第34卷第4期　　中 国 科 学 技 术 大 学 学 报　　Vol. 34, No. 4
2004年8月　　JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA　　Aug. 2004

文章编号:025322778(2004)0420410204

图直径与平均距离的极值问题研究 x

周　涛,徐俊明,刘　隽

(中国科学技术大学数学系,安徽合肥 230026)

摘要:通过研究图直径、平均距离、阶数与规模之间的约束关系,给出了 Ore 定理的一个简单证明,并将其推广到了有向图形式. 提出了 k 直径图平均距离的下界定理,此定理结合 Ore 定理可得到只依赖于阶数和直径的图平均距离的下界,该下界好于 Plesnik 下界.

关键词:图论;直径;平均距离;下界;极值问题;有向图

中图分类号:O157.5; O157.9　　文献标识码:A

AMS Subject Classifications(2000) :05C12

0　引言

在分析传输网络的性能与效率时,有两个因素总是受到特别的关注,即最大传输时延与平均传输时延. 在图理论中,它们被近似地抽象为两个参数:直径与平均距离. 以下所提到的图,均指有限简单图,用符号 $G(V, E)$ 表示,其中 V 表示点集, E 表示边集. $\nu(G)$ 与 $\varepsilon(G)$ 分别表示点集 V 与边集 E 的势,称为图 G 的阶数和规模. 对于 G 中任意两点 x, y,用 $d_G(x, y)$ 表示从 x 到 y 的距离(最短路的长度),则 G 的直径与平均距离可分别表为

$$d(G) = \max_{x, y \in V}\{ d_G(x, y)\}$$

$$\mu(G) = \frac{1}{\nu(\nu - 1)} \sum_{x, y \in V} d_G(x, y)$$

为了叙述方便,后文中使用 $\sigma(G)$ 来代替有关 $\mu(G)$ 的讨论,其中 $\sigma(G) = \nu(\nu - 1)\mu(G)$.

在关于图直径和平均距离的研究方面,Ore 给出了无向图直径一个漂亮的紧界[1], Entringer, Jackson, Slater 和 Ng, Teh 分别就无向图和有向图的情形给出了图平均距离粗糙但具有开创意义的下界[2,3], Plesnik 给出了平均距离只依赖于阶数和直径的下界[4]. 从 Ore 定理提出至今,尚无对应的有向图形式, Plesnik 下界是目前已知的最好的下界.

本文通过一种新的构造分析方法,给出了 Ore 定理的简单证明,此方法可以无困难地将 Ore 定理推广到有向图形式. 利用类似的分析方法,可以得到 k 直径图平均距离的下界定

---

x 收稿日期:2003205222

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10271114, 10301037)

作者简介:周涛,男,1983年生,本科生. 研究方向:组合网络分析,非线性物理,随机自适应算法,复杂网络,统计物理. E2mail: zhutou@ustc.edu

理,Entringer,Ng 等人的结果将作为该定理的一个自然的推论给出.结合此定理与 Ore 定理,可以得到只依赖于阶数和直径的平均距离下界,该下界好于 Plesnik 下界. Ore,Entringer,Ng,Plesnik 等人的经典结果被广泛应用于其它极值问题的分析证明,以及网络参数的计算中[5~8],基于上述定理所获结论亦可根据本文结果获得相应的推广和改进.

1　Ore 定理的简证与推广

Ore 通过类似于构造广度优先树[9]的方法将无向图分割成一圈圈的等距子图,其证明手法是优美而繁复的.由于其构造中隐含了 $d_G(x,y) = d_G(y,x)$ 的条件,因此无法直接推广到有向图的形式.

显然,任何 ν 阶图都可以看作从完全无向图 K_ν 或完全有向图 K_ν^3 中移走若干条边后得到的,本文将从这一简单而直观的角度出发,给出 Ore 定理的简单证明.

定理 1[1]　对任意无向 (ν,k) 图 G,有:

$$\varepsilon(G) \le k + \frac{1}{2}(\nu - k + 4)(\nu - k - 1) \tag{1}$$

其中 (ν,k) 图是指阶数为 ν,直径为 k 的简单有限图.

证明　用 $\eta(\nu,k)$ 表示要得到无向 (ν,k) 图至少需要从完全图 K_ν 中移走的边的数目,则对任意无向 (ν,k) 图 G,有:

$$\varepsilon(G) \le \varepsilon(K_\nu) - \eta(\nu,k) \tag{2}$$

令 $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ 为 G 中长为 k 的最短路,由 P 的最短性易知 P 中两点 x_i, x_j 不相邻,若 $|i - j| > 1$. 这就意味着至少有 $\frac{1}{2}k(k-1)$ 条边必须从 K_ν 中移走以得到图 G.

同样由 P 的最短性知,对于不在 P 中的顶点 x,若 P 中两点 x_i, x_j 满足 $|i - j| > 2$,则 x 不能同时与 x_i, x_j 相邻,即 x 最多与 P 中形如 x_i, x_{i+1}, x_{i+2} 的三个顶点相邻. 换句话说,P 中至少有 $(k-2)$ 个点不与 x 相邻. 由于 G 中不在 P 上的顶点数为 $(\nu - k - 1)$,即有至少 $(\nu - k - 1)(k-2)$ 条边必须从 K_ν 中移去以得到 G. 综上可知:

$$\eta(\nu,k) \ge \frac{1}{2}k(k-1) + (\nu - k - 1)(k-2) \tag{3}$$

结合式(2)、(3)即得式(1).

利用同样的分析方法,可以得到 Ore 定理的有向图形式,证明略.

定理 2　对任意强连通有向 (ν,k) 图 G,有:

$$\varepsilon(G) \le \nu(\nu - k + 1) + \frac{1}{2}(k^2 - k - 4) \tag{4}$$

2　平均距离的下界定理

定理 3　设 G 为无向 (ν,k) 图 $(k \ge 2)$,若 G 的规模为 ε,则有:

$$\sigma(G) \ge \begin{cases} 2\nu(\nu-1) - 2\varepsilon + \frac{1}{3}k(k-1)(k-2) + \frac{1}{2}(\nu-k-1)(k-2)(k-4) & k\text{ 为偶数} \\ 2\nu(\nu-1) - 2\varepsilon + \frac{1}{3}k(k-1)(k-2) + \frac{1}{2}(\nu-k-1)(k-3)^2 & k\text{ 为奇数} \end{cases} \tag{5}$$

证明 对所有 $j = 1, 2, \cdots, k$,用 c_j 表示 G 中距离为 j 的有序点对数. 显然有:

$$\sigma(G) = \sum_{j=1}^{k} j c_j, \quad c_1 = 2\varepsilon, \quad \sum_{j=2}^{k} c_j = \nu(\nu - 1) - 2\varepsilon$$

因此可以得到:

$$\sigma(G) = c_1 + \sum_{j=2}^{k} j c_j = c_1 + 2\sum_{j=2}^{k} c_j + \sum_{j=2}^{k} (j-2) c_j = 2\nu(\nu - 1) - 2\varepsilon + S \tag{6}$$

其中 $S = \sum_{j=2}^{k} (j-2) c_j$.

由式(6),只需要考虑距离大于 2 的点对. 令 $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ 为 G 中长为 k 的最短路, c_p^l 表示点集 $V_P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ 中距离为 $l(1 \le l \le k)$ 的点对数. 显然有:

$$d_G(x_i, y_j) = |i - j| \ (0 \le i, j \le k), \quad c_p^l = k + 1 - l$$

由此可知路 P 上距离大于 2 的点对对 S 的贡献为:

$$S_P = 2\sum_{l=3}^{k} (l-2) c_p^l = 2\sum_{l=3}^{k} (l-2)(k+1-l) = \frac{1}{3} k(k-1)(k-2) \tag{7}$$

对任意顶点 $y \in V_O = V(G) \setminus V_P$,由 P 的最短性知:

$$d_G(x_i, y) + d_G(x_j, y) = d_G(y, x_i) + d_G(y, x_j) \ge |i - j|, \quad \forall x_i, x_j \in V_P$$

考虑 P 中点对 x_i, x_{k-i},注意到当 $|k - 2i| > 4$ 时, $d_G(x_{k-i}, y) + d_G(x_i, y) \ge |k - 2i| > 4$, 由抽屉原理, $d_G(x_i, y)$ 与 $d_G(x_{k-i}, y)$ 中至少有一个大于 2,因此会对 S 产生贡献,其贡献量至少为 $|k - 2i| - 4$. 同理, $d_G(y, x_i)$ 与 $d_G(y, x_{k-i})$ 亦会对 S 产生不少于 $|k - 2i| - 4$ 的贡献.

对所有点对 x_i, x_{k-i} 在 $|k - 2i| > 4$ 的条件下求和,即得 y 点对 S 的贡献为

$$S_y \ge \begin{cases} 2[2 + 4 + \cdots + (k-4)] = \frac{1}{2}(k-2)(k-4) & k \text{ 为偶数} \\ 2[1 + 3 + \cdots + (k-4)] = \frac{1}{2}(k-3)^2 & k \text{ 为奇数} \end{cases}$$

因此整个点集 V_O 对 S 的贡献为

$$S_O \ge |V_O| S_y \ge \begin{cases} \frac{1}{2}(\nu - k - 1)(k-2)(k-4) & k \text{ 为偶数} \\ \frac{1}{2}(\nu - k - 1)(k-3)^2 & k \text{ 为奇数} \end{cases} \tag{8}$$

注意到 $S \ge S_P + S_O$, 综合式(6)、(7)、(8),即可得到式(5).

利用同样的手法,可以得到定理 3 的有向图形式,证明省略.

定理 4 设 G 为有向 (ν, k) 图 $(k \ge 2)$,若 G 的规模为 ε, 则有:

$$\sigma(G) \ge \begin{cases} 2\nu(\nu - 1) - \varepsilon + \frac{1}{6}k(k-1)(k-2) + \frac{1}{4}(\nu - k - 1)(k-2)(k-4) & k \text{ 为偶数} \\ 2\nu(\nu - 1) - \varepsilon + \frac{1}{6}k(k-1)(k-2) + \frac{1}{4}(\nu - k - 1)(k-3)^2 & k \text{ 为奇数} \end{cases} \tag{9}$$

由定理 3 和定理 4,可以自然地得到:

推论 1 设 G 为 ν 阶图,规模为 ε, 则:

(a) $\sigma(G) \geq 2\nu(\nu-1)-2\varepsilon$, G为无向图

(b) $\sigma(G) \geq 2\nu(\nu-1)-\varepsilon$, G为有向图

且当图 G 的直径 $k \leq 2$ 时,上两式取到等号.

该推论亦即引言中提到的 Entringer,Ng 等人的结果[2,3].

利用 Ore 定理及其有向图的推广形式,消去定理 3 与定理 4 中的规模 ε,可以得到只依赖于阶数和直径的(ν,k) 图平均距离的下界,易知该下界好于 Plesnik 下界:

定理 5　对任意无向 (ν,k) 图 G,有:

$$\sigma(G) \geq \begin{cases} 2\nu(\nu-1)-2k+\frac{1}{3}k(k-1)(k-2)+\frac{1}{2}(\nu-k-1)(k^2-4k-2\nu) & k\text{ 为偶数} \\ 2\nu(\nu-1)-2k+\frac{1}{3}k(k-1)(k-2)+\frac{1}{2}(\nu-k-1)(k^2-4k-2\nu+1) & k\text{ 为奇数} \end{cases} \tag{10}$$

定理 6　对任意有向 (ν,k) 图 G,有:

$$\sigma(G) \geq \begin{cases} \nu^2+(k-3)\nu-\frac{k^2-k-4}{2}+\frac{k(k-1)(k-2)}{6}+\frac{(\nu-k-1)(k-2)(k-4)}{4} & k\text{ 为偶数} \\ \nu^2+(k-3)\nu-\frac{k^2-k-4}{2}+\frac{k(k-1)(k-2)}{6}+\frac{(\nu-k-1)(k-3)^2}{4} & k\text{ 为奇数} \end{cases} \tag{11}$$

3　结语

本文通过反向考虑 k 直径图的生成,推广了 Ore 定理,并得到了 (ν,k) 图平均距离的下界.这种分析方法是否能够更好地刻划图中各参数间的关系,尚需要更深入的相关研究才能回答.更细致地考察点集 V_O 中各点所服从的约束关系,以求得更精确的下界,或者将一般图特殊化,例如考虑正则图,可迁图平均距离的上下界等,都是值得作进一步研究的. Ore,Entringer,Ng,Plesnik 等人的结果已被广泛应用于网络拓扑结构分析中,试用本文所得结论修正这些结果,也是很有意义的.

参　考　文　献

[1] Ore O. Diameter in graphs[J]. Journal of Combinational Theory, 1968,5(1):75-81.

[2] Entringer R C, Jackson D E, Slater P J. Geodetic connectivity of graphs[J]. IEEE Transactions on Circuits Systems, 1977,24(2):460-463.

[3] Ng C P, Teh H H. On finite graphs of diameter 2[J]. Nanta Mathematics, 1966/67,1(1):72-75.

[4] Plesnik J. On the sum of all distances in a graph or digraph[J]. Journal of Graph Theory, 1984,1(1):1-21.

[5] Schoone A A, *et al*. Diameter increase caused by edge deletion[J]. Journal of Graph Theory, 1987,11(2):409-427.

[6] 韩国文,张忠良. 关于$(k-1)$容错直径或 k 直径的最大图[J]. 中国科学技术大学学报, 1995,25(3):324-329.

[7] Chung F R, *et al*. The forwarding index of communication network[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1987,33(2):224-232.

(下转第 479 页)

Construction and Calculation of Elastic Guide in Micro Displacement Worktable

HUANG Qi2sheng , ZHANG La2mei , YU Xiao2fen , WANG Yong2hong

(School of Instrument , Hefei University of Technology , Hefei 230009 , *China)*

Abstract : This paper presents the construction method and characteristic error calculation of the elastic leaf spring guide in a micro displacement worktable. It emphasizes on the method with which the inde2 pendent wheeling degrees of freedom in worktable can be produced by elastic guide loaded dissymmetri2 cally. Compared with the micro displacement worktable of three degrees of freedom bodied by flexible gemel , the micro displacement worktable of elastic leaf spring guide has some advantages. For exam2 ple , its freedom from principle errors and its simplicity in mechanical modelling. Therefore high dis2 placement accuracy can be obtained and the coupling between moving directions of the worktable is avoidable. Synchronously ,we can get the displacement by pasting strain slice on the elastic guide , thus simplifying the measuring system.

Key words : elastic leaf spring guide ;construction and calculation ;micro displacement worktable ; load distributed dissymmetrically ;three degrees of freedom in plane ;coupling

(上接第 413 页)

[8] Heydemann M C. On forwarding indices of net2 works[J]. Discrete Applied Mathematics , 1989 , 23 (1) : 1032 123.

[9] Aho A V , Hopcroft J E. Data Structures and Al2 gorithms [M]. Reading MA : Addison2 Wesley , 1983.

Extremal Problem on Diameter and Average Distance of Graphs

ZHOU Tao , XU Jun2 ming , LIU Jun

(Department of Mathematics , USTC , Hefei 230026 , *China)*

Abstract : The diameter and average distance of a graph are two important parameters for measuring the efficiency of interconnection networks. In the present paper , we investigate the constraint relationship among diameter , average distance , order and size of a graph. Considering that any graph can be ob2 tained by removing some edges from a complete graph , a short proof and a counterpart for a digraph of Oreps result is given. Using a similar method , a lower bound on average distance of a graph with diam2 eter is given , and combining this result with Oreps yields a new lower bound dependent only on the or2 der and diameter , which is better than Plesnikps.

Key words : graph theory ; diameter ; average distance ; lower bound ; extremal problem ; digraph