 1.1 当 $p = 0$ 时,模型(1)在域 D 上存在一个无病平衡点 $E^\circ(S^\circ, 0, 0)$; 如果 $R_{01} > 1$, 那么模型(1)在域 D 上除无病平衡点 $E^\circ(S^\circ, 0, 0)$ 外,还存在一个地方病平衡点 $E(\tilde{S}, \tilde{I}, \tilde{Q})$.

当 $0 < p \leq 1$ 时,迁入者中有易感者和染病者,模型(1)的平衡点坐标是方程组

$$\left. \begin{aligned} (1-p)\Lambda - \frac{\beta IS}{N} - kS + ((1-q)b + \nu)I + \\ (b + \delta - \theta)Q = 0 \\ p\Lambda + \frac{\beta IS}{N} - mI = 0 \\ \varepsilon I - nQ = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

以及 $\Lambda - kN - \alpha I = 0$ 在集合 D 内的非负解. 由方程组(3)可知, S, I, Q 满足

$$\left. \begin{aligned} S = \frac{N\{(1-p)\Lambda an + [n((1-q)b + \nu) + \varepsilon(b + \delta - \theta)](\Lambda - kN)\}}{\beta n(\Lambda - kN) + kanN} \\ I = \frac{\Lambda - kN}{\alpha}, Q = \frac{\varepsilon(\Lambda - kN)}{an} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

将式(4)中的 S, I 代入方程组(3)的第 2 个方程,整理可得 $C_2 N^2 + C_1 N + C_0 = 0$, 其中,

$$C_2 = -nk^2[\beta(n(k + \theta) + \varepsilon(k + \theta)) + (\beta - m)an],$$

$$C_1 = \Delta k[p\alpha^2 n^2 + 2\beta n(n(k + \theta) + \varepsilon(k + \theta)) + (\beta - m)an^2],$$

$$C_0 = -\Lambda^2 \beta n(n(k + \theta) + \varepsilon(k + \theta)).$$

引入记号:

$$G(N) = C_2 N^2 + C_1 N + C_0 = C_2(N + \tilde{N})^2 + h,$$

$$\tilde{N} = \frac{C_1}{2C_2}, h = -\frac{C_1^2 - 4C_2 C_0}{4C_2} = -\frac{\Delta}{4C_2}.$$

由以上可见, $G(N)$ 是一条抛物线, $G(0) = C_0 < 0, G(\frac{\Lambda}{k}) = \Lambda^2 p\alpha^2 n^2 > 0$.

①当 $R_{03} > 1 > R_{02}$ 时, $C_2 > 0, C_1 > 0, C_0 < 0, \Delta > 0, G(N)$ 是开口向上的抛物线且顶点横坐标 \tilde{N} 落在 N 轴的负半轴上; $h < 0, G(0) < 0, G(\frac{\Lambda}{k}) > 0$, 因此存在 $N^{(1)} \in (0, \frac{\Lambda}{k})$, 使得 $G(N^{(1)}) = 0$;

②当 $R_{02} < R_{03} < 1$ 时, $C_2 > 0, C_1 < 0, C_0 < 0, \Delta > 0, G(N)$ 是开口向上的抛物线且顶点横坐标 \tilde{N} 落在 N 轴的正半轴上; $h < 0, G(0) < 0, G(\frac{\Lambda}{k}) > 0$, 因此存在 $N^{(2)} \in (0, \frac{\Lambda}{k})$, 使得 $G(N^{(2)}) = 0$;

③当 $R_{03} > R_{02} > 1$ 时, $C_2 < 0, C_1 > 0, C_0 < 0$, 此时,

$$\Delta = 2\Lambda^2 k^2 p\alpha^2 n^3 [2\beta(n(k + \theta) + \varepsilon(k + \theta)) + (\beta - m)an] +$$

$$\Lambda^2 k^2 p^2 \alpha^4 n^4 + \Lambda^2 k^2 n^2 (man - \beta an)^2 > 0;$$

故 $G(N)$ 是开口向下的抛物线且顶点横坐标 \tilde{N} 落在 N 轴的正半轴上; $h > 0, G(0) < 0, G(\frac{\Lambda}{k}) > 0$, 因此存在 $N^{(3)} \in (0, \frac{\Lambda}{k})$, 使得 $G(N^{(3)}) = 0$, 同时还存在 $N^{(4)}$ 使得 $G(N^{(4)}) = 0$, 但 $N^{(4)} > \frac{\Lambda}{k}$.

综上,将方程 $C_2 N^2 + C_1 N + C_0 = 0$ 在区间 $(0, \frac{\Lambda}{k})$ 内存在唯一正根,统一表示为 N^* . 把 N^* 代入式(4)可得模型(1)的唯一地方病平衡点为 $E^*(S^*, I^*, Q^*)$. 由此,获得如下引理:

引理 1.2 当 $0 < p \leq 1$ 时,如果满足下列条件之一:① $R_{03} > 1 > R_{02}$; ② $R_{02} < R_{03} < 1$; ③ $R_{03} > R_{02} > 1$, 则模型(1)在域 D 内仅存在一个地方病平衡点 $E^*(S^*, I^*, Q^*)$.

引理 1.3(广义 Bendixson-Dulac 定理) 设 $f: R^3 \rightarrow R^3$ 是一个 Lipschitz 连续向量场, $\Gamma(t)$ 是有向光滑曲面 $S \in R^3$ 的边界曲线,它是闭的,分段光滑的. 若 $g: R^3 \rightarrow R^3$ 在 S 的某邻域光滑,且对一切 t 满足 $g(\Gamma(t)) \cdot f(\Gamma(t)) \leq 0 (\geq 0)$, 在 S 上有 $(\text{Curl } g) \cdot n \geq 0 (\leq 0)$ 且 S 上有一些点满足 $(\text{Curl } g) \cdot n > 0 (< 0)$. 这里 n 是曲面 S 的单位法向量,则 $\Gamma(t)$ 不可能由系统 $\frac{dx}{dt} = f(x)$ 的轨线组成, $\Gamma(t)$ 的方向与 n 成右手系.

2 主要结果

定理 2.1 当 $0 \leq p \leq 1$ 时,模型(1)在 D 内不

存在周期解.

证明 作变换: $x = \frac{k}{\Lambda}S, y = \frac{k}{\Lambda}I, z = \frac{k}{\Lambda}Q, dt = k dt$, 变换后 τ 仍标为 t , 将模型(1)化为如下等价系统:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1 - p - x + [(1 - q)a_1 + a_2]y - a_3 \frac{xy}{\widehat{N}} + (a_1 + a_4 - a_5)z \\ \frac{dy}{dt} &= p + a_3 \frac{xy}{\widehat{N}} + (qa_1 - a_1 - a_2 - a_5 - a_6 - a_7 - 1)y \\ \frac{dz}{dt} &= a_6y - (1 + a_1 + a_4)z \\ \frac{d\widehat{N}}{dt} &= 1 - \widehat{N} - (a_5 + a_7)y - a_5z \\ \widehat{N} &= x + y + z = \frac{k}{\Lambda}N \end{aligned} \right\} (5)$$

式中,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{b}{k}, a_2 = \frac{v}{k}, a_3 = \frac{\beta}{k}, a_4 = \frac{\delta}{k}, \\ a_5 &= \frac{\theta}{k}, a_6 = \frac{\varepsilon}{k}, a_7 = \frac{\alpha}{k}. \end{aligned}$$

由此可见,域 D 化为集合 $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 < x + y + z \leq 1\}$, 它为系统(5)的正向不变集. 令

$$E = \{(\widehat{N}, y, z) \in \Omega \mid \widehat{N} = 1 - (a_5 + a_7)y - a_5z\} = \{(x, y, z) \in \Omega \mid x + (1 + a_5 + a_7)y + (1 + a_5)z = 1\}.$$

由于 Ω 为系统(5)的正向不变集, E 的边界不可能是系统(5)的周期解,所以下面仅在域 E 的内部讨论. 假设系统(5)在域 E 内有周期解 $\varphi(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$, $\varphi(t)$ 的轨线 Γ 所围成的平面区域为 Π , 平面 Π 位于 E 内部.

记 f_1, f_2, f_3 分别为系统(5)中三个方程的右端表达式, $f = (f_1, f_2, f_3)^T$ (T 代表转置), $g(x, y, z) = \frac{1}{xyz}r \times f$ (其中 $r = (x, y, z)^T$), 易知 $g \cdot f = 0$. 记 $g = (g_1, g_2, g_3)^T$, 则有

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{f_3(x, z)}{xz} - \frac{f_2(x, y)}{xy}, \\ g_2 &= \frac{f_1(x, y)}{xy} - \frac{f_3(y, z)}{yz}, \\ g_3 &= \frac{f_2(y, z)}{yz} - \frac{f_1(x, z)}{xz}. \end{aligned}$$

这里,函数 f_1, f_2, f_3 是利用关系式 $x + (1 + a_5 + a_7)y + (1 + a_5 + a_8)z = 1$ 得到的,分别为

$$f_1(x, y) = 1 - p - x + [(1 - q)a_1 + a_2]y - a_3 \frac{xy}{\widehat{N}} + \frac{a_1 + a_4 - a_5}{1 + a_5}[1 - x - (1 + a_5 + a_7)y],$$

$$f_1(x, z) = 1 - p - x + \frac{1 - x - (1 + a_5)z}{1 + a_5 + a_7}[(1 - q)a_1 + a_2 - a_3 \frac{x}{\widehat{N}}] + (a_1 + a_4 - a_5)z;$$

$$f_2(x, y) = p + a_3 \frac{xy}{\widehat{N}} + (qa_1 - a_1 - a_2 - a_5 - a_6 - a_7 - 1)y,$$

$$f_2(y, z) = p + a_3 \frac{x}{\widehat{N}}[1 - (1 + a_5 + a_7)y - (1 + a_5)z] + (qa_1 - a_1 - a_2 - a_5 - a_6 - a_7 - 1)y;$$

$$f_3(y, z) = a_6y - (1 + a_1 + a_4)z,$$

$$f_3(x, z) = \frac{a_6}{1 + a_5 + a_7}[1 - x - (1 + a_5)z] - (1 + a_1 + a_4)z.$$

由于 $\text{Curl } g = \left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}, \frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x}, \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}\right)^T$, 并且

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z} &= -\frac{p}{y^2z} - \frac{x + (1 + a_5 + a_7)y}{z} \frac{x}{y^2} \frac{a_3}{\widehat{N}} - \frac{(1 + a_5)}{1 + a_5 + a_7} \frac{1}{y} \frac{a_3}{\widehat{N}} + \\ &\quad \frac{(1 + a_5)[(1 - q)a_1 + a_2] - (a_1 + a_4 - a_5)(1 + a_5 + a_7)}{1 + a_5 + a_7} \frac{1}{xy} - \frac{a_6}{z^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x} = -\frac{1}{xz^2} \frac{a_6}{1 + a_5 + a_7} + \frac{1}{z^2} \frac{a_6}{1 + a_5 + a_7} - \frac{x}{y} \frac{a_3}{z\widehat{N}} + \frac{1}{1 + a_5 + a_7} \frac{a_3}{z\widehat{N}} -$$

$$\frac{(1-p)}{x^2 z} - \frac{[(1-q)a_1 + a_2]}{1 + a_5 + a_7} \frac{x + (1 + a_5 + a_7)y}{x^2 z} - \frac{(a_1 + a_4 - a_5)}{x^2},$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} = -\frac{(1-p)}{x^2 y} - \frac{[(1-q)a_1 + a_2]}{1 + a_5 + a_7} \frac{1}{x^2 y} - \frac{p}{xy^2} + \frac{1}{1 + a_5 + a_7} \frac{1}{y} \frac{a_3}{\widehat{N}} +$$

$$\frac{(1 + a_5)[(1-q)a_1 + a_2]}{1 + a_5 + a_7} \frac{z}{x^2 y} - \frac{z}{x^2 y} (a_1 + a_4 - a_5).$$

取 E 的法向量 $n = (1, 1 + a_5 + a_7, 1 + a_5)^T$, 所以

$$(\text{Curl } g) \cdot n = -\frac{p}{y^2 z} - \frac{(x-y)^2 + 2[a_5 + a_7 + (1 + a_5 + a_7)(a_5 + a_7)]xy}{y^2} \frac{a_3}{z\widehat{N}} - \frac{a_6}{xz^2} -$$

$$[1 + a_5 + \frac{(a_1 + a_4 - a_5)(1 + a_5 + a_7)}{1 + a_5 + a_7}] \frac{1}{x^2 y} - \frac{(1 + a_5)[(1-q)a_1 + a_2]}{x^2} -$$

$$\frac{(1-p)(1 + a_5 + a_7) + [(1-q)a_1 + a_2][x + (1 + a_5 + a_7)y]}{x^2 z} < 0.$$

则由引理 1.3 知, 模型(1)在 D 内不存在周期解. 证毕.

定理 2.2 当 $p=0$ 且 $R_{01} \leq 1$ 时, 模型(1)在域 D 上的无病平衡点 $E^\circ(S^\circ, 0, 0)$ 是全局渐近稳定的; 当 $p=0$ 且 $R_{01} > 1$ 时, 模型(1)在域 D 上的无病平衡点 $E^\circ(S^\circ, 0, 0)$ 是不稳定的.

证明 当 $p=0$ 时, 模型(1)等价于系统:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \Lambda - kN - \alpha I \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta(N - I - Q)I}{N} - mI \\ \frac{dQ}{dt} &= \epsilon I - nQ \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

此时模型(1)的无病平衡点 $E^\circ(S^\circ, 0, 0)$ 对应系统(6)的无病平衡点 $E_0(N^\circ, 0, 0)$, 这里 $N^\circ = S^\circ$. 系统(6)在无病平衡点 $E_0(N^\circ, 0, 0)$ 处的 Jacobian 矩阵为

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -k & -\alpha & 0 \\ 0 & \beta - m & 0 \\ 0 & \epsilon & -n \end{pmatrix},$$

特征方程为 $(\lambda + k)(\lambda - \beta + m)(\lambda + n) = 0$, 特征值为

$$\lambda_1 = -k, \lambda_2 = \beta - m = m(R_{01} - 1), \lambda_3 = -n.$$

当 $R_{01} < 1$ 时, 特征值均为负值, $E_0(N^\circ, 0, 0)$ 点是局部渐近稳定的, 即模型(1)的无病平衡点 $E^\circ(S^\circ, 0, 0)$ 是局部稳定的; 当 $R_{01} > 1$ 时, 因 $\lambda_2 > 0$, 故 $E_0(N^\circ, 0, 0)$ 点是不稳定的, 即模型(1)的无病平衡点 $E^\circ(S^\circ, 0, 0)$ 是不稳定的.

进一步地, 可以证明当 $p=0$ 且 $R_{01} \leq 1$ 时, 模型(1)的无病平衡点 $E^\circ(S^\circ, 0, 0)$ 是全局渐近稳定

的. 构造 Lyapunov 函数 $V_0(t) = I$, 沿着模型(1)的轨线直接计算 $V_0(t)$ 的导数, 得

$$\frac{dV_0(t)}{dt} = \left[\frac{\beta S}{N} - m \right] I = \left[\beta - \frac{\beta(I + Q)}{N} - m \right] I =$$

$$\left[m(R_{01} - 1) - \frac{\beta(I + Q)}{N} \right] I \leq 0.$$

由此可见, 模型(1)的第 2 个方程的平衡位置 $I=0$ 是全局吸引的, 即 $I \rightarrow 0 (t \rightarrow +\infty)$. 据此, 易知模型(1)的第 3 个方程的平衡位置 $Q=0$ 是全局吸引的, 即 $Q \rightarrow 0 (t \rightarrow +\infty)$. 进而, 由模型(1)得到极限方程

$$\frac{dS}{dt} = -k(S - S^\circ).$$

构造 Lyapunov 函数 $V_1(t) = \frac{1}{2}(S - S^\circ)^2$, 沿着该极限方程的轨线直接计算 $V_1(t)$ 的导数, 得

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = -k(S - S^\circ)^2 \leq 0.$$

这表明极限方程的平衡位置 $S = S^\circ$ 是全局吸引的, 即 $Q \rightarrow 0 (t \rightarrow +\infty)$.

由极限系统理论^[1]可知, 模型(1)与它的极限系统有着相同的动力学性态, 因此当 $p=0$ 且 $R_{01} \leq 1$ 时, 模型(1)在域 D 上的无病平衡点 $E^\circ(S^\circ, 0, 0)$ 是全局渐近稳定的. 证毕.

定理 2.3 当 $p=0$ 且 $R_{01} > 1$ 时, 模型(1)在域 D 上的地方病平衡点 $E(\tilde{S}, \tilde{I}, \tilde{Q})$ 是全局渐近稳定的.

证明 当 $p=0$ 且 $R_{01} > 1$ 时, 模型(1)等价于系统(6), 此时模型(1)的地方病平衡点 $E(\tilde{S}, \tilde{I}, \tilde{Q})$ 对应系统(6)的地方病平衡点 $E(N_0, \tilde{I}, \tilde{Q})$.

系统(6)在地方病平衡点 $E(N_0, \tilde{I}, \tilde{Q})$ 处的 Jacobian 矩阵为

$$J(E) = \begin{pmatrix} -k & -\alpha & 0 \\ \frac{(\beta - m)\tilde{I}}{N_0} & -\frac{\beta\tilde{I}}{N_0} & 0 \\ 0 & \epsilon & -n \end{pmatrix},$$

特征方程为 $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$, 其中,

$$a_1 = \frac{\beta\tilde{I}}{N_0} + n + k,$$

$$a_2 = \frac{(n + k)\beta\tilde{I} + \alpha(\beta - m)\tilde{I}}{N_0} + nk,$$

$$a_3 = \frac{\alpha n(\beta - m)\tilde{I} + nk\beta\tilde{I}}{N_0}$$

皆为正数. 因 $\Delta_1 = a_1 > 0$, 易验证 $\Delta_2 = a_1a_2 - a_3 > 0$, $\Delta_3 = a_3\Delta_2 > 0$, 则由 Routh-Hurwitz 判据^[9]可知, 特征方程的根均具有负实部, $E(N_0, \tilde{I}, \tilde{Q})$ 点是局部渐近稳定的. 根据定理 2.1, 模型(1)的地方病平衡点 $E(\tilde{S}, \tilde{I}, \tilde{Q})$ 是全局渐近稳定的. 证毕.

定理 2.4 当 $0 < p \leq 1$ 时, 且满足引理 1.2 中的条件之一, 模型(1)在域 D 内的地方病平衡点 $E^*(S^*, I^*, Q^*)$ 是全局渐近稳定的.

证明 当 $0 < p \leq 1$ 时, 模型(1)等价于系统:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \Lambda - kN - \alpha I \\ \frac{dI}{dt} &= p\Lambda + \frac{\beta(N - I - Q)I}{N} - mI \\ \frac{dQ}{dt} &= \epsilon I - nQ \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

此时模型(1)的地方病平衡点 $E^*(S^*, I^*, Q^*)$ 对应系统(7)的地方病平衡点 $E^*(N^*, I^*, Q^*)$.

采用定理 2.3 的证明方法, 易得模型(1)的地方病平衡点 $E^*(S^*, I^*, Q^*)$ 只要存在就一定是全局渐近稳定的结论.

3 结论

为进一步验证以上结论的正确性, 我们对模型参数进行适当取值, 用数学软件作数值模拟.

(I) 取 $p=0, \Lambda=1, k=0.02, \alpha=0.01, \beta=0.4, m=0.5, \epsilon=0.3, n=0.02$, 满足 $p=0$ 且 $R_{01} \leq 1$, 由定理 2.2 知无病平衡点 $E^0(S^0, 0, 0)$ 是全局渐近稳定的, 数值模拟如图 1 所示.

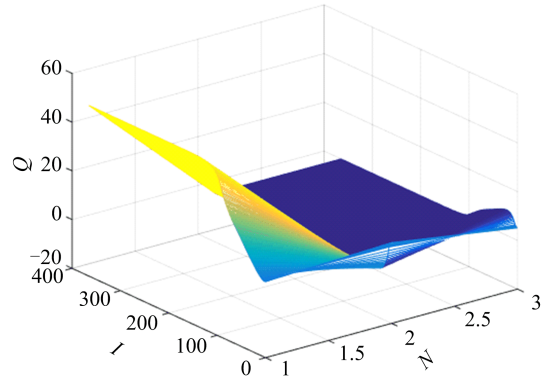


图 1 无病平衡点 E^0 全局渐近稳定图

Fig. 1 Global asymptotic stable of disease-free equilibrium E^0

(II) 取 $p=0, \Lambda=1, k=0.02, \alpha=0.01, \beta=0.5, m=0.4, \epsilon=0.3, n=0.02$, 满足 $p=0$ 且 $R_{01} > 1$, 由定理 2.3 知地方病平衡点 $E(\tilde{S}, \tilde{I}, \tilde{Q})$ 是全局渐近稳定的, 数值模拟如图 2 所示.

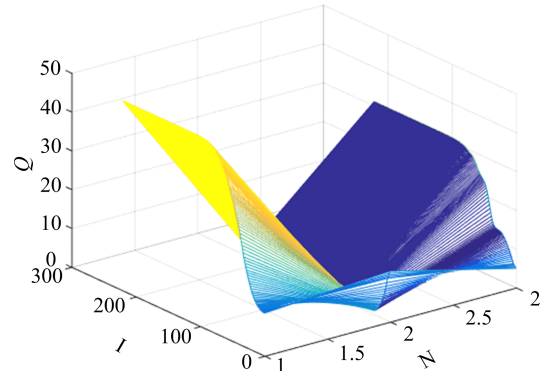


图 2 地方病平衡点 E 全局渐近稳定图

Fig. 2 Global asymptotic stable of endemic equilibrium E

(III) 取 $p=0.01, \Lambda=1, k=0.02, \alpha=0.01, \beta=0.4, m=0.5, \theta=0, \epsilon=0.3, n=0.02$, 满足 $0 < p \leq 1$, 因为恒有 $R_{03} > R_{02}$, 由定理 2.4 知地方病平衡点 $E^*(S^*, I^*, Q^*)$ 是全局渐近稳定的, 数值模拟如 3 图所示.

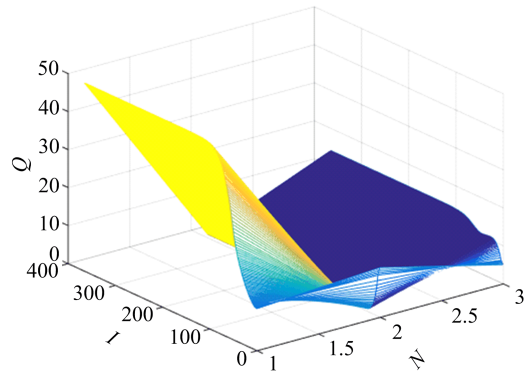


图 3 地方病平衡点 E^* 全局渐近稳定图

Fig. 3 Global asymptotic stable of endemic equilibrium E^*

本文所考虑的既有外来人口输入,又有出口输出的 SIQS 传染病模型,具有实际意义和应用价值. 由定理 2.2 和定理 2.3 可知,如果系统中的外界输入者中没有染病者,那么 R_{01} 是疾病在该系统中流行与否的阈值. 当 $R_{01} \leq 1$ 时,传染病将从该系统中逐渐灭绝;当 $R_{01} > 1$ 时,传染病将在该系统中持续且易感者、染病者和恢复者趋于一组定值上. 由此可见,通过加大隔离可以防控传染病的流行蔓延. 由定理 2.4 可知,当系统中的外界输入者中有易感者和染病者时,并且满足引理 1.2 的条件之一,传染病将在该系统中持续且易感者、染病者和恢复者趋于一组定值上,此时 R_{02} 和 R_{03} 只是地方病平衡点存在的阈值,通过隔离措施不能根除传染病,但适当的隔离率可使得 $R_{02} < R_{03} < 1$, 进而获得较大的 N^* 使之减小染病者平衡态 I^* 的规模.

综上所述,在防控传染病中采取隔离措施是必要的,可以最终消除传染病或将传染病控制在相对较低的地方病平衡点上.

参考文献(References)

- [1] TENG Z, WANG L. Persistence and extinction for a class of stochastic SIS epidemic models with nonlinear incidence rate[J]. *Physica A*, 2016,451: 507-518.
- [2] YOSHIDA N, HARA T. Global stability of a delayed SIR epidemic model with density dependent birth and death rates [J]. *Computational and Applied Mathematics*, 2007, 201(2): 339-347.
- [3] ZHAO Y., JIANG, D., MAO X, et al. The threshold of a stochastic SIRS epidemic model in a population with varying size[J]. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2015, 20(4): 1277-1295.
- [4] ZHANG X, SHI Q, MA S. Dynamic behavior of a stochastic SIQS epidemic model with Lévy jumps[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 93(3): 1481-1493.
- [5] 庞国萍,陈兰荪. 具饱和和传染率的脉冲免疫接种 SIRS 模型[J]. *系统科学与数学*, 2007, 27(4): 563-572.
PANG G P, CHEN L S. The SIRS epidemic model with saturated contact rate and pulse vaccination [J]. *J. Sys. Sci. & Math. Scis.*, 2007, 27(4): 563-572.
- [6] LIU Q, CHEN Q. Dynamics of a stochastic SIR epidemic model with saturated incidence [J]. *Appl. Math. Comput.* 2016,282: 155-166.
- [7] 徐为坚. 具常数输入率及饱和发生率的脉冲接种 SIQRS 传染病模型[J]. *系统科学与数学*, 2010, 30(1): 43-52.
XU W J. The SIQRS epidemic model of impulsive vaccination with constant input and saturation incidence rate [J]. *J. Sys. Sci. & Math. Scis.*, 2010, 30(1): 43-52.
- [8] 唐晓明, 薛亚奎. 具有饱和和治疗函数与密度制约的 SIS 传染病模型的后向分支[J]. *数学的实践与认识*, 2010, 40(24): 241-246.
Tang X M, Xue Y K. Backward Bifurcation of a SIS epidemic model with density dependent birth and death rates and saturated treatment function [J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2010, 40(24): 241-246.
- [9] 朱凌峰, 李维德, 章培军. 具有连续和脉冲接种的 SIQVS 传染病模型[J]. *兰州大学学报*, 2011, 47(4): 99-102.
ZHU L F, LI W D, ZHANG P J. A SIQVS epidemic model with continuous and impulsive vaccination [J]. *Journal of Lanzhou University*, 2011, 47(4) :99-102.
- [10] LIU Q, CHEN Q. Analysis of the deterministic and stochastic SIRS epidemic models with nonlinear incidence. *Phys. A* 2015,428, 140-153.
- [11] 张改平,董玉才,许飞,等. 具有垂直传染且总人口在变化的 SIRS 传染病模型的渐近分析[J]. *数学的实践与认识*, 2011, 41(8): 139-143.
ZHANG G P, DONG Y C, XU F, et al. Asymptotic analysis of an SIRS epidemic model with vertical infection and varying population[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2011, 41(8): 139-143.
- [12] 林子植,董霖,李学鹏. 一类具有常数输入和垂直传染的 SIRS 传染病模型[J]. *数学的实践与认识*, 2011, 41(15): 156-164.
LIN Z Z, DONG L, LI X P. A kind of SIRS epidemic model with constant immigration and vertical transmission[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2011, 41(15): 156-164.
- [13] 马知恩,周义仓. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
MA Z E, ZHOU Y C. *Mathematics Modeling and Research of Infectious Disease Dynamics*[M]. Beijing: Science Press, 2004.