第46卷第12期 中国科学技术大学学报 Vol. 46, No. 12
2016年12月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Dec. 2016

文章编号:0253-2778(2016)12-0981-07

完全三部图色唯一性数值条件的改进

徐利民[1],杨志林[2]

(1.淮南职业技术学院基础部,安徽淮南 232001;2.合肥工业大学数学学院,安徽合肥 230009)

摘要:设 $P(G,\lambda)$ 是图 G 的色多项式，如果任意与图 G 的色多项式相等($P(G,\lambda)=P(H,\lambda)$)的图 H 都与图 G 同构($G\cong H$)，则称图 G 是色唯一图. 这里通过比较图的三角形子图和无弦四边形子图的个数，讨论了完全三部图 $K(n-k,n-v,n)$ 的色唯一性. 证明了若 $n\geqslant v^2(k-v/3)/4+v,k\geqslant v\geqslant 2$，则完全三部图 $K(n-k,n-v,n)$ 是色唯一图；若 $n\geqslant k+2$，$k\geqslant 2$，则完全三部图 $K(n-k,n-2,n)$ 是色唯一图.

关键词:完全三部图;色唯一性;三角形子图;无弦四边形子图

中图分类号:O157.5 **文献标识码**:A doi:10.3969/j.issn.0253-2778.2016.12.003

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 05C15; Secondary 05C60

引用格式:徐利民,杨志林. 完全三部图色唯一性数值条件的改进[J]. 中国科学技术大学学报,2016,46(12):981-987.

XU Limin, YANG Zhilin. Improvement of the numerical condition of chromaticity on complete tripartite graphs[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2016,46(12):981-987.

Improvement of the numerical condition of chromaticity on complete tripartite graphs

XU Limin[1], YANG Zhilin[2]

(1. *Department of Basic Courses*, *Huainan Vocational and Technical College*, *Huainan* 232001, *China*;
2. *School of Mathematics*, *Hefei University of Technology*, *Hefei* 230009, *China*)

Abstract: Let $P(G,\lambda)$ be the chromatic polynomial of a graph G. A graph G is chromatically unique if for any graph H, $P(H,\lambda)=P(G,\lambda)$ implies $G\cong H$. By comparing the number of the triangular subgraph and that of the quadrangular subgraph without chords, the chromatic uniqueness on the tripartite graph $K(n-k,n-v,n)$ was discussed. It was proved that $K(n-k,n-v,n)$ is chromatically unique for $n\geqslant v^2(k-v/3)/4+v$ and $k\geqslant v\geqslant 2$ and that $K(n-k,n-2,n)$ is chromatically unique for $n\geqslant k+2,k\geqslant 2$.

Key words: complete tripartite graph; chromatically uniqueness; triangular subgraph; quadrangular subgraph

---

收稿日期:2015-10-31;**修回日期**:2016-02-20

基金项目:安徽高校自然科学研究项目(KJ2015A404)资助.

作者简介:徐利民,男,1961年生,教授.研究方向:图论. E-mail: xulimina@126.com

通讯作者:杨志林,博士/教授. E-mail: yzl62@126.com

0 引言

如果两个图 G 与 H 的色多项式相等,则称图 G 与 H 是色等价的,记为 $G\sim H$. 如果任意与图 G 色等价的图 H 都与图 G 同构,则称图 G 是色唯一图,或称图 G 是色唯一的. 文献[1]中提出了一个猜想:若 $k\geqslant n+2\geqslant 4$,则完全三部图 $K(n-k,n,n)$ 是色唯一的. 文献[2]完全证明了上述猜想,并进一步研究了完全三部图 $K(n-k,n-1,n)$ 的色唯一性问题,证明了若 $n\geqslant 2k\geqslant 4$,则完全三部图 $K(n-k,n-1,n)$ 是色唯一的. 文献[3]证明了若 $n\geqslant k+2\geqslant 4$,则完全三部图 $K(n-k,n-1,n)$ 是色唯一的. 文献[4]证明了若 $v\geqslant 0,k\geqslant 2,n\geqslant(k^2+v^2+vk+k-v+4)/3$,则完全三部图 $K(n-k,n,n+v)$ 是色唯一的. 文献[5]证明了若 $2\leqslant v\leqslant 4,k\geqslant v,n\geqslant k^2/4+v+1$,则完全三部图 $K(n-k,n-v,n)$ 是色唯一的;并给出了一个猜想:若 $k\geqslant v\geqslant 2,n\geqslant k^2/4+v+1$,则完全三部图 $K(n-k,n-v,n)$ 是色唯一的. 文献[6]证明了若 $m\geqslant 2,k\geqslant 1,n\geqslant\max\{[m^2/4+m+k],[m^2/4+3m/2+2k-11/4],[mk+m-k+1]\}$,则 $K(n-m,n,n+k)$ 是色唯一的. 文献[7]证明了若 $v\geqslant 4,k\geqslant 2v^2+4,n\geqslant(k+2)^2/8+3$,则完全三部图 $K(n-k,n-v,n)$ 是色唯一图.

1 主要结果

图 G 的圈子图 C_3 称为图的三角形子图,图 G 的圈子图 C_4 称为图 G 的四边形子图,如果图 G 的四边形子图 C_4 上任意两个不相邻的顶点在图 G 中都不相邻接,则称四边形子图 C_4 为图 G 的无弦四边形子图. 在这里通过一些含有 3 个点的特殊树子图 T_3 的计数,估计和比较了图的三角形子图 C_3 的个数和无弦四边形子图 C_4 的个数,证明了下列结果:

定理 1.1 若 $n\geqslant v^2(k-v/3)/4+v,k\geqslant v\geqslant 2$,则完全三部图 $K(n-k,n-v,n)$ 是色唯一图.

推论 1.1 若 $n\geqslant k+2,k\geqslant 2$,则完全三部图 $K(n-k,n-2,n)$ 是色唯一图.

2 基本引理

引理 2.1[8,9] 设

$$G=K(n+a_1,n+a_2,n+a_3)-A\sim H=K(n-k,n-v,n),$$

$n>k\geqslant v\geqslant 0$,则

① $a_1+a_2+a_3=-(k+v)$,

② $|A|=a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3-vk=(k^2+v^2-a_1^2-a_2^2-a_3^2)/2$,

③ $\Delta(G)=\Delta(H)$,

④ $\partial(G)=\partial(H)$,

其中,$\Delta(G)$ 表示图 G 的三角形的个数,$\partial(G)$ 表示图 G 的无弦四边形的个数,$n,n+a_i(i=1,2,3)$ 是正整数,k,v 是非负整数,A 是 $K(n+a_1,n+a_2,n+a_3)$ 的边子集.

引理 2.2[2] 设 $K(n+a_1,n+a_2,n+a_3)-A\sim K(n-k,n-v,n)$,$0\leqslant v\leqslant k$,$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3$,则 $-v\leqslant a_3\leqslant 0$.

引理 2.3 若 B 是完全二部图 $K(u,v)$ 的边子集,

①[5]设 $K(u,v)-B$ 是连通的,则 $K(u,v)-B$ 四边形的数目最多为

$$(uv-|B|)[(uv-|B|)-u-v+1]/4=C_u^2C_v^2-[2(u-1)v+(v-u+1)]|B|/4+|B|^2/4;$$

②[9]设 $u\geqslant v$,则 $K(u,v)-B$ 四边形的数目最多为

$$C_u^2C_v^2-(u-1)\left[v-\frac{1}{2}(|B|+1)\right]|B|.$$

即从 $K(u,v)$ 中移去 B 的所有边,至少可移去 $[2(u-1)v+(v-u+1)]|B|/4-|B|^2/4$ 或 $(u-1)\cdot[v-(|B|+1)/2]|B|(u\geqslant v)$ 个四边形.

设 V_1,V_2,V_3 是完全三部图 $Q=K(n+a_1,n+a_2,n+a_3)$ 的 3 个孤立点集,$|V_1|=n+a_1$,$|V_2|=n+a_2$,$|V_3|=n+a_3$. 又设 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$ 是它的边子集,其中 A_1 中边的端点分别在 V_2 与 V_3 中,A_2 中边的端点分别在 V_1 与 V_3 中,A_3 中边的端点分别在 V_2 与 V_1 中,$|A_1|=l_1$,$|A_2|=l_2$,$|A_3|=l_3$. φ 表示由属于 A 且不属于同一个 $A_i(i=1,2,3)$ 的 2 条边构成的树子图 T_3 的个数. γ 表示由 A 的 3 条边所构成图 Q 的三角形子图的个数.

引理 2.4[10] 设 $a_1+a_2+a_3=-(k+v)$,$|A|=a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3-vk$,则

① 三部图 $K(n+a_1,n+a_2,n+a_3)-A$ 与 $K(n-k,n-v,n)$ 三角形子图个数的差为

$$\overline{\Delta}=a_1a_2a_3-a_1l_1-a_2l_2-a_3l_3+\varphi-\gamma;$$

② 三部图 $K(n+a_1,n+a_2,n+a_3)$ 与 $K(n-k,n-v,n)$ 的无弦四边形的个数之差为

$$\frac{1}{4}[-(k+v)|A|-3a_1a_2a_3](2n-1)+$$

$\frac{1}{4}[|A|^2+(2vk+1)|A|+2(k+v)a_1a_2a_3]$.

在图 Q 中,设 $e_1\in A_1$,$\varphi_{21}(e_1)$表示 e_1 与 A_3 中边邻接的数目,$\varphi_{31}(e_1)$表示 e_1 与 A_2 的边邻接的数目,$\gamma_1(e_1)$表示 e_1 与 A_2 和 A_3 的边构成三角形子图的数目. $e_2\in A_2$,$\varphi_{12}(e_2)$表示 e_2 与 A_3 的边邻接的数目,$\varphi_{32}(e_2)$表示 e_2 与 A_1 的边邻接的数目,$\gamma_2(e_2)$表示 e_2 与 A_1 和 A_3 的边构成三角形子图的个数;$e_3\in A_3$,$\varphi_{13}(e_3)$表示 e_3 与 A_2 的边邻接的数目,$\varphi_{23}(e_3)$表示 e_3 与 A_1 的边邻接的数目,$\gamma_3(e_3)$表示 e_3 与 A_1 和 A_2 的边构成三角形子图的个数.

引理 2.5[7]　设 $e_1\in A_1,e_2\in A_2,e_3\in A_3$,

$$\varphi_1(e_1)=\varphi_{21}(e_1)+\varphi_{31}(e_1)-\gamma_1(e_1),$$
$$\varphi_2(e_2)=\varphi_{12}(e_2)+\varphi_{32}(e_2)-\gamma_2(e_2),$$
$$\varphi_3(e_3)=\varphi_{23}(e_3)+\varphi_{13}(e_3)-\gamma_3(e_3),$$

则 $K(n+a_1,n+a_2,n+a_3)$中以 A 的边为弦并包含有 A 中边的四边形子图的个数为

$$\sum_{e\in A_1}\left[n+a_1-\frac{1}{2}(\varphi_1(e)+1)\right]\varphi_1(e)+\sum_{e\in A_2}\left[n+a_2-\frac{1}{2}(\varphi_2(e)+1)\right]\varphi_2(e)+\sum_{e_3\in A_3}\left[n+a_3-\frac{1}{2}(\varphi_3(e)+1)\right]\varphi_3(e_3).$$

设图 Q 的恰含有 A 的 2 条边的三角形子图中,φ_1 表示含有 A_2 与 A_3 中边的三角形子图个数,φ_2 表示含有 A_1 与 A_3 中边的三角形子图个数,φ_3 表示含有 A_1 与 A_2 中边的三角形子图个数. 又设 γ 表示由 A 的三条边构成的三角形子图的个数. 显然,

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+3\gamma,$$
$$\varphi_1=\sum_{e\in A_2}(\varphi_{12}(e)-\gamma_2(e))=\sum_{e\in A_3}(\varphi_{13}(e)-\gamma_3(e)),$$
$$\varphi_2=\sum_{e\in A_1}(\varphi_{21}(e)-\gamma_1(e))=\sum_{e\in A_3}(\varphi_{23}(e)-\gamma_3(e)),$$
$$\varphi_3=\sum_{e\in A_1}(\varphi_{31}(e)-\gamma_1(e))=\sum_{e\in A_2}(\varphi_{32}(e)-\gamma_2(e)).$$

引理 2.6　设 $e_1\in A_1,e_2\in A_2,e_3\in A_3$,

$$\varphi_1(e_1)=\varphi_{21}(e_1)+\varphi_{31}(e_1)-\gamma_1(e_1),$$
$$\varphi_2(e_2)=\varphi_{12}(e_2)+\varphi_{32}(e_2)-\gamma_2(e_2),$$
$$\varphi_3(e_3)=\varphi_{23}(e_3)+\varphi_{13}(e_3)-\gamma_3(e_3),$$

则

$$\varphi_1(e_1)+\varphi_2(e_2)+\varphi_3(e_3)\leqslant\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\gamma+2,$$
$$\varphi_i(e_i)+\varphi_j(e_j)\leqslant\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\gamma+1,i\neq j.$$

证明　因为

$$\varphi_1(e_1)+\varphi_2(e_2)+\varphi_3(e_3)=\varphi_{12}(e_2)-\gamma_2(e_2)+\varphi_{13}(e_2)-\gamma_3(e_3)+\varphi_{21}(e_1)-\gamma_1(e_1)+\varphi_{23}(e_3)-\gamma_3(e_3)+\varphi_{31}(e_1)-\gamma_1(e_1)+\varphi_{32}(e_3)-\gamma_2(e_2)+\gamma_1(e_1)+\gamma_2(e_2)+\gamma_3(e_3).$$

分下列 4 种情形:

① 如果 e_1,e_2 和 e_3 互不相邻接,则对含有 e_1 或 e_2 或 e_3 边的三角形互不相同,所以

$$\varphi_1(e_1)+\varphi_2(e_2)+\varphi_3(e_3)\leqslant\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\gamma;$$

② 如果 e_1,e_2 和 e_3 仅有 2 条边相邻接,不妨设 e_1 与 e_2 相邻接,这时与 e_1 和 e_2 构成三角形的第 3 条边 e 如果不属于 A,则此三角形被多计数一次,所以

$$\varphi_{31}(e_3)-\gamma_1(e_1)+\varphi_{32}(e_3)-\gamma_2(e_2)\leqslant\varphi_3+1,$$
$$\varphi_1(e_1)+\varphi_2(e_2)+\varphi_3(e_3)\leqslant\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\gamma+1,$$

如果第 3 条边 e 属于 A,则 $\gamma_1(e_1)+\gamma_2(e_2)+\gamma_3(e_3)\leqslant\gamma+1$,即此三角形被多计数 1 次,所以

$$\varphi_1(e_1)+\varphi_2(e_2)+\varphi_3(e_3)\leqslant\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\gamma+1;$$

③ 如果 e_1,e_2 和 e_3 有两组边相邻接,不妨设 e_1 与 e_2,e_2 与 e_3 相邻接,则

$$\varphi_1(e_1)+\varphi_2(e_2)+\varphi_3(e_3)\leqslant\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\gamma+2;$$

④ 如果 e_1,e_2 和 e_3 相互邻接,此时 e_1,e_2 和 e_3 构成的三角形被计数 3 次,所以

$$\varphi_1(e_1)+\varphi_2(e_2)+\varphi_3(e_3)\leqslant\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\gamma+2.$$

因为

$$\varphi_1(e_1)+\varphi_2(e_2)=\varphi_{12}(e_2)-\gamma_2(e_2)+\varphi_{21}(e_1)-\gamma_1(e_1)+\varphi_{31}(e_1)-\gamma_1(e_1)+\varphi_{32}(e_3)-\gamma_2(e_2)+\gamma_1(e_1)+\gamma_2(e_2),$$

由上述同理可得

$$\varphi_i(e_i)+\varphi_j(e_j)\leqslant\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\gamma+1,i\neq j.$$

引理 2.7　设 $G=K(n+a_1,n+a_2,n+a_3)-A\sim H=K(n-k,n-v,n)$,$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3$,$n\geqslant k+2$,则 G 与 H 的无弦四边形的差 $\bar{\alpha}$ 满足

① $\bar{\alpha}\leqslant-(l_1l_2+l_1l_3+l_2l_3)/2+(\varphi-\gamma)/4-(n+a_2+a_3-a_1)\varphi_1/2-(n+a_1+a_3-a_2)\varphi_2/2-(n+a_1+a_2-a_3)\varphi_3/2+(\varphi-\gamma+1)(\varphi-\gamma)/2-(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)\gamma-(3\gamma+1)\gamma/2$;

② $\bar{\alpha}\leqslant-(\varphi-\gamma)/4-(n+a_2+a_3-a_1)\varphi_1/2-(n+a_1+a_3-a_2)\varphi_2/2-(n+a_1+a_2-a_3)\varphi_3/2+(\varphi-\gamma+1)(\varphi-\gamma)/2-(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)\gamma-(3\gamma+1)\gamma/2-(n+a_3-1)(n+a_2-(l_1+1))l_1/2-(n+a_3-1)\cdot(n+a_1-(l_2+1))l_2/2$;

③ $\bar{\alpha}\leqslant-(\varphi-\gamma)/4-(n+a_2+a_3-a_1)\varphi_1/2-(n+a_1+a_3-a_2)\varphi_2/2-(n+a_1+a_2-a_3)\varphi_3/2+$

$(\varphi-\gamma+1)(\varphi-\gamma)/2-(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)\gamma-(3\gamma+1)\gamma/2-(n+a_3-1)(n+a_2-(l_1+1))l_1/2$；

④ $\bar{\alpha}\leqslant-(\varphi-\gamma)/4-(n+a_2+a_3-a_1)\varphi_1/2-(n+a_1+a_3-a_2)\varphi_2/2-(n+a_1+a_2-a_3)\varphi_3/2+(\varphi-\gamma+1)(\varphi-\gamma)/2-(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)\gamma-(3\gamma+1)\gamma/2-(n+a_3-1)(n+a_1-(l_2+1))l_2/2$.

证明 由引理2.1和引理2.2得 $-v\leqslant a_3\leqslant 0$，$a_1+a_2+a_3=-(k+v)$，$|A|=a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3-kv$，所以

$$\begin{aligned}a_1a_2&=(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3-kv)-\\&\quad(a_1a_3+a_2a_3-kv)=\\&\quad|A|+a_3(k+v+a_3)+kv=\\&\quad|A|+(k+a_3)(v+a_3).\end{aligned}$$

由引理2.4，

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}&=a_1a_2a_3-a_1l_1-a_2l_2-a_3l_3+\varphi-\gamma=\\&\quad a_3(k+a_3)(v+a_3)-(a_1-a_3)l_1-\\&\quad(a_2-a_3)l_2+\varphi-\gamma=0\ .\end{aligned}$$

设 $\psi_1=\max\limits_{e\in A_1}\{\varphi_1(e)\}$，$\psi_2=\max\limits_{e\in A_2}\{\varphi_2(e)\}$，$\psi_3=\max\limits_{e\in A_3}\{\varphi_3(e)\}$，由引理2.6，$\psi_1+\psi_2+\psi_3\leqslant\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\gamma+2$，$\psi_i+\psi_j\leqslant\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\gamma+1$，$i\neq j$.

由引理2.5，Q 中以 A 的边为弦并含有 A 中边的四边形子图的个数记为

$$\begin{aligned}\pi_0&=\sum_{e\in A_1}[n+a_1-(\varphi_1(e)+1)/2]\varphi_1(e)+\\&\quad\sum_{e\in A_2}[n+a_2-(\varphi_2(e)+1)/2]\varphi_2(e)+\\&\quad\sum_{e\in A_3}[n+a_3-(\varphi_3(e)+1)/2]\varphi_3(e)\geqslant\\&\quad\sum_{e\in A_1}[n+a_1-(\psi_1+1)/2](\varphi_{21}(e)+\varphi_{31}(e)-\gamma_1(e))+\\&\quad\sum_{e\in A_2}[n+a_2-(\psi_2+1)/2](\varphi_{12}(e)+\varphi_{32}(e)-\gamma_2(e))+\\&\quad\sum_{e\in A_3}[n+a_3-(\psi_3+1)/2](\varphi_{13}(e)+\varphi_{23}(e)-\gamma_3(e))=\\&\quad[n+a_1-(\psi_1+1)/2](\varphi_2+\varphi_3+\gamma)+\\&\quad[n+a_2-(\psi_2+1)/2](\varphi_1+\varphi_3+\gamma)+\\&\quad[n+a_3-(\psi_3+1)/2](\varphi_1+\varphi_2+\gamma)=\\&\quad(2n+a_2+a_3)\varphi_1+(2n+a_1+a_3)\varphi_2+\\&\quad(2n+a_1+a_2)\varphi_3+(3n+a_1+a_2+a_3)\gamma-\\&\quad[(\psi_2+\psi_3+2)\varphi_1+(\psi_1+\psi_3+2)\varphi_2+\\&\quad(\psi_1+\psi_2+2)\varphi_3]/2-(\psi_1+\psi_2+\psi_3+3)\gamma/2\geqslant\\&\quad(2n+a_2+a_3)\varphi_1+(2n+a_1+a_3)\varphi_2+\\&\quad(2n+a_1+a_2)\varphi_3+(3n+a_1+a_2+a_3)\gamma-\\&\quad(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\gamma+3)(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)/2-\\&\quad(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\gamma+5)\gamma/2=\\&\quad(2n+a_2+a_3)\varphi_1+(2n+a_1+a_3)\varphi_2+\\&\quad(2n+a_1+a_2)\varphi_3+(3n+a_1+a_2+a_3)\gamma-\\&\quad(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+2\gamma+3)\cdot\\&\quad(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+2\gamma-2\gamma)/2-(\gamma+5)\gamma/2=\\&\quad(2n+a_2+a_3)\varphi_1+(2n+a_1+a_3)\varphi_2+\\&\quad(2n+a_1+a_2)\varphi_3+(3n+a_1+a_2+a_3)\gamma-\\&\quad(\varphi-\gamma+3)(\varphi-\gamma)/2+\\&\quad(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)\gamma+(3\gamma+1)\gamma/2.\end{aligned}$$

由引理2.4，完全三部图 Q 与 $K(n-k,n-v,n)$ 的无弦四边形的个数之差(见文献[7])为

$$\begin{aligned}\pi_1&=[-(k+v)\,|A|-3a_1a_2a_3](2n-1)/4+\\&\quad[|A|^2+(2vk+1)\,|A|+2(k+v)a_1a_2a_3]/4=\\&\quad-(k+v+3a_3)(n+a_3)\,|A|\,/2+\\&\quad(k+v+3a_3)\,|A|\,/4+(k+v)a_3\,|A|+\\&\quad3a_3^2\,|A|\,/2+[|A|^2+(2vk+1)\,|A|]/4-\\&\quad[6(n-1)-2(k+v)+3]a_3(k+a_3)(v+a_3)/4.\end{aligned}$$

完全三部图 Q 中，以 A 的边为弦的四边形子图的个数(见文献[7])为

$$\begin{aligned}\pi_2&=C_{n+a_1}^2l_1+C_{n+a_2}^2l_2+C_{n+a_3}^2l_3=\\&\quad C_{n+a_3}^2\,|A|+(a_1-a_3)(2n+a_1+a_3-1)l_1/2+\\&\quad(a_2-a_3)(2n+a_2+a_3-1)l_2/2.\end{aligned}$$

又记(见文献[7])

$$\begin{aligned}\pi_3&=\\&\quad-(k+v+3a_3)(n+a_3)\,|A|\,/2+C_{n+a_3}^2\,|A|=\\&\quad(n+a_3)[n-(k+v+2a_3+1)]\,|A|\,/2=\\&\quad(n+a_1)(n+a_2-1)l_3/2-\\&\quad[a_3(2(k+v)+3a_3+1)+|A|-a_1+kv]\,|A|\,/2+\\&\quad(n+a_1)(n+a_3-1)l_2/2+\\&\quad(a_2-a_3)(n+a_1)l_2/2+\\&\quad(n+a_2)(n+a_3-1)l_1/2+\\&\quad(a_1-a_3)(n+a_2)l_1/2+(a_2-a_1)l_1/2.\end{aligned}$$

设 π_4 表示 $K(n+a_1,n+a_2,n+a_3)$ 的各二部子图 $K(n+a_1,n+a_2)$，$K(n+a_1,n+a_3)$，$K(n+a_2,n+a_3)$ 中含有 A 的边的无弦四边形总数，从 $K(n+a_1,n+a_2,n+a_3)$ 中移去 A 的边时，显然此时所增加的无弦四边形数为 $\pi_2-\pi_0-\pi_4$. 所以由引理2.3～引理2.5，$K(n+a_1,n+a_2,n+a_3)-A$ 与 $K(n-k,n-v,n)$ 的无弦四边形的差为

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}&\leqslant\pi_1+\pi_2-\pi_0-\pi_4=\\&\quad-(k+v+3a_3)(n+a_3)\,|A|\,/2+\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(k+v+3a_3)\,|A|/4+(k+v)a_3\,|A|+\\
&3a_3^2\,|A|/2+[|A|^2+(2vk+1)\,|A|]/4-\\
&[6(n-1)-2(k+v)+3]a_3(k+a_3)(v+a_3)/4+\\
&C_{n+a_3}^2\,|A|+(a_1-a_3)(2n+a_1+a_3-1)l_1/2+\\
&(a_2-a_3)(2n+a_2+a_3-1)l_2/2-\pi_0-\pi_4=\\
&(k+v+3a_3)\,|A|/4+(k+v)a_3\,|A|+\\
&3a_3^2\,|A|/2+[|A|^2+(2vk+1)\,|A|]/4-\\
&[6(n-1)-2(k+v)+3]a_3(k+a_3)(v+a_3)/4+\\
&(a_1-a_3)(2n+a_1+a_3-1)l_1/2+\\
&(a_2-a_3)(2n+a_2+a_3-1)l_2/2+\\
&(n+a_1)(n+a_2-1)l_3/2-\\
&[a_3(2(k+v)+3a_3+1)+|A|-a_1+kv]\,|A|/2+\\
&(n+a_1)(n+a_3-1)l_2/2+\\
&(a_2-a_3)(n+a_1)l_2/2+\\
&(a_2-a_1)l_1/2+(n+a_2)(n+a_3-1)l_1/2+\\
&(a_1-a_3)(n+a_2)l_1/2-\pi_0-\pi_4=\\
&(k+v+3a_3)\,|A|/4-[|A|^2-|A|]/4-\\
&[6(n-1)-2(k+v)+3]a_3(k+a_3)(v+a_3)/4+\\
&(n+a_1)(n+a_2-1)l_3/2+\\
&(n+a_1)((n+a_3-1)l_2/2+\\
&(n+a_2)(n+a_3-1)l_1/2-\\
&(a_3-a_1)\,|A|/2+(a_2-a_1)l_1/2+\\
&(a_1-a_3)(3n+a_1+a_2+a_3-1)l_1/2+\\
&(a_2-a_3)(3n+a_1+a_2+a_3-1)l_2/2-\pi_0-\pi_4=\\
&-[|A|^2-|A|]/4-\\
&[6n-2(k+v)-3]a_3(k+a_3)(v+a_3)/4+\\
&(a_1-a_2)\,|A|/4+(a_2-a_1)l_1/2+\\
&(n+a_1)(n+a_2-1)l_3/2+\\
&(n+a_1)(n+a_3-1)l_2/2+\\
&(n+a_2)(n+a_3-1)l_1/2+\\
&[a_3(k+a_3)(v+a_3)+\varphi-\gamma](3n-(k+v)-1)/2-\\
&\pi_0-\pi_4=\\
&-[|A|^2-|A|]/4+a_3(k+a_3)(v+a_3)/4+\\
&(a_1-a_2)(l_1+l_2+l_3)/4+(a_2-a_1)l_1/2+\\
&(n+a_1)(n+a_2-1)l_3/2+\\
&(n+a_1)((n+a_3-1)l_2/2+\\
&(n+a_2)(n+a_3-1)l_1/2+\\
&(\varphi-\gamma)(3n-(k+v)-1)/2-\pi_0-\pi_4=\\
&-[|A|^2-|A|]/4+[(a_1-a_3)l_1+\\
&(a_2-a_3)l_2-(\varphi-\gamma)]/4+\\
&(a_1-a_2)(l_1+l_2+l_3)/4+(a_2-a_1)l_1/2+\\
&(n+a_1)(n+a_2-1)l_3/2+\\
&(n+a_1)(n+a_3-1)l_2/2+\\
&(n+a_2)(n+a_3-1)l_1/2+\\
&(\varphi-\gamma)(3n-(k+v)-1)/2-\pi_0-\pi_4=\\
&-[|A|^2-|A|]/4+\\
&[(a_2-a_3)l_1+(a_1-a_3)l_2+\\
&(a_1-a_2)l_3-3(\varphi-\gamma)]/4+\\
&(n+a_1)(n+a_2-1)l_3/2+\\
&(n+a_1)(n+a_3-1)l_2/2+\\
&(n+a_2)(n+a_3-1)l_1/2+\\
&(\varphi-\gamma)(3n+a_1+a_2+a_3)/2-\pi_0-\pi_4.
\end{aligned}
$$

因为 $G=K(n+a_1,n+a_2,n+a_3)-A$ 的 3 色类色划分数等于 1，所以 G 的二部子图 $K(n+a_1,n+a_2)-A_3$，$K(n+a_1,n+a_3)-A_2$，$K(n+a_2,n+a_3)-A_1$ 是连通的. 由引理 2.3，

$$
\begin{aligned}
\pi_4\geqslant[&2(n+a_2)(n+a_3-1)l_1+\\
&(a_2-a_3+1)l_1-l_1^2+\\
&2(n+a_1)(n+a_3-1)l_2+\\
&(a_1-a_3+1)l_2-l_2^2+\\
&2(n+a_1)(n+a_2-1)l_3+\\
&(a_1-a_2+1)l_3-l_3^2]/4,
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\bar{\alpha}\leqslant&-(l_1l_2+l_1l_3+l_2l_3)/2-3(\varphi-\gamma)/4+\\
&(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+2\gamma)(3n+a_1+a_2+a_3)/2-\\
&(2n+a_2+a_3)\varphi_1-(2n+a_1+a_3)\varphi_2-\\
&(2n+a_1+a_2)\varphi_3-(3n+a_1+a_2+a_3)\gamma+\\
&(\varphi-\gamma+3)(\varphi-\gamma)/2-\\
&(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)\gamma-(3\gamma+1)\gamma/2=\\
&-(l_1l_2+l_1l_3+l_2l_3)/2+(\varphi-\gamma)/4-\\
&(n+a_2+a_3-a_1)\varphi_1/2-\\
&(n+a_1+a_3-a_2)\varphi_2/2-\\
&(n+a_1+a_2-a_3)\varphi_3/2+\\
&(\varphi-\gamma+1)(\varphi-\gamma)/2-\\
&(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)\gamma-(3\gamma+1)\gamma/2.
\end{aligned}
$$

由引理 2.3，

$$
\begin{aligned}
\pi_4\geqslant[&2(n+a_1)(n+a_2-1)l_3+\\
&(a_1-a_2+1)l_3-l_3^2]/4+\\
&(n+a_3-1)(n+a_2-(l_1+1)/2)l_1+\\
&(n+a_3-1)(n+a_1-(l_2+1)/2)l_2.
\end{aligned}
$$

又因为 $l_1l_2\geqslant\varphi_3+\gamma$，$l_1l_3\geqslant\varphi_2+\gamma$，$l_2l_3\geqslant\varphi_1+\gamma$，得

$$
\begin{aligned}
\bar{\alpha}\leqslant&-(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+3\gamma)/2-3(\varphi-\gamma)/4-\\
&(n+a_2+a_3-a_1)\varphi_1/2-\\
&(n+a_1+a_3-a_2)\varphi_2/2-\\
&(n+a_1+a_2-a_3)\varphi_3/2+
\end{aligned}
$$

$(\varphi-\gamma+3)(\varphi-\gamma)/2-$
$(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)\gamma-(3\gamma+1)\gamma/2-$
$(n+a_3-1)(n+a_2-(l_1+1))l_1/2-$
$(n+a_3-1)(n+a_1-(l_2+1))l_2/2\leqslant$
$-(\varphi-\gamma)/4-(n+a_2+a_3-a_1)\varphi_1/2-$
$(n+a_1+a_3-a_2)\varphi_2/2-$
$(n+a_1+a_2-a_3)\varphi_3/2+$
$(\varphi-\gamma+1)(\varphi-\gamma)/2-$
$(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)\gamma-(3\gamma+1)\gamma/2-$
$(n+a_3-1)(n+a_2-(l_1+1))l_1/2-$
$(n+a_3-1)(n+a_1-(l_2+1))l_2/2.$

由引理 2.3,

$$\pi_4\geqslant[2(n+a_1)(n+a_3-1)l_2+(a_1-a_3+1)l_2-l_2^2+2(n+a_1)(n+a_2-1)l_3+(a_1-a_2+1)l_3-l_3^2]/4+(n+a_3-1)(n+a_2-(l_1+1)/2)l_1,$$

所以得

$$\bar{\alpha}\leqslant-(\varphi-\gamma)/4-(n+a_2+a_3-a_1)\varphi_1/2-(n+a_1+a_3-a_2)\varphi_2/2-(n+a_1+a_2-a_3)\varphi_3/2+(\varphi-\gamma+1)(\varphi-\gamma)/2-(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)\gamma-(3\gamma+1)\gamma/2-(n+a_3-1)(n+a_2-(l_1+1))l_1/2.$$

同样得

$$\bar{\alpha}\leqslant-(\varphi-\gamma)/4-(n+a_2+a_3-a_1)\varphi_1/2-(n+a_1+a_3-a_2)\varphi_2/2-(n+a_1+a_2-a_3)\varphi_3/2+(\varphi-\gamma+1)(\varphi-\gamma)/2-(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)\gamma-(3\gamma+1)\gamma/2-(n+a_3-1)(n+a_1-(l_2+1))l_2/2.$$

引理 2.8[7] 设 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$, $K(n+a_1,n+a_2,n+a_3)-A\sim K(n+b_1,n+b_2,n+b_3)$, $|A_1|=|A_2|=0$, $a_3\in\{b_1,b_2,b_3\}$, $\min\{n+b_1,n+b_2,n+b_3\}\geqslant 2$,则

$$K(n+a_1,n+a_2,n+a_3)-A\cong K(n+b_1,n+b_2,n+b_3),\ |A|=0.$$

3 定理的证明

假设 $K(n+a_1,n+a_2,n+a_3)-A\sim K(n-k,n-v,n)$,其中,$A$ 是 $Q=K(n+a_1,n+a_2,n+a_3)$的边子集,且 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3$,由引理 2.1,引理 2.2,引理 2.4 得

$-v\leqslant a_3\leqslant 0,$
$a_1+a_2+a_3=-(k+v),$
$|A|=a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3-kv,$
$a_1a_2=|A|+(k+a_3)(v+a_3),$
$a_1a_3=|A|+(k+a_2)(v+a_2),$
$a_2a_3=|A|+(k+a_1)(v+a_1),$

$$\bar{\Delta}=a_1a_2a_3-a_1l_1-a_2l_2-a_3l_3+\varphi-\gamma=a_3(k+a_3)(v+a_3)-(a_1-a_3)l_1-(a_2-a_3)l_2+\varphi-\gamma=0.$$

由 $n\geqslant v^2(k-v/3)/4+v$,得 $n\geqslant k+v-2/3$,所以

$$n\geqslant k+v,$$
$$n+a_1+a_2-a_3=n+(a_1+a_2+a_3)-2a_3=n-(k+v)-2a_3\geqslant 0.$$

当 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3<0$ 时,如果 $l_1+l_3=0$,则 $\varphi-\gamma=0$. 所以 $a_1a_2a_3-a_2l_2=0$,因此得

$$l_2=a_1a_3=|A|=a_1a_3-(k+a_2)(v+a_2).$$

所以 $a_2=-v$ 或 $a_2=-k$. 由引理 2.8 得 $|A|=0$, $a_3=0$. 这与 $a_3<0$ 相矛盾. 所以 $l_1+l_3\neq 0$,同理可得 $l_1+l_2\neq 0$, $l_2+l_3\neq 0$,即 $l_1l_2+l_1l_3+l_2l_3\neq 0$.

情形 1 $-v<a_3<0$

如果 $\varphi-\gamma=0$,由引理 2.7①,则 $\bar{\alpha}<0$. 而由引理 2.1 得 $\bar{\alpha}=0$,因此相互矛盾.

如果 $\varphi-\gamma>0$ 时,设 $f(x)=-x(k+x)(v+x)$ 且 $-v<x<0$,因为 $f'\left(-\frac{v}{2}\right)>0$, $f'\left(-\frac{v}{3}\right)\leqslant 0$,所以 $f(x)$ 的最大值点 x_0 满足 $-v/2<x_0\leqslant -v/3$,所以

$$-a_3(k+a_3)(v+a_3)\leqslant -x_0(k+x_0)(v+x_0)<v^2(k+x_0)/4\leqslant v^2(k-v/3)/4\leqslant n-v,$$
$$n+a_3-1+a_3(k+a_3)(v+a_3)>v+a_3-1\geqslant 0,$$
$$n+a_3-1>-a_3(k+a_3)(v+a_3)=-(a_1-a_3)l_1-(a_2-a_3)l_2+\varphi-\gamma\geqslant\varphi-\gamma$$

情形 1.1 $l_1\geqslant 1$, $l_2\geqslant 1$

① 如果 $a_1-a_3\leqslant -1$,由 $a_3(k+a_3)(v+a_3)-(a_1-a_3)l_1-(a_2-a_3)l_2+\varphi-\gamma=0$,得

$$l_1\leqslant -a_3(k+a_3)(v+a_3)<n+a_3-1.$$

所以

$$(n+a_2-(l_1+1))l_1-(\varphi-\gamma)\geqslant$$

$$(n+a_2-(l_1+1))l_1-(a_1-a_3)l_1+ a_3(k+a_3)(v+a_3)\geqslant (n+a_3-1-l_1)l_1+ a_3(k+a_3)(v+a_3)\geqslant (n+a_3-2)+a_3(k+a_3)(v+a_3)\geqslant 0.$$

由引理 2.7③,得

$$\bar{\alpha}<-(n+a_3-1)(n+a_2-(l_1+1))l_1/2+ (\varphi-\gamma+1)(\varphi-\gamma)/2\leqslant 0.$$

② 如果 $a_1-a_3=0$,得 $a_1=a_2=a_3$,$a_3(k+a_3)\cdot(v+a_3)+\varphi-\gamma=0$. 所以：

若 $l_1<n+a_3-1$ 或 $l_2<n+a_3-1$ 时,设 $s\in\{1,2\}$,由引理 2.7③或④,可得

$$\bar{\alpha}<-(n+a_3-1)(n+a_3-(l_s+1))l_s/2+ (\varphi-\gamma+1)(\varphi-\gamma)/2\leqslant 0.$$

若 $l_1\geqslant n+a_3-1$ 且 $l_2\geqslant n+a_3-1$ 时,$l_1l_2\geqslant(n+a_3-1)^2\geqslant(\varphi-\gamma+1)^2$. 由引理 2.7①,得

$$\bar{\alpha}<-(\varphi-\gamma+1)^2/2+(\varphi-\gamma)/4+ (\varphi-\gamma+1)(\varphi-\gamma)/2<0.$$

情形 1.2　若 $l_1=0,l_2\geqslant 1$,则 $\varphi=\varphi_1,\gamma=0$,所以由引理 2.7①得

$$\bar{\alpha}<-[(n+a_2+a_3-a_1)-(\varphi-\gamma+1)]\varphi_1/2\leqslant -[(n+a_2)-(a_2-a_3)+ a_3(k+a_3)(v+a_3)-1]\varphi_1/2= -[(n+a_3-1)+a_3(k+a_3)(v+a_3)]\varphi_1/2\leqslant 0.$$

情形 1.3　若 $l_2=0,l_1\geqslant 1$,则 $\varphi=\varphi_2,\gamma=0$,所以由引理 2.7①得

$$\bar{\alpha}<-[(n+a_1+a_3-a_2)-(\varphi-\gamma+1)]\varphi_2/2\leqslant -[(n+a_1)-(a_1-a_3)+ a_3(k+a_3)(v+a_3)-1]\varphi_2/2= -[(n+a_3-1)+a_3(k+a_3)(v+a_3)]\varphi_2/2\leqslant 0.$$

情形 2　当 $a_3=-v$ 时,因为 $-(a_1-a_3)l_1-(a_2-a_3)l_2+\varphi-\gamma=0$,所以 $\varphi-\gamma=0$,由此 $\bar{\alpha}<0$.

情形 3　当 $a_3=0$ 时,因为 $|A|=a_1a_2-kv\geqslant 0$,所以 $a_1a_2\neq 0$. 因为 $-a_1l_1-a_2l_2+\varphi-\gamma=0$,所以 $l_1=l_2=0$. 由引理 2.8 得

$$K(n+a_1,n+a_2,n+a_3)-A\cong K(n-k,n-v,n).$$

所以 $K(n-k,n-v,n)$是色唯一图.

参考文献(References)

[1] CHIA G L, GOH B H, KO H M. The chromaticity of some families of complete tripartite graphs [J]. Scientia, Series A, Mathematical Sciences, 1988, 2: 27-37.

[2] LIU Ruyin, ZHAO Haixing, YE Chengfu. A complete solution to a conjecture on chromatic unique of complete tripartite graphs[J]. Dis Math, 2004, 289: 175-179.

[3] 徐利民. 完全 t 部图 $K(n-k,n,\cdots,n)$的色唯一性[J]. 中国科学技术大学学报,2008, 38(9): 1 036-1 041.
XU Limin. Chromatic uniqueness of complete t-partite graphs $K(n-k,n,\cdots,n)$ [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2008, 38(9): 1 036-1 041.

[4] SU Keyi, CHEN Xiangen. A not on chromatic uniqueness of completely tripartite graphs [J]. Mathematical Research & Exposition, 2010, 30(2): 233-240.

[5] LAU G C, PENG Y H. Chromatic uniqueness of certain complete tripartite graphs [J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2011, 27(5): 919-926.

[6] CHEN X, SU K, YAO B, et al. A note on chromatic uniqueness of certain complete tripartite graphs[J]. Ars Combinatoria, 2012, 105: 205-211.

[7] 徐利民,杨志林. 完全三部图 $K(n-k,n-v,n)$的色唯一性[J]. 中国科学技术大学学报,2013,43(3): 190-196,201.
XU Limin, YANG Zhilin. Chromatic uniqueness of complete tripartite graphs $K(n-k,n-v,n)$ [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2013,43(3): 190-196,201.

[8] KOH K M, TEO K L. The search for chromatically unique graphs[J]. Graphs and Combinatorics, 1990, 6(3): 259-285.

[9] 徐利民. 完全三部图 $K(n-k,n,n)$ 的色唯一性[J]. 大学数学,2006,22(3): 78-82.
XU Limin. On the chromaticity of complete tripartite graphs $K(n-k,n,n)$[J]. College Mathematics, 2006, 22(3): 78-82.

[10] 徐利民. 特殊子图的计数[J]. 淮南职业技术学院学报, 2011,11(3): 74-77.
XU Limin. The enumeration of special subgraphs[J]. Journal of Huainan Vocational & Technical College, 2011, 11(3): 74-77.

[11] CHIA G L, HO C K. Chromatic uniqueness classes of complete tripartite graphs[J]. Discrete Math, 2009, 309(1): 134-143.