第49卷第5期 中国科学技术大学学报 Vol. 49, No. 5
2019年5月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA May 2019

文章编号:0253-2778(2019)05-0422-08

一种基于区间数概率优势关系的多准则决策方法

汪 凌

(华东交通大学经济管理学院,江西南昌 246133)

摘要:针对特征属性为区间数、属性权重完全未知的多准则决策问题,基于概率优势关系理论,提出一种新的决策方法.给出了区间数与优势关系的基本原理,定义了相对优势度,采用概率优势关系表征区间数属性,通过构建评价矩阵,将决策方案排序问题转换为矩阵运算过程,实现了不同候选方案的优劣排序.实例分析表明,该方法能够充分利用区间数信息,有效克服传统决策方法的局限,具有排序客观合理,决策精度高等优点.

关键词:多准则决策;相对优势度;概率优势关系;权重;区间数

中图分类号:C934 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2019.05.009

引用格式:汪凌. 一种基于区间数概率优势关系的多准则决策方法[J]. 中国科学技术大学学报,2019,49(5):422-429.

WANG Ling. A multi-criteria decision method based on probability superiority relation of interval numbers[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2019,49(5):422-429.

A multi-criteria decision method based on probability superiority relation of interval numbers

WANG Ling

(*School of Economic and Management, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China*)

Abstract: To solve the problem of uncertain multi-criteria decision-making in which the characteristic attribute is interval number and the attribute weight is completely unknown, a new decision method was proposed based on theories of probability superiority relationship. The basic principle for relationship between interval number and superiority was given, the degree of comparative advantage was defined, and the attribute of interval number was represented by the probability superiority relationship. By constructing evaluation matrix, the problem of ordering decision plans was converted into a matrix operation process. The ranking of different candidate schemes has been realized. An analysis of the example shows that the method can make full use of interval number information, overcome the limitation of traditional decision-making methods effectively, and have advantages of objective and reasonable ordering and high decision precision.

Key words: multi-criteria decision-making; degree of comparative superiority; probability superiority relationship; weight; interval number

收稿日期:2018-08-05;**修回日期**:2018-11-02

基金项目:安徽省高校优秀人才重点支持计划项目(gxyqzd2016200),工业安全与应急技术安徽省重点实验室开放基金(ISET201802),合肥工业大学"双一流提升自主创新和社会服务能力"经费(45000-411104/009)资助.

作者简介:汪凌,男,1975年生,博士/副教授.研究方向:决策科学与技术、不确定性理论及应用等. E-mail:tcwling@126.com

0　引言

多准则决策是指决策者根据候选方案的特征数据,对有限的候选决策方案进行分析评价、优劣排序和择优的过程,该理论与方法已在企业生产、工程技术、经济管理等领域得到广泛应用[1].由于实际问题的复杂多变性、模糊性,在多准则决策过程中,通常很难用确定数值来表述属性相关信息,而往往用以区间数的形式描述问题,这也更符合人们的思维习惯等.如何处理这种决策问题具有重要的理论和实际应用价值.事实上,国内外学者对于区间多准则决策问题已作了较多研究,取得了丰富的成果[2-6,20-24].目前,区间决策方法的研究主要分为三类,一类是将区间决策问题转化为对确定实数值大小的比较,即从每个区间数归纳出某个精确的实数,然后根据该实数大小对决策对象进行排序[7-8],这类方法简单直观,但对某些相同中值的区间数不能准确辨识,易导致区间数信息丢失问题,影响决策结果可信度等.另一类是从区间数模糊性出发,刻画一个能反映两个区间数之间优先程度的量,再利用相应的信息集结方法进行决策.如区间数可能度决策方法[9-11]、区间数可信度决策方法[12]、区间数优势度决策方法[6,13]等,这些决策方法较为客观合理,决策效果较好,但是这些方法的计算复杂度较大,尤其对于区间数较多的排序问题来说,这些方法大都不具备保序性等,缺陷更加明显,因而实际应用范围有限.第三类是在区间数属性集上建立某种特定关系,基于此对决策对象排序,如区间粗糙集法[14,15]、分层法[16]、线性规划法[17]、模糊 VIKOR 法[18]以及误差分析法[19]等,这些方法都能较好利用区间数信息,区分效率相对较高,但普遍存在计算过程较复杂、计算量较大,最终影响决策质量等问题.

针对上述区间决策问题研究存在的不足,本文借鉴区间数优势度与概率粗糙集的相关知识,将区间数概率优势关系引入多准则决策问题中,提出了一种基于区间数概率优势关系的多准则决策方法.本文的创新之处在于:引入了区间数概率优势度概念,采用概率优势关系表征区间数属性,通过构建区间数评价矩阵,将决策方案优劣排序问题转换为矩阵运算过程,实现了不同决策方案排序择优.最后,通过实例验证了该方法的合理性和有效性.

1　区间数与优势关系

1.1　区间数及其运算

定义 1.1[16,19]　设 R 为实数集,对于 $\forall a_i^L, a_i^U \in \mathbb{R}$,若满足 $\tilde{a}_i=[a_i^L,a_i^U]=\{x \mid a_i^L \leqslant x \leqslant a_i^U, a_i^L, a_i^U \in \mathbb{R}\}$,则称 $\tilde{a}_i$ 为区间数.特别地,若 $a_i^L=a_i^U$,则 $\tilde{a}_i$ 成为一个点实数.

对于两个区间数 $\tilde{a}_i=[a_i^L,a_i^U]$,$\tilde{a}_j=[a_j^L,a_j^U]$,且 $k \geqslant 0$,则有下列运算法则[1,7]:

(1) $\tilde{a}_i+\tilde{a}_j=[a_i^L+a_j^L, a_i^U+a_j^U]$;

(2) $\tilde{a}_i-\tilde{a}_j=[a_i^L-a_j^L, a_i^U-a_j^U]$;

(3) $k\tilde{a}_i=[ka_i^L, ka_i^U]$,$k \geqslant 0$.特别地,若 $k=0$,则 $k\tilde{a}_i=0$.

定义 1.2[13]　设区间数 $\tilde{a}_i=[a_i^L,a_i^U]$,对 $\forall \lambda \in [0,1]$,称 $m_\lambda(\tilde{a}_i)=(1-\lambda)a_i^L+\lambda a_i^U$,或 $m_\lambda(\tilde{a}_i)=a_i^L+\lambda L(\tilde{a}_i)$ 为 $\tilde{a}_i$ 的 λ 分点,其中 $L(\tilde{a}_i)=a_i^U-a_i^L$ 表示 $\tilde{a}_i$ 的长度.

1.2　区间数优势关系

在区间决策过程中,为了充分利用区间数信息,有必要刻画一个区间数大于另一个区间数的优先程度.为此,首先给出相对优势度的概念.

定义 1.3[13]　设区间数 $\tilde{a}_i=[a_i^L,a_i^U]$,$\tilde{a}_j=[a_j^L,a_j^U]$,且 $L(\tilde{a}_i)=a_i^U-a_i^L$,$L(\tilde{a}_j)=a_j^U-a_j^L$,有

$$P(\tilde{a}_i > \tilde{a}_j)=\begin{cases}\dfrac{1}{L(\tilde{a}_i)}\ln\dfrac{1+\mathrm{e}^{a_i^U}}{1+\mathrm{e}^{a_i^L}}-\dfrac{1}{L(\tilde{a}_j)}\ln\dfrac{1+\mathrm{e}^{a_j^U}}{1+\mathrm{e}^{a_j^L}}, \\ \qquad L(\tilde{a}_i)\neq 0, L(\tilde{a}_j)\neq 0; \\ \dfrac{\mathrm{e}^{a_i^U}}{1+\mathrm{e}^{a_i^L}}-\dfrac{1}{L(\tilde{a}_j)}\ln\dfrac{1+\mathrm{e}^{a_j^U}}{1+\mathrm{e}^{a_j^L}}, \\ \qquad L(\tilde{a}_i)=0, L(\tilde{a}_j)\neq 0; \\ \dfrac{1}{L(\tilde{a}_i)}\ln\dfrac{1+\mathrm{e}^{a_i^U}}{1+\mathrm{e}^{a_i^L}}-\dfrac{\mathrm{e}^{a_j^U}}{1+\mathrm{e}^{a_j^L}}, \\ \qquad L(\tilde{a}_i)\neq 0, L(\tilde{a}_j)=0; \\ \dfrac{\mathrm{e}^{a_i^L}}{1+\mathrm{e}^{a_i^L}}-\dfrac{\mathrm{e}^{a_j^L}}{1+\mathrm{e}^{a_j^L}}, \\ \qquad L(\tilde{a}_i)=0, L(\tilde{a}_j)=0\end{cases} \tag{1}$$

式中,$P(\tilde{a}_i > \tilde{a}_j)$ 表示区间数 $\tilde{a}_i > \tilde{a}_j$ 的相对优势度.当 $\tilde{a}_i$ 与 $\tilde{a}_j$ 全为实数时,则表示两个确定实数的

相对优势度.

定义1.3是基于区间数的长度定义了两个区间数之间的相对优势,相对于文献[8]中基于区间数两端点值定义区间数之间的相对优势,该定义能够准确反映区间数的模糊性和不确定性,以及区间数相互比较的优先关系,因而更适合于区间数的精确比较.

根据上述定义可知,对于非空区间数集合 I,$\forall \tilde{a}_i,\tilde{a}_j \in I$,区间数优势度 $P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j)$ 具有下列性质和定理:

性质1.1 $0 \leqslant P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j) \leqslant 1$.

性质1.2 $P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j)=P(\tilde{a}_i \prec \tilde{a}_j)=0.5$.

性质1.3 $P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j)+P(\tilde{a}_j \prec \tilde{a}_i)=1$.

性质1.4 $P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j)>0$,当且仅当 $a_i^L+a_i^U=a_j^L+a_j^U,a_i^L \neq a_j^L,L(\tilde{a}_i)>L(\tilde{a}_j)>0$.

定义1.4 对于任意区间数 $\tilde{a}_i,\tilde{a}_j$,如果 $\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j$ 的相对优势度 $P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j)>0.5$,则称 $\tilde{a}_i$ 大于 $\tilde{a}_j$,记为 $\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j$;如果 $P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j)<0.5$,则称 $\tilde{a}_i$ 小于 $\tilde{a}_j$,记为 $\tilde{a}_i \prec \tilde{a}_j$;如果 $P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j)=0.5$,则称 $\tilde{a}_i$ 与 $\tilde{a}_j$ 相等,记为 $\tilde{a}_i=\tilde{a}_j$.

定理1.1 对于三个区间数 $\tilde{a}_i,\tilde{a}_j,\tilde{a}_k$,若 $\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j$,$\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_k$,则 $\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_k$ 成立.

证明 若 $\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j,\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_k$ 成立,则有 $0 \leqslant P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j) \leqslant 1,0 \leqslant P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_k) \leqslant 1$. 根据定义1.4可知

$$\begin{aligned}P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_k)=&P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j)P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_k)+\\&P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i)P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_k)+\\&P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_k)P(\tilde{a}_k \succ \tilde{a}_j).\end{aligned}$$

根据性质1.1和性质1.3可得

$$P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_k) \geqslant \frac{P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j)P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_k)}{1-P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_i)} \geqslant$$

$$\frac{P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j)P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_k)}{P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j)} \geqslant P(\tilde{a}_j \succ \tilde{a}_k).$$

因此有 $P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_k)>0.5$,由定义1.4可得 $\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_k$ 成立.

从定理1.1可以看出,区间数的相对优势关系是可以传递的.此外,根据性质1.1~1.4,对于 $\forall \tilde{a}_i=[a_i^L,a_i^U]$,$P=(p_{ij})_{m\times m}=(P(\tilde{a}_i \succ \tilde{a}_j))_{m\times m}$,设 $P'=(p'_{ij})_{m\times m}$,$p'_{ij}=\frac{p_{ij}+1}{2}$,$p'_{ij}+p'_{ji}=1,i,j=1,2,\cdots,m$,则称 P' 为 P 的模糊互补相对优势关系矩阵.

2 区间数多准则决策方案排序方法

2.1 区间数多准则决策问题的描述

通常情况下,区间数多准则决策问题可用三元组 $V=(U,A,W)$ 进行描述.其中,$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 为候选方案集,x_i 表示第 i 个候选方案,$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 为评价属性集,a_j 表示第 j 个评价属性.方案 $x_i \in U$ 关于属性 $a_j \in A$ 的评价值用 a_{ij} 表示,这里 a_{ij} 为一区间数,表示第 i 个候选方案关于第 j 个属性的评价值,即 $a_{ij}=[a_{ij}^L,a_{ij}^U]$,且 $a_{ij}^L \leqslant a_{ij}^U$,$(i,j=1,2,\cdots,n)$,则候选方案的 $m\times n$ 个评价值构成评价矩阵为 $R=(a_{ij})_{m\times n}$,称为方案集关于属性集的评价矩阵.

$$R=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix}[a_{11}{}^L,a_{11}{}^U] & [a_{12}{}^L,a_{12}{}^U] & \cdots & [a_{1n}{}^L,a_{1n}{}^U]\\ [a_{21}{}^L,a_{21}{}^U] & [a_{22}{}^L,a_{22}{}^U] & \cdots & [a_{2n}{}^L,a_{2n}{}^U]\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ [a_{m1}{}^L,a_{m1}{}^U] & [a_{m2}{}^L,a_{m2}{}^U] & \cdots & [a_{mn}{}^L,a_{mn}{}^U]\end{bmatrix} \tag{2}$$

式中,$i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n$,评价属性 a_j 的综合权重值 w_{a_j},且 $\sum_{j=1}^{n} w_{a_j}=1,w_{a_j} \in [0,1]$.

2.2 区间数评价矩阵无量纲处理

由于不同的评价属性具有不同的维度和单位,为了消除不同的维度对决策结果的影响,在决策过程中,有必要对评价矩阵 $R=(a_{ij})_{m\times n}$ 进行无量纲处理,分别按照如下方法转化为规范化矩阵 $R'=(\tilde{r}_{ij})_{m\times n}$,其中 $\tilde{r}_{ij}=[r_{ij}^L,r_{ij}^U]$.

对于效益型属性,按式(3)转化:

$$\tilde{r}_{ij}=[\frac{a_{ij}^L-a_{j*}}{a_j^*-a_{j*}},\frac{a_{ij}^U-a_{j*}}{a_j^*-a_{j*}}] \tag{3}$$

对于成本型属性,按式(4)转化:

$$\tilde{r}_{ij}=[\frac{a_j^*-a_{ij}^U}{a_j^*-a_{j*}},\frac{a_j^*-a_{ij}^L}{a_j^*-a_{j*}}] \tag{4}$$

式中,$a_j^*=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{a_{ij}^U\}$,$a_{j*}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{a_{ij}^L\}$,$i,j=1,2,\cdots,n$.

2.3 基于概率优势度的属性权重确定

关于属性权重确定已有较多方法,若从决策方案优选角度分析,决策方案间的整体概率优势度越

大,则对应属性赋予的权重越大.基于上述分析,本节提出了一种基于概率优势度确定属性权重的方法.

设规范化评价矩阵 $R'=(\tilde{r}_{ij})_{m\times n}$,$\tilde{r}_{ij}$ 为规范化区间数,则各属性间的概率优势度为

$$p_{ef}=p(a_e \succ a_f)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}p(\tilde{r}_{ia_e}\geqslant \tilde{r}_{ia_f}) \quad (5)$$

式中,p_{ef} 为属性 $a_e \succ a_f$ 的相对概率优势度,其中 $e,f=1,2,\cdots,n$.

根据式(5)得出所有属性之间的概率优势度 p_{ef},并构造概率优势关系矩阵 $P_{n\times n}$ 为

$$P_{n\times n}=(p(a_e \succ a_f))_{n\times n} \quad (6)$$

结合各属性间的概率优势度和概率优势关系矩阵,可以得出决策方案集中属性 a_e 的整体概率优势度 w_{a_e} 为

$$w_{a_e}=\frac{\sum_{e\neq f}^{n}p(a_e \succ a_f)}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{e\neq f}^{n}p(a_e \succ a_f)} \quad (7)$$

式中,$e,f=1,2,\cdots,n$.分析可知,式(7)为属性 a_e 的综合权重测度公式.

2.4　区间数决策优势关系矩阵和方案排序

根据综合权重向量 $w_{a_j}(j=1,2,\cdots,n)$,构建属性加权的规范化评价矩阵 $\widetilde{R}(w)=w_{a_j}\times(\tilde{r}_{ij})_{m\times n}$.按式(8)计算候选方案 x_i 关于各属性的综合评价值 $r_i(w)$:

$$r_i(w)=\sum_{j=1}^{n}\tilde{r}_{ij}w_{a_j}=[r_i^L,r_i^U],i=1,2,\cdots,m \quad (8)$$

区间数 $r_i(w)$ 不易对方案进行优劣比较,这里采用下述方法处理:

首先,按式(9)计算区间数 $r_i(w)(i=1,2,\cdots,m)$ 两两比较的相对优势度.设 $r_c(w)=[r_c{}^L,r_c{}^U]$,$r_d(w)=[r_d^L,r_d^U]$ 分别为方案 $x_c,x_d(c,d=1,2,\cdots,m)$ 的综合评价值,则 $x_c \succ x_d$ 的相对优势度 r_{cd} 为

$$r_{cd}=\widetilde{R}(x_c \succ x_d)=\widetilde{R}(r_c(w)\geqslant r_d(w))= P(\sum_{j=1}^{n}\tilde{r}_{jx_c}w_{a_c}\geqslant\sum_{j=1}^{n}\tilde{r}_{jx_d}w_{a_d}) \quad (9)$$

式(9)为方案 x_c 优于 x_d 的概率测度值.

其次,构建相对优势关系矩阵 $P_{m\times m}=(r_{cd})_{m\times m}$.

再次,按式(10)将 $P_{m\times m}=(r_{cd})_{m\times m}$ 转化为互补相对优势关系矩阵 $P'_{m\times m}=(r'_{cd})_{m\times m}$:

$$r'_{cd}=\frac{r_{cd}+1}{2},c,d=1,2,\cdots,m \quad (10)$$

最后,按式(11)计算候选方案 $x_c^{\succ}$ 在决策方案集中的整体概率优势度:

$$x_c^{\succ}=\frac{1}{m-1}\sum_{c\neq d}^{m}p(x_c \succ x_d),c,d=1,2,\cdots,m \quad (11)$$

根据每个候选方案的概率优势度值,进行优劣排序,然后确定最优决策方案.

2.5　决策步骤

根据上述分析,基于概率优势关系的区间多准则决策的具体步骤描述如下:

Step 1 根据初始评价信息,根据式(2)构建区间数评价矩阵 $R=(a_{ij})_{m\times n}$;

Step 2 按式(3)、(4)将 $R=(a_{ij})_{m\times n}$ 转化为规范化评价矩阵 $R'=(\tilde{r}_{ij})_{m\times n}$;

Step 3 根据 $R'=(\tilde{r}_{ij})_{m\times n}$,按式(5)计算属性之间的相对概率优势度 p_{ef};

Step 4 按式(6)构建概率优势关系矩阵 $P_{n\times n}=(p(a_e \succ a_f))_{n\times n}$;

Step 5 按式(7)计算属性综合权重向量 $w_{a_j}(j=1,2,\cdots,n)$.

Step 6 按式(8)计算候选方案综合评价值 $r_i(w)(i=1,2,\cdots,m)$;

Step 7 按式(9)计算每个候选方案之间的相对优势度值 $r_{cd}(c,d=1,2,\cdots,m)$,并构建相对优势关系矩阵 $P_{m\times m}=(r_{cd})_{m\times m}$;

Step 8 按式(10)将相对优势关系矩阵 $P_{m\times m}=(r_{cd})_{m\times m}$ 转换为模糊互补相对优势关系矩阵 $P'_{m\times m}=(r'_{cd})_{m\times m}$;

Step 9 按式(11)计算候选方案 $x_c^{\succ}$ 的整体概率优势度,并对候选方案排序择优.

上述步骤实际上给出了区间数多准则决策的具体算法流程,即将区间数多准则决策问题转换为矩阵的求解运算实现.

3　实例分析

为了说明基于概率优势关系的属性权重确定以及决策方法,以某工程建设项目方案评估为例.该项目有 4 个候选方案,用 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ 表示.该项目主要从报价因素 a_1、工期因素 a_2、质量因素 a_3、前期业绩因素 a_4 以及企业信誉度因素 a_5 五个方面考虑,用 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ 表示.其中,a_1

为成本型指标,其他 4 个 a_2、a_3、a_4、a_5 均为效益型指标,专家具体评价数据如表 1 所示,试确定该项目最优决策方案.

表 1 某工程项目候选方案专家评价值

Tab. 1 Expert evaluation of a project candidate scheme

U	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
x_1	[93,97]	[63,86]	[57,78]	[42,57]	[62,83]
x_2	[75,79]	[83,98]	[62,85]	[55,74]	[71,92]
x_3	[83,87]	[84,99]	[80,99]	[44,59]	[59,80]
x_4	[90,94]	[61,82]	[69,94]	[59,80]	[80,98]

Step 1 根据本文提出的方法以及候选方案评价数据,构建区间数评价矩阵 $R_{4\times5}$.

$$R_{4\times5}=\begin{bmatrix}[93,97] & [63,86] & [57,78] & [42,57] & [62,83]\\ [75,79] & [83,98] & [62,85] & [55,74] & [71,92]\\ [83,87] & [84,99] & [80,99] & [44,59] & [59,80]\\ [90,94] & [61,82] & [69,94] & [59,80] & [80,98]\end{bmatrix}.$$

Step 2 对区间数评价矩阵 $R_{4\times5}$ 无量纲处理.

按式(3)、(4)分别对 a_1,a_2,a_3,a_4 和 a_5 无量纲处理,将评价矩阵 $R_{4\times5}$ 转化为规范化矩阵 $R'_{4\times5}$,规范化决策信息表如表 2 所示.

表 2 规范化决策信息表

Tab. 2 Normalized decision information table

U	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
x_1	[0.0000,0.1818]	[0.0526,0.6579]	[0.0000,0.5000]	[0.0000,0.3947]	[0.0769,0.6514]
x_2	[0.8182,1.0000]	[0.5789,0.9737]	[0.1190,0.6667]	[0.3421,0.8421]	[0.3077,0.8462]
x_3	[0.4545,0.6364]	[0.6035,1.0000]	[0.5476,1.0000]	[0.0526,0.4474]	[0.0000,0.5385]
x_4	[0.1364,0.3182]	[0.0000,0.5526]	[0.2857,0.8810]	[0.4474,1.0000]	[0.5385,1.0000]

Step 3 确定属性综合权重.

按式(5)计算规范化矩阵 $R'_{4\times5}$ 中每个评价属性间的相对优势度值,例如:

$$p_{12}=p(a_1\succ a_2)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}p(r_{ia_1}\geqslant r_{ia_2})=$$
$$\frac{1}{4}[p(r_{1a_1}\geqslant r_{1a_2})+p(r_{2a_1}\geqslant r_{2a_2})+$$
$$p(r_{3a_1}\geqslant r_{3a_2})+p(r_{4a_1}\geqslant r_{4a_2})]=$$
$$\frac{1}{4}[-0.0644+0.0285-0.057-0.0114]=$$
$$-0.0261.$$

同理可得 $p_{13}=-0.0144$,$p_{14}=-0.0003$,$p_{15}=-0.0114$.

根据每个评价属性间的相对优势度值 p_{ef},获得概率优势关系矩阵 $P_{5\times5}$ 为

$$P_{5\times5}=p(a_e\geqslant a_f)_{5\times5}=$$
$$\begin{bmatrix}0.5 & 0.9739 & 0.9856 & 0.9997 & 0.9886\\ 0.0261 & 0.5 & 0.0118 & 0.0258 & 0.0139\\ 0.0144 & 0.9882 & 0.5 & 0.0141 & 0.0022\\ 0.0003 & 0.9742 & 0.9859 & 0.5 & 0.9881\\ 0.0114 & 0.9861 & 0.9978 & 0.0119 & 0.5\end{bmatrix}.$$

根据式(7)得到属性的综合权重值 $w_{a_j}(j=1,2,\cdots,5)$:

$$w_{a_1}=0.3948,w_{a_2}=0.0078,w_{a_3}=0.1019,$$
$$w_{a_4}=0.2948,w_{a_5}=0.2007.$$

Step 4 决策方案优势关系矩阵及排序.

首先,针对各属性 w_{a_j}和矩阵 $R'=(\tilde{r}_{ij})_{4\times5}$,构建考虑属性权重的评价矩阵 $\widetilde{R}(w)=w_{a_j}\times(\tilde{r}_{ij})_{4\times5}$:

$$\widetilde{R}_{4\times5}=\begin{bmatrix}[0.0000,0.0718] & [0.0004,0.0051] & [0.0000,0.0510] & [0.0000,0.1164] & [0.0154,0.1235]\\ [0.3230,0.3948] & [0.0045,0.0076] & [0.0121,0.0679] & [0.1009,0.2483] & [0.0618,0.1698]\\ [0.1794,0.2513] & [0.0035,0.0050] & [0.0558,0.1019] & [0.0155,0.1319] & [0.0000,0.1081]\\ [0.0539,0.1256] & [0.0011,0.0025] & [0.0291,0.0898] & [0.1319,0.2948] & [0.1081,0.2007]\end{bmatrix}.$$

按式(8)计算每个候选方案的综合评价值

$$r_i(w)=\sum_{j=1}^{5}\tilde{r}_{ia_j}w_{a_j}(i=1,2,\cdots,4):$$

$$r_1(w)=[0.0158,0.3684],$$
$$r_2(w)=[0.5099,0.8505],$$
$$r_3(w)=[0.2531,0.6009],$$

$r_4(w)=[0.3229, 0.7152]$.

其次，按式(9)计算每个候选方案间的相对优势值 $r_{cd}(c, d=1,2,\cdots,4)$，构建相对优势关系矩阵 $P_{4\times4}=(r_{cd})_{4\times4}$：

$$P_{4\times4}=\begin{bmatrix} 0 & -0.1147 & -0.0572 & -0.0778 \\ 0.1147 & 0 & 0.0575 & 0.0369 \\ 0.0572 & -0.0575 & 0 & -0.0206 \\ 0.0778 & -0.0369 & 0.0206 & 0 \end{bmatrix}.$$

再次，按式(10)将 $P_{4\times4}=(r_{cd})_{4\times4}$ 转换为模糊互补相对优势关系矩阵 $P'_{4\times4}=(r'_{cd})_{4\times4}$：

$$P'_{4\times4}=\begin{bmatrix} 0.5000 & 0.4427 & 0.4714 & 0.4611 \\ 0.5573 & 0.5000 & 0.5288 & 0.5185 \\ 0.5286 & 0.4712 & 0.5000 & 0.4897 \\ 0.5389 & 0.4815 & 0.5103 & 0.5000 \end{bmatrix}.$$

最后，按式(11)计算候选方案在方案集中的整体概率优势度 $x_j^{\succ}=\frac{1}{4-1}\sum_{j\neq k}^{4}p(x_j\succ x_k)$：

$$x_1^{\succ}=\frac{1}{3}\{p(x_1\succ x_2)+p(x_1\succ x_3)+p(x_1\succ x_4)\}=0.4584,$$

$$x_2^{\succ}=\frac{1}{3}\{p(x_2\succ x_1)+p(x_2\succ x_3)+p(x_2\succ x_4)\}=0.5349,$$

$$x_3^{\succ}=\frac{1}{3}\{p(x_3\succ x_1)+p(x_3\succ x_2)+p(x_3\succ x_4)\}=0.4965,$$

$$x_4^{\succ}=\frac{1}{3}\{p(x_4\succ x_1)+p(x_4\succ x_3)+p(x_4\succ x_3)\}=0.5102.$$

由此得到四个方案排序为 $x_2 \underset{0.5185}{\succ} x_4 \underset{0.5103}{\succ} x_3 \underset{0.5286}{\succ} x_1$，故 x_2 为最优决策方案.

为了验证基于概率优势关系的多准则决策方法的合理性和有效性，现将本文方法与文献[1]中应用最广的离差最大化决策方法进行性能比较，结果如表 3 所示.

利用文献[1]中的离差最大赋权算法，可得属性综合权重为 $w_{a_1'}=0.3482$，$w_{a_2'}=0.1119$，$w_{a_3'}=0.1352$，$w_{a_4'}=0.2465$，$w_{a_5'}=0.1582$，根据多准则决策问题中离差最大化算法的具体步骤，得到每个候选方案优劣排序为 $x_2\succ x_3\succ x_4\succ x_1$. 从表 3 可以看出，采用文献[1]中的离差最大化算法求得的属性综合权重排序为 $w_{a_1'}>w_{a_4'}>w_{a_5'}>w_{a_3'}>w_{a_2'}$，而本文提出的基于概率优势关系的属性综合权重排序为 $w_{a_1}>w_{a_4}>w_{a_5}>w_{a_3}>w_{a_2}$. 比较发现，两种算法赋予的属性综合权重略有不同，但属性权重排序一致.

表 3　两种方法关于属性综合权重及方案优劣排序结果比较

Tab. 3　Attribute comprehensive weight and scheme ranking result comparison of the two methods

方法	属性综合权重	方案优劣排序
文献[1]方法	(0.3482, 0.1119, 0.1352, 0.2465, 0.1582)	$x_2\succ x_3\succ x_4\succ x_1$
本文方法	(0.3948, 0.0078, 0.1019, 0.2948, 0.2007)	$x_2\succ x_4\succ x_3\succ x_1$

从决策方案的排序情况看，该方法的决策排序结果与文献[1]中最大离差算法的最优决策方案一致，但是两种方案的排序结果略有差异，造成这种差异的主要原因是利用离差最大表示区间数会导致决策信息部分丢失. 基于概率优势关系的决策方法，计算过程相对较复杂、计算量也较大，但是该算法考虑了属性值本身及不同候选方案属性值之间的联系，并且可以得到每个候选方案之间的整体概率优势度具体值，能更准确地区分不同候选方案优劣，因而决策方案排序更加符合实际决策环境，决策结果更为合理和具有说服力，较好地解决了属性权重未知的一类区间决策问题；而文献[1]中离差最大化算法不能准确描述每个候选方案之间的相对优势度值.

综上所述，本文提出的决策方法更加客观科学合理，具有较强的实际意义，从而验证了本文所提方法的合理性和有效性.

4　结论

针对属性值为区间数且权重未知的决策问题，本文提出了一种基于概率优势关系的多准则决策方法. 该方法引入区间数相对优势度概念，利用概率优势度确定属性权重，基于相对优势关系矩阵，得到候选方案的整体概率优势度，进而实现方案的优劣排序. 最后，以工程项目决策方案确定为例分析，表明所提出的决策方法能够有效利用区间数信息，具有排序客观合理、决策可靠性高等优点.

本文方法针对的是决策者给出的特征属性为区间数型的情形，而在实际决策问题中，会有一些其他形式，如语言变量型、确定数值和区间数混合型等. 如何解决这些类型的多准则决策问题，将是下一步研究的重点.

参考文献(References)

[1] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 北京:清华大学出版社,2004.

[2] WANG C Y, CHEN S M. Multiple attribute decision making based on interval-valued intuitionistic fuzzy sets, linear programming methodology, and the extended TOPSIS method[J]. Information Sciences, 2017,397-398: 155-167.

[3] QIU Junda , LI Lei . A new approach for multiple attribute group decision making with interval-valued intuitionistic fuzzy information [J]. Applied Soft Computing,2017,61: 111-121.

[4] CHEN S M, HUANG Z C. Multi-attribute decision making based on interval-valued intuitionistic fuzzy values and linear programming methodology [J]. Information Sciences,2017,381(1): 341-351.

[5] CHEN S M, CHENG S H, TSAI W H. Multiple attribute group decision making based on interval-valued intuitionistic fuzzy aggregation operators and transformation techniques of interval-valued intuitionistic fuzzy values[J]. Information Sciences, 2016,367-368: 418-442.

[6] 刘健,刘思峰,吴顺祥. 基于优势关系的多属性决策对象排序研究[J]. 控制与决策,2012,27(4): 632-640.
LIU Jian, LIU Sifeng, WU Shunxiang. Ranking research based on dominant relation for multiple-attribute decision making object [J]. Control and Decision, 2012,27(4): 632-640.

[7] MOORE R, LODWICK W. Interval analysis and fuzzy set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003,135(1): 5-9.

[8] 张吉军. 区间数的排序方法研究[J]. 运筹与管理, 2003,12(3): 18-22.
ZHANG Jijun. Research on method for ranking interval numbers[J]. Operations Research and Management Science,2003,12(3): 18-22.

[9] 徐泽水,达庆利. 区间数排序的可能度法及其应用[J]. 系统工程学报,2003,18(1): 67-70.
XU Zeshui, DA Qingli. Possibility degree method for ranking interval numbers and its application [J]. Journal of Systems Engineering,2003,18(1): 67-70.

[10] 高峰记. 可能度及区间数综合排序[J]. 系统工程理论与实践,2013,3(8): 2033-2040.
GAO Fengji. Possibility degree and comprehensive priority of interval numbers[J]. Systems Engineering: Theory & Practice,2013,3(8): 2033-2040.

[11] 李德清,谷云东. 一种基于可能度的区间数排序方法[J]. 系统工程学报,2008,23(2): 243-246.
LI Deqing, GU Yundong. Method for ranking interval numbers based on possibility degree[J]. Journal of Systems Engineering,2008,23(2): 243-246.

[12] 邱涤珊,贺川,朱晓敏. 基于概率可信度的区间数排序方法[J]. 控制与决策,2012,27(12): 1894-1898.
QIU Dishan, HE Chuan, ZHU Xiaomin. Ranking method research of interval numbers based on probability reliability distribution [J]. Control and Decision,2012,27(12): 1894-1898.

[13] 王中兴,邵翠丽,唐芝兰. 基于相对优势度的区间数排序及其在多属性决策中的应用[J]. 模糊系统与数学, 2013,27(2): 142-148.
WANG Zhongxing, SHAO Cuili, TANG Zhilan. Method for ranking interval numbers based on relative superiority and its application to multiple attribute decision making[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2013,27(2): 142-148.

[14] 赵焕焕,菅利荣,刘勇. 区间粗糙数多属性决策方法[J]. 运筹与管理,2016,25(2):78-82.
ZHAO Huanhuan, JIAN Lirong, LIU Yong. Multi-attribute decision making methodology with interval rough number [J]. Operations Research and Management Science,2016,25(2):78-82.

[15] 李佳,梁吉业,庞天杰. 一种基于优势粗糙集的多属性决策排序方法[J]. 南京大学学报(自然科学版),2016, 52(5): 844-852.
LI Jia, LIANG Jiye, PANG Tianjie. A sorting method of multi-attribute decision making based on dominance rough set theory[J]. Journal of Nanjing University (Natural Sciences), 2016,52(5): 844-852.

[16] 张方伟,王炜,赵德. 一种基于分层法的区间数多属性决策方法及应用[J]. 系统工程理论与实践,2014,34(11): 2881-2884.
ZHANG Fangwei, WANG Wei, ZHAO De. Method for multiple attributes decision-making with intervals based on layer method and its application[J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2014, 34 (11): 2881-2884.

[17] 陶长琪,凌和良. 属性具有线性优先级的区间数多属性决策方法[J]. 数学的实践和认识,2015,45(4): 177-185.
TAO Changqi, LING Heliang. Approach for linear prioritized multiple attribute decision-making with

interval numbers[J]. Mathematics in Practice and Theory,[17]2015,45(4):177-185.

[18] KUO M S,LIANG G S . A soft computing method of performance evaluation with MCDM based on interval valued fuzzy numbers[J]. Applied Soft Computing,2012,12(1):476-485.

[19] 尤天慧,高美丽. 一种基于误差分析的区间数多属性决策方法研究[J]. 系统管理学报,2014,23(2):224-228.
YOU Tianhui,GAO Meili. An error-analysis-based approach for multi-attribute decision making with interval numbers[J]. Journal of Systems & Management,2014,23(2):224-228.

[20] 周金明,苏为华,曾守桢. 区间数件语言变量的多属性云模型决策方法研究[J]. 数学的实践与认识,2016,46(20):156-164.
ZHOU Jinming,SU Weihua,ZENG Shouzhen. Research on multi-attribute decision making approach with interval numbers and linguistic variables based on the cloud model[J]. Mathematics in Practice and Theory,2016,46(20):156-164.

[21] 邱香. 建设项目区间数属性评价的集对分析方法[J]. 数学的实践与认识,2012,42(24):39-43.
QIU Xiang. Construction project interval number of attributes set pair analysis evaluation method[J]. Mathematics in Practice and Theory,2012,42(24):39-43.

[22] SEVASTIANOV P . Numerical methods for interval and fuzzy number compassion based on the probabilistic approach and Dempster-Shafer theory[J]. Information Science,2007,177(21):4645-4661.

[23] XU Z S,DA Q L. A least deviation method for priorities of fuzzy preference matrix[J]. European Journal of Operational Research,2005,164(1):206-216.

[24] 江文奇. 基于前景理论和统计推断的区间数多准则决策方法[J]. 控制与决策,2015,3(2):375-379.
JIANG Wenqi. Interval multi-criteria decision-making approach based on prospect theory and statistic deduction[J]. Control and Decision,2015,3(2):375-379.