

Markovian 量子子系统与稳定化设计

姚香, 匡森

(中国科学技术大学自动化系, 安徽合肥 230027)

摘要:量子子系统在量子信息处理与控制中有着广泛的应用, 如何实现对量子子系统的控制显得尤为重要. 针对马尔科夫类型的开放量子系统动力学模型, 概括了其子系统不变性与吸引性的主要理论结果, 分析了子系统不变性与吸引性的重要性质及实质含义. 在此基础上, 研究了任一子系统成为不变子系统和吸引子系统的开环哈密顿设计方法. 特别地, 对子系统进行不变性的哈密顿设计、对不变子系统进行吸引性的哈密顿设计实现了子系统的全局稳定性. 最后, 在一个两能级开放量子系统上进行了仿真实验, 验证了理论结果的正确性.

关键词:量子子系统; 不变性; 吸引性; 哈密顿设计; 稳定化

中图分类号: TP271 **文献标识码:** A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2014.10.003

引用格式: Yao Xiang, Kuang Sen. Markovian quantum subsystems and stabilization design[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2014, 44(10):811-817.

姚香, 匡森. Markovian 量子子系统与稳定化设计[J]. 中国科学技术大学学报, 2014, 44(10): 811-817.

Markovian quantum subsystems and stabilization design

YAO Xiang, KUANG Sen

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China)

Abstract: Quantum subsystems have been widely applied in the field of quantum information processing and control, so active control over quantum subsystems is of great importance. For Markovian open quantum dynamical model, some main theoretical results on invariant and attractive subsystems are summarized, and some important properties and their essential meanings are analyzed. Based on these, open-loop Hamiltonian design methods which make a subsystem become invariant and attractive were studied. In particular, the Hamiltonian design of invariance of a subsystem and attractiveness of an invariant subsystem achieved globally asymptotical stabilization of this subsystem. Finally, simulation experiments on a two-level open quantum system were conducted, and results show the validity of the proposed method.

Key words: quantum subsystems; invariance; attractivity; Hamiltonian control; stabilization

收稿日期: 2013-12-13; 修回日期: 2014-05-16

基金项目: 国家自然科学基金(60904033), 中央高校基本科研业务费专项资金(WK2100100019)资助.

作者简介: 姚香, 女, 1988年生, 硕士生. 研究方向: 量子控制. E-mail: ashleyok@mail.ustc.edu.cn

通讯作者: 匡森, 博士/副教授. E-mail: skuang@ustc.edu.cn

0 引言

在微观量子系统领域,描述复合量子系统的最基本模块是量子子系统^[1].在量子信息领域,由于纯态包含的信息量大,因此处于纯态的量子系统常常被选择作为信息的载体.然而,一般的量子系统难以与环境进行完美隔离,会受到环境产生的消相干影响,以致所考虑的量子系统状态由纯态下降为混合态,相应的系统成为一个开放量子系统,这将对量子信息处理造成严重的负面影响.对此,人们发现当开放量子系统的空间结构具有一定的对称属性时,其所包含的某一子系统或子空间不会受到环境的消相干作用,因此选用这类子系统承担信息的载体即可解决上述问题.

在物理层面,早已有学者进行了关于无噪子系统和无消相干子空间等问题的研究.例如,1997年,Zanardi等在量子寄存器的研究中提出了无噪子空间的概念^[2],实现了不受噪声影响的量子编码.Lidar等于1998年针对波色子模型又提出无消相干子空间的概念,指出在无消相干子空间中进行一般性量子计算是可行的^[3].Viola等于2001年针对三核自旋系统也提出了一种有效的量子信息防噪声方案^[4],通过无噪子系统实现了量子比特的编码.2006年,Choi等提出了无消相干子空间和无噪声子空间的确定方法,向量子纠错理论的实际应用迈出了重要一步^[5].最近,有学者借助无消相干子空间的理论对鲁棒量子计算的问题进行了研究^[6-7].

2005年,系统与控制领域的学者Shabani等在对无消相干子空间与子系统进行分析的基础上,建立了一般性的初始化条件^[8].从2007年开始,Ticozzi和Viola等系统地开展了有关开放量子系统的一般理论研究,他们针对马尔科夫类型的开放量子系统发表了一系列论文^[9-11],建立起了有关量子子系统的初步理论框架.特别地,2007年他们提出了不变子系统以及吸引子系统的基本概念并研究了相关性质,同时对系统的收敛性做了相应分析^[9].2009年,Nishio等通过对量子随机模型的状态和算符进行空间分解,利用李雅普诺夫方法确立了使得系统的某一不变集成为稳定不变集的条件^[12].2010年,Schirmer等针对量子马尔科夫模型及其反馈模型,利用量子子系统的理论成功获得了系统稳态点的存在性条件及其伴随属性,并将结果应用到了两能级和四能级的原子系统、谐振子系统以及复合系

统中以实现开放系统的稳定化设计^[13].2012年,Ticozzi等又进一步提出了一种迭代算法来检验马尔科夫模型子系统的吸引性^[14].Altafini等于2012年将不变子系统以及吸引子系统的概念应用到量子随机主方程当中,分析了相应子系统不变性与吸引性的存在性与性质^[15].

考虑到开放量子子系统理论对于量子信息处理的研究至关重要以及开放量子系统有关子系统的理论层次相对较深两个因素,为了能在量子子系统的理论框架下开展更深层次的量子控制研究,我们认为有必要对该框架下的相关基本概念、主要理论结果进行概括总结,并进一步挖掘这些结果的初步应用.基于此考虑,本文将首先给出马尔科夫开放量子子系统系统的概念体系,并重点回顾、总结现有文献关于子系统不变性与吸引性的主要结果,在此基础上讨论如何通过开环哈密顿设计使得一个不变子系统成为吸引子系统,即实现不变子系统的稳定化.

1 系统模型及基本概念

本文考虑马尔科夫类型的开放量子系统,其状态演化可以用完全保迹正映射(TPCP)簇构成的量子动力学半群(QDS)描述^[1,9-10],文中用符号 \mathcal{T}_t 表示.文献[16-17]已证明该半群的Hille-Yoshida生成元为如下形式:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} = \mathcal{L}(\rho(t)) = & -i[H, \rho(t)] + \sum_k \gamma_k \mathcal{D}(L_k, \rho(t)) = \\ & -i[H, \rho(t)] + \sum_k \gamma_k \left\{ L_k \rho(t) L_k^\dagger - \frac{1}{2} \{ L_k^\dagger L_k, \rho(t) \} \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

式中, H 为有效哈密顿(一般包括系统、环境、相互作用三部分); γ_k 由环境自由度之间的关联函数决定,是对应的跳变跃迁模式所引发耗散作用的几率; L_k 为Linblad算符或量子跳变算符,表示马尔科夫环境对系统动力学的影响.方程(1)即为马尔科夫开放量子系统的状态演化方程,也称作Linblad主方程(ME).该方程右边的第一项代表薛定谔么正演化项;第二项描述了开放系统与环境的相互作用,表现为使系统发生状态跳变、耗散和退相干等的非么正部分,其中的每一求和项 $\gamma_k L_k \rho(t) L_k^\dagger$ 代表一种量子跳变(quantum jump),即在“正常”么正演化过程中不时地以一定概率跃迁到其他状态.

根据子系统原理^[18-19],最能体现量子系统信息的一般性结构是子系统. 如果一个量子系统受噪声影响,但其某一子系统不受噪声影响或受到的影响是可以忽略的,那么我们可以只对子系统进行操控来完成期望的目标,此时并不要求整个系统是抗噪声的. 下面,我们首先给出开放量子系统子系统的概念.

定义 1.1(量子子系统)^[9-12,20] 给定具有状态空间 \mathcal{H}_I 的开放量子系统 I ,将 \mathcal{H}_I 的某一子空间 \mathcal{H}_{SF} 的张量因子 \mathcal{H}_S 上支持的系统 S 称为系统 I 的子系统,即 \mathcal{H}_I 可进行如下分解:

$$\mathcal{H}_I = \mathcal{H}_{SF} \oplus \mathcal{H}_R = (\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_F) \oplus \mathcal{H}_R \quad (2)$$

式中, \mathcal{H}_F 为某个系数因子, \mathcal{H}_R 为相应补空间.

根据定义 1.1,假设 $n = \dim(\mathcal{H}_S)$, $f = \dim(\mathcal{H}_F)$, $r = \dim(\mathcal{H}_R)$,我们选择 $\mathcal{H}_S, \mathcal{H}_F, \mathcal{H}_R$ 的一组正交基分别为 $\{|\phi_j^S\rangle\}_{j=1}^n, \{|\phi_k^F\rangle\}_{k=1}^f, \{|\phi_l^R\rangle\}_{l=1}^r$,则系统 I 的基可以相应写为 $|\varphi_m\rangle = \{|\phi_j^S\rangle \otimes |\phi_k^F\rangle\}_{j,k=1}^{n,f} \cup \{|\phi_l^R\rangle\}_{l=1}^r$. 在这个基下,作用于 \mathcal{H}_I 上的任一算符均

体现为分块结构: $X = \begin{bmatrix} X_{SF} & X_P \\ X_Q & X_R \end{bmatrix}$,特别是系统 I 的

密度矩阵也体现为此结构. 为方便起见,我们也将空间 \mathcal{H}_I 到空间 $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_F$ 的投影算符记为 $\Pi_{SF} \triangleq (I_{SF} \quad 0)$.

为了说明子系统的不变性、吸引性问题,我们给出子系统状态初始化的概念.

定义 1.2(状态初始化)^[9-12] 给定系统 I 的状态 $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_I)$,如果状态 ρ 的矩阵块满足:

- (I) 存在 $\rho_F \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_F)$ 使得 $\rho_{SF} = \rho_S \otimes \rho_F$;
- (II) $\rho_P = 0, \rho_R = 0$.

其中, $\rho_S \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_S)$,则称系统 I 的状态在子空间 \mathcal{H}_S 中得到初始化,记在子系统 S 上得到初始化的、系统 I 的全体状态的集合为 $\mathcal{S}_S(\mathcal{H}_I)$.

定义 1.2 中的条件(I)确保了对系统 I 进行测量等操作时,系数因子 \mathcal{H}_F 不会影响到 \mathcal{H}_S 中的状态;条件(II)确保了对系统的状态演化求部分迹时,状态 $\bar{\rho} = \text{trace}_F(\Pi_{SF} \rho \Pi_{SF}^\dagger)$ 仍是一个有效的状态.

2 子系统的不变性、吸引性及开环哈密顿设计

从控制理论的角度看,要想使得一个子系统能够稳定可靠地承担起量子信息的载体和被操作对象,必须要求初始化在该子系统上的状态在整个系统以后的演化中仍然将状态保持在该子系统上,此即子系统的不变性问题. 进一步,我们也需要子系统

自身具有能够将没有准确初始化在该子系统上的状态自动“拉回”到该子系统上的能力,此即子系统的吸引性问题. 本节将基于子系统不变性、吸引性条件的分析,讨论对于一个非不变、非吸引的子系统,如何通过适当的开环哈密顿设计来使其成为不变、吸引的.

2.1 子系统的不变性及哈密顿设计

我们首先给出子系统不变性的概念和使得子系统不变的关键定理,然后基于定理的结论给出使得非不变子系统成为不变子系统的开环哈密顿设计方法.

定义 2.1(不变子系统)^[9-11] 假设系统 I 在 TPCP 映射下演化,如果初始状态 $\rho \in \mathcal{S}_S(\mathcal{H}_I)$,并且演化过程满足:

$$\rho(t) = \mathcal{T}_t \begin{bmatrix} \rho_S \otimes \rho_F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_t^S(\rho_S) \otimes \mathcal{T}_t^F(\rho_F) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

那么,称子系统 S 是系统 I 的一个不变子系统. 其中, $\forall \rho_S \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_S), \rho_F \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_F), \mathcal{T}_t^S(\cdot), \mathcal{T}_t^F(\cdot)$ 分别是 \mathcal{H}_S 和 \mathcal{H}_F 中的 TPCP 映射.

不变子系统的定义说明,一个不变子系统可以保存状态的初始化,也即将系统的动力学始终局限于 $\mathcal{S}_S(\mathcal{H}_I)$ 内. 文献[10]给出了马尔科夫演化下子系统不变性的如下定理.

定理 2.1^[10] 如果在马尔科夫演化下系统 I 的每一个初始态 $\rho \in \mathcal{S}_S(\mathcal{H}_I)$ 满足:

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{SF}(\rho_{SF}(t)) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \forall t \geq 0 \quad (4)$$

$\text{trace}_F[\mathcal{L}_{SF}(\rho_{SF}(t))] = \mathcal{L}_S(\rho_S(t)), \forall t \geq 0$ (5) 则称子空间 \mathcal{H}_S 支持了马尔科夫演化下的一个不变子系统. 其中, $\rho_S \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_S), \rho_F \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_F), \mathcal{L}_{SF}$ 与 \mathcal{L}_S 分别是空间 $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_F$ 和 \mathcal{H}_S 的 QDS 生成元.

应该指出,定理 2.1 实际上是关于子系统的马尔科夫不变性的概念,该概念弱于子系统的不变性概念,因为它允许系统的动力学在空间 $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_F$ 中演化,而不一定是在空间 \mathcal{H}_S 中. 当 $\mathcal{H}_F = \mathbb{C}$ 时, \mathcal{H}_S 在马尔科夫演化下所支持的子系统的不变性,等同于子空间 \mathcal{H}_S 在马尔科夫演化下的不变性. 基于定理 2.1 的证明过程,文献[9-11,20]进一步给出了关于不变子系统的下面推论.

推论 2.1 假设 $\mathcal{H}_I = (\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_F) \oplus \mathcal{H}_R$,并且 H 与 $\{L_k\}$ 分别为马尔科夫动力学半群的哈密顿量与 Lindblad 算子,如果对于任给的 k ,且满足以下

条件:

$$L_k = \begin{pmatrix} L_{S,k} \otimes L_{F,k} & L_{P,k} \\ 0 & L_{R,k} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$iH_P - \frac{1}{2} \sum_k (L_{S,k}^+ \otimes L_{F,k}^+) L_{P,k} = 0 \quad (7)$$

$$H_{SF} = H_S \otimes \Pi_F + \Pi_S \otimes H_F \quad (8)$$

式中,对每个 k 有 $L_{S,k} = \Pi_S$, 或 $L_{F,k} = \Pi_F$, 或同时成立,那么 \mathcal{H}_S 支持一个不变子系统.

该推论说明,当系统 I 的 Lindblad 算子及哈密顿量满足一定的限定条件时,相应的子系统才能不变.同时,也暗示了当系统的哈密顿量和 Lindblad 算子不满足所要求的条件时,可以通过适当的设计或调控来使得相应的子系统不变.一般而言,人们不易直接调控用以描述环境对系统影响的 Lindblad 算子,因此我们可以通过开环哈密顿量的设计来使得系统满足不变性的条件,从而成为一个不变子系统.具体而言,对满足 $L_{Q,k} = 0, \forall k$ 的系统,只要所设计系统的开环哈密顿量满足推论 2.1 中的后两个条件即可.

2.2 不变子系统的吸引性及哈密顿设计

讨论子系统的吸引性,对于不能完美初始化的情况非常重要.如果一个子系统没有得到完美初始化,如系统的状态初始化在子系统之外的某一状态上,此时需要对系统进行适当的调控以使系统的状态能够自动回到子系统上,这实质上就是子系统的渐近稳定化问题.

2.2.1 不变子系统的吸引性

定义 2.2(吸引子系统)^[9-11] 假设 $\mathcal{H}_I = \mathcal{H}_{SF} \oplus \mathcal{H}_R = (\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_F) \oplus \mathcal{H}_R$, 如果下式成立:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\mathcal{T}_t(\rho) - \begin{pmatrix} \bar{\rho}_S(t) \otimes \bar{\rho}_F(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (9)$$

那么, \mathcal{H}_S 支持 TPCP 映射下的一个吸引子系统. 其中, $\bar{\rho}_S(t) = \text{trace}_F(\Pi_{SF} \mathcal{T}_t(\rho) \Pi_{SF}^+)$, $\bar{\rho}_F(t) = \text{trace}_S(\Pi_{SF} \mathcal{T}_t(\rho) \Pi_{SF}^+)$.

定义 2.2 说明,一个吸引量子子系统经过长时间的演化能够实现“自我初始化”. 对于一个子系统(或其赖以定义的子空间),文献[11,14]给出了如下关于其吸引性的判定条件.

定理 2.2^[11,14] 令 $\mathcal{H}_I = \mathcal{H}_S \oplus \mathcal{H}_R$, 若 \mathcal{H}_S 是马尔科夫演化下的一个不变子空间,令

$$\mathcal{H}_{R'} = \bigcap_{k=1}^P \ker(L_{P,k}) \quad (10)$$

式中, $L_{P,k}$ 表示从 \mathcal{H}_R 到 \mathcal{H}_S 的线性映射算符,则 \mathcal{H}_S

是一个 GAS 子空间,当且仅当 $\mathcal{H}_{R'}$ 不支持任何不变子系统.

基于定理 2.2,如果一个子系统或其所定义的子空间不是吸引的,我们希望通过哈密顿设计使其成为吸引的.文献[14]中的定理 2 从原则上给出了对非吸引的不变子系统,通过开环哈密顿设计能够使其满足吸引性(即可全局渐近稳定化)的条件.

定理 2.3^[14] 设 $\mathcal{H}_I = \mathcal{H}_S \oplus \mathcal{H}_R$, \mathcal{H}_S 是系统 I 在马尔科夫演化下的一个不变子空间, \mathcal{H}_R 不是不变的. 如果可以采用任意独立于时间的哈密顿控制,那么在适当的哈密顿设计下 \mathcal{H}_S 可以成为一个全局渐近稳定的子空间.

定理 2.3 说明,能否通过开环哈密顿量的设计实现子空间 \mathcal{H}_S 在马尔科夫演化下的渐近稳定性取决于子空间 \mathcal{H}_R 的不变性. 基于推论 2.1 关于子空间 \mathcal{H}_S 的不变性判定条件,显然我们可以类似得到子空间 \mathcal{H}_R 的不变性判定条件,即

推论 2.2 假设 $\mathcal{H}_I = \mathcal{H}_S \oplus \mathcal{H}_R$, H 与 $\{L_k\}$ 分别为系统 I 的哈密顿量与 Lindblad 算子,如果对于任给的 k ,以下条件成立:

$$L_k = \begin{pmatrix} L_{S,k} & 0 \\ L_{Q,k} & L_{R,k} \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$iH_P + \frac{1}{2} \sum_k L_{Q,k}^+ \otimes L_{R,k}^+ = 0 \quad (12)$$

则 \mathcal{H}_R 构成马尔科夫演化 \mathcal{H}_I 下的一个不变子空间.

推论 2.2 与定理 2.3 可以用来确定 \mathcal{H}_S 是否能够通过哈密顿设计成为 GAS.

2.2.2 不变子系统的稳定化设计

基于以上内容,我们针对非吸引的不变子系统,讨论如何通过开环哈密顿设计来使其成为吸引,从而实现不变子系统的稳定化.

假定 $\mathcal{H}_I = \mathcal{H}_S \oplus \mathcal{H}_R$, 并且 \mathcal{H}_S 是系统 I 在马尔科夫演化下的一个不变子系统. 我们的讨论分两种情形:

(I) \mathcal{H}_R 是一个不变子空间

根据推论 2.2, \mathcal{H}_R 的不变性暗示了 $L_{P,k} = 0$ 对每一个 k 均成立. 进一步, \mathcal{H}_S 的不变性意味着 $H_P = 0$. 由于保持 \mathcal{H}_S 不变性的哈密顿量总是满足 $H_P = 0$, 因而也保持了 \mathcal{H}_R 的不变性. 这就是说,此时我们无法通过哈密顿设计使 \mathcal{H}_S 成为吸引.

(II) \mathcal{H}_R 不是一个不变子系统

这种情况下,我们可以设计一个迭代程序来确定一个修正的控制哈密顿量,以使 \mathcal{H}_S 成为吸引. 根

据定理 2.2, 当 \mathcal{H}_R 不支持不变子系统时, \mathcal{H}_S 是吸引的. 假定 \mathcal{H}_R 包含某一不变子空间 $\mathcal{H}_T \subset \mathcal{H}_R$, 则可以对空间 \mathcal{H}_I 进行如下分解:

$$\mathcal{H}_I = \mathcal{H}_S \oplus \mathcal{H}_T \oplus \mathcal{H}_Z \quad (13)$$

考虑 \mathcal{H}_S 和 \mathcal{H}_T 的不变性, 基于推论 2.1 和推论 2.2, 系统的 Lindblad 算符和哈密顿量显然将体现为如下形式:

$$L_k = \begin{pmatrix} L_{S,k} & 0 & L_{P',k} \\ 0 & L_{T,k} & L_{P',k} \\ 0 & 0 & L_{Z,k} \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} H_S & 0 & H_{P'} \\ 0 & H_T & H_{P'} \\ H_{P'}^\dagger & H_{P'}^\dagger & H_Z \end{pmatrix} \quad (14)$$

且满足等式

$$iH_{P'} - \frac{1}{2} \sum_k L_{S,k}^\dagger L_{P',k} = 0 \quad (15)$$

$$iH_{P'} - \frac{1}{2} \sum_k L_{T,k}^\dagger L_{P',k} = 0 \quad (16)$$

显然, 能够保持 \mathcal{H}_S 不变性(即为了不改变推论 2.1 中 H_P 的值, 相应分量取零)的修正哈密顿量的一般形式为:

$$H_C = \begin{pmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & H_M \\ 0 & H_M^\dagger & H_3 \end{pmatrix} \quad (17)$$

对于 H_C , 假定我们选择 H_M 是一个列满秩矩阵, H_1 和 H_3 任意选择, 那么只要确定出 H_2 即可. 我们分两种情况讨论.

如果 $\dim(\mathcal{H}_T) \leq \frac{1}{2} \dim(\mathcal{H}_R)$, 那么对每一个状态 ρ_T 有 $i\rho_T H_M \neq 0$. 由于 \mathcal{H}_T 的任何子空间都不满足推论 2.1 的条件, 因此 \mathcal{H}_T 不能支持任何不变子系统. 如果 $\dim(\mathcal{H}_T) > \frac{1}{2} \dim(\mathcal{H}_R)$, 选择一个列满秩的 H_M , 通过维数比较知 H_M 必定存在一个满足 $\mathcal{H}H_M = 0$ 的非平凡核 \mathcal{H} , 这样就存在一个子空间 $\mathcal{H}_T \subset \mathcal{H}$ 使得 \mathcal{H}_T 关于 $\mathcal{L}_r(\mathcal{H})$ 是不变的, 且其维数严格小于 $\dim(\mathcal{H}_T)$. 迭代这一推理过程, 得到 $\mathcal{H}_I = \mathcal{H}_S \oplus \mathcal{H}_{T'} \oplus \mathcal{H}_Z$. 其中, $\mathcal{H}_Z = \mathcal{H}_Z \oplus (\mathcal{H}_T \ominus \mathcal{H}_{T'})$, 且 $\dim(\mathcal{H}_{T'}) < \dim(\mathcal{H}_T)$. 这就是说, 我们可以通过自由选取控制哈密顿 H_C 中的 H_2 不断减小相应不变集的维数. 每次迭代, 要么 $\dim(\mathcal{H}_T) \leq \frac{1}{2} \dim(\mathcal{H}_R)$, 此时 \mathcal{H}_S 成为吸引的; 要么不变集的维数至少减小 1.

整个迭代程序最多有 $\dim(\mathcal{H}_R)$ 步即终止. 伴随着迭代程序的结束, 一个能够使得所考虑不变子系统成为吸引子系统的修正哈密顿量也就确定了. 显

然, 这样设计的哈密顿量可以实现所考虑不变子系统 S 的渐近稳定化.

3 仿真实验

本节采用文献[9]中的两能级开放量子系统, 对相应的子系统进行不变性、吸引性的分析和开环哈密顿设计, 该系统由如下马尔科夫动力学模型描述:

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -i[\sigma_z, \rho(t)] + \left[L\rho(t)L^\dagger - \frac{1}{2}\{L^\dagger L, \rho(t)\} \right] \quad (18)$$

式中, $L = \sigma_z + \sigma_+$. 控制任务为使状态 $\rho_d = \text{diag}(1, 0)$ 成为不变和吸引的.

对系统 (18), 有 $H = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_S & H_P \\ H_Q & H_R \end{pmatrix}, L = \sigma_z + \sigma_+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_S & L_P \\ L_Q & L_R \end{pmatrix}.$

由于 $iH_P - \frac{1}{2} L_S \cdot L_P = -\frac{1}{2} \neq 0$, 不满足不变性的第二个条件, 因此 ρ_d 是可变的. 取初态为 $\rho_0 = \rho_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 系统状态的演化过程如图 1 所示. 其中, 实线表示密度矩阵的第一个本征态上的布居, 虚线表示第二个本征态上的布居. 显然, 系统的演化不会保持在初始态上, 也就是说状态 ρ_d 是可变的. 根据不变性条件, 我们设计 $H_P = -\frac{1}{2}i$, 即取控制哈密顿量

$$H_C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2}i & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则系统的新哈密顿量为:}$$

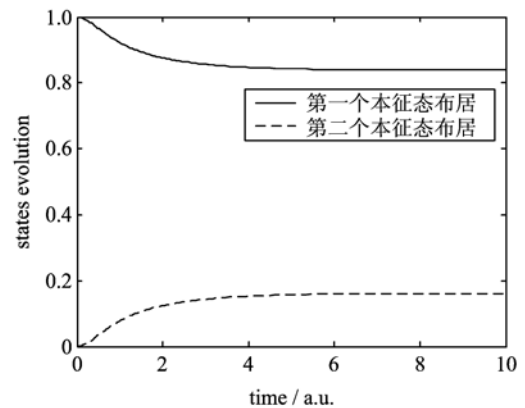


图 1 没有修正哈密顿时子系统不变性的仿真结果
Fig. 1 Simulation result of the invariance of the subsystem without correction Hamiltonian

$$H' = H + H_C = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2}i & -1 \end{pmatrix},$$

满足不变性条件,此时系统的演化过程如图 2 所示. 由图 2 可见,状态 ρ_d 显然是不变的.

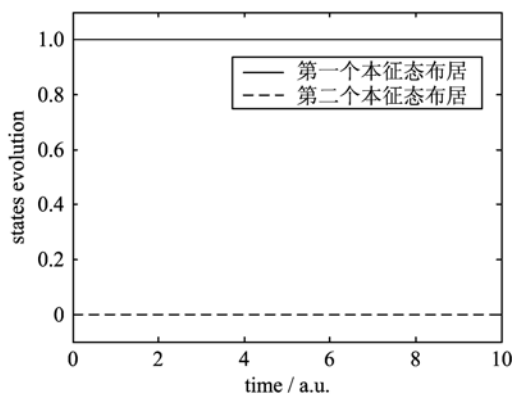


图 2 施加哈密顿设计后子系统不变性的仿真结果
Fig. 2 Simulation result of the invariance of the subsystem with Hamiltonian control

对于本例,根据前面的定理 2.2,我们知道 ρ_d 是吸引的. 取以下五个不同的状态 $\rho_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}$, $\rho_2 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}$, $\rho_3 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$, $\rho_4 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}$, $\rho_5 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$ 作为初始态,仿真曲线如图 3 所示. 显然,仿真结果体现了 ρ_d 的吸引性.

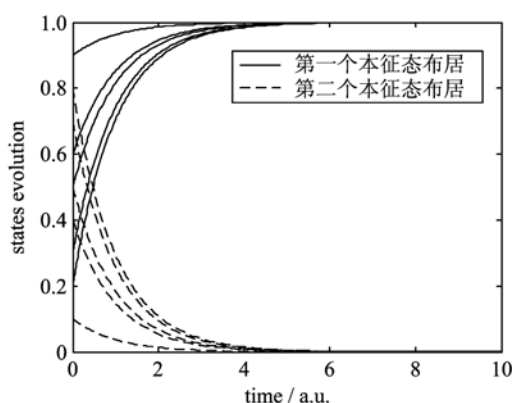


图 3 不同初始态对于子系统吸引性的仿真结果
Fig. 3 Simulation result of attractivity of different initial states to the target subsystem

4 结论

本文先回顾了马尔科夫开放量子系统子系统的

基本框架体系,概括了关于子系统不变性和吸引性的一些主要结果;然后,在对子系统不变性与吸引性的重要性质及实质含义进行分析的基础上,得到了使得一个子系统成为不变子系统与吸引子系统的哈密顿设计方法. 应该指出,本文仅涉及了确定性的开放量子系统,对于随机开放量子系统的子系统理论值得进一步研究,尤其是测量影响下的随机开放系统对于随机控制至关重要,这些方面将成为我们今后将要研究的内容.

参考文献 (References)

- [1] Nielsen M A, Chuang I L. Quantum Computation and Quantum Information [M]. Cambridge University Press, 2010.
- [2] Zanardi P, Rasetti M. Noiseless quantum codes [J]. Physical Review Letters, 1997, 79(17): 3 306-3 309.
- [3] Lidar D A, Chuang I L, Whaley K B. Decoherence-free subspaces for quantum computation [J]. Physical Review Letters, 1998, 81(12): 2 594-2 597.
- [4] Viola L, Fortunato E M, Pravia M A, et al. Experimental realization of noiseless subsystems for quantum information processing [J]. Science, 2001, 293(5537): 2 059-2 063.
- [5] Choi M D, Kribs D W. Method to find quantum noiseless subsystems [J]. Physical Review Letters, 2006, 96(5): 050501(1-5).
- [6] Xu G F, Zhang J, Tong D M, et al. Nonadiabatic holonomic quantum computation in decoherence-free subspaces [J]. Physical Review Letters, 2012, 109(17): 170501(1-4).
- [7] Kumagai H, Yamamoto T, Koashi M, et al. Robustness of quantum communication based on a decoherence-free subspace using a counter-propagating weak coherent light pulse [J]. Physical Review A, 2013, 87(5): 052325(1-8).
- [8] Shabani A, Lidar D A. Theory of initialization-free decoherence-free subspaces and subsystems [J]. Physical Review A, 2005, 72(4): 042303(1-15).
- [9] Viola L, Ticozzi F. Attractive quantum subsystems and feedback-stabilization problems [C]// Proceedings of the 3rd international conference on Physics and control. Potsdam, Germany: IEEE Press, 2007.
- [10] Ticozzi F, Viola L. Quantum Markovian subsystems: Invariance, attractivity, and control [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(9): 2 048-2 063.
- [11] Ticozzi F, Viola L. Analysis and synthesis of attractive quantum Markovian dynamics [J]. Automatica, 2009,

- 45(9): 2002-2009.
- [12] Nishio K, Kashima K, Imura J. Global feedback stabilization of quantum noiseless subsystems [C]// American Control Conference, St. Louis, USA: IEEE Press, 2009; 1 499-1 504.
- [13] Schirmer S G, Wang X T. Stabilizing open quantum systems by Markovian reservoir engineering [J]. Physical Review A, 2010, 81(6): 062306(1-14).
- [14] Ticozzi F, Lucchese R, Cappellaro P, et al. Hamiltonian control of quantum dynamical semigroups: Stabilization and convergence speed [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(8): 1 931-1 944.
- [15] Ticozzi F, Nishio K, Altafini C. Stabilization of stochastic quantum dynamics via open and closed loop control [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(1): 74-85.
- [16] Lindblad G. On the generators of quantum dynamical semigroups [J]. Communications in Mathematical Physics, 1976, 48(2): 119-130.
- [17] Gorini V, Kossakowski A, Sudarshan E C G. Completely positive dynamical semigroups of N-level systems [J]. Journal of Mathematical Physics, 1976, 17(5): 821-825.
- [18] Viola L, Knill E, Laflamme R. Constructing qubits in physical systems [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2001, 34(35): 7 067-7 079.
- [19] Knill E. Protected realizations of quantum information [J]. Physical Review A, 2006, 74(4): 042301(1-11).
- [20] Ticozzi F, Schirmer S G, Wang X T. Stabilizing quantum states by constructive design of open quantum dynamics [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(12): 2 901-2 905.

(上接第 810 页)

- [5] Bellman R, Cooke K L. Differential-Difference Equations[M]. New York: Academic Press, 1963.
- [6] De Paor A M, O'Malley M. Controllers of Ziegler-Nichols type for unstable process with time delay[J]. International Journal of Control, 1989, 49(4): 1 273-1 284.
- [7] Bahavarnia M, Tavazoei M. A new view to Ziegler-Nichols step response tuning method; Analytic non-fragility justification[J]. Journal of Process Control, 2013, 23(1): 23-33.
- [8] Venkatasankar V, Chidambaram M. Design of P and PI controllers for unstable first-order plus time delay systems[J]. International Journal of Control, 1994, 60(1): 137-144.
- [9] Ho W K, Xu W. PID tuning for unstable processes based on gain and phase-margin specifications[J]. IEE Proceedings of Control Theory and Applications, 1998, 145(5): 392-396.
- [10] 孙明玮, 焦纲领, 杨瑞光, 等. PI 控制下开环不稳定对象可行稳定裕度范围的研究[J]. 自动化学报, 2011, 37(3): 385-388.
- [11] Paraskevopoulos P N, Pasgianos G D, Arvanitis K G. PID-type controller tuning for unstable first order plus dead time processes based on gain and phase margin specifications [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2006, 14(5): 926-936.
- [12] Normey-Rico J E, Camacho E F. Simple robust dead-time compensator for first-order plus dead-time unstable processes [J]. Industrial & Engineering Chemistry Research, 2008, 47(14): 4 784-4 790.