第50卷第6期 中国科学技术大学学报 Vol. 50, No. 6
2020年6月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Jun. 2020
文章编号:0253-2778(2020)06-0793-08

齐次树和完全图上具有合作机制的接触过程的极限定理

张岩昊,时伟华

(北京交通大学理学院,北京 100044)

摘要:分别从底图为齐次树和完全图的情形给出了具有合作机制的接触过程的若干极限定理.首先得出了齐次树下具有合作机制的接触过程在给定点、给定时刻的极限方程的解;并利用微分方程不动点的思想,得到合作机制参数 β 的临界值;然后更换底图为完全图,研究完全图上具有合作机制的接触过程,得到了在给定时刻维数趋于无穷时的患病点密度;最后回顾了经典机制下的接触过程(即取 $\beta=0$ 作为具有合作机制的接触过程的一种特例),并推导出了其患病点数目的极限函数.

关键词:合作机制;接触过程;齐次树;完全图
中图分类号:O211.6 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2020.06.011
2010 Mathematics Subject Classification:60G70

引用格式:张岩昊,时伟华. 齐次树和完全图上具有合作机制的接触过程的极限定理[J]. 中国科学技术大学学报,2020,50(6):793-800.
ZHANG Yanhao, SHI Weihua. Limit theorems for contact processes with cooperative mechanisms on homogeneous trees and complete graphs[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2020, 50(6):793-800.

Limit theorems for contact processes with cooperative mechanisms on homogeneous trees and complete graphs

ZHANG Yanhao, SHI Weihua
(*School of Science, Beijing Jiaotong University, Beijing* 100044, *China*)

Abstract: Several limit theorems for contact processes with cooperation mechanisms were given from the case where the base maps are homogeneous trees and complete graphs. First, the solution of the limit equation of the contact process with the cooperation mechanism was obtained under the homogeneous tree at a given point and a given time. Next, by means of the idea of the fixed point of the differential equation, the critical value of the cooperation mechanism parameter β was obtained. Then, changing the base map to the complete map, the contact process with the cooperation mechanism was studied, and the density of diseased points at a given moment was obtained when the dimensionality tended to infinity. Finally, as a special case of the contact process of the mechanism, the contact process under the classic mechanism (that is $\beta=0$) was reviewed, and the limit function of the number of diseased points was derived.

Key words: cooperation mechanism; contact process; homogeneous tree; complete graph

0 引言

本文考虑的齐次树和完全图上具有合作机制的接触过程是经典接触过程的推广.经典接触过程有如下定义:图上的经典接触过程是状态空间为$\{0,1\}$的连续时间马氏过程,即图的每个顶点处于状态0或1.处于状态1的点以速率1变为0,处于状态0的点以正比于邻居中状态1的点的数目的速率变为1,其比例系数为λ,称为状态变化的速率.等待事件发生所需的时间服从指数分布,该分布中的参数即为速率.此过程在文献[1]中首次提出.文献[2-3]给出了经典接触过程研究的详细综述.

关于经典接触过程的推广一直是近年的研究热点[4-5],而具有合作机制的接触过程也是经典接触过程的推广,此类接触过程已由前人在整数格点上进行研究,本文则在齐次树和完全图上研究.

0.1 齐次树上具有合作机制的接触过程模型

首先引入齐次树 T^d 上的具有合作机制的接触过程,其中 T^d 是指 d 维图,或称图的度为 d,即图上的每一个顶点均有 $d+1$ 个相邻顶点(以下简称"邻居")的齐次树.本文所关注的具有合作机制的接触过程$\{\eta_t, t\geqslant 0\}$,其状态空间为 $E=\{0,1\}^{T^d}$.

下面我们引入该接触过程的一些参数符号:$\forall x\in T^d$,$\eta_t(x)$表示 t 时刻时 x 点的状态;$x\sim y$

收稿日期:2020-03-01;**修回日期**:2020-07-08
基金项目:2019年北京市大学生创新训练计划项目(190170018)资助.
作者简介:张岩昊(通讯作者),女,1999年生,本科生.研究方向:概率论与数理统计.E-mail:zyh990616@126.com

表示 y 为 x 的邻居；λ 为一固定常数，称为传染参数，且 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$；$\beta$ 表示合作机制参数.

若取某一点 x，其转移机制为

$$\left.\begin{aligned}&1\to 0,\text{速率}:1;\\&0\to 1,\text{速率}:\sum_{y:y\sim x}\Big[\frac{\lambda}{d+1}+\frac{\beta}{d^2}\sum_{z:z\sim y}\eta(z)\Big]\eta(y).\end{aligned}\right\}$$

其中，y 为 x 的邻居，y 的周围除了 x 之外还有 d 个邻居. 由于考虑的是图的度 d 趋于无穷的情况，所以我们对两个参数做了适当的尺度变换，取合作机制的比例系数为 $\frac{\beta}{d^2}$.

我们用 η^x 表示状态构型 η 只在 x 点处发生变化，数学表达式为

$$\eta^x(y)=\begin{cases}\eta(y),\ y\neq x;\\1-\eta(y),\ y=x.\end{cases}$$

于是根据上述转移机制，我们所研究过程的生成元 Ω 如下：任取状态空间 E 上的函数 f，$\forall x\in E$，设 $\beta(x,\eta)$ 代表在合作机制的 η 状态下在 x 处发生变化的速率，即

$$\beta(x,\eta)=\begin{cases}1,\ \eta(x)=1;\\\sum_{y:y\sim x}\Big[\frac{\lambda}{d+1}+\frac{\beta}{d^2}\sum_{z:z\sim y}\eta(z)\Big]\eta(y),\eta(x)=0.\end{cases}$$

于是，$\Omega f(\eta)=\sum_{x\in T^d}\beta(x,\eta)[f(\eta^x)-f(\eta)]$.

根据上述生成元，直观上此过程演化机制如下：在 t 时刻，处于状态 1 的点以速率 1 变为 0；一个状态为 1 的点使一个状态为 0 的邻居变为 1 的速率为 $\frac{\lambda}{d+1}+\frac{k\beta}{d^2}$，其中 k 代表该状态为 1 的点周围还有 k 个邻居为状态 1. 可以将此过程解释为传染病模型[6-10]，其状态空间中 1 代表患病，0 代表健康. 那么，一个给定的患病点就以参数为 1 的指数时间恢复健康；一位给定患病个体传染一位给定健康个体的速率为 $\frac{\lambda}{d+1}+\frac{k\beta}{d^2}$，$k$ 代表给定患病个体周围还有 k 个患病邻居.

特别的，当 $\beta=0$ 时，上述过程退化为齐次树上的经典接触过程[7-9]，经典接触过程疾病存活概率的相关临界值讨论见文献[11-14].

0.2 完全图上具有合作机制的接触过程

我们将过程换为底图为完全图 C^n 上的接触过程，该图上每一个顶点均有 $n-1$ 个邻居. 状态空间依然为 $\{0,1\}^{C^n}$，转移速率为

$$\left.\begin{aligned}&1\to 0,\ \text{速率}:1;\\&0\to 1,\ \text{速率}:\\&\qquad\sum_{y:y\sim x}\Big[\frac{\lambda}{n-1}+\frac{\beta}{n(n-1)}\sum_{z:z\sim y}\eta_t(z)\Big]\eta_t(y)\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

类比齐次树上的生成元，我们可以得到完全图上该过程的演化机制：在 t 时刻，处于状态 1 的点以速率 1 变为 0，一个给定状态为 1 的点使一个给定状态为 0 的点变为状态 1 的速率为 $\frac{\lambda}{n}+\frac{k\beta}{n(n-1)}$，其中 k 代表该状态为 1 的点周围还有 k 个邻居状态为 1.

直观上，我们也可以将该过程解释为传染病模型[15]，其状态空间中 1 代表患病，0 代表健康. 那么，一个给定的患病点以参数为 1 的指数时间恢复健康；一个给定的患病个体传染给一个给定健康个体的速率为 $\frac{\lambda}{n}+\frac{k\beta}{n(n-1)}$，$k$ 代表给定患病个体周围还有 k 个患病邻居.

下面引入该过程的一些符号：$P_n(\eta_t(r)=1)$ 表示 t 时刻点 r 处于状态 1 的概率；A_t 表示 $\{x:\eta_t(x)=1\}$；$|A|$ 表示 A 中点的个数；X_t^n 表示 n 个点的完全图上 t 时刻处于状态为 1 的点的个数.

特别的，当 $\beta=0$ 时，上述过程退化为完全图上的经典接触过程[16-17].

1 过程结论

虽然在图中每个点的地位都是相等的，但是出于下面研究的方便，我们选一个根节点 r，其分支出来的子代有 $d+1$ 个，没有父代；其他顶点均有 1 个父代，d 个子代.

引理 1.1 设有点 r,x,y,z，其中 $y\sim r$，$z\sim y$，$P_d(\eta_t(r)=1)$ 为在 d 维图上 t 时刻根节点 r 仍为状态 1 的概率，则 $P_d(\eta_t(r)=1)$ 满足以下方程：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_d(\eta_t(r)=1)=-P_d(\eta_t(r)=1)+\\\sum_{y:y\sim r}\frac{\lambda}{d+1}P_d(\eta_t(y)=1,\eta_t(r)=0)+\\\frac{\beta}{d^2}\sum_{y:y\sim r}\sum_{z:z\sim y}P_d(\eta_t(y)=1,\eta_t(z)=1,\eta_t(r)=0).\end{aligned}$$

定理 1.1 设初始所有节点全部为状态 1，$f(t)$ 是下述微分方程的解，

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=f(t)[-\beta f(t)^2+(\beta-\lambda)f(t)+\lambda-1],\\&f(0)=1\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

则有下述结论：任给 $t\geqslant 0$，任意 $x\in T^d$，有

$$\lim_{d\to+\infty}P_d(\eta_t(x)=1)=f(t).$$

由常微分方程基本理论[18]，方程(2)的解是唯一的.

由于有定理 1.1 的结论，对于度很高的图，我们就以 $f(t)$ 近似视作刻画过程在 t 时刻的存活概率. 那么就能以 $f(t)$ 是否趋于 0 作为一种近似判断疾病灭绝的方法. 这一方法称作平均场方法，是物理学中研究传染病的重要工具[19-22].

因此我们引入合作机制临界值 β_c 的定义：

$$\beta_c=\sup\{\beta:\lim_{t\to\infty}f(t)=0\}.$$

定理 1.2 满足微分方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=f(t)\cdot[-\beta f(t)^2+(\beta-\lambda)f(t)+\lambda-1]$ 的合作机制参数 β 的临界值 β_c 为

$$\begin{cases}\beta_c=(\sqrt{1-\lambda}+1)^2,\lambda<1;\\\beta_c=1,\lambda=1;\\\beta_c\ \text{不存在},\lambda>1.\end{cases}$$

定理 1.3　在具有合作机制的 n 个点的完全图上，初始时刻处于状态 1 的点的密度为 1. t 时刻后，处于状态 1 的点的密度有如下结论：$\frac{X_t^n}{n}$ 收敛于 y_t，记作

$$\frac{X_t^n}{n} \xrightarrow{P} y_t,$$

其中，y_t 是下述微分方程的解，

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_t=\lambda y_t(1-y_t)+\beta(y_t-\frac{1}{n})(1-y_t)y_t-y_t,\\ y_0=1.\end{array}\right\}$$

定理 1.4　在经典机制下，假设初始时刻齐次树上只有根节点一个点为状态 1. 给定 t 时刻时，当维数趋于正无穷后，处在状态 1 的点的数目趋于 $\mathrm{e}^{(\lambda-1)t}$，即

$$\lim_{d\to+\infty}E_{\vec{\mu}_1}\mid A_t\mid=\mathrm{e}^{(\lambda-1)t}.$$

2　结论证明

2.1　引理 1.1 的证明

在一个齐次树图上，设有点 r,x,y,z，其中 $y\sim r$，$z\sim y$，设 $f(\eta)=\eta(r)$. 若 $x\neq r$，$f(\eta^x)-f(\eta)=\eta^x(r)-\eta(r)=0$；若 $x=r$，$f(\eta^x)-f(\eta)=\eta^x(r)-\eta(r)=1-\eta(r)-\eta(r)=1-2\eta(r)$.

所以得到 $\Omega f(\eta)=\beta(r,\eta)[1-2\eta(r)]$.

又因为

$$1-2\eta(r)=\begin{cases}-1,\ \eta(r)=1;\\1,\ \eta(r)=0;\end{cases}=-1_{\{\eta(r)=1\}}+1_{\{\eta(r)=0\}},$$

代入上式可以得到

$$\Omega f(\eta)=\beta(r,\eta)[1-2\eta(r)]=(-1_{\{\eta(r)=1\}}+1_{\{\eta(r)=0\}})\beta(r,\eta)=-1_{\{\eta(r)=1\}}\times 1+1_{\{\eta(r)=0\}}\times\beta(r,\eta).$$

所以我们得到了该情形下 $\Omega f(\eta)$ 的表达式：

$$\Omega f(\eta)=-\eta(r)+\sum_{y:y\sim r}[\frac{\lambda}{d+1}\eta(y)+\frac{\beta}{d^2}\sum_{z:z\sim y}\eta(y)\eta(z)](1-\eta(r)).$$

由 Hille-Yosida 定理[24]，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t)f(\vec{1})=E_{\vec{1}}\Omega f(\eta_t)=-\eta_t(r)+\sum_{y:y\sim r}[\frac{\lambda}{d+1}\eta_t(y)+\frac{\beta}{d^2}\sum_{z:z\sim y}\eta_t(y)\eta_t(z)](1-\eta_t(r))=-P_d(\eta_t(r)=1)+\sum_{y:y\sim r}\frac{\lambda}{d+1}P_d(\eta_t(y)=1,\eta_t(r)=0)+\frac{\beta}{d^2}\sum_{y:y\sim r}\sum_{z:z\sim y}P_d(\eta_t(y)=1,\eta_t(z)=1,\eta_t(r)=0).$$

最终得到了在合作机制下有关于患病点的微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_d(\eta_t(r)=1)=-P_d(\eta_t(r)=1)+\sum_{y:y\sim r}\frac{\lambda}{d+1}P_d(\eta_t(y)=1,\eta_t(r)=0)+\frac{\beta}{d^2}\sum_{y:y\sim r}\sum_{z:z\sim y}P_d(\eta_t(y)=1,\eta_t(z)=1,\eta_t(r)=0).$$

2.2　定理 1.1 的证明

要想证明 $\lim\limits_{d\to+\infty}P_d(\eta_t(x)=1)=f(t)$，需首先证明 $\underline{\lim}_{d\to\infty}P_d(\eta_t(r)=1)=f(t)$.

设 $f_d(t)=P_d(\eta_t(r)=1)$，T_{y_1} 为在合作机制下从零时刻起 y 首次尝试感染 r 的时刻；T_r 为在合作机制下从零时刻起 r 首次尝试感染 y_1 的时刻；T_{y_2} 为在合作机制下从零时刻起 y 首次尝试感染 z 的时刻；T_z 为在合作机制下从零时刻起 z 首次尝试感染 y 的时刻. 设事件 A 表示在 T 时刻内 r 和 y,z 均不相互感染.

由于 y 对 r 的感染不止依赖于自身的感染能力，还依赖于合作机制下 y 的邻居的感染能力. 所以经过尺度变换后，可以认为 T_{y_1}，T_{y_r}，T_{y_2} 和 T_z 均服从参数为 $\frac{\lambda}{d}+\frac{\beta}{d}$ 的指数分布，其中 $\frac{\lambda}{d}$ 代表自身的感染能力，$\frac{\beta}{d}$ 代表邻居的感染能力. 那么，

$$P(A)=P(T_{y_1}\geqslant T,T_r\geqslant T,T_{y_2}\geqslant T,T_z\geqslant T)=P(T_{y_1}\geqslant T)P(T_r\geqslant T)P(T_{y_2}\geqslant T)P(T_z\geqslant T)=\mathrm{e}^{-4(\frac{\lambda}{d+1}+\frac{\beta}{d})T}.$$

即给定时刻 T 时，当树的度趋于无穷时，$\lim\limits_{d\to\infty}P(A)=1$，所以认为 T 时刻内 r，y 和 z 互相传染的概率为 0.

设 ε 为一无穷小量，则 $P(A)\geqslant 1-\varepsilon$，$P(\overline{A})\leqslant\varepsilon$. 根据过程的运行机制，在 A 事件发生时，即在 T 时刻内 y,z 不互相传染，那么它们则更容易独立地恢复健康，在 T 时刻 $\eta_t(y)=1$，$\eta_t(r)=0$ 的概率会变小，那么我们可以得到

$$P_d(\eta_t(y)=1,\eta_t(r)=0)\geqslant P_d(\eta_t(y)=1,\eta_t(r)=0,A)=P(A)P_d(\eta_t(y)=1,\eta_t(r)=0\mid A)=P(A)P_d(\eta_t(y)=1\mid A)P_d(\eta_t(r)=0\mid A) \tag{3}$$

且

$$P_d(\eta_t(r)=0\mid A)\geqslant P_d(\eta_t(r)=0)=1-f_d(t) \tag{4}$$

又由于

$$P_d(\eta_t(y)=1\mid A)=\frac{P_d(\eta_t(y)=1,A)}{P(A)}\geqslant P_d(\eta_t(y)=1,A)\geqslant P_d(\eta_t(y)=1)-P(\overline{A}),$$

所以

$$P_d(\eta_t(y)=1\mid A)\geqslant\max\{P_d(\eta_t(y)=1)-P(\overline{A}),0\} \tag{5}$$

将式(4)和(5)带入式(3)中可得

$$P_d(\eta_t(y)=1,\eta_t(r)=0)\geqslant(1-\varepsilon)(P_d(\eta_t(y)=1)-\varepsilon)(P_d(\eta_t(r)=0)-\varepsilon)=$$

$$(1-\varepsilon)(f_d(t)-\varepsilon)(1-f_d(t)-\varepsilon).$$

同理上述推导过程，我们也可以得到

$$P_d(\eta_t(y)=1,\eta_t(z)=1,\eta_t(r)=0)\geqslant$$
$$P_d(\eta_t(y)=1,\eta_t(z)=1,\eta_t(r)=0,A)=$$
$$P(A)P_d(\eta_t(y)=1,\eta_t(z)=1,\eta_t(r)=0\mid A)\geqslant$$
$$(1-\varepsilon)(f_d(t)-\varepsilon)^2(1-f_d(t)-\varepsilon).$$

于是，对 $\forall\varepsilon\geqslant 0$，$d$ 充分大后，带入引理 1.1 得到的微分方程，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_d(t)\geqslant -f_d(t)+\lambda(1-\varepsilon)(f_d(t)-\varepsilon)(1-f_d(t))+\frac{\beta(d+1)}{d}(1-\varepsilon)(f_d(t)-\varepsilon)^2(1-f_d(t)).$$

现在我们设一个新的函数 $H_\delta(t)$，它满足 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H_\delta(t)=-H_\delta(t)+\lambda(1-\delta)H_\delta(t)(1-H_\delta(t))+\beta(1-\delta)H_\delta^2(t)(1-H_\delta(t))$，当 δ 减小时，$H_\delta(t)$ 增大.

再设 $f(t)$，它满足

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=f(t)[-\beta f(t)^2+(\beta-\lambda)f(t)+\lambda-1],\\ f(0)=1.\end{array}\right\}$$

当 δ 趋于 0 时，$\lim\limits_{\delta\to 0}H_\delta(t)=f(t)$. 所以，对 $\forall\delta\geqslant 0$，$H_\delta(t)\leqslant f(t)$，即 $H(t)=\lim\limits_{\delta\to 0}H_\delta(t)$存在.

下证 $H(t)=f(t)$.

为计算以上微分不等式，我们引入一个新模型，其机制如下：在树状图上，患病点不再相互感染，一旦痊愈永久康复，即 $\lambda=0$. P 代表 t 时刻任意一点 O 仍然患病的概率；T 代表 O 点恢复健康所需的时间. 我们现在已知的结论有以下两条：

①$P\leqslant f_d(t)$；

②t 时刻，O 点仍然患病 $\Leftrightarrow P=P(T\geqslant t)=\mathrm{e}^{-t}$.

于是联立以上两式，我们可以得到

$$f_d(t)\geqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

即

$$\mathrm{e}^{-t}\leqslant f_d(t)\leqslant 1 \tag{6}$$

所以

$$f_d(t)-\varepsilon=f_d(t)\left(1-\frac{\epsilon}{f_d(t)}\right)\geqslant f_d(t)\left(1-\frac{\epsilon}{\mathrm{e}^{-t}}\right).$$

则微分方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_d(t)\geqslant -f_d(t)+\lambda(1-\varepsilon)f_d(t)\cdot\left(1-\frac{\varepsilon}{\mathrm{e}^{-t}}\right)(1-f_d(t))+\frac{\beta(d+1)}{d}(1-\varepsilon)f_d^2(t)\left(1-\frac{\varepsilon}{\mathrm{e}^{-t}}\right)(1-f_d(t)).$$

那么对 $\forall\delta\geqslant 0$，$\exists\varepsilon$，s.t. $(1-\varepsilon)\left(1-\frac{\varepsilon}{\mathrm{e}^{-t}}\right)\geqslant 1-\delta$；且对于一个充分大的 d，有

$$\frac{d+1}{d}\left(1-\frac{\varepsilon}{\mathrm{e}^{-t}}\right)(1-\varepsilon)\geqslant 1-\delta.$$

对于这样的 ε，当 d 充分大时，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_d(t)\geqslant -f_d(t)+\lambda(1-\delta)f_d(t)(1-f_d(t))+\beta(1-\delta)f_d^2(t)(1-f_d(t)).$$

所以，当 d 充分大时，$f_d(t)\geqslant H_\delta(t)$. 于是，

$$H(t)=\lim_{\delta\to 0}H_\delta(t)\leqslant\varliminf_{d\to+\infty}f_d(t).$$

下面利用 $f(t)$和 $H(t)$满足的微积方程具有相同形式解来证明 $f(t)=H(t)$.

由于 $f(t)$满足以下的公式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=f(t)[-\beta f(t)^2+(\beta-\lambda)f(t)+\lambda-1],$$

因此想要进一步求解，需首先对 λ 进行分类讨论：

①当 $\lambda\neq 1$ 时，方程可化简为

$$\left(\frac{1}{f(t)}-\frac{-\beta f(t)+(\beta-\lambda)}{-\beta f^2(t)+(\beta-\lambda)f(t)+(\lambda-1)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=\lambda-1,$$

进行进一步的拆分和化简，方程可表示为

$$\left(\frac{1}{f(t)}-\frac{1}{2}\frac{-2\beta f(t)+(\beta-\lambda)}{-\beta f(t)^2+(\beta-\lambda)f(t)+(\lambda-1)}+\frac{1}{2}\frac{\beta-\lambda}{-\beta f(t)^2+(\beta-\lambda)f(t)+(\lambda-1)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=\lambda-1.$$

可以看出，$f(t)$满足形式是指数和反正切函数构成的解析式. 于是此解析式可表示为

$$\begin{cases}f(t)=K(\lambda,\beta,f(t));\\ f(0)=1.\end{cases}$$

同理可知，$H_\delta(t)$满足

$$H_\delta(t)=M(\lambda(1-\delta),\beta(1-\delta),H_\delta(t)).$$

令 $\delta\to 0$，即 $H(t)=\lim\limits_{\delta\to 0}H_\delta(t)$，则可以得到

$$\begin{cases}H(t)=M(\lambda,\beta,H(t));\\ H(0)=1.\end{cases}$$

由于函数 $f(t)$，$H(t)$的初值相等，且其对应表达式相同，所以 $f(t)=H(t)$得证.

所以 $f(t)=H(t)=\lim\limits_{\delta\to 0}H_\delta(t)\leqslant\varliminf\limits_{d\to+\infty}f_d(t)$，即 $f(t)=\varliminf\limits_{d\to+\infty}f_d(t)$，$\varliminf\limits_{d\to\infty}P_d(\eta_t(r)=1)=f(t)$得证.

②当 $\lambda=1$ 时，是上述推导的特殊情况，易证也成立 $f(t)=\varliminf\limits_{d\to\infty}P_d(\eta_t(r)=1)$. 所以 $f(t)=\lim\limits_{d\to\infty}P_d(\eta_t(r)=1)$得证.

完成了 $\varliminf\limits_{d\to\infty}P_d(\eta_t(r)=1)=f(t)$的证明后，下面我们接着证明 $\varlimsup\limits_{d\to\infty}P_d(\eta_t(r)=1)=f(t)$.

根据过程的运行机制，$\eta_t(r)$，$\eta_t(y)$，$\eta_t(z)$是正相关的，即在 y，z 都患病的条件下，会增加 r 患病的概率. 所以我们可以得到

$$P_d(\eta_t(r)=0\mid\eta_t(y)=1,\eta_t(z)=1)\leqslant P_d(\eta_t(r)=0).$$

两边同乘 $P_d(\eta_t(y)=1,\eta_t(z)=1)$，得到

$$P_d(\eta_t(r)=0,\eta_t(y)=1,\eta_t(z)=1)\leqslant P_d(\eta_t(r)=0)P_d(\eta_t(y)=1,\eta_t(z)=1).$$

设 T_y 是从 0 时刻起，考虑所有合作机制，y 首次尝试感染 z 的时刻，经过尺度变换后可知，$T_y \sim \exp(\frac{\lambda}{d+1}+\frac{\beta}{d^2}\cdot d)=\exp(\frac{\lambda}{d+1}+\frac{\beta}{d})$.

同理，T_z 表示从 0 时刻起，考虑所有合作机制下，z 首次尝试感染 y 的时刻，经过尺度变换后有 $T_z \sim \exp(\frac{\lambda}{d+1}+\frac{\beta}{d})$.

同理下极限的证明，我们定义事件 $A_d:\{T_y>T, T_z>T\}$，则 $\lim\limits_{d\to\infty}P_d(A_d)=\lim\limits_{d\to\infty}\mathrm{e}^{-2(\frac{\lambda}{d+1}+\frac{\beta}{d})}=1$. 即在度很大的齐次树中，$T$ 时刻内 y 与 z 互相传染的概率近似为 0.

为进一步计算，我们对下式做如下变换：

$$
\begin{aligned}
&P_d(\eta_t(y)=1,\eta_t(z)=1)=\\
&\quad P_d(\eta_t(y)=1,\eta_t(z)=1\mid A_d)P_d(A_d)+\\
&\quad P_d(\eta_t(y)=1,\eta_t(z)=1\mid \overline{A}_d)P_d(\overline{A}_d)=\\
&P_d(\eta_t(y)=1\mid A_d)P_d(\eta_t(z)=1\mid A_d)P_d(A_d)+\\
&\quad P_d(\eta_t(y)=1,\eta_t(z)=1\mid \overline{A}_d)P_d(\overline{A}_d).
\end{aligned}
$$

因为 $\lim\limits_{d\to\infty}P_d(\overline{A}_d)=0$，$\lim\limits_{d\to\infty}P_d(A_d)=1$，所以对任意 $\epsilon>0$，d 充分大时，上式可化简为

$$
\begin{aligned}
&P_d(\eta_t(y)=1,\eta_t(z)=1)=\\
&\quad P_d(\eta_t(y)=1\mid A_d)P_d(\eta_t(z)=1\mid A_d)\leqslant\\
&\quad\quad P_d(\eta_t(y)=1)P_d(\eta_t(z)=1)+\epsilon.
\end{aligned}
$$

带入引理 1.1 中的微分方程，得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_d(t)\leqslant&-f_d(t)+\lambda f_d(t)(1-f_d(t))+\\
&\frac{\beta}{d^2}(d+1)d(1-f_d(t))(f_d^2(t)+\epsilon).
\end{aligned}
$$

因为 $f_d(t)\geqslant \mathrm{e}^{-t}$（在式(6)已给出证明），所以

$$
f_d^2(t)+\varepsilon\leqslant f_d^2(t)(1+\frac{\varepsilon}{\mathrm{e}^{-2t}}).
$$

对 $\forall\,\delta\geqslant 0$，取 ε 使得 $1+\frac{\varepsilon}{\mathrm{e}^{-2t}}\leqslant 1+\frac{\delta}{2}$，当 d 充分大时，有 $\frac{d+1}{d}(1+\frac{\delta}{2})\leqslant 1+\delta$. 所以微分方程可化简为

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_d(t)\leqslant&-f_d(t)+\lambda f_d(t)(1-f_d(t))+\\
&\beta(1+\delta)(1-f_d(t))f_d^2(t).
\end{aligned}
$$

$f(t)$ 仍同在证明下极限时的定义，满足

$$
\begin{cases}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=f(t)[-\beta f(t)^2+(\beta-\lambda)f(t)+\lambda-1],\\
f(0)=1.
\end{cases}
$$

此时我们再设一个新的函数 $g_\delta(t)$，它满足

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_\delta(t)=&-g_\delta(t)+\lambda g_\delta(t)(1-g_\delta(t))+\\
&\beta g_\delta^2(t)(1-g_\delta(t)).
\end{aligned}
$$

则对 $\forall\,d$，有 $f_d(t)\leqslant g_\delta(t)$，所以 $\overline{\lim\limits_{d\to\infty}}f_d(t)\leqslant g_\delta(t)$. 而当 δ 趋于 0 时，$\lim\limits_{\delta\to 0}g_\delta(t)=g(t)$. 同理下极限中的证明方法，可以得到 $g(t)=f(t)$.

所以 $\overline{\lim\limits_{d\to\infty}}f_d(t)=f(t)$，即 $\overline{\lim\limits_{d\to\infty}}P_d(\eta_t(r)=1)=f(t)$ 得证.

综上所述，上下极限相等，所以极限存在，且极限值为 $\lim\limits_{d\to\infty}P_d(\eta_t(r)=1)=f(t)$，定理 1.1 得证，即 $f(t)=\lim\limits_{d\to\infty}P_d(\eta_t(r)=1)$ 对 $\forall\,t\geqslant 0$ 成立，其中 $f(t)$ 是下述微分方程的解，

$$
\begin{cases}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=f(t)[-\beta f(t)^2+(\beta-\lambda)f(t)+\lambda-1],\\
f(0)=1.
\end{cases}
$$

2.3　定理 1.2 的证明

下面我们将从微分方程

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=f(t)[-\beta f(t)^2+(\beta-\lambda)f(t)+\lambda-1]
$$

出发，寻找 $f(t)$ 的非零不动点. 此非零不动点即是该疾病的极限存活概率，此时对应的 β 即是我们想要的临界值 β_c.

不难发现，β 的变化会与 λ 有关，以下我们将通过讨论 λ 的范围来进一步讨论 β.

观察微分方程易知 $f(t)=0$ 是微分方程的一个解；下面通过分析函数

$$
L(f(t))=-\beta f(t)^2+(\beta-\lambda)f(t)+\lambda-1
$$

的根，找出微分方程另外的解.

（Ⅰ）当 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，$L(f(t))$ 的判别式 $\Delta=0$ 时，$\lambda=2\sqrt{\beta}-\beta$，配方后可以得到 $(\sqrt{\beta}-1)^2=1-\lambda$，所以有

$$
\beta_1=(\sqrt{1-\lambda}+1)^2,\ \beta_2=(1-\sqrt{1-\lambda})^2.
$$

下面我们将按照 $\beta\leqslant\beta_2$，$\beta=\beta_2$，$\beta_2\leqslant\beta\leqslant\beta_1$，$\beta=\beta_1$，$\beta\geqslant\beta_1$ 进行分类讨论，通过判断方程的不动点与 β 的大小之间的关系来判断 β 的临界值：

① $\beta=\beta_1$.

此时函数 $L(f(t))$ 的判别式等于 0，该函数有两个实根 $x_1=0$，$x_2=1-\frac{1}{\sqrt{\beta_1}}\geqslant 0$. 所以从 $f(t)=1$ 出发，$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=x_2>0$，此时疾病以正概率存活.

② $\beta=\beta_2$.

此时函数 $L(f(t))$ 的判别式等于 0，该函数有两个实根 $x_1=0$，$x_2=1-\frac{1}{\sqrt{\beta_2}}\leqslant 0$. 所以从 $f(t)=1$ 出发，$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0$，此时疾病不存活.

③ $\beta_2\leqslant\beta\leqslant\beta_1$.

此时函数 $L(f(t))$ 的判别式小于 0，该函数仅有一个实根 $x_1=0$. 所以从 $f(t)=1$ 出发，$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0$，此时疾病不存活.

④ $\beta\leqslant\beta_2$.

由③可知，在 $\beta_2\leqslant\beta$ 时，疾病已不存活，所以在 $\beta\leqslant\beta_2$ 时疾病一定也不存活.

⑤ $\beta>\beta_1$.

此时函数 $L(f(t))$ 的判别式大于 0，该函数有三个实根 $x_1=0$，x_2，x_3. 根据韦达定理，可以得到两根之积为 $x_2x_3=\frac{1-\lambda}{\beta}>0$，两根之和 $x_2+x_3=1-\frac{\lambda}{\beta}>0$. 所以这两根为正数，设 $x_2<x_3$. 那么，从 $f(t)=1$ 出发，$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=x_3$，此时疾病以正概率 x_3 存活.

综上所述，当 $\lambda<1$ 时，$\beta\geqslant\beta_1$，$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)>0$，疾病以正概率存活；$\beta<\beta_1$，$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0$，疾病灭绝，所以 $\beta_c=\beta_1=(\sqrt{1-\lambda}+1)^2$ 是一个临界值.

（Ⅱ）当 $\lambda=1$ 时，$L(f(t))$ 的判别式 $\Delta=(\beta-1)^2$. 下面对 β 进行讨论：

① $\beta=1$.

此时 $\Delta=0$，微分方程变为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=-f(t)^3$，$L(f(t))$ 仅有一个实根 $x_1=0$. 那么，从 $f(t)=1$ 出发，$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0$，此时疾病不存活.

② $\beta>1$.

此时 $\Delta>0$，则 $L(f(t))$ 有三个实根 x_1,x_2,x_3，其中 $x_1=0$. 根据韦达定理，可以得到两根之积为 $x_2x_3=0$，两根之和 $x_2+x_3=1-\frac{\lambda}{\beta}>0$. 所以，这两根中一个为正根，一个为零根. 设 $x_2=0$，$x_3>0$，则无论从 $(0,1)$ 的任一点出发，$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=x_3>0$. 所以在 $\beta>1$ 时，疾病以正概率存活.

③ $\beta<1$.

则 $\Delta<0$，这个时候合作机制的效应小于患病点恢复健康的效应，所以疾病一定会灭绝.

综上所述，当 $\lambda=1$ 时，$\beta\leqslant1$，$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0$，疾病灭绝；$\beta>1$，$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=x_3$，疾病以正概率存活，即 $\beta_c=1$ 是一个临界值.

（Ⅲ）当 $\lambda>1$ 时，对于 $L(f(t))$，此时判别式大于 0，一定存在两实根；根据韦达定理，可以得到两根之积为 $x_2x_3=1-\frac{\lambda}{\beta}$，两根之和 $x_2+x_3=1-\frac{\lambda}{\beta}<0$. 所以，这两根中一个为正根，一个为负根，设 $x_2<0$，$x_3>0$. 那么，无论从 $(0,1)$ 的任一点出发，$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=x_3$. 此时疾病均以正概率存活，临界值 β_c 不存在.

证毕.

2.4 定理 1.3 的证明

我们假设初始条件是具有合作机制的 n 个点的完全图上，状态为 1(即患病)的点的密度为 $\frac{X_t^n}{n}=1$. 那么，该完全图具有下述转移速率：

① $X_t^n\to X_t^n+1$：患病个体增加一个的现象，一部分依赖于该个体周围患病邻居个数以及还剩多少健康邻居可供传染，另一部分依赖于合作机制. 所以经过尺度变换，此时转移速率为

$$\frac{\lambda}{n}(n-X_t^n)X_t^n+\frac{\beta}{n(n-1)}(X_t^n-1)(n-X_t^n)X_t^n.$$

为计算方便，我们将上述转移速率化简为

$$n\lambda\frac{X_t^n}{n}\Big(1-\frac{X_t^n}{n}\Big)+\beta\Big(\frac{X_t^n}{n}-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{X_t^n}{n}\Big)X_t^n.$$

设 $X_t^n=x$，则有

$$F_1(x)=\lambda x(1-x)+\beta\Big(x-\frac{1}{n}\Big)(1-x)x.$$

② $X_t^n\to X_t^n-1$：类似地，设 $X_t^n=x$，则有

$$F_{-1}(x)=x.$$

下面我们引入依赖密度的人口马氏过程的定义.

定义 2.1[23] 下述过程称为依赖密度的人口马氏过程：在一维情形中，$\{X_t^n,n=1,2,\cdots\}$ 是一列马氏过程，状态空间是 $E=\{0,1,2,3,\cdots\}$. 事先给定 $\mathscr{A}\subseteq E$，设 $l\in\mathscr{A}$，则 $X_t^n\to X_t^n+l$ 的速率为 $nF_l\big(\frac{X_t^n}{n}\big)$，即当前在 x，跳转到 $x+l$ 的速率为 $q_n(x,x+l)=nF_l\big(\frac{x}{n}\big)$. F_l：$l\in\mathscr{A}$，是一些事先给定的函数，映射区域为 $[0,+\infty)\to[0,+\infty)$.

定理 2.1 给出了依赖密度的人口马氏过程满足的大数定律.

定理 2.1[23] 设 X_n^t 即定义 2.1 中依赖密度的人口马氏过程，且 $X_0^n=nx_0$，$x_0\in[0,+\infty)$. 当 $n\to\infty$ 时，$\frac{X_t^n}{n}$ 依概率收敛于 y_t，这里 y_t 是以下微分方程的解：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_t=\sum_{l\in\mathscr{A}}l\times F_l(y_t),\\&y_0=x_0.\end{aligned}\right\}$$

其中，$\sum\limits_l F_l(y_t)$ 满足 Lipschitz 条件.

由于完全图中的函数 F_l 与定理 2.1 中的函数 F_l 相差一个 $\frac{1}{n}$ 的常系数，所以我们只需要证明在函数增加一个高阶无穷小的情况下，该定理依然是成立的即可. 即若马氏过程 $X_t^n\to X_t^n+l$ 的转移速率为 $nF_l\big(\frac{X_t^n}{n}+o_n(1)\big)$，定理 2.1 依然成立（其中，$\lim\limits_{n\to\infty}o_n(1)=0$）.

为实现证明，我们首先引入一个新的模型，初始条件依然是所有点的状态都为 1，转移速率改变如下：

① $X_t^{n,\varepsilon}\to X_t^{n,\varepsilon}+1$：$F_{1,\varepsilon}(x)=\lambda x(1-x)+\beta x(1-x)\max\{0,(x-\varepsilon)\}$；

② $X_t^{n,\varepsilon}\to X_t^{n,\varepsilon}-1$：$F_{-1}(x)=x$.

当 n 充分大时，使 $\frac{1}{n-1}\leqslant\varepsilon$，即 $n\geqslant\varepsilon+1$. 则有 $\frac{nz-1}{n-1}\geqslant z-\varepsilon$. 在耦合意义下，可以实现

$$X_t^n\geqslant X_t^{n,\varepsilon}(\forall t)\tag{7}$$

由定理 2.1，可以得到 $\frac{X_t^{n,\varepsilon}}{n}$ 依概率收敛 $y_{t,\varepsilon}$. 这里 $y_{t,\varepsilon}$ 是下述微分方程的解：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_{t,\varepsilon}=\lambda y_{t,\varepsilon}(1-y_{t,\varepsilon})+\\&\qquad\beta y_{t,\varepsilon}(1-y_{t,\varepsilon})\max\{0,(y_{t,\varepsilon}-\varepsilon)\},\\&y_{t,\varepsilon}=1.\end{aligned}\right\}$$

所以对 $\forall\varepsilon$，有 $y_{t,\varepsilon}\leqslant y_t$. 因此，联立得到

$$\frac{X_t^{n,\varepsilon}}{n}\xrightarrow{P}y_{t,\varepsilon},\ \frac{X_t^n}{n}\geqslant\frac{X_t^{n,\varepsilon}}{n}.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{X_t^n}{n}\geqslant y_{t,\varepsilon}$.

下面我们接着引入第二个模型：初始条件依然为所有点都为状态 1，设 t 时刻的状态为 $Z_t^{n,\varepsilon}$，令 $z=Z_t^{n,\varepsilon}$，得到转移速率如下：

① $Z_t^{n,\varepsilon}\to Z_t^{n,\varepsilon}+1$：$G_{1,\varepsilon}(z)=\lambda z(1-z)+\beta z(1-z)(z+\varepsilon)$；

② $Z_t^{n,\varepsilon}\to Z_t^{n,\varepsilon}-1$：$G_{-1}(z)=z$.

在耦合意义下，有

$$X_t^n\leqslant Z_t^{n,\varepsilon} \tag{8}$$

同理，由定理 2.1 可得，$Z_t^{n,\varepsilon}$ 依概率收敛于 $Z_{t,\varepsilon}$，其中 $Z_{t,\varepsilon}$ 是下述微分方程的解：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z_{t,\varepsilon}=\lambda Z_{t,\varepsilon}(1-Z_{t,\varepsilon})+\\&\qquad\beta Z_{t,\varepsilon}(1-Z_{t,\varepsilon})(Z_{t,\varepsilon}+\varepsilon)-Z_{t,\varepsilon},\\&Z_{0,\varepsilon}=Z_0{}^{n,\varepsilon}=1.\end{aligned}\right\}$$

同理可得

$$\frac{Z_t^{n,\varepsilon}}{n}\xrightarrow{P}Z_{t,\varepsilon},\ \frac{Z_t^{n,\varepsilon}}{n}\geqslant\frac{X_t^n}{n}.$$

所以 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\dfrac{X_t^n}{n}\leqslant Z_t^{n,\varepsilon}$.

将上述两个新模型对完全图的度 n 取极限可以得到 $Z_t^{n,\varepsilon}=y_t=y_{t,\varepsilon}$.

综上所述，定理 1.3 得证.

注 2.1　下面给出依概率收敛以及耦合式(7)和(8)证明.

要证 $\lim\limits_{n\to\infty}P(|X_t^n-y_t|>\epsilon)=0$，即

$$\lim_{n\to\infty}P(X_t^n-y_t>\epsilon)+\lim_{n\to\infty}P(X_t^n-y_t<-\epsilon)=0.$$

我们将此式的两项分别处理.

先证第一项：因为有 $\dfrac{Z_t^{n,\varepsilon}}{n}\geqslant\dfrac{X_t^n}{n}$，所以对 $\forall\delta$，

$$P(X_t^n>y_t+\epsilon)\leqslant P(Z_t^{n,\delta}>y_t+\epsilon).$$

取 δ 充分小后，使 $Z_{t,\delta}<y_t+\dfrac{\epsilon}{2}$，对这样的 δ，有

$$P(\frac{Z_t^{n,\delta}}{n}>y_t+\epsilon)\leqslant P(\frac{Z_t^{n,\delta}}{n}>Z_{t,\delta}+\frac{\epsilon}{2}).$$

又因为 $\dfrac{Z_t^{n,\delta}}{n}$ 依概率收敛到 $Z_{t,\delta}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}P(|\frac{Z_t^{n,\delta}}{n}-Z_{t,\delta}|>\frac{\epsilon}{2})=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}P(\frac{Z_t^{n,\delta}}{n}>Z_{t,\delta}+\frac{\epsilon}{2})=0,$$

所以我们得到

$$\lim_{n\to\infty}P(X_t^n-y_t>\epsilon)\leqslant P(Z_t^{n,\delta}>y_t+\epsilon)=\lim_{n\to\infty}P(\frac{Z_t^{n,\delta}}{n}>Z_{t,\delta}+\frac{\epsilon}{2})=0.$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}P(X_t^n-y_t>\epsilon)=0$. 第一项等于 0 得证.

再证第二项：同理，因为有 $\dfrac{X_t^n}{n}\geqslant\dfrac{X_t^{n,\varepsilon}}{n}$，所以对 $\forall\delta$，

$$P(X_t^n<y_t-\epsilon)\leqslant P(X_t^{n,\delta}<y_t-\epsilon).$$

取 δ 充分小后，使 $X_{t,\delta}>y_t-\dfrac{\epsilon}{2}$，对这样的 δ，

$$P(\frac{X_t^{n,\delta}}{n}<y_t-\epsilon)\leqslant P(\frac{X_t^{n,\delta}}{n}<X_{t,\delta}-\frac{\epsilon}{2}).$$

又因为 $\dfrac{X_t^{n,\delta}}{n}$ 依概率收敛到 $X_{t,\delta}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}P(|\frac{X_t^{n,\delta}}{n}-X_{t,\delta}|>\frac{\epsilon}{2})=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}P(\frac{X_t^{n,\delta}}{n}>X_{t,\delta}+\frac{\epsilon}{2})=0,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}P(X_t^n-y_t<-\epsilon)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}P(\dfrac{X_t^{n,\delta}}{n}<y_t-\epsilon)\leqslant P(\dfrac{X_t^{n,\delta}}{n}<X_{t,\delta}-\dfrac{\epsilon}{2})=0.$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}P(X_t^n-y_t<-\epsilon)=0$，第二项等于 0 得证.

所以综上所述，

$$\lim_{n\to\infty}P(|X_t^n-y_t|>\epsilon)=0.$$

下面讨论 X_t^n 与 $X^{n,\epsilon}$ 的耦合，我们分成如下两种情况进行讨论：

① $X_t^n=X_t^{n,\epsilon}$ 时，

$(X_t^n,X_t^{n,\epsilon})$

$\to(X_t^n+1,X_t^{n,\epsilon}+1)$，速率：$nF_{1,\epsilon}(\dfrac{X_t^{n,\epsilon}}{n})$；

$\to(X_t^n+1,X_t^{n,\epsilon})$，速率：$n[F_1(\dfrac{X_t^n}{n})-F_{1,\epsilon}(\dfrac{X_t^{n,\epsilon}}{n})]$；

$\to(X_t^n-1,X_t^{n,\epsilon}-1)$，速率：$X_t^n=X_t^{n,\epsilon}$.

② $X_t^n\neq X_t^{n,\epsilon}$ 时（此时一定成立 $X_t^n\geqslant X_t^{n,\epsilon}+1$），

$(X_t^n,X_t^{n,\epsilon})$

$\to(X_t^n+1,X_t^{n,\epsilon}+1)$，速率：$nF_1(\dfrac{X_t^n}{n})$；

$\to(X_t^n,X_t^{n,\epsilon}+1)$，速率：$nF_1(\dfrac{X_t^{n,\epsilon}}{n})$；

$\to(X_t^n-1,X_t^{n,\epsilon})$，速率：$X_t^n$；

$\to(X_t^n,X_t^{n,\epsilon}-1)$，速率：$X_t^{n,\epsilon}$.

不论①或②，都有 $X_t^n>X_t^{n,\epsilon}$. 所以在耦合意义下，式(7)成立. 同理式(8)成立.

2.5　定理 1.4 的证明

要想证明 $\lim\limits_{d\to+\infty}E_{\vec{\mu}_1}|A_t|=\mathrm{e}^{(\lambda-1)t}$，我们首先证明 $\overline{\lim\limits_{d\to\infty}}E_{\vec{\mu}_1}|A_t|\leqslant\mathrm{e}^{(\lambda-1)t}$.

同前面证明的假设，我们可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{\vec{\mu}_1}|A_t|=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{\vec{\mu}_1}f(\eta_t) \tag{9}$$

而

$$\begin{aligned}E_{\vec{\mu}_1}\Omega f(\eta_t)=&E_{\vec{\mu}_1}[\sum_{x\in T^d}[-\eta_t(x)+\\&\frac{\lambda}{d+1}\sum_{y:y\sim x}\eta_t(y)(1-\eta_t(x))]]=\\&E_{\vec{\mu}_1}[\sum_{x\in T^d}(-\eta_t(x))+\\&\frac{\lambda}{d+1}\sum_{x\in T^d}\sum_{y:y\sim x}\eta_t(y)(1-\eta_t(x))]=\\&E(-|A_t|+\frac{\lambda}{d+1}\sum_{x\in T^d}\sum_{y:y\sim x}\mathbf{1}_{\{y\in A_t\}}\mathbf{1}_{\{x\notin A_t\}})=\end{aligned}$$

$$E(-|A_t|+\frac{\lambda}{d+1}\sum_{y\in T^d}\sum_{x:x\sim y}\mathbf{1}_{\{y\in A_t,x\notin A_t\}})=$$
$$E(-|A_t|+\frac{\lambda}{d+1}\sum_{y\in A_t}\sum_{x:x\sim y,x\notin A_t}\mathbf{1}).$$

所以带回式(9)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{\vec{\mu}_1}|A_t|=-E_{\vec{\mu}_1}|A_t|+$$
$$\frac{\lambda}{d+1}E(\sum_{y\in A_t}\sum_{x:x\sim y,x\notin A_t}\mathbf{1})\leqslant$$
$$-E_{\vec{\mu}_1}|A_t|+\frac{\lambda}{d+1}(d+1)E_{\vec{\mu}_1}|A_t|.$$

解此微分不等式,便可解得 $E_{\vec{\mu}_1}|A_t|\leqslant e^{(\lambda-1)t}$,即 $\overline{\lim_{d\to\infty}}E_{\vec{\mu}_1}|A_t|\leqslant e^{(\lambda-1)t}$.

接着,我们再证明 $\underline{\lim_{d\to\infty}}E_{\vec{\mu}_1}|A_t|\geqslant e^{(\lambda-1)t}$. 首先,给出树结构的重要性质:设 $A\in T^d$ 是一个点集,$\partial A=\{x:x\notin A,\exists y\in A,\mathrm{s.t.}\ x\sim y\}$,那么可以得到如下定理.

定理 2.2 $|A|(d-2)+2\leqslant|\partial A|\leqslant|A|d$.

证明 ①$|A|=1$ 满足该定理;②若$|A|=k$,即 A 中含有 k 个点该定理也成立.

下面证明③$|A|=k+1$ 时定理成立:设 B 中含有 A 中的 k 个点,另一点为 x,即 $A=B\cup x$,则 $|\partial B|\geqslant k(d-2)+2$;又因为 $x\in\partial B$,于是$|\partial A|\geqslant|\partial B|+(d-1)-1$,即有

$$|\partial A|\geqslant(k+1)(d-2)+2.$$

该定理得证.

推广到某时刻的点集 A_t 也满足定理 2.2,所以我们可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{\vec{\mu}_1}|A_t|=$$
$$-E_{\vec{\mu}_1}|A_t|+\frac{\lambda}{d+1}E(\sum_{y\in A_t}\sum_{x:x\sim y,x\notin A_t}\mathbf{1})\geqslant$$
$$-E_{\vec{\mu}_1}|A_t|+\frac{\lambda}{d+1}E_{\vec{\mu}_1}[|A_t|(d-2)+2]=$$
$$E_{\vec{\mu}_1}|A_t|(\frac{\lambda}{d+1}(d-2)-1).$$

求解上述微分不等式,解得

$$E_{\vec{\mu}_1}|A_t|\geqslant e^{(\frac{\lambda}{d+1}(d-2)-1)t}.$$

令 $d\to+\infty$,得到 $E_{\vec{\mu}_1}|A_t|\geqslant e^{(\lambda-1)t}$,即 $\underline{\lim_{d\to\infty}}E_{\vec{\mu}_1}|A_t|\geqslant e^{(\lambda-1)t}$.

定理 1.4 得证.

致谢

薛晓峰老师对本文提出了建议和意见,在此表示感谢!

参考文献(References)

[1] HARRIS T E. Contact interactions on a lattice[J]. Ann Probab, 1974, 2(6): 969-988.

[2] LIGGETT T M. Interacting Particle Systems[M]. New York: Springer, 1985.

[3] LIGGETT T M. Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter and Exclusion Processes[M]. New York: Springer, 1999.

[4] SUDBURY A. Rigorous lower bounds for the critical infection rate in the diffusive contact process[J]. J Appl Probab, 2001, 38(4): 1074-1078.

[5] 纪瑞瑞. 一维单边接触过程性质的研究[D]. 芜湖:安徽师范大学,2010.

[6] 李建全, 娄洁, 娄梅枝. 离散的 SI 和 SIS 传染病模型的研究[J]. 应用数学和力学,2008, 29(1):104-110.
LI Jianquan, LOU Jie, LOU Meizhi. Study of some discrete SI and SIS epidemic models[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2008, 29(1): 104-110.

[7] PEMANTLE R. The contact process on trees[J]. Ann Probab, 1992, 20(4): 2089-2116.

[8] ZHANG Y. The complete convergence theorem of the contact process on trees[J]. The Annals of Probability, 1996, 24: 1408-1443.

[9] SALZANO M, SCHONMANN R H. A new proof that for the contact process on homogeneous trees local survival implies complete convergence[J]. The Annals of Probability, 1998, 26: 1251-1258.

[10] 曹宇. 传染病动力学模型研究[D]. 沈阳:东北大学,2014.

[11] XUE X. An improved upper bound for the critical value of the contact process on Z^d with $d\geqslant3$[J]. Electron Commun Probab, 2018, 23: No. 77.

[12] CRANSTON M, MOUNTFORD T, MOURRAT J C, et al. The contact process on finite homogeneous trees revisited[J]. ALEA Lat Am J Probab Math Stat, 2014, 11: 385-408.

[13] 张刚强. 关于基本接触过程临界值的新估计[J]. 华中理工大学学报,1999,27(6):94-96.
ZHANG Gangqiang. Estimation of the critical value in the basic contact process[J]. J Huazhong Univ of Sci & Tech, 1999, 27(6): 94-96.

[14] 丁万鼎, 朱作宾. 基本接触过程临界值的新估计[J]. 安徽师范大学学报(自然科学版),1984(1):3-8.

[15] AIZENMAN M, JUNG P. On the critical behavior at the lower phase transition of the contact process[J]. ALEA Lat Am J Probab Math Stat, 2007, 3: 301-320.

[16] PETERSON J. The contact process on the complete graph with random vertex-dependent infection rates[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 2011, 121: 609-629.

[17] ARMBRUSTER B, BECK E. Elementary proof of convergence to the mean-field model for the SIR process[J]. J Math Biol, 2017, 75: 327-339.

[18] 王高雄, 周之铭, 朱思铭, 等. 常微分方程[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2006: 219.

[19] PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Epidemic spreading in scale-free networks[J]. Physical Review Letters, 2001, 86: 3200-3203.

[20] PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Epidemic dynamics and endemic states in complex networks[J]. Physical Review E, 2001, 63: 066117.

[21] 李彦. 复杂网络上的相变问题研究[D]. 上海:上海交通大学,2014.

[22] XUE X. Priority of the result in "Mean field limit for survival probability of the high-dimensional contact process"[J]. Statist Probab Lett, 2019, 148: 133.

[23] KURTZ T G. Strong approximation theorems for density dependent Markov chains[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 1978, 6: 223-240.

[24] 张恭庆, 郭懋正. 泛函分析讲义(下册)[M]. 北京: 北京大学出版社, 1990: 45-130.