

## 适用于等几何分析退化光滑插值曲面片构造

王旭辉<sup>1</sup>, 燕明叶<sup>1</sup>, 吴梦<sup>1,2</sup>

(1. 合肥工业大学数学学院, 安徽合肥 230061; 2. 南京审计大学统计与数学学院, 江苏南京 210000)

**摘要:** 不同于经典几何造型领域构造退化光滑曲面片, 以等几何分析为背景, 构造基于等几何分析中奇异  $H^1$  正则参数化下的插值算子. 首先基于奇异参数化介绍了  $H^1$  正则性定义, 其次引入了 D-patch 和插值算子的定义, 最后验证了插值型曲面的  $G^1$  光滑性, 并给出数值算例.

**关键词:** 等几何分析; D-patch; 插值算子;  $H^1$  正则性

**中图分类号:** TP391.41      **文献标识码:** A      doi: 10.3969/j.issn.0253-2778.2020.03.011

**引用格式:** 王旭辉, 燕明叶, 吴梦. 适用于等几何分析退化光滑插值曲面片构造[J]. 中国科学技术大学学报, 2020, 50(3): 335-342.

WANG Xuhui, YAN Mingye, WU Meng. Suitable for the construction of degenerate smooth interpolated surfaces patches in isogeometric analysis [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2020, 50(3): 335-342.

## Suitable for the construction of degenerate smooth interpolated surfaces patches in isogeometric analysis

WANG Xuhui<sup>1</sup>, YAN Mingye<sup>1</sup>, WU Meng<sup>1,2</sup>

(1. School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei 230061, China;

2. School of Statistics and Mathematics, Nanjing Audit University, Nanjing 210000, China)

**Abstract:** Different from constructing the degenerate smooth surface patches in the field of classical geometric modeling, the paper constructs an interpolation operator based on the singular  $H^1$  regularity parameterization in the isogeometric analysis. First, the definition of  $H^1$  regularity is introduced based on singular parameterization. Then, the definition of D-patch and interpolation operator is discussed. Finally, the  $G^1$  smoothness of the interpolation surface is verified and numerical examples are given.

**Key words:** isogeometric analysis; D-patch; interpolation operator;  $H^1$  regularity

### 0 引言

随着先进制造产业不断发展, 在计算机辅助工程(computer aided engineering, CAE)和计算力学领域, 经常需要对产品进行物理模拟仿真分析与优化, 从数学的角度为求解偏微分方程. 最经典的是

有限元方法<sup>[1]</sup>, 该方法核心思想是“数值近似”和“离散化”, 但是在其分析过程中, 几何设计模型与分析模型分别在两个软件平台中实现, 即在计算机辅助几何系统(CAD)系统中设计, 再基于 CAD 数据在 CAE 系统中生成网格. 设计领域的几何模型和分析领域的网格模型相互独立, 模型之间的转换

收稿日期: 2019-12-05; 修回日期: 2020-01-12

基金项目: 国家自然科学基金(61772167, 11601114); 安徽省自然科学基金(1608085QA14)资助.

作者简介: 王旭辉, 男, 1980年生, 博士/教授, 研究方向: 计算几何、等几何分析. E-mail: xhw@hfut.edu.cn

通讯作者: 吴梦, 博士/副研究员. E-mail: wumeng@mail.ustc.edu.cn

耗时费力,因此实现 CAD/CAE 的无缝融合,设计与分析一体化已成为大势所趋<sup>[2]</sup>.

2005 年, Hughes 教授等<sup>[3]</sup>提出了等几何分析方法,该方法直接结合了 CAD 中的几何模型,将其中的几何信息作为有限元分析的输入信息,能够精确表示构造几何造型,实现了产品的设计和分析过程无缝集成和融合统一. 由于 NURBS 基函数可以构造任意高阶连续的近似函数,该方法以其作为基函数,通过细分 NURBS 单元,可提高基函数的次数,具有很精确的几何特性和很高的数值精度<sup>[4]</sup>,同时提高了计算效率. 等几何分析由此成为近年来几何设计与计算领域新的关注热点<sup>[5]</sup>. Bazilevs 等<sup>[6]</sup>分析了等几何分析的近似和误差估计,证明了其收敛性和稳定性等一些特征. 徐岗等<sup>[7]</sup>从面向等几何分析的几何设计与计算的角度介绍了相关研究进展. 吴紫俊等<sup>[8]</sup>提出等几何分析是一种新的物理场数值求解方法,并通过计算框架为基础详细介绍了其中样条几何模型的过程.

对于等几何分析而言,计算域的参数化与有限元分析中的网格生成一样,对原微分方程真实解的逼近函数构造以及逼近阶分析起到了至关重要的作用,因此适合分析的计算域参数化也是值得研究的问题. Cohen 等<sup>[9]</sup>发现计算域参数化不仅对求解的精度和收敛速度影响很大,同时还影响求解的总体计算时间. Xu 等<sup>[10]</sup>探讨了寻找计算域良好参数化的方法,从二维情况出发,通过求解一个约束优化问题来确定内部控制顶点的最优位置. 此外, Xu 等<sup>[11]</sup>还研究了复杂 CAD 边界情形下,适合等几何分析的 B 样条参数化. 由于高维 NURBS 函数的张量积结构,对非四边形或非六面体区域进行参数化时,通常很难避免奇异性的出现. 具体而言,参数化中奇点的存在可能是由于几何对象的固有属性或者正则参数化的扭曲引起的. 例如,如果用 NURBS 基函数的标准几何表示对球体参数化,则球体的极点处有两个奇点<sup>[12]</sup>. 如果用单片参数化表示非四边形或非六面体区域(例如圆域或球体),则奇点必然存在<sup>[13-15]</sup>. 此外,对测试函数的正则性、奇异参数化的逼近性质以及求解偏微分方程的数值收敛速度<sup>[16]</sup>等问题也有一些研究. 文献<sup>[17-19]</sup>给出了构造奇异参数域上的光滑函数,以代替在奇点附近可能存在正则性问题的测试函数. Nguyen 和 Peters<sup>[18]</sup>以及 Toshniwal 等<sup>[19]</sup>在奇异参数化域上构造了光滑样条,数值结果显示该样条可

最佳逼近具有光滑弱解的偏微分方程. Takacs<sup>[17,20]</sup>给出了等几何分析函数空间的逼近性质,并在奇异参数域上构造了光滑等几何函数空间. Wu 等<sup>[21]</sup>在矩阵网格上定义了一个有特殊点的复杂拓扑结构的样条,该样条是具有  $C^1$  参数连续性的多项式函数,分析了在等几何框架下物理域上偏微分方程的解法问题. Jeong 和 Oh 等<sup>[22-23]</sup>提出了能生成裂纹奇点的 NURBS 几何映射,该映射可以应用在等几何分析中的椭圆边值问题中. Wu 等<sup>[24]</sup>提出了一个适用于复杂平面物理域的  $H^1$  参数化方法,通过重新参数化算法,生成了一个全局一致的单射  $H^1$  参数化. 除此之外,奇异出现在很多具体的研究问题中,例如对于具有光滑弱解和非光滑弱解的椭圆边值问题以及高效解决弹性力学中的奇异问题<sup>[22-23]</sup>等.

本文通过构造等几何分析中奇异  $H^1$  正则参数化下的插值算子,引入光滑函数,理论证明插值曲面的光滑性并给出算例.

## 1 背景知识及问题定义

本文将引用 D-patch 的相关结果,推广到等几何分析奇异参数化工作中,下面先介绍等几何分析中相关的背景知识. 1.1 节先介绍了参数化、奇点以及  $H^1$  正则性的定义,1.2 节给出了定义代数张量积 B 样条曲线曲面,1.3 节介绍了假设条件的内容.

### 1.1 参数化和奇点以及 $H^1$ 正则性

**定义 1.1**<sup>[25]</sup> 假设讨论的物理域  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega$  是开域且有界的,且其具有 Lipschitz 边界,  $\Omega$  的参数化是指从参数域  $\Sigma = [0,1]^2$  到区域  $\Omega$  的一个映射  $\zeta(s,t)$ , 即

$$\zeta: \Sigma \rightarrow \Omega$$

$$(s,t) \mapsto (x(s,t), y(s,t))^T \quad (1)$$

$\zeta$  的雅可比矩阵

$$J(s,t) = \begin{pmatrix} \partial_s x(s,t) & \partial_s y(s,t) \\ \partial_t x(s,t) & \partial_t y(s,t) \end{pmatrix}^T \quad (2)$$

由雅可比矩阵(2),  $\zeta$  的第一基本形式为

$$G_\zeta(s,t) = J^T(s,t)J(s,t) = \begin{pmatrix} \partial_s \zeta \cdot \partial_s \zeta & \partial_s \zeta \cdot \partial_t \zeta \\ \partial_t \zeta \cdot \partial_s \zeta & \partial_t \zeta \cdot \partial_t \zeta \end{pmatrix},$$

若点  $(s_0, t_0) \in \Sigma$  满足  $\det G_\zeta(s_0, t_0) = 0$ , 则称点  $(s_0, t_0)$  为  $\zeta(s,t)$  的奇点.

不失一般性,本文把  $(s,t) = (0,0)$  设置为参数

化的奇点, 如  $\frac{\partial x}{\partial s}(0,0) = 0, \frac{\partial y}{\partial s}(0,0) = 0, \frac{\partial x}{\partial t}(0,0) = 0, \frac{\partial y}{\partial t}(0,0) = 0$  时,  $\zeta(s,t)$  在点  $(0,0)$  处是奇异的.

**定义 1.2**<sup>[26]</sup> 给定区域  $\Omega \subset \mathbb{R}^2, f(s,t) \in H^1(\Omega)$  当且仅当  $f$  有一个有限的  $L^2(\Omega)$  范数和一个有限的  $H^1(\Omega)$  半范数, 即

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} f^2 d\Omega\right)^{1/2} < \infty,$$

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \|\nabla_{\Omega} f\|^2 d\Omega\right)^{1/2} < \infty.$$

其中,  $\nabla$  为梯度算子, 如果  $f \in H^1(\Omega)$ , 则称  $f$  满足  $H^1$  正则性.

### 1.2 代数张量积 B 样条曲线曲面<sup>[27]</sup>

**定义 1.3**(B 样条基函数及 B 样条曲线) 令节点向量  $T_1$  是一个非递减的实数序列, 记为

$$T_1 = (s_0, s_1, \dots, s_{m+p+1}).$$

根据 Cox-de Boor 递推公式, 第  $i$  个次数为  $p$  (阶为  $p+1$ ) 的 B 样条基函数的递推定义如下

$$B_{i,0}(s) = \begin{cases} 1, & s_i \leq s < s_{i+1} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$B_{i,p}(s) = \frac{s - s_i}{s_{i+p} - s_i} B_{i,p-1}(s) + \frac{s_{i+p+1} - s}{s_{i+p+1} - s_{i+1}} B_{i+1,p-1}(s),$$

$$p \geq 1, i = 0, 1, 2, \dots, m.$$

B 样条曲线定义为

$$P(s) = \sum_{i=0}^m P_i B_{i,p}(s), s \in [s_p, s_{m+1}].$$

其中,  $P_i$  为曲线的控制顶点.

**定义 1.4**(代数张量积 B 样条函数) 令两方向上节点序列分别为  $T_1 = \{s_i\}_{i=0}^{m+p_1+1}$  和  $T_2 = \{t_j\}_{j=0}^{n+p_2+1}$ ,  $\{B_{i,p_1}(s)\}_{i=0}^m$  和  $\{B_{j,p_2}(t)\}_{j=0}^n$  分别是定义在  $T_1$  与  $T_2$  上的次数为  $p_1$  和  $p_2$  的 B 样条基函数, 令 B 样条函数的控制顶点为

$P_{ij} \in \mathbb{R}^2 (i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n; d \geq 2)$ , 则次数为  $(p_1, p_2)$  为张量积 B 样条函数定义为

$$P(s,t) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_{i,p_1}(s) B_{j,p_2}(t).$$

### 1.3 假设条件

由于控制网格存在不同的构造, 会导致不同的奇异参数化域. 本文讨论退化指标集是矩形时的情况, 该指标集中所有的控制点退化为一个点. 控制点上的这个假设条件会导致在点  $(0,0)$  处的参数化

是奇异的, 在其他任何地方都是正则的. 下面给出假设条件内容.

**定义 1.5**<sup>[28]</sup> 给定次数  $(p_1, p_2)$  的张量积 B 样条函数  $P(s,t)$ , 指标集  $D_{(\alpha_1, \alpha_2)}$  为  $D_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \{(i,j) | 0 \leq i \leq \alpha_1 - 1, 0 \leq j \leq \alpha_2 - 1\}$ . 其中,  $1 \leq \alpha_1 \leq p_1, 1 \leq \alpha_2 \leq p_2$ . 若 B 样条函数  $P(s,t)$  的控制顶点满足

(I) 当  $(i,j) \in D_{(\alpha_1, \alpha_2)}, P_{ij} = O$ , 其中  $O = (0,0)^T$ .

(II) 下列控制顶点构成的三角形

$$\Delta_{11} = \Delta(O, P_{\alpha_1 0}, P_{\alpha_1 1}),$$

$$\Delta_{12} = \Delta(O, P_{\alpha_1 0}, P_{0 \alpha_2}),$$

$$\Delta_{13} = \Delta(O, P_{0 \alpha_2}, P_{1 \alpha_2}),$$

均非退化.

下面给出一个符合假设条件(定义 1.5)的一个具体示例.

**例 1.1** 设 B 样条函数次数为  $(p_1, p_2) = (3, 3)$ ,  $(\alpha_1, \alpha_2) = (2, 2)$ , 其控制顶点构成的三角形网格如图 1 所示.

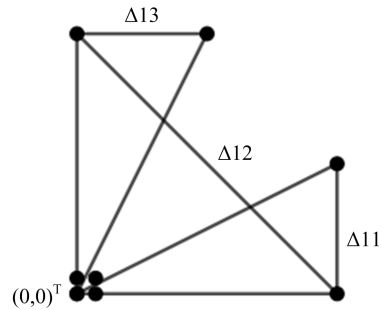


图 1 三角形  $\Delta_{11}, \dots, \Delta_{13}$

Fig. 1 Triangles  $\Delta_{11}, \dots, \Delta_{13}$

此外, 由文献[28]知, 如果参数化  $P(s,t)$  满足该假设条件, 则由该参数化诱导出来的测试函数  $\phi_i = \varphi_i \circ P^{-1}$  是  $H^1$  正则的, 其中  $\varphi_i(s,t)$  为定义在节点序列上的张量积 B 样条基函数.

## 2 单片奇异参数化下的插值曲面光滑性

### 2.1 D-patch 定义

**定义 2.1**(D-patch<sup>[29]</sup>) 给定一个解析曲面片  $H(s,t)$ , 其定义为

$$H(s,t) = \sum_{p,q=0}^{\infty} A_{pq} s^p t^q \in \mathbb{R}^3.$$

若  $A_{10} = A_{01} = A_{11} = 0$ , 则称该曲面片是退化的. 此外, 如果存在常数  $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$  和  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$ , 使

得  $\begin{pmatrix} A_{21} \\ A_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{20} \\ A_{02} \end{pmatrix}$ , 则称该退化曲面片  $H(s, t)$  为一个 D-patch. 如果  $A_{20}$  和  $A_{02}$  是线性无关的, 则称该 D-patch 是一般的.

**引理 2.1**<sup>[29]</sup> 给定一个一般的 D-patch  $X$ ,  $X$  在  $A_{00}$  处是正则的; 即,  $X$  在  $A_{00}$  附近存在一个局部正则光滑参数化表示. 此外,  $X$  过  $A_{00}$  的切平面是由  $A_{20}$  和  $A_{02}$  张成的.

## 2.2 插值算子定义

由上节可知, D-patches 可以用来生成光滑曲面. 为了得到曲面的奇异参数化近似表示, 并使其满足一定的连续性要求, 本节在讨论单片奇异参数化下的插值曲面光滑性之前, 先介绍插值算子的定义, 然后通过一般 D-patch 定义构造插值曲面, 理论证明插值曲面的  $G^1$  光滑性.

设  $S(s, t) = (x(s, t), y(s, t), f(s, t))^T$  对  $F(x, y)$  的插值, 其中  $P(s, t) = (x(s, t), y(s, t))^T$  为物理域的一个参数化.  $f(s, t)$  满足  $f(0, 0) = F(p)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) &= \frac{\partial F}{\partial x}(p) \times \frac{\partial x}{\partial s}(0, 0) + \\ &\quad \frac{\partial F}{\partial y}(p) \times \frac{\partial y}{\partial s}(0, 0), \\ \frac{\partial f}{\partial t}(0, 0) &= \frac{\partial F}{\partial x}(p) \times \frac{\partial x}{\partial t}(0, 0) + \\ &\quad \frac{\partial F}{\partial y}(p) \times \frac{\partial y}{\partial t}(0, 0), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(0, 0) &= \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial s^2} \Big|_{(0,0)} = \\ &\quad \frac{\partial F}{\partial x}(p) \times \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}(0, 0) + \frac{\partial F}{\partial y}(p) \times \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}(0, 0), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(0, 0) &= \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial t^2} \Big|_{(0,0)} = \\ &\quad \frac{\partial F}{\partial x}(p) \times \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(0, 0) + \frac{\partial F}{\partial y}(p) \times \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(0, 0), \\ \frac{\partial^3 f}{\partial s^2 \partial t}(0, 0) &= \frac{\partial^3 F(x, y)}{\partial s^2 \partial t} \Big|_{(0,0)} = \\ &\quad \frac{\partial F}{\partial x}(p) \times \frac{\partial^3 x}{\partial s^2 \partial t}(0, 0) + \frac{\partial F}{\partial y}(p) \times \frac{\partial^3 y}{\partial s^2 \partial t}(0, 0), \\ \frac{\partial^3 f}{\partial s \partial t^2}(0, 0) &= \frac{\partial^3 F(x, y)}{\partial s \partial t^2} \Big|_{(0,0)} = \\ &\quad \frac{\partial F}{\partial x}(p) \times \frac{\partial^3 x}{\partial s \partial t^2}(0, 0) + \frac{\partial F}{\partial y}(p) \times \frac{\partial^3 y}{\partial s \partial t^2}(0, 0). \end{aligned}$$

其中,  $p = (x(0, 0), y(0, 0))$ .

## 2.3 插值型曲面的 $G^1$ 光滑性

在插值算子定义的基础上, 下面讨论当物理域参数化满足假设条件时插值型曲面的  $G^1$  光滑性, 进而得出  $S(s, t)$  为一一般的 D-patch.

**定理 2.1** 设  $F(x, y) \in C^2(\Omega)$ , 令  $P(s, t) = (x(s, t), y(s, t))$  是  $\Omega$  的一个参数化, 即

$$P: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega.$$

其中,  $\partial_s P(0, 0) = 0$ ,  $\partial_t P(0, 0) = 0$ , 且  $P(s, t)$  在  $(0, 0)$  处满足定义 1.5 中假设条件. 定义一个满足 2.2 节要求的插值曲面  $S(s, t) = (x(s, t), y(s, t), f(s, t))^T$ , 则  $S(s, t)$  是一个一般的 D-patch. 此外,  $S(s, t)$  在  $(0, 0)$  处的法向与  $(x, y, F(x, y))$  在  $p$  处的法向平行. 即,  $S(s, t)$  在  $(0, 0)$  处满足  $G^1$  条件.

**证明** 首先考虑  $S(s, t) = (x(s, t), y(s, t), f(s, t))^T$  在  $(0, 0)$  处的光滑性.

由 D-patch 定义可知  $\frac{\partial x}{\partial s}(0, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial y}{\partial s}(0, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial x}{\partial t}(0, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial y}{\partial t}(0, 0) = 0$ . 下面求  $\frac{\partial S}{\partial s}(0, 0)$  和  $\frac{\partial S}{\partial t}(0, 0)$  的值.

$$\frac{\partial S}{\partial s}(0, 0) = \left( \frac{\partial x}{\partial s}(0, 0), \frac{\partial y}{\partial s}(0, 0), \frac{\partial F}{\partial x}(p) \frac{\partial x}{\partial s}(0, 0) + \frac{\partial F}{\partial y}(p) \frac{\partial y}{\partial s}(0, 0) \right)^T = 0.$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}(0, 0) = \left( \frac{\partial x}{\partial t}(0, 0), \frac{\partial y}{\partial t}(0, 0), \frac{\partial F}{\partial x}(p) \frac{\partial x}{\partial t}(0, 0) + \frac{\partial F}{\partial y}(p) \frac{\partial y}{\partial t}(0, 0) \right)^T = 0.$$

所以由 D-patch 定义可知, 曲面  $S(s, t)$  是退化曲面片.

再考虑  $\frac{\partial^3 S}{\partial s^2 \partial t} \Big|_{(0,0)}$ ,  $\frac{\partial^3 S}{\partial s \partial t^2} \Big|_{(0,0)}$  与  $\frac{\partial^2 S}{\partial s^2}(0, 0)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}(0, 0) \text{ 之间的关系, 进而来证明该参数化满足} \\ \text{一般的 D-patch. 由 2.2 节中插值算子定义可得} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial s^2}(0, 0) &= \left( \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}(0, 0), \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}(0, 0), \frac{\partial F}{\partial x}(p) \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}(0, 0) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial F}{\partial y}(p) \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}(0, 0) \right)^T = \\ &\quad \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}(0, 0) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(p) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(p) \end{pmatrix}^T + \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}(0, 0) \times \\ &\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(p) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(p) \end{pmatrix}^T. \end{aligned}$$

同理,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}(0,0) = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(0,0) \times \left(1 \quad 0 \quad \frac{\partial F}{\partial x}(p)\right)^T + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(0,0) \times \left(0 \quad 1 \quad \frac{\partial F}{\partial y}(p)\right)^T.$$

记

$$\sigma_1 = \left(1 \quad 0 \quad \frac{\partial F}{\partial x}(p)\right)^T, \sigma_2 = \left(0 \quad 1 \quad \frac{\partial F}{\partial y}(p)\right)^T,$$

则

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial s^2}(0,0) \\ \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}(0,0) & \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}(0,0) \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(0,0) & \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}.$$

即

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}(0,0) & \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}(0,0) \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(0,0) & \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(0,0) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial s^2}(0,0) \\ \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}(0,0) \end{pmatrix}.$$

又,

$$\frac{\partial^3 S}{\partial s^2 \partial t}(0,0) = \frac{\partial^3 x}{\partial s^2 \partial t}(0,0)\sigma_1 + \frac{\partial^3 y}{\partial s^2 \partial t}(0,0)\sigma_2,$$

$$\frac{\partial^3 S}{\partial s \partial t^2}(0,0) = \frac{\partial^3 x}{\partial s \partial t^2}(0,0)\sigma_1 + \frac{\partial^3 y}{\partial s \partial t^2}(0,0)\sigma_2,$$

故,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^3 S}{\partial s^2 \partial t}(0,0) \\ \frac{\partial^3 S}{\partial s \partial t^2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial s^2}(0,0) \\ \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}(0,0) \end{pmatrix}.$$

其中,

$$\alpha = \begin{vmatrix} \frac{\partial^3 x}{\partial s^2 \partial t} & \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^3 y}{\partial s^2 \partial t} & \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{vmatrix}^{-1},$$

$$\beta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} & \frac{\partial^3 x}{\partial s^2 \partial t} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} & \frac{\partial^3 y}{\partial s^2 \partial t} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{vmatrix}^{-1},$$

$$\gamma = \begin{vmatrix} \frac{\partial^3 x}{\partial s \partial t^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^3 y}{\partial s \partial t^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{vmatrix}^{-1},$$

$$\delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} & \frac{\partial^3 x}{\partial s \partial t^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} & \frac{\partial^3 y}{\partial s \partial t^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{vmatrix}^{-1}.$$

将  $P(s, t)$  表示成 B 样条函数形式, 即

$$P(s, t) = \sum_{i,j=0}^n P_{i,j} B_{i,p_1}(s) B_{j,p_2}(t),$$

$$\partial_s^2 P(0,0) = \frac{6}{h_1^2} (P_{20} - P_{10}),$$

$$\partial_t^2 P(0,0) = \frac{6}{h_2^2} (P_{02} - P_{01}),$$

$$\partial_{s^2 t} P(0,0) = \frac{18}{h_1^2 h_2} (P_{21} - P_{20}),$$

$$\partial_{s t^2} P(0,0) = \frac{18}{h_1 h_2^2} (P_{12} - P_{02}),$$

$h_1, h_2$  为定义 B 样条的节点间距. 由 B 样条函数的求导公式可知,  $\partial_s^2 P \times \partial_t^2 P$  的方向向上,  $\partial_s^2 P \times \partial_{s^2 t} P$  的方向向上,  $\partial_{s t^2} P \times \partial_t^2 P$  的方向向上, 如图 2 所示.

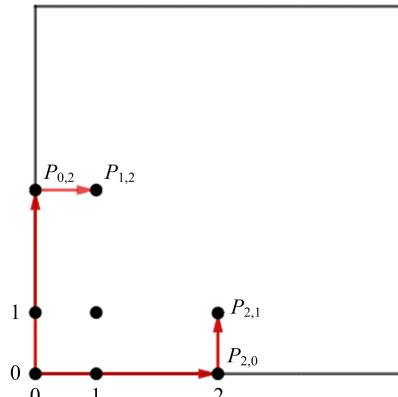


图 2  $P(s, t)$  在  $(0, 0)$  处的假设条件

Fig. 2 Assumptions of  $P(s, t)$  at  $(0, 0)$

由于  $P(s, t)$  在  $(0, 0)$  处满足假设条件, 如图 2 所示.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial^3 x}{\partial s^2 \partial t} & \frac{\partial^3 y}{\partial s^2 \partial t} \end{pmatrix}$$

与

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{pmatrix}$$

同向,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^3 x}{\partial s \partial t^2} & \frac{\partial^3 y}{\partial s \partial t^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{pmatrix}$$

与

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{pmatrix}$$

同向,

故  $\beta, \gamma > 0$ , 即得  $S(s, t)$  为一个一般的 D-patch. 此外, 由引理 2.1 知  $S(s, t)$  在  $(0, 0)$  处切平面由  $\partial_s^2 S, \partial_t^2 S$  张成. 故  $S(s, t)$  在  $(0, 0)$  处的法

向为

$$\partial_{s^2} S \times \partial_{t^2} S = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}(0,0) & \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}(0,0) \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(0,0) & \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(0,0) \end{pmatrix} (\sigma_1 \times \sigma_2),$$

与曲面  $(x, y, F(x, y))$  在  $p$  处的法向平行, 故  $S(s, t)$  在  $(0, 0)$  处满足  $G^1$  条件.

### 3 光滑退化曲面例子

基于以上定义, 给定 3 个数值算例.

**例 3.1** 考虑插值函数  $F_1(x, y) = x + \sin(y^2)$ , 对于给定的 4 个角点

$$P_1(4, 2), P_2(5, 6),$$

$$P_4 \left( 7\cos \frac{2\pi}{3} - 3\sin \frac{2\pi}{3}, 7\sin \frac{2\pi}{3} + 3\cos \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$P_3 = P_2 + P_4;$$

得到了一个在  $P_1$  (即参数域  $(0, 0)$ ) 处退化的光滑插值曲面 (如图 3 所示). 图 3 中的颜色 (深度) 映射代表的是该插值曲面在  $z$  方向的函数值, 可见在  $P_1$  处由于退化导致等参网格线分布较密.

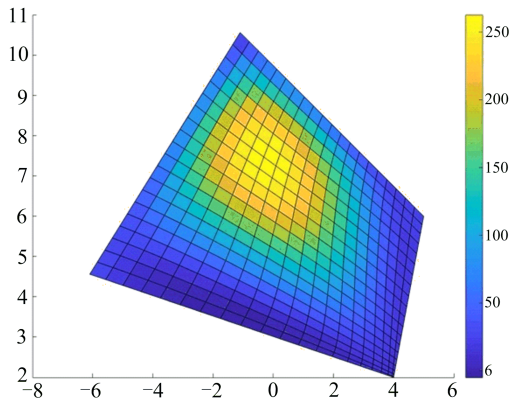


图 3 对函数  $F_1(x, y)$  的插值曲面

Fig. 3 Interpolation surface for function  $F_1(x, y)$

为了考察曲面在退化点处的  $G^1$  光滑性, 我们计算

$$\rho(x, y) = \sin^2(\angle n_{F_1}, n(x, y)).$$

其中,  $n(x, y)$  为插值曲面在  $(x, y, F_1(x, y))$  的法向,  $P(x, y)$  为  $P_1$  的一个邻域中的点,  $n_{F_1}$  为  $F_1(x, y)$  在  $P_1$  处的法向.  $\rho(x, y)$  如图 4 所示, 其中颜色 (深度) 映射代表  $\rho(x, y)$  的函数值. 由图 4 可见,  $\rho(x, y)$  连续且当  $(x, y)$  趋于  $P_1$  时  $n(x, y)$  与常法向  $n_{F_1}$  趋于平行. 即插值曲面在  $P_1$  处为  $G^1$  的且  $P_1$  处的法向与  $(x, y, F_1(x, y))$  在  $P_1$  处的法向平行.

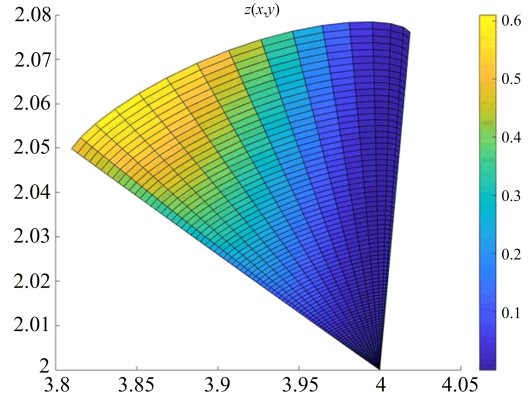


图 4 例 3.1 中的  $\rho(x, y)$

Fig. 4  $\rho(x, y)$  of Case 3.1

**例 3.2** 考虑被插值函数  $F_2(x, y) = x^2 + \cos(x^2) + \sin(y)$ , 对于给定的 4 个角点

$$P_1(2, 3), P_2(6, 5),$$

$$P_4 \left( 5\cos \frac{2\pi}{3} - 2\sin \frac{2\pi}{3}, 5\sin \frac{2\pi}{3} + 2\cos \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$P_3 = P_2 + P_4;$$

得到了一个在  $P_1$  (即参数域  $(0, 0)$ ) 处退化的光滑插值曲面 (如图 5 所示). 图 5 中的颜色 (深度) 映射代表的是该插值曲面在  $z$  方向的函数值, 可见在  $P_1$  处由于退化导致等参网格线分布较密.

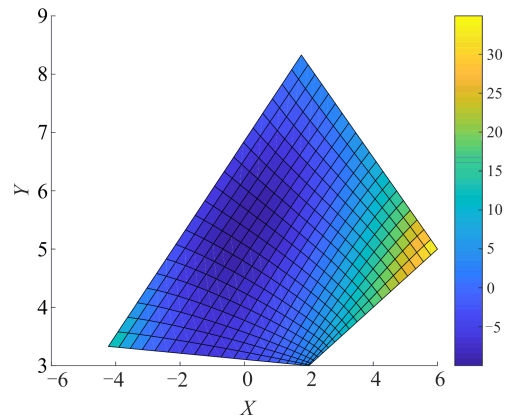


图 5 对函数  $F_2(x, y)$  的插值曲面

Fig. 5 Interpolation surface for function  $F_2(x, y)$

为了考察曲面在退化点处的  $G^1$  光滑性, 我们计算

$$\rho(x, y) = \sin^2(\angle n_{F_2}, n(x, y)).$$

其中,  $n(x, y)$  为插值曲面在  $(x, y, F_2(x, y))$  的法向,  $P(x, y)$  为  $P_1$  的一个邻域中的点,  $n_{F_2}$  为  $F_2(x, y)$  在  $P_1$  处的法向.  $\rho(x, y)$  如图 6 所示, 其中颜色映射代表  $\rho(x, y)$  的函数值. 由该图可见,  $\rho(x, y)$  连续且当  $(x, y)$  趋于  $P_1$  时  $n(x, y)$  与常法

向  $n_{F_2}$  趋于平行. 即插值曲面在  $P_1$  处为  $G^1$  的且  $P_1$  处的法向与  $(x, y, F_2(x, y))$  在  $P_1$  处的法向平行.

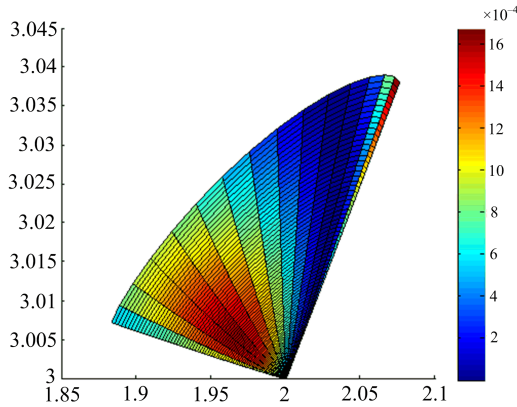


图 6 例 3.2 中的  $\rho(x, y)$

Fig. 6  $\rho(x, y)$  of Case 3.2

例 3.3 考虑被插值函数  $F_3(x, y) = e^{\sin\langle y \rangle} \cdot \cos(x)$ , 对于给定的 4 个角点

$$P_1(0, 2), P_2(1, 7),$$

$$P_4\left(4\cos\frac{2\pi}{3} - 2\sin\frac{2\pi}{3}, 4\sin\frac{2\pi}{3} + 2\cos\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$P_3 = P_2 + P_4;$$

得到了一个在  $P_1$  (即参数域  $(0, 0)$ ) 处退化的光滑插值曲面 (如图 7 所示). 图 7 中的颜色 (深度) 映射代表的是该插值曲面在  $z$  方向的函数值, 可见在  $P_1$  处由于退化导致等参网格线分布较密.

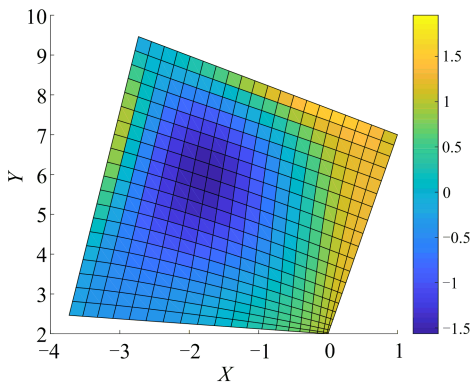


图 7 对函数  $F_3(x, y)$  的插值曲面

Fig. 7 Interpolation surface for function  $F_3(x, y)$

为了考察曲面在退化点处的  $G^1$  光滑性, 我们计算

$$\rho(x, y) = \sin^2(\angle n_{F_3}, n(x, y)),$$

其中,  $n(x, y)$  为插值曲面在  $(x, y, F_3(x, y))$  的法向,  $P(x, y)$  为  $P_1$  的一个邻域中的点,  $n_{F_3}$  为  $F_3(x, y)$  在  $P_1$  处的法向.  $\rho(x, y)$  如图 8 所示, 其中颜色 (深度) 映射代表  $\rho(x, y)$  的函数值. 由图 8

可见,  $\rho(x, y)$  连续且当  $(x, y)$  趋于  $P_1$  时  $n(x, y)$  与常法向  $n_{F_3}$  趋于平行. 即插值曲面在  $P_1$  处为  $G^1$  的且  $P_1$  处的法向与  $(x, y, F_3(x, y))$  在  $P_1$  处的法向平行.

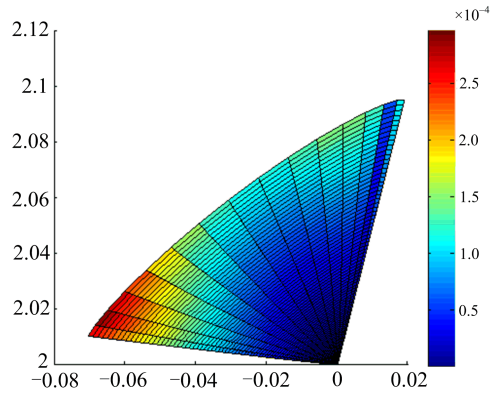


图 8 例 3.3 中的  $\rho(x, y)$

Fig. 8  $\rho(x, y)$  of Case 3.3

### 4 结论

本文讨论了在等几何分析中满足  $H^1$  正则性条件的奇异参数化的背景下构造光滑插值曲面的过程. 首先基于奇异参数化构造插值算子, 再给定一个光滑函数, 理论证明该插值曲面的光滑性. 随着等几何分析的不断发 展, 未来多片奇异参数化的插值曲面的光滑性还可以进一步研究. 此外, 如何将相关工作推广到三维参数体情形, 并应用到等几何分析理论中也是需要研究的问题.

#### 参考文献 (References)

[ 1 ] CRISFIELD MA. Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Advanced Topics [ M ]. London: John Wiley & Sons, Inc. 1997.

[ 2 ] 高曙明, 何发智. 异构 CAD 系统集成技术综述 [ J ]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2009, 21(5): 561-568. GAO S M, HE F Z. A survey of heterogeneous CAD system integration [ J ]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2009, 21(5): 561-568.

[ 3 ] HUGHES T J R, COTTRELL J A, BAZILEVS Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement [ J ]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(39-41): 4135-4195.

[ 4 ] 张汉杰, 王东东, 轩军厂. 薄梁板结构 NURBS 几何精确有限元分析 [ J ]. 力学季刊, 2010, 31(4): 469-477. ZHANG H J, WANG D D, XUAN J C. Non-uniform rational B spline-based isogeometric finite element analysis of thin beams and plates [ J ]. Chinese

- Quarterly of Mechanics, 2010, 31(4): 469-477.
- [5] 许华强. 面向等几何分析的样条参数体生成方法研究[D]. 杭州: 杭州电子科技大学, 2012.
- [6] BAZILEVS Y, BEIRAO D V L, COTTRELL J A, et al. Isogeometric analysis: Approximation, stability and error estimates for  $h$ -refined meshes [J]. Mathematical Models and Methods in Applied Science, 2006, 16(7): 1031-1090.
- [7] 徐岗, 李新, 黄章进, 等. 面向等几何分析的几何计算[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2015, 27(4): 570-581.  
XU G, LI X, HUANG Z J, et al. Geometric computing for isogeometric analysis [J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2015, 27(4): 570-581.
- [8] 吴紫俊, 黄正东, 左兵权, 等. 等几何分析研究概述[J]. 机械工程学报, 2015, 51(5): 114-129.  
WU Z J, HUANG Z D, ZUO B Q, et al. Perspectives on isogeometric analysis [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(5): 114-129.
- [9] COHEN E, MARTIN T, KIRBY R M, et al. Analysis-aware modeling: Understanding quality considerations in modeling for isogeometric analysis [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2010, 199(5-8): 334-356.
- [10] XU G, MOURRAIN B, RÉGIS D, et al. Parameterization of computational domain in isogeometric analysis: Methods and comparison [J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 2011, 200(23-24): 2021-2031.
- [11] XU G, LI M, MOURRAIN B, et al. Constructing IGA-suitable planar parameterization from complex CAD boundary by domain partition and global/local optimization [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 328: 175-200.
- [12] DEDÈ L, QUARTERONI A. Isogeometric analysis for second order partial differential equations on surfaces [J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 2015, 284: 807-834.
- [13] LU J. Circular element: Isogeometric elements of smooth boundary [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009, 198 (30-32): 2391-2402.
- [14] MARTIN T, COHEN E, KIRBY R M. Volumetric parameterization and trivariate B-spline fitting using harmonic functions [J]. Computer Aided Geometric Design, 2009, 26: 648-664.
- [15] WANG D, XUAN J. An improved NURBS-based isogeometric analysis with enhanced treatment of essential boundary conditions [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2010, 199(37-40): 2425-2436.
- [16] WU M, WANG Y, MOURRAIN B, et al. Convergence rates for solving elliptic boundary value problems with singular parameterizations in isogeometric analysis [J]. Computer Aided Geometric Design, 2017, 52-53: 170-189.
- [17] TAKACS T. Construction of smooth isogeometric function spaces on singularly parameterized domains [J]. Curves and Surfaces, 2014, 9213: 433-451.
- [18] NGUYEN T, PETERS J. Refinable  $C^1$  spline elements for irregular quad layout [J]. Computer Aided Geometric Design, 2016, 43: 123-130.
- [19] TOSHNIWAL D, SPELEERS H, Hiemstra R. R, et al. Multi-degree smooth polar splines: A framework for geometric modeling and isogeometric analysis [J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 2017, 316: 1005-1061.
- [20] TAKACS T. Approximation properties of isogeometric function spaces on singularly parameterized domains [J]. Mathematics, 2015; arXiv:1507.08095v1.
- [21] WU M, MOURRAIN B, GALLIGO A, et al. Hermite type spline spaces over rectangular meshes with complex topological structures [J]. Communications in Computational Physics, 2017, 21(03): 835-866.
- [22] JEONG J W, OH H S, KANG S, et al. Mapping techniques for isogeometric analysis of elliptic boundary value problems containing singularities [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2013, 254: 334-352.
- [23] OH HS, KIM H, JEONG J W. Enriched isogeometric analysis of elliptic boundary value problems in domains with cracks and/or corners [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2014, 97(3): 149-180.
- [24] WU M, MOURRAIN B, GALLIGO A, et al.  $H^1$ -parameterizations of complex planar physical domains in isogeometric analysis [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2017, 318: 296-318.
- [25] WU M, WANG X H. A  $H^1$ -integrability condition of surfaces with singular parametrizations in isogeometric analysis [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018, 332: 136-156.
- [26] HEBEY E. Sobolev Spaces on Riemannian Manifolds [M]. Berlin: Springer, 1996: 1635.
- [27] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2013: 217-258.
- [28] TAKACS T, JÜTTLER B. Existence of stiffness matrix integrals for singularly parameterized domains in isogeometric analysis [J]. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering, 2011, 200(49-52): 3568-3582.
- [29] REIF U. A refineable space of smooth spline surfaces of arbitrary topological genus [J]. Journal of Approximation Theory, 1997, 90(2): 174-199.