

垄断企业数字内容产品最优版权保护与定价决策

杨 栋, 凌六一

(中国科学技术大学管理学院, 安徽合肥 230026)

摘要: 随着科技的发展以及数字产品的市场需求增加, 盗版产品越来越多. 研究了垄断企业在存在版权保护成本的情况下, 在不同市场条件下对数字内容产品版权的最优决策(版权保护强度以及产品价格定价). 提出了一个版权保护成本函数, 并且具体刻画了版权保护成本与版权保护强度及产品价格之间的关系. 按照市场消费者情况, 将市场分为两种: 无盗版市场及盗版市场. 研究表明, 版权保护强度并不是越高越好; 且对于垄断企业来说: 当消费者盗版厌恶度较低时, 盗版市场与无盗版市场最终利润几乎无差异; 当消费者盗版厌恶度较高时, 不采取版权保护措施反而更有利.

关键词: 数字内容产品; 版权保护成本; 盗版; 搜索费用

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A doi: 10.3969/j.issn.0253-2778.2019.09.007

引用格式: 杨栋, 凌六一. 垄断企业数字内容产品最优版权保护与定价决策[J]. 中国科学技术大学学报, 2019, 49(9):740-750.

YANG Dong, LING Liuyi. Optimal copyright protection and pricing decision of digital content products in monopoly enterprise[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2019, 49(9):740-750.

Optimal copyright protection and pricing decision of digital content products in monopoly enterprise

YANG Dong, LING Liuyi

(School of Management, University of Science and Technology of China, Anhui 230026, China)

Abstract: With the development of technology and the increasing market demand for digital products, there are more and more pirated products. The optimal decision (intensity of copyright protection and product pricing) of a monopoly enterprise for the copyright of digital content products was studied under different market conditions and the existence of copyright protection cost. A cost function of copyright protection was given, which specifically depicts the relationship between copyright protection cost, copyright protection intensity and product price. According to the situation of consumers, the market was divided into two types: non-piracy market and piracy market. The results show that the copyright protection intensity is not as high as possible. In addition, when consumer piracy aversion is low, the profit of the piracy market is almost the same as that of the non-piracy market; when consumer piracy aversion is high, it is more beneficial not to take copyright protection measures for the monopoly enterprise.

Key words: digital content product; copyright protection cost; piracy; search cost

收稿日期: 2019-03-14; **修回日期:** 2019-04-22

基金项目: 国家自然科学基金(71671175, 71631006)资助.

作者简介: 杨栋, 男, 1993年生, 硕士. 研究方向: 版权供应链管理. E-mail: sa162040@mail.ustc.edu.cn

通讯作者: 凌六一, 博士/副教授. E-mail: lyling@ustc.edu.cn

0 引言

随着科技的快速发展,数字内容产品的使用规模得以大幅度提高,但是随之而来的是愈发猖獗的盗版行为。例如电子书、电子游戏、在线音乐以及网络视频等产品,它们都具备前所未有的易于数字化、复制和传播特性,并且几乎与初始正版产品没有任何质量下降^[1]。正是由于数字内容产品这种易于数字化、复制和传播的特性,使得企业在版权保护方面面临很大的困境。版权保护的成为影响企业版权保护抉择的一个重要因素。

在学术界,关于企业是否应该采取版权保护措施一直存在很大争议。Guo 和 Meng^[1]认为版权保护措施有利于公司的发展。姚颖靖与彭辉^[2]认为应该辩证地看待版权保护措施,过于严厉或过于宽松的版权保护措施都不利于版权贸易的发展。Gu 和 Mahajan^[3]则认为盗版软件对于软件销售有利。Marechal^[4]建议唱片公司放弃严格的版权保护措施。董雪兵和朱慧^[5]认为过于严苛的版权保护措施不利于创新。

本文假设垄断企业的版权保护成本与版权保护强度及产品价格有关,并且提出了一个版权保护成本函数来具体描述它们之间的关系。而消费者对于正版产品以及盗版产品都存在一个效用。消费者有三种选择:购买正版产品、搜索盗版产品以及不消费。与此同时,在垄断企业决定版权保护强度之后,消费者搜索盗版产品时,有一个搜索费用,而购买正版产品时不存在搜索费用。本文通过比较消费者的效用大小,得出消费者需求曲线,再计算出企业的最优版权保护强度及定价决策,得出企业最大利润,从而为企业对数字内容产品的版权保护强度以及定价决策提供判断依据。

本文的主要创新之处在于所提出的版权保护成本函数。以前关于版权保护强度建模均只将版权保护成本作为一个参数加入模型进行研究,并未对版权保护成本函数进行具体刻画。因为在实践中存在政府与企业协同保护版权,因此,本文的版权保护成本函数考虑了政府的监管力度以及企业版权保护强度。且因为版权价格越高时盗版获利可能越大,该函数还考虑了版权价格。

1 文献回顾

目前学术界关于版权保护的研究主要分为三个

方向:①法律角度;②实证分析;③构建模型。本文就是通过构建模型来研究垄断企业版权最优版权保护强度以及定价决策问题。

贺小霞^[6]、张飞相等^[7]和林旭东等^[8]从法律角度来研究版权保护问题。他们均强调了通过加大盗版惩罚力度,降低企业防范盗版成本来减少企业版权保护总成本的必要性。本文在参考前人研究的基础上,考虑到实际中版权保护措施由政府以及企业协同进行,因此本文将政府处罚力度设为外部变量,将企业版权保护强度设为内部变量分别进行考虑。姚颖靖和彭辉^[2]、彭辉^[9]以及姚林青和李跻嵘^[10]通过实证的方式研究了版权保护成本与版权贸易价格之间的关系。基于前人研究成果并结合现实情况,本文将版权贸易价格考虑到了版权保护成本函数之中,并且具体刻画了它们之间的关系。

有许多学者是通过构建模型的方式来研究版权保护问题。Yoon^[11]与 Inceoglu^[12]都认为:版权保护强度越高,消费者搜索盗版产品的成本越大,使用盗版产品的效用越低。Ahn 和 Shin^[13]在构建 DRM 模型时假设:增加版权保护强度会降低消费者对于正版产品的效用,同时提高消费盗版产品的成本。Tunca 和 Wu^[14]根据消费者是否具有复制产品的能力将消费者分成两种类型,并且消费者存在盗版获利的可能。Guo 和 Meng^[1]根据对盗版产品的厌恶程度将消费者分为两种类型,但是消费者不存在盗版获利的可能。Hann 和 Oh^[15]则是建立了一个描述动态盗版行为供需关系的模型,并且从减少供给和减少需求两方面来分析反盗版措施的影响。然而,他们在构建模型的过程中,都忽视了对版权保护成本与其相关因素之间关系的具体刻画。

2 模型

本文假设市场上存在一个垄断企业,它生产数字内容产品,包括电子书、电子游戏、在线音乐、网络视频等。该产品的创造成本为 C ,由于不影响决策,我们不妨假设 $C=0$ 。并且,本文假设该产品的边际生产成本为 0。市场上同时存在盗版产品,且该盗版产品与正版产品没有质量差异,但消费者清楚地知道自己使用的是正版产品还是盗版产品。本文不考虑消费者通过分享正版产品或盗版产品盈利的情况,而垄断企业与消费者都符合经济人假设。考虑到在许多成熟的市场中,网络效应或竞争的影响是比较微弱的^[1]。例如微软操作系统的中国市场,用户增

长率低,市场占有率高,新增一个用户对其他用户的影响微乎其微.所以本文所提出的模型构建并未考虑需求侧的外部性以及供给侧的外部性.

2.1 消费者净效用

本文假设消费者的总数为 1.且每个消费者至多消费一个产品.对于消费者来说,使用正版产品有一个效用 v ,而使用盗版产品也有一个效用 $(1-\alpha)v$,且不进行消费时效用为 0.效用 v 在 $[0, 1]$ 之间均匀分布.而系数 α 代表消费者对于盗版产品的厌恶程度,厌恶度越高, α 值越大,使用盗版产品的效用越小. α 满足关系式 $0 < \alpha < 1$,即对于消费者而言,使用盗版产品所获得的效用,比正版产品的低,比不消费时的高.

消费者购买正版产品的净效用:

$$U_G = v - p \tag{1}$$

式中, U_G 为消费者购买正版产品所获得的净效用,而 p 为垄断企业正版产品价格.

消费者使用盗版产品的净效用:

$$U_P = (1-\alpha)v - \beta\gamma f \tag{2}$$

式中, U_P 为消费者使用盗版产品所获得的净效用;而 β 为垄断企业所采取的版权保护强度,且 $\beta \geq 0$,即企业采取的版权保护强度至少非负; γ 为政府对侵权行为的处罚力度,且 $\gamma > 0$,即政府对侵权行为的处罚力度为正; f 为单位搜索成本,且 $f > 0$,即单位搜索成本为正值;并且, γ 与 f 属于公共信息,而 β 也很容易被消费者感知.例如起点网站采取的版权保护措施,小说内容无法复制粘贴,极大地增加了盗版的难度,导致网络上相关小说章节变得难以获取,进而增加了读者搜索盗版产品的成本.

通过式(2),我们可以发现,当企业的版权保护强度越高,政府对侵权处罚力度越大,单位搜索成本越高,消费者搜索盗版产品的总体搜索成本 $\beta\gamma f$ 越大.并且,存在 $1-\alpha-\beta\gamma f \geq 0$,即肯定有消费者使用盗版产品时会获得一个正的净效用.

消费者不消费该产品的净效用:

$$U_N = 0 \tag{3}$$

式中, U_N 为消费者不消费该产品时所获得的净效用.

2.2 消费者需求

当消费者使用正版产品的净效用大于消费者使用盗版产品的净效用,且消费者使用正版产品的净效用大于消费者不消费产品时的净效用,即 $\{U_G \geq U_P\} \cap \{U_G \geq U_N\}$ 时,消费者才会选择购

买正版产品,从而我们可以计算出消费者购买正版产品的数量,即消费者需求.

消费者需求:

$$D = \begin{cases} 1-p, & p \in \left(0, \frac{\beta\gamma f}{1-\alpha}\right]; \\ 1 + \frac{\beta\gamma f - p}{\alpha}, & p \in \left[\frac{\beta\gamma f}{1-\alpha}, \alpha + \beta\gamma f\right) \end{cases} \tag{4}$$

式中, D 为购买正版产品的消费者的数量.从上述表达式中,我们可以发现:在 $0 < p \leq \frac{\beta\gamma f}{1-\alpha}$ 时,消费者只会选择购买正版产品或者不消费该产品,此时效用 $p < v \leq 1$ 的消费者选择购买正版产品,效用 $0 \leq v \leq p$ 的消费者选择不消费该产品;在 $\frac{\beta\gamma f}{1-\alpha} \leq p < \alpha + \beta\gamma f$ 时,消费者会进行三种选择,此时效用 $0 \leq v \leq \frac{\beta\gamma f}{1-\alpha}$ 的消费者选择不消费该产品,效用 $\frac{\beta\gamma f}{1-\alpha} < v \leq \frac{p-\beta\gamma f}{\alpha}$ 的消费者会选择搜索盗版产品,而效用 $\frac{p-\beta\gamma f}{\alpha} < v \leq 1$ 的消费者选择购买正版产品.

2.3 垄断企业利润函数

本文在参考 Guo 和 Meng^[1]研究的基础上,假设垄断企业先决策该产品的版权保护强度 β ,再决策该产品的定价 p .因为考虑到现实情况,企业的版权保护策略是一种长期策略,而企业版权定价则是一种短期战术决策,所以事件发生顺序如图 1 所示.消费者在获取这些决策信息之后,做出选择:购买正版产品,搜索盗版产品,或者选择不消费该产品.最终,企业确定产品需求,进而计算出企业利润.

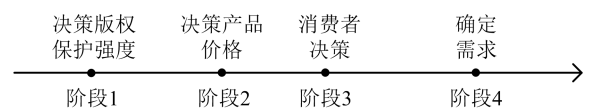


图 1 事件发生顺序

Fig. 1 Timing of the events

企业利润函数:

$$\pi(p, \beta) = Dp - \frac{\beta}{\gamma} p^2 \tag{5}$$

式中, $\pi(\beta, p)$ 为企业的净利润; $\frac{\beta}{\gamma} p^2$ 为在该市场情况下垄断企业的版权保护成本.当政府对盗版的处罚力度越低、产品的价格越高时,企业的版权保护成本越高.

将式(4)代入式(5)中,我们可以得到企业的最终利润函数:

$$\pi(p, \beta) = \begin{cases} (1-p)p - \frac{\beta}{\gamma}p^2, & \left(0, \frac{\beta\gamma f}{1-\alpha}\right]; \\ \left(1 + \frac{\beta\gamma f - p}{\alpha}\right)p - \frac{\beta}{\gamma}p^2, & \left[\frac{\beta\gamma f}{1-\alpha}, \alpha + \beta\gamma f\right) \end{cases} \quad (6)$$

3 模型分析与结果

由节 2.2 可知:当 $0 < p \leq \frac{\beta\gamma f}{1-\alpha}$ 时,消费者不会考虑搜索盗版产品;当 $\frac{\beta\gamma f}{1-\alpha} \leq p < \alpha + \beta\gamma f$ 时,盗版产品才会对正版产品的销售量产生负面影响.因此,我们将这两种情况分别称为:无盗版市场与盗版市场.同时我们可以发现,在无盗版市场中,对产品效用较低的消费者选择不消费,而效用较高的消费者选择购买正版产品;在盗版市场中,对产品效用较低的消费者选择不消费,效用居中的消费者选择搜索盗版产品,只有效用较高的消费者才会选择购买正版产品.

3.1 无盗版市场分析

当市场呈现无盗版市场的状态时,由于垄断企业定价较低,使得盗版产品缺乏竞争力,市场上不存在使用盗版产品的消费者.此时,垄断企业的利润函数:

$$\pi_1(p, \beta) = (1-p)p - \frac{\beta}{\gamma}p^2 \quad (7)$$

同时,企业的最优决策为

$$\max_{p, \beta} \pi_1(p, \beta) \quad (8)$$

定理 3.1 当企业决定使市场呈现无盗版市场的状态时,有

①当 $\beta \geq \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{\gamma^2}{4}} - \frac{\gamma}{2}$ 时,

$$\beta^* = \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{\gamma^2}{4}} - \frac{\gamma}{2},$$

$$p^* = \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{2(1-\alpha)}{f} + \gamma^2} + \gamma},$$

$$\pi_1^1(p^*, \beta^*) = \frac{\gamma}{2\sqrt{\frac{2(1-\alpha)}{f} + \gamma^2} + 2\gamma};$$

②当 $0 \leq \beta < \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{\gamma^2}{4}} - \frac{\gamma}{2}$ 时,

$$\beta^* = \sqrt{\frac{1-\alpha}{3f} + \frac{\gamma^2}{9}} - \frac{\gamma}{3},$$

$$p^* = \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{3(1-\alpha)}{f} + \gamma^2} + \gamma},$$

$$\pi_1^2(p^*, \beta^*) = p^* - p^{*2} - \frac{1-\alpha}{\gamma^2 f} p^{*3}.$$

证明见附录 A1.

定理 3.1 意味着:当企业决定使市场呈现无盗版市场的状态时,企业若采取较强的版权保护措施,则可以获得产品的最优定价,且此时的最优定价与临界值相等.若企业决定采取较弱的版权保护措施,则可以获得最优版权保护强度,且此时的产品价格为临界值.

定理 3.1 的意义在于其为垄断企业提供了如何使市场呈现无盗版市场状态且最优的版权保护强度及定价决策.采取较强的版权保护措施时,可以获得最优的产品定价;而采取较弱版权保护强度时,则会获得最优版权保护强度;两者无法同时达到最优.

推论 3.1

①当 $\beta \geq \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{\gamma^2}{4}} - \frac{\gamma}{2}$ 时,

$$\frac{\partial \beta^*}{\partial \alpha} < 0, \frac{\partial \beta^*}{\partial f} < 0, \frac{\partial \beta^*}{\partial \gamma} < 0,$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial \alpha} > 0, \frac{\partial p^*}{\partial f} > 0, \frac{\partial p^*}{\partial \gamma} > 0,$$

$$\frac{\partial \pi_1^1}{\partial \alpha} > 0, \frac{\partial \pi_1^1}{\partial f} > 0, \frac{\partial \pi_1^1}{\partial \gamma} > 0.$$

②当 $0 \leq \beta < \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{\gamma^2}{4}} - \frac{\gamma}{2}$ 时,

$$\frac{\partial \beta^*}{\partial \alpha} < 0, \frac{\partial \beta^*}{\partial f} < 0, \frac{\partial \beta^*}{\partial \gamma} < 0,$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial \alpha} > 0, \frac{\partial p^*}{\partial f} > 0, \frac{\partial p^*}{\partial \gamma} > 0,$$

$$\frac{\partial \pi_1^2}{\partial \alpha} > 0, \frac{\partial \pi_1^2}{\partial f} > 0, \frac{\partial \pi_1^2}{\partial \gamma} > 0.$$

证明见附录 A2.

推论 3.1 意味着:无论企业采取较强的版权保护措施还是采取较弱的版权保护措施,版权保护强度、产品价格和企业利润分别都随着消费者盗版厌恶度、单位搜索费用以及政府惩罚力度的增加而降低、增加和增加.

3.2 盗版市场分析

当市场呈现盗版市场的状态时,由于垄断企业

定价较高,使得正版产品缺乏竞争力,市场上存在使用盗版产品的消费者.此时,垄断企业的利润函数为

$$\pi_2(p, \beta) = (1 + \frac{\beta\gamma f - p}{\alpha})p - \frac{\beta}{\gamma}p^2 \quad (9)$$

同时,企业的最优决策为

$$\max_{p, \beta} \pi_2(p, \beta) \quad (10)$$

定理 3.2 当企业决定使市场呈现盗版市场的状态时,有

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \beta > \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2\gamma^2}{16\alpha^2}} - \frac{(1+\alpha)\gamma}{4\alpha}, \gamma^2 f \geq \frac{2\alpha^2}{1+3\alpha} \text{ 时,}$$

$$\beta^* = \sqrt{\frac{1-\alpha}{3f} + \frac{\gamma^2}{9\alpha^2}} - \frac{\gamma}{3},$$

$$p^* = \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{3(1-\alpha)}{f} + \gamma^2} + \gamma},$$

$$\pi_2^1(p^*, \beta^*) = p^* - p^{*2} - \frac{1-\alpha}{\gamma^2 f} p^{*3};$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } 0 \leq \beta \leq \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2\gamma^2}{16\alpha^2}} - \frac{(1+\alpha)\gamma}{4\alpha}, 0 < \alpha^2 \leq 2\gamma^2 f \text{ 时,}$$

$$\beta^* = \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2\gamma^2}{16\alpha^2}} - \frac{(1+\alpha)\gamma}{4\alpha},$$

$$p^* = \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{2(1-\alpha)}{f} + \frac{(1+\alpha)^2\gamma^2}{4\alpha^2}} + \frac{(1+\alpha)\gamma}{2\alpha}},$$

$$\pi_2^2(p^*, \beta^*) = p^* - p^{*2} - \frac{1-\alpha}{\gamma^2 f} p^{*3};$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } 0 \leq \beta \leq \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2\gamma^2}{16\alpha^2}} - \frac{(1+\alpha)\gamma}{4\alpha}, 2\gamma^2 f < \alpha^2 < (3-\alpha)\gamma^2 f \text{ 时, 最优解为两个边界值, 即 } \beta^* = 0, p^* = \frac{\alpha}{2}, \pi_2^3(p^*, \beta^*) = \frac{\alpha}{4} \text{ 或}$$

$$\beta^* = \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2\gamma^2}{16\alpha^2}} - \frac{(1+\alpha)\gamma}{4\alpha},$$

$$p^* = \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{2(1-\alpha)}{f} + \frac{(1+\alpha)^2\gamma^2}{4\alpha^2}} + \frac{(1+\alpha)\gamma}{2\alpha}},$$

$$\pi_2^3(p^*, \beta^*) = p^* - p^{*2} - \frac{1-\alpha}{\gamma^2 f} p^{*3};$$

$$\textcircled{4} \text{ 当 } 0 \leq \beta \leq \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2\gamma^2}{16\alpha^2}} - \frac{(1+\alpha)\gamma}{4\alpha},$$

$$(3-\alpha)\gamma^2 f \leq \alpha^2 < 1 \text{ 时,}$$

$$\beta^* = 0, p^* = \frac{\alpha}{2}, \pi_2^4(p^*, \beta^*) = \frac{\alpha}{4}.$$

证明见附录 A3.

定理 3.2 意味着:当企业决定采取较强的版权保护措施,且市场满足一定条件时,企业只可以获得最优版权保护强度,并且此时的价格为临界值;当企业决定采取的版权保护措施并不强,且消费者对盗版的厌恶较低时,企业可以获得最优定价,并且此时的最优定价与临界值相等;当企业决定采取的版权保护措施并不强,且消费者对盗版的厌恶较高时,企业可以获得最优定价,并且此时的版权保护强度为边界值;当企业决定采取的版权保护措施并不强,且消费者对盗版的厌恶很高时,企业可以获得最优定价,并且此时企业的版权保护强度为 0,产品定价只与消费者对盗版的厌恶度有关.

定理 3.2 为垄断企业提供了在存在盗版市场时如何确定最优版权保护强度以及最优产品价格.在采取较强的版权保护措施时,企业能获得最优版权保护强度;在采取较弱版权保护强度时,企业可以获得最优定价;在消费者对盗版的厌恶度很高时,企业不需要采取版权保护措施.

推论 3.2

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \beta > \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2\gamma^2}{16\alpha^2}} - \frac{(1+\alpha)\gamma}{4\alpha}, \gamma^2 f \geq \frac{2\alpha^2}{1+3\alpha} \text{ 时,}$$

$$\frac{\partial \beta^*}{\partial \alpha} < 0, \frac{\partial \beta^*}{\partial f} < 0, \frac{\partial \beta^*}{\partial \gamma} < 0,$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial \alpha} > 0, \frac{\partial p^*}{\partial f} > 0, \frac{\partial p^*}{\partial \gamma} > 0,$$

$$\frac{\partial \pi_2^1}{\partial \alpha} > 0, \frac{\partial \pi_2^1}{\partial f} > 0, \frac{\partial \pi_2^1}{\partial \gamma} > 0;$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } 0 \leq \beta \leq \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2\gamma^2}{16\alpha^2}} - \frac{(1+\alpha)\gamma}{4\alpha}, 0 < \alpha^2 \leq 2\gamma^2 f \text{ 时,}$$

$$\frac{\partial \beta^*}{\partial f} < 0, \frac{\partial \beta^*}{\partial \gamma} < 0,$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial \alpha} > 0, \frac{\partial p^*}{\partial f} > 0, \frac{\partial p^*}{\partial \gamma} > 0,$$

$$\frac{\partial \pi_2^*}{\partial \alpha} > 0, \frac{\partial \pi_2^*}{\partial f} > 0, \frac{\partial \pi_2^*}{\partial \gamma} > 0;$$

③ 当 $0 \leq \beta \leq \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2 \gamma^2}{16\alpha^2}} - \frac{(1+\alpha)\gamma}{4\alpha}$, $0 < \alpha^2 \leq 2\gamma^2 f$ 时, 若 $0 < \alpha < \frac{\sqrt{6}-1}{5}$, $\frac{\partial \beta^*}{\partial \alpha} > 0$; 若 $\sqrt{2}-1 \leq \alpha \leq \gamma\sqrt{2f}$, $\frac{\partial \beta^*}{\partial \alpha} < 0$.

证明见附录 A4.

推论 3.2 意味着: 在企业采取较强的版权保护措施时, 版权保护强度、产品价格和企业利润都分别随着消费者盗版厌恶度、单位搜索费用以及政府惩罚力度的增加而降低、增加和增加; 在企业采取较弱的版权保护措施时, 版权保护强度、产品价格和企业利润都分别随着单位搜索费用以及政府惩罚力度的增加而降低、增加和增加; 并且, 在企业采取较弱的版权保护措施时, 若消费者盗版厌恶度较小, 则版权保护强度随着消费者盗版厌恶度的增加而增加; 若消费者盗版厌恶度较大, 则版权保护强度随着消费者盗版厌恶度的增加而降低.

3.3 两种市场对比分析

为简化计算, 同时使结果更加分明, 我们使用了一组数例来抉择出不同市场条件下(无盗版市场、盗版市场)垄断企业最优版权保护强度以及产品价格决策. 同时, 我们分析了消费者盗版厌恶度 α 系数对垄断企业最优决策的影响. 数例中, 假设 $\gamma = 0.25$, $f = 1$.

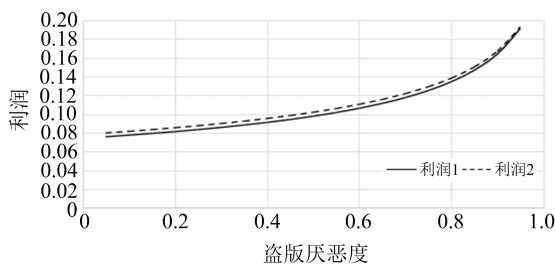


图 2 无盗版市场利润对比

Fig. 2 Profit comparison in non-piracy market

3.3.1 无盗版市场最优决策

图 2 表示的是无盗版市场两种决策的利润对比. 利润 1 和利润 2 分别是垄断企业在无盗版市场中, 采取较高的版权保护强度时的利润和采取较低的版权保护强度时的利润. 由图 2 可知, 在无盗版市场中, 相比于较高的版权保护强度, 采取较低的版权保护强度, 对垄断企业更加有利; 无论消费者的盗版

厌恶度是多少, 企业采取较低的版权保护强度都会获得较高利润.

3.3.2 盗版市场最优决策

图 3 表示的是盗版市场两种决策的利润对比. 利润 1 和利润 2 分别是垄断企业在盗版市场中, 采取较高的版权保护强度时的利润和采取较低的版权保护强度时的利润. 图 3 中, 当厌恶度在 $(0 \sim 0.2)$ 时, 利润 1 线条在利润 2 线条上面, 且相差较大; 当厌恶度在 $(0.2 \sim 0.35)$ 时, 利润 1 线条在利润 2 线条上面, 但相差不大; 当厌恶度在 $(0.35 \sim 1.0)$ 时, 利润 1 线条跟利润 2 线条重合. 由图 3 可知, 在盗版市场中, 当消费者的盗版厌恶度较低 $(0 \sim 0.2)$ 时, 企业采取较高强度的版权保护措施, 会更加有利; 而当消费者的盗版厌恶度中等 $(0.2 \sim 0.35)$ 时, 企业采取较低强度的版权保护措施, 会更加有利; 而当消费者的盗版厌恶度较高 $(0.35 \sim 1.0)$ 时, 企业不采取版权保护措施, 会更加有利.

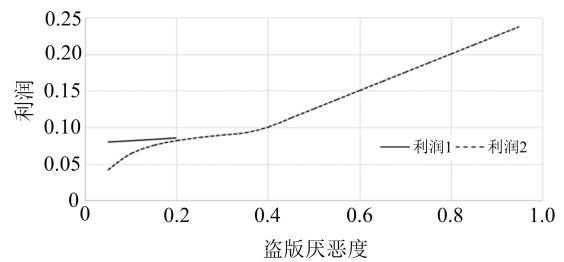


图 3 盗版市场利润对比

Fig. 3 Profit comparison in pirate market

3.3.3 垄断企业最优决策

图 4 表示的是无盗版市场与盗版市场的利润对比. 实线和虚线分别是垄断企业在无盗版市场和盗版市场中, 采取最优决策时的利润曲线. 由图 4 可知, 当消费者盗版厌恶度较低 $(0 \sim 0.2)$ 时, 企业在无盗版市场与盗版市场的最优决策相同, 所获利润相等; 当消费者盗版厌恶度中等 $(0.2 \sim 0.35)$ 时, 企业在无盗版市场所获利润稍高于盗版市场所获利润;

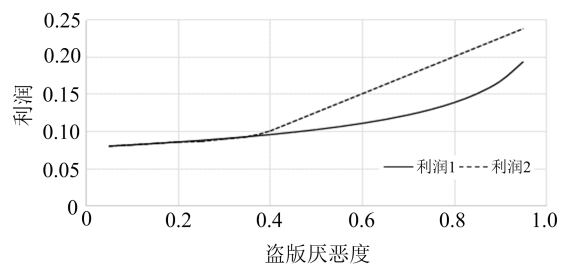


图 4 两种市场利润对比

Fig. 4 Profit comparison between two markets

当消费者盗版厌恶度较高(0.35~1.0)时,企业在盗版市场所获利润高于无盗版市场所获利润,且此时的最优版权保护强度为 0.

4 结论

本文创新性地定义了一个版权保护成本的函数关系式.在考虑版权保护成本的情况下,对比了垄断企业在无盗版市场和盗版市场两种市场情况下的最优利润,得出了垄断企业在不同消费者盗版厌恶度的条件下关于版权保护强度以及产品定价的最优决策.

研究发现,版权保护强度并不是越高越好.且对于垄断企业来说:当消费者盗版厌恶度较低时,盗版市场与无盗版市场最终利润几乎无差异;当消费者盗版厌恶度较高时,不采取版权保护措施反而更有利.本文为数字内容产品版权保护研究拓宽了范围,为版权保护成本建模提供了一定参考,同时也为垄断企业版权保护最优决策提供了借鉴.

本文只考虑了一个垄断企业的情况,如果存在两个企业相互竞争,企业的决策可能会发生变化;而且没有考虑盗版对企业未来的销售产生的影响以及多个企业共同拥有的版权应该如何保护等.未来将对以上问题进行进一步研究.

参考文献(References)

- [1] GUO Liang, MENG Xiangyi. Digital content provision and optimal copyright protection [J]. *Management Science*, 2015, 61(5):1183-1196.
- [2] 姚颖靖,彭辉.版权保护与版权贸易关系的实证研究:基于 56 个国家和地区的数据分析[J]. *科技与法律*, 2011(1):92-96.
- YAO Jiejing, PENG Hui. The empirical research on relationship between copyright protection and copyright trade[J]. *Science Technology and Law*, 2011(1): 92-96.
- [3] GU B, MAHAJAN V. How much anti-piracy effort is too much? A study of the global software industry[EB/OL]. [2019-04-17]. https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=825165.
- [4] MARECHAL S. DRM on audio CDs abolished [EB/OL]. [2019-04-17]. <http://lxer.com/module/newswire/view/78008/>.
- [5] 董雪兵,朱慧.知识产权保护与文化创意产业发展:模式选择及实证研究[C]//2010 年度中国法经济学论坛论文集(上册).北京:《经济研究》编辑部,2010:127-141.
- [6] 贺小霞.网络时代的版权保护困局初探[J]. *传播与版权*, 2014(6):259-259.
- [7] 张飞相,杨扬,陈敬良.基于博弈论视角的版权保护策略研究[J]. *企业经济*, 2015(3):63-67.
- [8] 林旭东,马利军,田歆.数字盗版控制策略研究综述与展望:法律、技术与企业运营层面的分析视角[J]. *管理评论*, 2018, 30(6):95-105.
- LIN Xudong, MA Lijun, TIAN Xin. Review of digital piracy control strategies from the perspectives of law, technique and business operation [J]. *Management Review*, 2018, 30(6):95-105.
- [9] 彭辉.版权保护制度理论与实证研究[M].上海:上海社会科学院出版社,2012:41-47.
- [10] 姚林青,李跻嵘.版权保护与音乐产业关系的实证研究[J]. *现代传播(中国传媒大学学报)*, 2015, 37(2):110-116.
- [11] YOON K. The optimal level of copyright protection [J]. *Information Economics and Policy*, 2002, 14(3):327-348.
- [12] INCEOGLU F. Copyright protection and entry deterrence [J]. *Information Economics and Policy*, 2015, 32:38-45.
- [13] AHN I, SHIN I. On the optimal level of protection in DRM [J]. *Information Economics and Policy*, 2010, 22(4):341-353.
- [14] TUNCA T I, WU Q. Fighting fire with fire: Commercial piracy and the role of file sharing on copyright protection policy for digital goods [J]. *Information Systems Research*, 2013, 24(2):436-453.
- [15] HANN I H, OH J H. Combating prerelease piracy: Modeling the effects of antipiracy measures in P2P networks [J]. *INFORMS Journal on Computing*, 2016, 29(1):92-107.

附录

A1 定理 3.1 证明

首先,求解无盗版市场情况下,价格:

$$\frac{\partial \pi_1(p, \beta)}{\partial p} = 1 - 2p - 2 \frac{\beta}{\gamma} p = 0, \frac{\partial^2 \pi_1(p, \beta)}{\partial p^2} < 0,$$

此时最优定价为 $p = \frac{\gamma}{2(\beta + \gamma)}$.

假如 $0 < p^* \leq \frac{\beta \gamma f}{1 - \alpha}$, 则此时的版权保护强度为: $\beta \geq \sqrt{\frac{1 - \alpha}{2f} + \frac{\gamma^2}{4}} - \frac{\gamma}{2}$, $p^* = \frac{\gamma}{2(\beta + \gamma)}$; 假如 $p^* > \frac{\beta \gamma f}{1 - \alpha}$, 则此时的版权保护强度为: $0 \leq \beta < \sqrt{\frac{1 - \alpha}{2f} + \frac{\gamma^2}{4}} - \frac{\gamma}{2}$, $p^* = \frac{\beta \gamma f}{1 - \alpha}$.

当 $\beta \geq \sqrt{\frac{1 - \alpha}{2f} + \frac{\gamma^2}{4}} - \frac{\gamma}{2}$ 时, $\frac{\partial \pi_1(p, \beta)}{\partial \beta} = -\frac{\gamma}{4(\beta + \gamma)^2} < 0$, 最优版权保护强度为

$$\beta^* = \sqrt{\frac{1 - \alpha}{2f} + \frac{\gamma^2}{4}} - \frac{\gamma}{2},$$

$$p^* = \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{2(1 - \alpha)}{f} + \gamma^2} + \gamma},$$

$$\pi_1^1(p^*, \beta^*) = \frac{1}{2} p^* = \frac{\gamma}{2\sqrt{\frac{2(1 - \alpha)}{f} + \gamma^2} + 2\gamma}.$$

当 $0 \leq \beta < \sqrt{\frac{1 - \alpha}{2f} + \frac{\gamma^2}{4}} - \frac{\gamma}{2}$ 时, $\frac{\partial \pi_1(p, \beta)}{\partial \beta} = \frac{\gamma f}{1 - \alpha} - \frac{2\beta \gamma^2 f^2 + 3\beta^2 \gamma f^2}{(1 - \alpha)^2} = 0$, $\frac{\partial^2 \pi_1(p, \beta)}{\partial \beta^2} < 0$, 最优版权保护强度为

$$\beta^* = \sqrt{\frac{1 - \alpha}{3f} + \frac{\gamma^2}{9}} - \frac{\gamma}{3},$$

$$p^* = \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{3(1 - \alpha)}{f} + \gamma^2} + \gamma},$$

$$\pi_1^2(p^*, \beta^*) = p^* - p^{*2} - \frac{1 - \alpha}{\gamma^2 f} p^{*3}.$$

显然: $\sqrt{\frac{1 - \alpha}{3f} + \frac{\gamma^2}{9}} - \frac{\gamma}{3} < \sqrt{\frac{1 - \alpha}{2f} + \frac{\gamma^2}{4}} - \frac{\gamma}{2}$.

A2 推论 3.1 证明

当 $\beta \geq \sqrt{\frac{1 - \alpha}{2f} + \frac{\gamma^2}{4}} - \frac{\gamma}{2}$ 时,

$$\frac{\partial \beta^*}{\partial \alpha} < 0, \frac{\partial \beta^*}{\partial f} < 0, \frac{\partial \beta^*}{\partial \gamma} < 0,$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial \alpha} > 0, \frac{\partial p^*}{\partial f} > 0, \frac{\partial p^*}{\partial \gamma} > 0,$$

$$\frac{\partial \pi_1^1}{\partial \alpha} > 0, \frac{\partial \pi_1^1}{\partial f} > 0, \frac{\partial \pi_1^1}{\partial \gamma} > 0;$$

当 $0 \leq \beta < \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{\gamma^2}{4}} - \frac{\gamma}{2}$ 时,

$$\frac{\partial \beta^*}{\partial \alpha} < 0, \frac{\partial \beta^*}{\partial f} < 0, \frac{\partial \beta^*}{\partial \gamma} < 0,$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial \alpha} > 0, \frac{\partial p^*}{\partial f} > 0, \frac{\partial p^*}{\partial \gamma} > 0.$$

当 $0 \leq \beta < \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{\gamma^2}{4}} - \frac{\gamma}{2}$ 时,

$$\frac{\partial \pi_1^2}{\partial \alpha} = \left(1 - 2p^* - 3 \frac{1-\alpha}{\gamma^2 f} p^{*2}\right) \frac{\partial p^*}{\partial \alpha} + \frac{1}{\gamma^2 f} p^{*3},$$

$$\frac{\partial \pi_1^2}{\partial f} = \left(1 - 2p^* - 3 \frac{1-\alpha}{\gamma^2 f} p^{*2}\right) \frac{\partial p^*}{\partial f} + \frac{1-\alpha}{\gamma^2 f^2} p^{*3},$$

$$\frac{\partial \pi_1^2}{\partial \gamma} = \left(1 - 2p^* - 3 \frac{1-\alpha}{\gamma^2 f} p^{*2}\right) \frac{\partial p^*}{\partial \gamma} + 2 \frac{1-\alpha}{\gamma^3 f} p^{*3}.$$

此时, $1 - 2p^* - 3 \frac{1-\alpha}{\gamma^2 f} p^{*2} = 0$, 所以

$$\frac{\partial \pi_1^2}{\partial \alpha} > 0, \frac{\partial \pi_1^2}{\partial f} > 0, \frac{\partial \pi_1^2}{\partial \gamma} > 0.$$

A3 定理 3.2 证明

首先, 求解盗版市场情况下, 最优定价:

$$\frac{\partial \pi_2(p, \beta)}{\partial p} = \frac{1}{\alpha} \left[\alpha + \beta \gamma f - \frac{2(\gamma + \alpha \beta)}{\gamma} p \right] = 0, \frac{\partial^2 \pi_2(p, \beta)}{\partial p^2} < 0,$$

此时最优定价为 $p^* = \frac{\gamma(\alpha + \beta \gamma f)}{2(\gamma + \alpha \beta)}$.

假如 $\frac{\beta \gamma f}{1-\alpha} \leq p^* < \alpha + \beta \gamma f$, 则此时的版权保护强度为 $0 \leq \beta \leq \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2 \gamma^2}{16\alpha^2}} - \frac{(1+\alpha)\gamma}{4\alpha}$, $p^* = \frac{\gamma(\alpha + \beta \gamma f)}{2(\gamma + \alpha \beta)}$; 假如 $0 < p^* < \frac{\beta \gamma f}{1-\alpha}$, 则此时的版权保护强度为

$$\beta > \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2 \gamma^2}{16\alpha^2}} - \frac{(1+\alpha)\gamma}{4\alpha}, p^* = \frac{\beta \gamma f}{1-\alpha}.$$

当 $\beta > \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2 \gamma^2}{16\alpha^2}} - \frac{(1+\alpha)\gamma}{4\alpha}$ 时,

$$\frac{\partial \pi_2(p, \beta)}{\partial \beta} = \left(1 - \frac{\beta \gamma f}{1-\alpha}\right) \frac{\gamma f}{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha} \left(\gamma f - \frac{\gamma f}{1-\alpha}\right) \frac{\beta \gamma f}{1-\alpha} - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\beta \gamma f}{1-\alpha}\right)^2 - 2 \frac{\beta}{\gamma} \frac{\beta \gamma f}{1-\alpha} \frac{\gamma f}{1-\alpha} =$$

$$- 3 \frac{\gamma f^2}{(1-\alpha)^2} \left[\left(\beta + \frac{1}{3}\gamma\right)^2 - \frac{\gamma^2}{9} - \frac{1-\alpha}{3f} \right] = 0, \frac{\partial^2 \pi_2(p, \beta)}{\partial \beta^2} < 0,$$

最优版权强度为

$$\beta^* = \sqrt{\frac{1-\alpha}{3f} + \frac{\gamma^2}{9}} - \frac{\gamma}{3},$$

$$p^* = \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{3(1-\alpha)}{f} + \gamma^2} + \gamma},$$

$$\pi_2^1(p^*, \beta^*) = p^* - p^{*2} - \frac{1-\alpha}{\gamma^2 f} p^{*3}.$$

因为

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1-\alpha}{3f} + \frac{\gamma^2}{9}} - \frac{\gamma}{3} > \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2\gamma^2}{16\alpha^2}} - \frac{(1+\alpha)\gamma}{4\alpha} \rightarrow \\ & \frac{1-\alpha}{3f} \left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2\gamma^2}{16\alpha^2}} + \frac{(1+\alpha)\gamma}{4\alpha} \right) > \frac{1-\alpha}{2f} \left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{3f} + \frac{\gamma^2}{9}} + \frac{\gamma}{3} \right) \rightarrow \\ & \sqrt{\frac{2(1-\alpha)}{9f} + \frac{(1+\alpha)^2\gamma^2}{36\alpha^2}} + \frac{(1+\alpha)\gamma}{6\alpha} > \sqrt{\frac{1-\alpha}{3f} + \frac{\gamma^2}{9}} + \frac{\gamma}{3} \rightarrow \\ & -\frac{1-\alpha}{9f} + \left[\frac{(1+\alpha)^2\gamma^2}{36\alpha^2} - \frac{\gamma^2}{9} \right] \\ & \frac{\sqrt{\frac{2(1-\alpha)}{9f} + \frac{(1+\alpha)^2\gamma^2}{36\alpha^2}} + \frac{(1+\alpha)\gamma}{6\alpha} - \frac{\gamma}{3}}{\sqrt{\frac{1-\alpha}{3f} + \frac{\gamma^2}{9}} + \frac{\gamma}{3}} > 0 \rightarrow \\ & \frac{-\frac{1-\alpha}{9f} + 2 \left[\frac{(1+\alpha)^2\gamma^2}{36\alpha^2} - \frac{\gamma^2}{9} \right]}{A} \geq 0 \rightarrow \frac{1-\alpha}{9f} + 2 \left[\frac{(1+\alpha)^2\gamma^2}{36\alpha^2} - \frac{\gamma^2}{9} \right] \geq 0 \rightarrow \gamma^2 f \geq \frac{2\alpha^2}{1+3\alpha}. \end{aligned}$$

当 $0 \leq \beta \leq \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2\gamma^2}{16\alpha^2}} - \frac{(1+\alpha)\gamma}{4\alpha}$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_2(p, \beta)}{\partial \beta} &= \frac{1}{\alpha} \gamma f p - \frac{1}{\gamma} p^2 = \frac{\gamma(\alpha + \beta \gamma f)}{2(\gamma + \alpha \beta)} \frac{1}{2\alpha(\gamma + \alpha \beta)} (2\gamma^2 f + \alpha \beta \gamma f - \alpha^2) = 0, \\ \frac{\partial^2 \pi_2(p, \beta)}{\partial \beta^2} &= \frac{1}{\alpha} \gamma f \frac{\partial p}{\partial \beta} - \frac{1}{\gamma} 2p \frac{\partial p}{\partial \beta} = \left(\frac{1}{\alpha} \gamma f - \frac{1}{\gamma} 2p \right) \frac{\partial p}{\partial \beta} = \frac{\gamma^2 f - \alpha^2}{\alpha(\gamma + \alpha \beta)} \frac{\gamma^3 f - \gamma \alpha^2}{2(\gamma + \alpha \beta)^2} > 0, \end{aligned}$$

所以, 当 $\beta^* = \frac{\alpha^2 - 2\gamma^2 f}{\alpha \gamma f}$ 时, 利润取最小值.

当 $0 < \alpha^2 < \gamma^2 f$ 时, 此时最优版权保护强度为

$$\beta^* = \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2\gamma^2}{16\alpha^2}} - \frac{(1+\alpha)\gamma}{4\alpha};$$

当 $\alpha^2 = \gamma^2 f$ 时, 此时 $\frac{\partial \pi_2(p, \beta)}{\partial \beta} = \frac{\gamma f}{2}$, 单调递增,

$$\beta^* = \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2\gamma^2}{16\alpha^2}} - \frac{(1+\alpha)\gamma}{4\alpha};$$

当 $\gamma^2 f < \alpha^2 \leq 2\gamma^2 f$ 时,

$$\beta^* = \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2\gamma^2}{16\alpha^2}} - \frac{(1+\alpha)\gamma}{4\alpha};$$

当 $2\gamma^2 f < \alpha^2 < (3-\alpha)\gamma^2 f$ 时, 此时版权保护强度取边界值; 当 $(3-\alpha)\gamma^2 f \leq \alpha^2 < 1$ 时, $\beta^* = 0$.

因为 $\beta^* = \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2\gamma^2}{16\alpha^2}} - \frac{(1+\alpha)\gamma}{4\alpha}$ 时,

$$p^* = \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{2(1-\alpha)}{f} + \frac{(1+\alpha)^2\gamma^2}{4\alpha^2}} + \frac{(1+\alpha)\gamma}{2\alpha}}, \pi_2(p^*, \beta^*) = p^* - p^{*2} - \frac{1-\alpha}{\gamma^2 f} p^{*3};$$

$$\beta^* = 0 \text{ 时, } p^* = \frac{\alpha}{2}, \pi_2(p^*, \beta^*) = \frac{\alpha}{4}.$$

A4 推论 3.2 证明

当 $\beta > \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2\gamma^2}{16\alpha^2}} - \frac{(1+\alpha)\gamma}{4\alpha}, \gamma^2 f \geq \frac{2\alpha^2}{1+3\alpha}$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta^*}{\partial \alpha} < 0, \frac{\partial \beta^*}{\partial f} < 0, \frac{\partial \beta^*}{\partial \gamma} < 0, \\ \frac{\partial p^*}{\partial \alpha} > 0, \frac{\partial p^*}{\partial f} > 0, \frac{\partial p^*}{\partial \gamma} > 0, \\ \frac{\partial \pi_{\frac{1}{2}}^1}{\partial \alpha} > 0, \frac{\partial \pi_{\frac{1}{2}}^1}{\partial f} > 0, \frac{\partial \pi_{\frac{1}{2}}^1}{\partial \gamma} > 0.\end{aligned}$$

当 $0 \leq \beta \leq \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2 \gamma^2}{16\alpha^2}} - \frac{(1+\alpha)\gamma}{4\alpha}$, $0 < \alpha^2 \leq 2\gamma^2 f$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta^*}{\partial f} < 0, \frac{\partial \beta^*}{\partial \gamma} < 0, \\ \frac{\partial p^*}{\partial \alpha} > 0, \frac{\partial p^*}{\partial f} > 0, \frac{\partial p^*}{\partial \gamma} > 0, \\ \frac{\partial \pi_{\frac{1}{2}}^2}{\partial \alpha} > 0, \frac{\partial \pi_{\frac{1}{2}}^2}{\partial f} > 0, \frac{\partial \pi_{\frac{1}{2}}^2}{\partial \gamma} > 0.\end{aligned}$$

因为 $1 - 2p^* - 3\frac{1-\alpha}{\gamma^2 f} p^{*2} = \left(\frac{\gamma}{\sqrt{\frac{3(1-\alpha)}{f} + \gamma^2 + \gamma}} - p \right) \left(\frac{\sqrt{\frac{3(1-\alpha)}{f} + \gamma^2 + \gamma}}{\gamma} + 3\frac{1-\alpha}{\gamma^2 f} p \right)$, 当 $0 \leq$

$\beta \leq \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2 \gamma^2}{16\alpha^2}} - \frac{(1+\alpha)\gamma}{4\alpha}$ 时, $p^* < \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{3(1-\alpha)}{f} + \gamma^2 + \gamma}}$. 所以, 当 $\gamma^2 f \geq \frac{2\alpha^2}{1+3\alpha}$ 时,

$$\sqrt{\frac{1-\alpha}{3f} + \frac{\gamma^2}{9}} - \frac{\gamma}{3} > \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2 \gamma^2}{16\alpha^2}} - \frac{(1+\alpha)\gamma}{4\alpha}.$$

当 $\beta^* = \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2 \gamma^2}{16\alpha^2}} - \frac{(1+\alpha)\gamma}{4\alpha}$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta^*}{\partial \alpha} &= \frac{-\frac{1}{2f} - \frac{(1+\alpha)\gamma^2}{8\alpha^3}}{2\sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2 \gamma^2}{16\alpha^2}}} + \frac{\gamma}{4\alpha^2} = \\ &= \frac{\gamma^2}{4\alpha^2 \sqrt{\frac{1-\alpha}{2f} + \frac{(1+\alpha)^2 \gamma^2}{16\alpha^2}}} \left[\sqrt{\frac{1-\alpha}{2\gamma^2 f} + \frac{(1+\alpha)^2}{16\alpha^2}} - \frac{\alpha^2}{\gamma^2 f} - \frac{(1+\alpha)}{4\alpha} \right]. \\ &= \left(\frac{\alpha^2}{\gamma^2 f} + \frac{(1+\alpha)}{4\alpha} \right)^2 - \frac{1-\alpha}{2\gamma^2 f} - \frac{(1+\alpha)^2}{16\alpha^2} = \\ &= \frac{\alpha^2}{\gamma^2 f} \left[\frac{\alpha^2}{\gamma^2 f} + \frac{(1+\alpha)}{2\alpha} - \frac{1-\alpha}{2\alpha^2} \right] = \frac{\alpha^2}{\gamma^2 f} \left[\frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{\gamma^2 f} + \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{2\alpha} \right) \right].\end{aligned}$$

因为 $\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{2\alpha} \right) < \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{\gamma^2 f} + \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{2\alpha} \right) \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{2\alpha} \right)$, 所以, 当 $0 < \alpha < \frac{\sqrt{6}-1}{5}$ 时, $\frac{\partial \beta^*}{\partial \alpha} > 0$;

当 $\sqrt{2}-1 \leq \alpha \leq \gamma \sqrt{2f}$ 时, $\frac{\partial \beta^*}{\partial \alpha} < 0$.